

B.Sc. Szakdolgozat

---

RUNGE-KUTTA MÓDSZEREK  
RENDFELTÉTELEIRŐL

*Szerző*

Csordás Tamás  
Elemző szakirány  
Matematika B.Sc.

*Témavezető*

Fekete Imre  
Tudományos munkatárs  
ELTE & MTA-ELTE NUMNET



Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék  
Eötvös Loránd Tudományegyetem

---

Budapest  
2017

# Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni témavezetőmnek, Fekete Imrének lelkiismeretes munkáját, végtelen türelmét és szakértelmét, amellyel végig segítette munkámat dolgozatom elkészítésében.

Valamint szeretném megköszönni családomnak és barátnőmnek a több éves türelmüket és támogatásukat, biztatásuk sokat jelentett.

---

# Tartalomjegyzék

---

<b>Tartalomjegyzék</b>	<b>ii</b>
<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Alapfogalmak és a legelső numerikus módszer</b>	<b>3</b>
2.1. Euler módszere . . . . .	3
2.2. Általános egylépéses módszerek . . . . .	5
<b>3. Runge-Kutta módszerek rendfeltételei: az Albrecht megközelítés</b>	<b>8</b>
3.1. Első felírási mód . . . . .	10
3.2. Második felírási mód . . . . .	12
3.3. Rendfeltételek . . . . .	13
3.3.1. A $p$ -edrendűség szükséges feltétele . . . . .	13
3.3.2. Érdekességek . . . . .	16
<b>4. Runge-Kutta módszerek rendfeltételei: a Butcher-fa megközelítés</b>	<b>17</b>
4.1. Összehasonlítás . . . . .	21
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>22</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

Számos természetben megjelenő jelenséget, gazdaságban és mérnöki világban előforduló folyamatot parciális differenciálegyenletek segítségével modellezhetünk. Az egyenletek pontos (analitikus) megoldása általában nem adható meg, ezért megoldására numerikus módszereket dolgozunk ki. Az egyenletek megoldását általában az ún. egyenesek módszerével közelítjük. Első lépésként térben diszkretizáljuk a feladatot. A térbeli diszkretizáció után az időben egy közönséges differenciálegyenlet rendszert nyerünk. Majd második lépésként erre alkalmazunk megfelelő numerikus módszert.

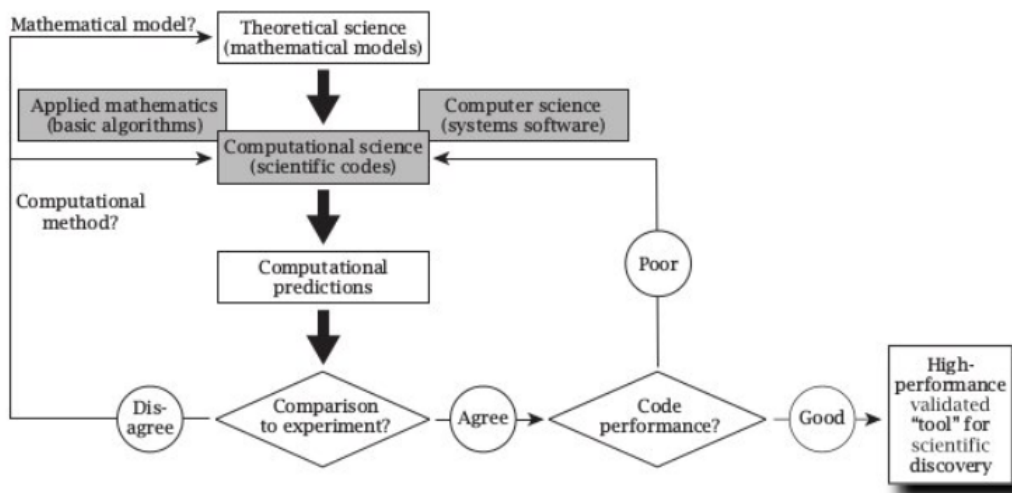
A dolgozat a közönséges differenciálegyenletek egy speciális alosztályát, az ún. kezdetiérték feladatokat tekinti. Fontos szempont, hogy a numerikus módszer által adott megoldássorozat tartson az eredeti feladat megoldásához. Ennek egyik fontos minőségi (kvalitatív) tulajdonsága az, hogy a numerikus megoldások sorozata milyen gyorsan tart az eredeti feladat megoldásához. Célunk ennek a minőségi tulajdonságnak a szisztematikus vizsgálata az ún. Runge–Kutta módszerek esetén.

Önmagában a modellezés egy komplex procedúra, melynek három fő lépése van.

- ◇ Jelenség/folyamat felírása matematikai/fizikai modell segítségével
- ◇ A numerikus modell megalkotása
- ◇ Implementálás és ahhoz kapcsolódó kérdések

A teljes és komplex modellezési folyamatot a lenti sematikus [1.1](#) ábrán érzékeltetjük.

A dolgozat elsősorban a matematikai modell (*mathematical models*) osztályából a numerikus modell (*scientific codes*) osztályába történő átlépésre és ott egy elméleti fogalom szisztematikus vizsgálatára fókuszál. Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy ez a teljes folyamat egy lépésének egy eleme. Ugyanakkor ez is hozzájárul ahhoz, hogy a numerikus modell alapján implementált módszerünket összevessük tényleges kísérleti eredményekkel vagy más implementált eredményekkel. Ha az eredmények a várakozásainknak megfelelőek, akkor foglalkozhatunk az implementálás minőségével. Ez a gyakorlatban szuperszámítógépekre alkalmas HPC (*High Performance Computing*) implementálást jelent.



1.1. ábra. A teljes modellezés sematikus ábrája

A dolgozat 2. fejezetében rekonstruáljuk Euler legelső numerikus módszerét, majd a [6] könyv 3.1.6. fejezetét követve bevezetjük a numerikus analízis alapfogalmait. A fejezet legvégén általános egylépéses módszer konvergenciájára vonatkozó tételt mondunk ki, mely a 3. és 4. fejezeteket motiválja.

A 3. fejezet első két alfejezete a Runge–Kutta típusú módszerek lehetséges felírásairól szólnak. Ezek megértését példák szemléltetik. A fejezet harmadik alfejezete  $p$ -edrendűség szükséges feltételét adja meg. Irodalmi kitekintést adunk Albrecht cikkei nyomán a szükséges és elégséges feltételek eléréséhez. Innen ered a fejezet címe is. A fejezet rendfeltételekre vonatkozó érdekességekkel zárul. A fejezet váza a [6] könyv 4.2.1. fejezetét követi.

A 4. fejezet egy másik, a nyugat-európai szakirodalomban elterjedt megközelítés lényegét ismerteti. Célunk ezen rendfeltételek szemléletes felírása és ennek segítségével a korábban levezetett  $p$ -edrendűséghez szükséges feltételek demonstrálása. A megközelítés Butcher nevéhez fűződik és az elmélet Butcher-fa elméletként ismert a szakirodalomban. A fejezet Butcher [4] könyvének 30. és 31. alfejezeteiből meríti a legfőbb gondolatokat.

## 2. fejezet

# Alapfogalmak és a legelső numerikus módszer

Ahogy említettük, a szakdolgozat közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték feladataival avagy Cauchy-feladataival foglalkozik. Az egyszerűbb tárgyalás miatt csak a skaláris esettel foglalkozunk. Ehhez legyen  $X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  egy összefüggő nyílt halmaz,  $(t_0, u_0) \in X$  egy adott pont,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  egy folytonos leképezés. A kezdetiérték feladat alakja

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad \text{ahol } t \in (0, T], \quad (2.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2.2)$$

ahol  $u_0 \in \mathbb{R}$  az ún. kezdeti érték. A feladat egyértelmű megoldásához  $f$  olyan függvény, mely első változójában folytonos, míg második változójában kielégíti a Lipschitz-feltételt, azaz létezik olyan  $L > 0$  állandó, hogy az

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$

összefüggés tetszőleges  $(t, u_1), (t, u_2) \in X$ -re teljesül. Ilyen feltételek mellett igaz, hogy a (2.1)-(2.2) kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható és a teljes megoldás határtól határig terjed ([10], 2.6.tétel).

Fontos azonban kiemelni, hogy csak bizonyos típusú jobboldalakra tudunk analitikus megoldásokat adni. Ugyanakkor az adott jelenséget leíró modelljeink eredményeire kíváncsiak vagyunk, ezért esetleges analitikus megoldás hiányában szükségünk van az (2.1)-(2.2) feladat közelítő avagy numerikus megoldásaira.

### 2.1. Euler módszere

Az első numerikus módszert Leonhard Euler porosz matematikus alkotta meg 1768-ban [5]. Ezt a módszert szeretnénk most megkonstruálni. Első lépésként osszuk fel a  $[0, T]$  időintervallumot egymástól egyenlő távolságra lévő  $(N + 1)$  rácspont segítségével, azaz

$$\omega_h := \{t_n = nh, n = 0, 1, \dots, N, h = T/N\}. \quad (2.3)$$

Az  $\omega_h$  (2.3) egyenközű rácshálót szokás még *ekvidisztáns* rácshálónak is nevezni. Második lépésként a kezdetiérték feladatban szereplő  $u'(t)$  függvényre adunk

közelítést. Definíció szerint

$$u'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$

A fenti összefüggésben a hátértéket elhagyva nyilvánvaló módon az  $u'(t)$  függvény közelítését nyerjük. Ekkor az  $\omega_h$ -n értelmezett  $y$  rácsfüggvény  $n$ -edik rácspontjára vonatkozóan a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t_n+h) - u(t_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

összefüggést nyerjük. A célunk az, hogy  $y(t_n)$  minél jobban közelítse  $u(t_n)$  értékét minden  $t_n \in \omega_h$  esetén. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban  $y(t_n) = y_n$  jelölést használjuk. Analóg módon a jobboldali függvény esetében pedig az  $f(t_n, y_n)$  jelölést. Ekkor pedig a konstruált numerikus módszerünk alakja

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{h} &= f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_0 &= u(0). \end{aligned}$$

Az első egyenletet  $y_{n+1}$ -re rendezve az

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.4)$$

$$y_0 = u(0). \quad (2.5)$$

numerikus módszert nyerjük. A (2.4)-(2.5) módszer Euler eredeti módszere. Ez az úgynevezett explicit Euler módszer. Tudniillik a módszer explicit, hiszen a jobboldali kiértékelés során az  $n$ -edik időrétegen mindent ismerünk, s így léptetjük a megoldásunkat az  $n+1$ -edik időrétegre. Ebből az észrevételből rögvest észrevehetjük, hogy az explicit Euler módszer egy *egylépéses* numerikus módszer.

**2.1.1. Példa.** Alkalmazzuk az explicit Euler módszert az alábbi

$$\begin{aligned} u'(t) &= -u(t) + t + 1, \quad \text{ahol } t \in (0, 10], \\ u(0) &= 1, \end{aligned}$$

differenciálegyenletre. A feladat pontos megoldása  $u(t) = e^{-t} + t$ . A lenti ábrán látható, hogy finomodó rácsfelosztás esetén a módszer egyre jobban közelíti a feladat pontos megoldását.

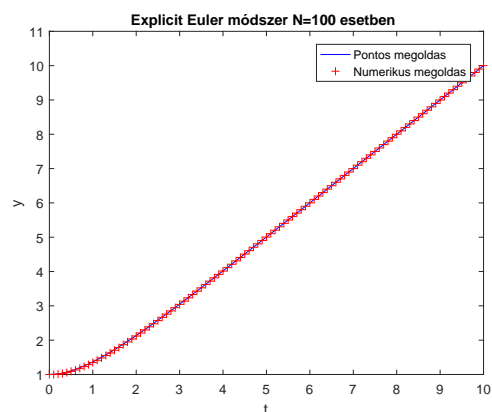
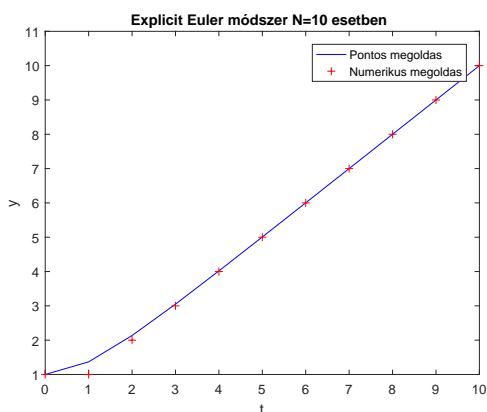
### 2.1. Listing. *Explicit Euler módszer*

```
1 function [t,y] = expeuler(t0, y0, T, N)
2 t=zeros(N+1,1);
3 x = zeros(N+1,1);
4 t(1) = t0;
5 x(1) = y0;
6 h = (T-t0)/N
7 for i=1:N
8 t(i+1) = t(i) + h;
9 x(i+1) = x(i) + h * f(t(i),x(i));
10 end
```

```

11 % Pontos megoldas
12 u=exp(-t)+t;
13 plot(t,u,'b',t,x,'r+')
14 xlabel('t')
15 ylabel('y')
16 title('Explicit Euler módszer N=100 esetben')
17 legend('Pontos megoldas','Numerikus megoldas')
18 end
19 function dydt = f(t,y)
20 dydt = -y+t+1;
21 end

```



## 2.2. Általános egy lépéses módszerek

Az előző alfejezetben megismert explicit Euler módszer segítségével motiváltuk az egy lépéses módszerek alkalmazását a (2.1)-(2.2) megoldására. Ebből kiindulva tekintsük az

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(h, t_n, y_n, y_{n+1}) \quad (2.6)$$

egy lépéses módszert, ahol  $\Phi$  egy előre megadott függvény, amely a numerikus módszerünket határozza meg.

**2.2.1. Megjegyzés.** Azokat a módszereket amelyekre  $\Phi = \Phi(h, t_n, y_n)$  alakú, explicit módszereknek nevezzük. Ha  $\Phi = \Phi(h, t_n, y_n, y_{n+1})$  alakú, akkor a módszer implicit.

**2.2.1. Példa.** Az explicit Euler módszer esetében  $\Phi$  alakja

$$\Phi(h, t_n, y_n, y_{n+1}) = f(t_n, y_n).$$



A  $\Phi$ -módszer lokális viselkedését jól jellemzi az a közelítés, amelyet a módszerrel a pontos megoldásból indulva egy lépés után nyerünk. Azaz

$$\hat{y}_{n+1} = u(t_n) + h\Phi(h, t_n, u(t_n), \hat{y}_{n+1})$$

egyenletben definiált  $\hat{y}_{n+1}$  numerikus érték milyen közel van az  $u(t_{n+1})$  pontos értékhez.



**2.2.1. Definíció.** Az  $l_n(h) = \hat{y}_{n+1} - u(t_{n+1})$  függvényt a (2.6) alakú  $\Phi$ -numerikus módszer lokális diszkretizációs hibafüggvényének nevezzük.

Tekintsük a

$$g_n(h) = -u(t_{n+1}) + u(t_n) + h\Phi(h, t_n, u(t_n), u(t_{n+1}))$$

függvényt. Rendje sorfejtéssel a megoldás meghatározása nélkül is számolható.

**2.2.2. Definíció.** A  $g_n(h)$  függvényt a (2.6) alakú  $\Phi$ -numerikus módszer  $t_n \in \omega_h$  pontbeli lokális approximációs hibafüggvényének (képlethibájának) nevezzük. Azt mondjuk, hogy a  $\Phi$ -numerikus módszer  $p$ -edrendben konzisztens, ha

$$g_n(h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$$

valamely  $r > 0$  állandóval tetszőleges  $t_n \in \omega_h$  rácspontban.

**2.2.2. Példa.** Az explicit Euler módszer esetén

$$\begin{aligned} g_n(h) &= -u(t_{n+1}) + u(t_n) + hf(t_n, u(t_n)) \\ &= -\left(u(t_n) + hu'(t_n) + \frac{h^2}{2}u''(t_n) + \mathcal{O}(h^3)\right) + u(t_n) + hu'(t_n) \\ &= -\frac{h^2}{2}u''(t_n) + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

azaz a módszer elsőrendben konzisztens. ♣

A  $g_n(h)$  függvény kiszámítása helyett gyakran a

$$d_n(h) = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} - h\Phi(h, t_n, u(t_n), u(t_{n+1}))$$

függvényt számoljuk. Erre fennáll a  $d_n(h) = g_n(h)/h$  összefüggés. Ekkor a numerikus módszer  $p$ -edrendben konzisztens, ha

$$d_n(h) = \mathcal{O}(h^p).$$

Ahogy már a bevezető fejezetben is említettük természetes elvárás, hogy a numerikus megoldás konvergáljon a feladat pontos megoldásához.

**2.2.3. Definíció.** Az  $e_{t_*}(h) = y_n - u(t_*)$ , ( $nh = t_*$ ) függvényt a  $\Phi$  függvény  $t_*$  pontbeli globális diszkretizációs hibafüggvényének nevezzük.

**2.2.4. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $\Phi$  numerikus módszer konvergens a  $t_*$  pontban, ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_h(t_*) = 0.$$

Ha a  $\Phi$  numerikus módszer konvergens a  $[0, T]$  minden pontjában, akkor a numerikus módszert konvergens módszernek nevezzük. Ha  $e_h = \mathcal{O}(h^p)$  alakú, akkor a numerikus módszer  $p$ -redrendben konvergens.

Tegyük fel, hogy az (2.6) egyenlet  $\Phi$  függvénye harmadik és negyedik változójában Lipschitzes, azaz léteznek olyan  $L_3 > 0$  és  $L_4 > 0$  állandók, amelyekre tetszőleges  $s_1, s_2, p_1, p_2$  számok esetén

$$|\Phi(h, t_n, s_1, p_1) - \Phi(h, t_n, s_2, p_2)| \leq L_3|s_1 - s_2| + L_4|p_1 - p_2| \quad (2.7)$$

tetszőleges  $t_n \in \omega_h$  esetén. Ekkor az alábbi tétel bizonyítható.

**2.2.1. Tétel.** *Tegyük fel, hogy az (2.6)  $\Phi$ -numerikus módszer*

*i,  $p$ -edrendben konzisztens,*

*ii, a módszert definiáló  $\Phi$  függvény folytonos és érvényes rá a (2.7) feltétel.*

*Ekkor a numerikus módszer  $p$ -edrendben konvergens a  $[0, T]$  intervallumon.*

**Proof.** Lásd a [6] 3.24 tételhez kapcsolódó levezetést. ■

A fenti 2.2.1 tétel eredményét szokás a numerikus analízis alaptételének is nevezni. A tételben szereplő *ii*, pont a numerikus módszer stabilitását garantálja. Ekkor formálisan a numerikus analízis alaptétele

$$\text{Konzisztencia} + \text{Stabilitás} \Rightarrow \text{Konvergencia}.$$

A tétel alapján garantálható, hogy a konzisztencia rendje megegyezik a konvergencia rendjével. Ezért a hatékony (és stabilitás mellett gyorsan konvergáló) közelítő megoldások érdekében szisztematikus módon kívánjuk meghatározni a  $p$ -edrendűség rendfeltételeit egy, a legelterjedtebb egylépéses numerikus család esetében. Ezek lesznek az ún. Runge–Kutta típusú módszerek. A következő két fejezetben két nagy megközelítést fogunk tekinteni erre a problémára.

## 3. fejezet

# Runge-Kutta módszerek rendfeltételei: az Albrecht megközelítés

1895-ben Runge német matematikus megkísérelt egy másodrendű módszert konstruálni abból a gondolatból kiindulva, hogy a jobboldali  $f$  függvényt köztes pontban értékeljük ki [9]. Legyen ez a köztes pont  $t_{n+1/2}$  és a numerikus módszerünk ekkor

$$y_{n+1} = y_n + hf \left( t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$
$$y_0 = u(0).$$

A problémát ekkor még az okozta, hogy a fenti módszer implicit az  $y_{n+\frac{1}{2}}$  tag jelenléte miatt. Ezért ötlete abban állt, hogy ezt a tagot közelítsük egy  $h/2$  lépésközű explicit Euler módszer segítségével. Ezért szokás a módszert javított, módosított Euler módszernek, vagy RK2 módszernek nevezni. Ennek alakja

$$y_{n+1} = y_n + hf \left( t_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$
$$y_0 = u(0).$$

Többdimenziós Taylor-sorfejtés segítségével könnyen igazolható, hogy a fenti már explicit típusú javított Euler módszer másodrendben konzisztens. Továbbá ez az ötlet teremtette meg a lehetőséget módszerek szisztematikus felírására is. Tudniillik a fenti módszer tömören az alábbi alakban írható fel:

$$k_1 = f(t_{n-1}, y_{n-1})$$
$$k_2 = f \left( t_{n-1} + \frac{1}{2}h, y_{n-1} + \frac{1}{2}hk_1 \right)$$
$$y_n = y_{n-1} + hk_2$$

**3.0.1. Példa.** Alkalmazzuk a javított Euler-módszert a lenti differenciálegyenlet közelítésére és hasonlítsuk össze az explicit Euler módszerrel.

$$u'(t) = -u(t) + t + 1, \quad \text{ahol } t \in (0, 10],$$
$$u(0) = 1.$$

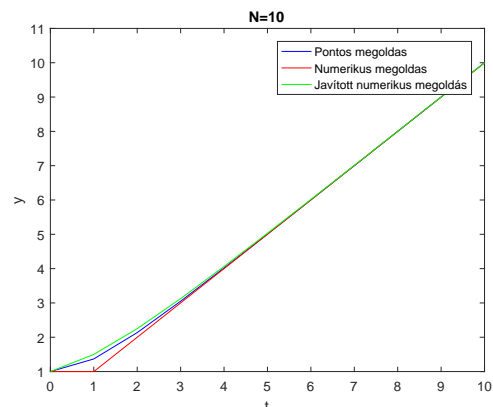
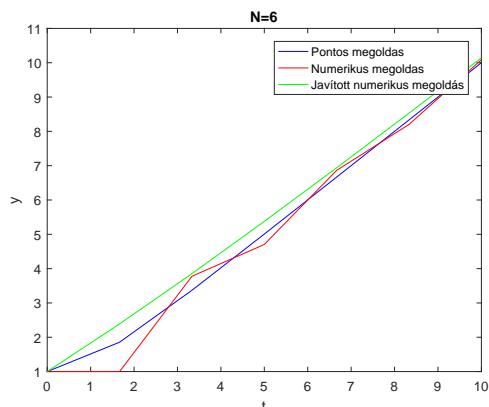
A feladat pontos megoldása továbbra is az  $u(t) = e^{-t} + t$ . A lenti ábrán látható, hogy finomodó rácsfelosztás esetén a módszer egyre jobban közelíti a feladat pontos megoldását. A módszer MATLAB kódja a következő:

### 3.1. Listing. Javított Euler-módszer

```

1 function [t,y] = javeuler(t0,y0,T,N)
2 t=zeros(N+1,1);
3 y=zeros(N+1,1);
4 x=zeros(N+1,1);
5 t(1)=t0;
6 y(1)=y0;
7 x(1)=y0;
8 h=(T-t0)/N;
9 hfel = 0.5*h;
10 for i=1:N
11     t(i+1)=t(i)+h;
12     y(i+1) = y(i) + h*f(t(i)+hfel,y(i)+hfel*f(t(i),y(i)))
13         );
14     x(i+1) = x(i) + h * f(t(i),x(i));
15 end
16 % Pontos megoldas
17 u=exp(-t)+t;
18 plot(t,u,'b',t,x,'r',t,y,'g')
19 xlabel('t')
20 ylabel('y')
21 title('N=6')
22 legend('Pontos megoldas','Numerikus megoldas','Javitott
23     numerikus megoldas')
24 end
25 function dydt = f(t,y)
26 dydt = -y+t+1;
27 end

```



Látható, hogy a javított Euler módszer már jóval kevesebb lépés után közelíti a feladat pontos megoldását szemben az explicit Euler módszerrel. ♣

## 3.1. Első felírási mód

Heun 1900-ban harmadrendű, míg Kutta 1901-ben negyedrendű explicit módszert konstruált. A rendre vonatkozó hosszadalmas számításokat most megspóroljuk, ugyanis a célunk továbbra is a rendfeltételek szisztematikus származtatása.

Mivel matematikatörténeti szempontból a fenti két módszer jelentős, ezért ezek javított Euler módszer esetében látott tömör  $k_i$ -s alakját megadjuk.

**3.1.1. Példa** (Heun avagy RK3 módszer).

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\k_2 &= f\left(t_{n-1} + \frac{1}{3}h, y_{n-1} + \frac{1}{3}hk_1\right) \\k_3 &= f\left(t_{n-1} + \frac{2}{3}h, y_{n-1} + \frac{2}{3}hk_2\right) \\y_n &= y_{n-1} + h\frac{1}{4}k_1 + h\frac{3}{4}k_3\end{aligned}$$



**3.1.2. Példa** (Kutta avagy RK4 módszer).

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\k_2 &= f\left(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, y_{n-1} + \frac{1}{2}hk_1\right) \\k_3 &= f\left(t_{n-1} + \frac{1}{1}h, y_{n-1} + \frac{1}{1}hk_2\right) \\k_4 &= f(t_{n-1} + h, y_{n-1} + hk_3) \\y_n &= y_{n-1} + h\frac{1}{6}k_1 + h\frac{1}{3}k_2 + h\frac{1}{3}k_3 + h\frac{1}{6}k_4\end{aligned}$$



Vegyük észre, hogy az eddig megadott példák mindegyike explicit típusú, hiszen a  $k_i$  függvény jobb oldalában legfeljebb  $k_{i-1}$  szerepel. Mindegyik esetben az alapötletet az adta, hogy a  $[t_{n-1}, t_n]$  részintervallumban köztes értékeket adtunk meg ( $k_i$ -k száma) és ezek lineáris kombinációjával közelítettük a kezdetiérték feladat jobb oldalát. A köztes értékek számát lépcsőszámnak nevezzük.

Ezek az explicit, magasabbrendű példák vezetnek el minket az általános, implicit módszereket tartalmazó felírási módhoz. Az általános felírási mód Kutta 1901-es cikkéhez kapcsolódik [8]. Ugyanakkor Runge és Kutta munkássága nyomán ezeket a módszereket Runge–Kutta típusú módszereknek nevezzük. Egy  $s$ -lépcsős Runge–Kutta módszer alakja

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i h, y_{n-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad i = 1, \dots, s \quad (3.1)$$

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (3.2)$$

ahol  $s$  a lépcsőszám és  $s \geq 1$  adott egész szám, míg  $a_{ij}$ ,  $c_i$ ,  $b_i$  értékek adott valós számok. Butcher új-zélandi matematikus ezeket a módszerek szemnek kellemes formában táblázatos alakban írta fel, s 1964-es cikke óta ezt a reprezentációt Butcher-táblázatnak vagy Butcher-tablónak szokás hívni [3]. Az  $s$ -lépcsős Runge–Kutta módszer Butcher táblója

$c_1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\dots$	$\dots$	$a_{1,s}$
$c_2$	$a_{2,1}$	$0$	$\dots$	$\dots$	$a_{2,s}$
$c_3$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$\dots$	$\dots$	$a_{3,s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_s$	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$\dots$	$a_{s,s-1}$	$a_{s,s}$
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	$b_s$

Azaz az egy lépéses numerikus módszerünk egy  $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$  mátrixszal és  $c, b \in \mathbb{R}^n$  vektorokkal reprezentálható.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

**3.1.3. Példa.** Az eddig megismert négy módszerünk Butcher táblóját a lenti példában adjuk meg.

Explicit Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Javított Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

RK3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

RK4

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$



A fenti példa alapján is könnyen láthatjuk, hogy explicit Runge–Kutta módszerek esetében az  $A$  együttható mátrix szigorú alsó háromszög mátrix lesz. Implicit módszer esetében ez a kedvező és sokszor előnyös struktúra elvész.

## 3.2. Második felírási mód

Ebben a fejezetben egy másik lehetséges paraméteres felírási módot ismertetünk  $s$ -lépcsős Runge-Kutta módszerekre. Ennek alakja

$$Y_i = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + c_j h, Y_j), \quad i = 1, \dots, s \quad (3.3)$$

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^s b_j f(t_{n-1} + c_j h, Y_j), \quad i = 1, \dots, s \quad (3.4)$$

A fenti reprezentáció segítségével a már korábban vizsgált négy módszert is fel tudjuk írni.

**3.2.1. Példa.** A négy módszer alakja ebben a felírásban:

Explicit Euler

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_{n-1} \\ y_n &= y_{n-1} + hf(t_{n-1}, Y_1) \end{aligned}$$

Javított Euler

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_{n-1} \\ Y_2 &= y_{n-1} + 0.5hf(t_{n-1}, Y_1) \\ y_n &= y_{n-1} + hf(t_{n-1} + 0.5h, Y_2) \end{aligned}$$

RK3

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_{n-1} \\ Y_2 &= y_{n-1} + \frac{1}{3}hf(t_{n-1}, Y_1) \\ Y_3 &= y_{n-1} + \frac{2}{3}hf\left(t_{n-1} + \frac{1}{3}h, Y_2\right) \\ y_n &= y_{n-1} + h \left[ \frac{1}{4}f(t_{n-1}, Y_1) + \frac{3}{4}f\left(t_{n-1} + \frac{2}{3}h, Y_3\right) \right] \end{aligned}$$

RK4

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_{n-1} \\ Y_2 &= y_{n-1} + 0.5hf(t_{n-1}, Y_1) \\ Y_3 &= y_{n-1} + 0.5hf(t_{n-1} + 0.5h, Y_2) \\ Y_4 &= y_{n-1} + 0.5hf(t_{n-1} + 0.5h, Y_3) \\ y_n &= y_{n-1} + \frac{h}{6} \left[ f(t_{n-1}, Y_1) + 2f\left(t_{n-1} + \frac{h}{2}, Y_2\right) + 2f\left(t_{n-1} + \frac{h}{2}, Y_3\right) + f(t_{n-1} + h, Y_4) \right] \end{aligned}$$



Az előző és a mostani alfejezetben két felírási módot mutattunk be. Itt megemlítjük, hogy a (3.1)-(3.2) és (3.3)-(3.4) módszerek Butcher-tablói és pontossági feltételei megegyeznek. Ezért ezeket a módszereket ekvivalensnek tekintjük. A két felírási mód különbsége abban áll, hogy a (3.1)-(3.2) módszer a feladat jobboldali  $f(t, u(t))$  függvényét, avagy a feladatból adódóan az  $u'(t)$  megoldásfüggvény deriváltját approximálja köztes értékekkel a  $t_{n-1} + c_i h$  pontokban. Ezzel szemben a második (3.3)-(3.4) felírás az  $u(t)$  megoldásfüggvényt approximálja.

### 3.3. Rendfeltételek

Az eddig bemutatott klasszikus módszerek Butcher-tablóinak közös jellemzője, hogy az  $A$  mátrix tetszőleges  $i$ -edik sorának összege minden esetben megegyezik a  $c$  vektor  $i$ -edik komponensével. Természetesen ez nem a véletlen műve. Ennek oka abban leledzik, hogy a (3.3)-(3.4) módszerek esetén a kiszámolt  $Y_i$  értéket az  $u(t)$  megoldásfüggvényt legalább elsőrendben approximálják a  $t_{n-1} + c_i h$  pontokban. Ezért ha  $u(t) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  vagy  $u(t) = at + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  alakú, akkor a módszer pontos.

Tekintsük az

$$u'(t) = 1, \quad t \in (0, T] \quad (3.5)$$

$$u(0) = 0 \quad (3.6)$$

feladatot. A feladat pontos megoldása  $u(t) = t$ , ezért a fenti érvelés mentén az

$$Y_i = u(t_{n-1} + c_i h) = t_{n-1} + c_i h$$

egyenlőségnek teljesülnie kell. Számoljuk ki az első lépést, azaz  $n = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $y_{n-1} = y_0 = 0$ . Ekkor

$$Y_i = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + c_j h, Y_j) = h \sum_{j=1}^s a_{ij}.$$

Egyrészt így  $Y_i = c_i h$ , s a (3.5)-(3.6) feladatra a fenti feltételből minden  $i$ -re a

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$$

összefüggés adódik. Bevezetve az  $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s$  vektort ez a  $c = Ae$  alakot jelenti. Ekkor a Butcher-tabló alakja

$$\frac{Ae \mid A}{\mid b^T}$$

#### 3.3.1. A $p$ -edrendűség szükséges feltétele

Tekintsük az

$$u'(t) = u(t) + 1, \quad t \in (0, T]$$

$$u(0) = 0$$



feladatot. A feladat pontos megoldása az  $u(t) = e^t - 1$  függvény. A  $t = h$  pontban a lokális approximációs hibára az

$$u(h) = e^h - 1 = h + \frac{1}{2!}h^2 + \dots + \frac{1}{p!}h^p + O(h^{p+1}) \quad (3.7)$$

összefüggés adódik. Az előző számoláshoz hasonlóan az első lépés után a köztes értékekre

$$Y_i = h \sum_{j=1}^s a_{ij}(Y_j + 1), \quad i = 1, \dots, s. \quad (3.8)$$

Az  $Y = (Y)_{i=1}^s \in \mathbb{R}^s$  jelölést használva a fenti (3.8) felírható

$$Y = hA(Y + e) = hAY + hAe$$

alakban. Ekkor az  $I$  egységmátrix jelölést használva kapjuk, hogy

$$(I - hA)Y = hAe. \quad (3.9)$$

Kellően kis  $h$  mellett az  $I - hA$  mátrix invertálható, mely az ún. Neumann-sor segítségével állítható elő.

$$(I - hA)^{-1} = I + hA + h^2A^2 + \dots + h^pA^p + \dots \quad (3.10)$$

A (3.9)-(3.10) egyenletek alapján

$$\begin{aligned} Y &= (I - hA)^{-1}hAe = (I + hA + h^2A^2 + \dots + h^pA^p + \dots)hAe \\ &= (hA + h^2A^2 + \dots + h^pA^p + \dots)e. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A fenti (3.11) egyenletől már felírható  $y_1$  végleges alakja, amelyre

$$\begin{aligned} y_1 &= h \sum_{i=1}^s b_i(Y_i + 1) = hb^T(Y + e) \\ &= hb^T[(hA + h^2A^2 + \dots + h^pA^p + \dots)e + e] \\ &= hb^T[I + hA + h^2A^2 + \dots + h^pA^p + \dots]e \\ &= hb^T e + h^2b^T A e + h^3b^T A^2 e + \dots + h^p b^T A^{p-1} e + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

A (3.7) és (3.12) kifejezések összevetéséből adódi a módszer  $p$ -ed rendűségének szükséges feltétele, amely

$$\frac{1}{k!} = b^T A^{k-1} e, \quad k = 1, \dots, p. \quad (3.13)$$

Az eddigi számításainkból az alábbi tétel adódik.

**3.3.1. Tétel.** *Adott Butcher-táblójú Runge-Kutta típusú módszer pontosan akkor konzisztens, amikor teljesülnek az*

$$Ae = c \quad \text{és} \quad b^T e = 1$$

*feltételek, azaz*

$$\sum_{k=1}^s a_{ik} = c_i, \quad i = 1, \dots, s \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^s b_k = 1.$$

A fenti 3.3.1 Tétel csupán a konzisztencia szükséges és elégséges feltételét adja meg. Nem kapunk teljes választ  $p$ -edrendűség esetén. Levezetésünk eredményeképpen a (3.13) egyenlet szükséges, de nem elégséges feltételt biztosít. A Runge–Kutta típusú módszerek  $p$ -edrendűségének szükséges és elégséges feltételeinek kiszámításához hosszadalmas út vezet. Itt csak a fő lépéseket érzékeltettük. Ugyanakkor Albrecht [1] és [2] cikkeiben vezeti le és foglalja össze a szükséges és elégséges feltételeket.

Ezen cikkek eredményeit figyelembe véve a negyedrendűség feltételeit az alábbi 3.1 táblázatban foglaltuk össze. Megjegyezzük, hogy a táblázatban igaz a  $C = \text{diag}(c)$  összefüggés.

rend(p)	feltétel
1	$b^T e = 1$
2	$b^T c = 1/2$
3	$b^T c^2 = 1/3, b^T A c = 1/6$
4	$b^T c^3 = 1/4, b^T C A c = 1/8, b^T A c^2 = 1/12, b^T A^2 c = 1/24$

**3.1. táblázat.** *A negyedrendű feltételek*

**3.3.1. Példa.** Ebben a példában a fenti táblázathoz tartozó MATLAB kódot adjuk meg. Ezek alapján az eddig megismert négy módszer konzisztencia rendjeit adhatjuk meg negyedrenddel bezárólag.

**3.2. Listing.** *Legfeljebb negyedrendűséget ellenőrző kód*

```

1 function order(A,b)
2 e=ones(size(A,1),1);
3 c=sum(A,2);
4 p1=[b*e-1];
5 p2=[b*c-1/2];
6 p3=[b*c.^2-1/3, b*A*c-1/6];
7 p4=[ b*c.^3-1/4, b*diag(c)*A*c-1/8, b*A*c.^2-1/12, b*A
      ^2*c-1/24];
8 if any(abs(p4)>eps)==0
9     disp('A módszer negyedrendű')
10 elseif any(abs(p3)>eps)==0
11     disp('A módszer harmadrendű')
12 elseif any(abs(p2)>eps)==0
13     disp('A módszer másodrendű')
14 elseif any(abs(p1)>eps)==0
15     disp('A módszer elsőrendű')
16 end
17 end

```

A futás eredménye az alábbi:

```

1 >> order([1],1)
2 A módszer elsőrendű

```

```

3 >> order([0 0; 1/2 0.0],[0 1])
4 A módszer másodrendű
5 >> order([0 0 0;1/3 0 0;0 2/3 0],[1/4 0 3/4])
6 A módszer harmadrendű
7 >> order([0 0 0 0;1/2 0 0 0;0 1/2 0 0;0 0 1 0],[1/6 1/3
      1/3 1/6])
8 A módszer negyedrendű

```



### 3.3.2. Érdekességek

A fejezet hátralévő részében a [6] könyv 4.2.1. és a [7] könyv II.2. fejezeteinek rendfeltételhez kapcsolódó érdekességeit foglaljuk össze. Explicit Runge–Kutta módszerek esetén  $p = s$  pontosság biztosítható, ha  $s = 1, 2, 3, 4$ . Sajnos  $s \geq 5$  esetén már nem érhető el a  $p = s$  pontosság. Ezt a lenti 3.2 táblázatban foglaltuk össze.

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(s)	1	2	3	4	4	5	6	6	7	7

**3.2. táblázat.** *Explicit Runge–Kutta módszerek rendjei adott lépcsőszám mellett*

Megjegyezendő, hogy implicit Runge–Kutta módszerek esetében speciális (Gauss) alappontok választása mellett  $p = 2s$  rend is elérhető.

Az explicit Runge–Kutta típusú módszer esetén egyelőre csak  $p = 8$  értékig ismert, hogy egy tetszőleges  $p$  rend eléréséhez hány lépcső szükséges. A 3.3 táblázatban ezt foglaltuk össze.

rend(p)	1	2	3	4	5	6	7	8			
feltételek száma	1	2	4	8	17	37	85	200			
lépcsők száma (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
paraméterek száma	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

**3.3. táblázat.** *Explicit Runge–Kutta módszerekre vonatkozó összefüggések*

## 4. fejezet

# Runge-Kutta módszerek rendfeltételei: a Butcher-fa megközelítés

Ahogy azt már a bevezetőben is említettük, ebben a fejezetben a nyugat-európai szakirodalomban elterjedt Butcher-fa megközelítés lényegét kívánjuk ismertetni. A precíz és szakszerű tárgyalást Butcher [4] könyvének 30. és 31. alfejezeteiben találhatjuk meg.

Az egyszerűség kedvéért (2.1)-(2.2) helyett tekintsünk autonóm kezdetiérték feladatot, azaz

$$\begin{aligned}u'(t) &= f(u(t)), \quad t \in [0, T], \\u(0) &= u_0.\end{aligned}$$

A pontos megoldás Taylor-sorba fejtéséhez vezessünk be néhány jelölést. Ezek rendre az alábbiak:

$$\begin{aligned}f &= f(u(t)) \\f' &= f'(u(t)) \\f'' &= f''(u(t)).\end{aligned}$$

Ezen jelölések segítségével felírjuk az  $u(t)$  függvény teljes első, második és harmadik deriváltját és azok komponensenkénti alakjait is.




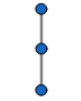
$$\begin{aligned}u'(t) &= f(u(t)) = f \\(u^i)' &= f^i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u''(u) &= f'(u(t)) = f'(u(t))y'(x) = f'(u(t))f(u(t)) = f'f \\ \frac{d}{dt}(u^i)' &= \frac{d}{dt}f^i = f_j^i f^j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u'''(t) &= f''(u(t)) = (f'(u(t))f(u(t)))' \\ &= f''(u(t))(f(u(t)), f(u(t))) + f'(u(t))(f'(u(t))f(u(t))) \\ &= f''(f, f) + f'f'f\end{aligned}$$













$$\frac{d^3}{dt^3}u^i = f_{jk}^i f^j f^k + f_j^i f_k^j f^k$$

A gráfelméletből ismert *gyökeres fa* struktúrát alkalmazva a teljes első, második és harmadik deriváltak esetében mintát fedezhetünk fel. Nevezetesen az  $f(u(t))$  értéket társítjuk egy *levél*hez a fában, az  $f'(u(t))$  értéket egy olyan *csúcshoz* amelyből egy darab *él* fut ki, az  $f''(u(t))$  értéket pedig egy olyan csúcshoz amelyből már két él fut ki. Az így megalkotott gyökeres fáinkat az *elemi differenciálokra* vonatkozóan a lenti 4.1.táblázatban szemléltetjük. Természetesen magasabbrendű derivált esetén a fenti gondolatot terjesztjük ki.

fa	egzakt megoldás	komponensenként
	$f$	$f^i$
	$f'f$	$f_j^i f^j$
	$f''(f, f)$	$f_{jk}^i f^j f^k$
	$f'f'f$	$f_j^i f_k^j f^k$

4.1. táblázat. A harmadrendű feltételek reprezentációja

A 4.1.táblázatban az  $u^i$  első három deriváltjának tenzor alakos reprezentációiban az  $f^i, f^j, f^k$  tagok felső indexeit egy csúcshalmaz tagjainak tekintjük. Az élek halmazában adott  $(i, j)$  párok szerepelnek mint például az  $f_j^i$  és  $f_{jk}^i$  tagok esetén. A jobb megértést a lenti 4.2.táblázat segíti elő.





fa	$f$ -fa	egzakt felírás	jelölt fa	komp. felírás
		$f(y(x))$		$f^i$
		$f'(y(x))f(y(x))$		$f_j^i f^j$
		$f''(y(x))(f(y(x)), f(y(x)))$		$f_{jk}^i f^j f^k$
		$f'(y(x))(f'(y(x))f(y(x)))$		$f_j^i f_k^j f^k$

4.2. táblázat. A harmadrendű feltételek teljes reprezentációja

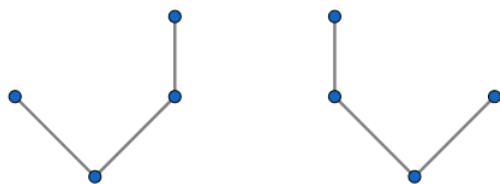
A negyedrendűsége vonatkozó feltételeket gráfos alakban az egyszerű de hosszadalmas számítások nélkül a lenti 4.3.táblázatban foglaljuk össze.

Ha a fenti 4.3.táblázat második elemi differenciálját tekintjük, akkor annak elviekben két ekvivalens reprezentálása is lehetne. Ezt szemléltetjük a 4.1.ábrán.

**4.0.1. Definíció.** Legyen  $V, V'$  csúcsok halmaza,  $E, E'$  élek halmaza és a  $(V, E), (V', E')$  az ezekből alkotott gyökérrel rendelkező fák. Ha létezik egy  $\varphi : V \mapsto V'$  bijekció úgy, hogy  $[x, y] \in E$  akkor és csak akkor, ha  $[\varphi(x), \varphi(y)] \in E'$ , akkor a két fát ekvivalensnek tekintjük.

fa	egzakt megoldás	komponensenként
	$f'''(f, f, f)$	$f_{jkl}^i f^j f^k f^l$
	$f''(f, f'f)$	$f_{jk}^i f^j f_l^k f^l$
	$f'f''(f, f)$	$f_j^i f_{kl}^j f^k f^l$
	$f'f'f'f$	$f_j^i f_k^j f_l^k f^l$

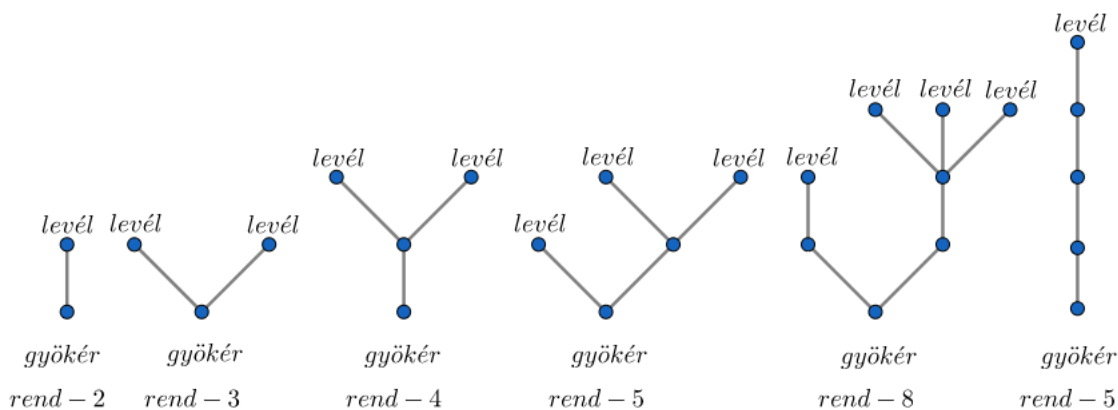
4.3. táblázat. A negyedrendű feltételek reprezentációja



4.1. ábra. Két ekvivalens állapot

Az egyértelműsítés kedvéért mindig balról jobbra történő címkézés szerint írjuk fel a gyökeres fáinkat. A fák körmentesek és a csúcsok száma alapján adhatjuk meg a rendet. Általánosan ez azt jelenti, hogy egy  $p$  csúcsból álló fa adja meg a  $p$ -edrendűség szükséges és elégséges feltételeit.

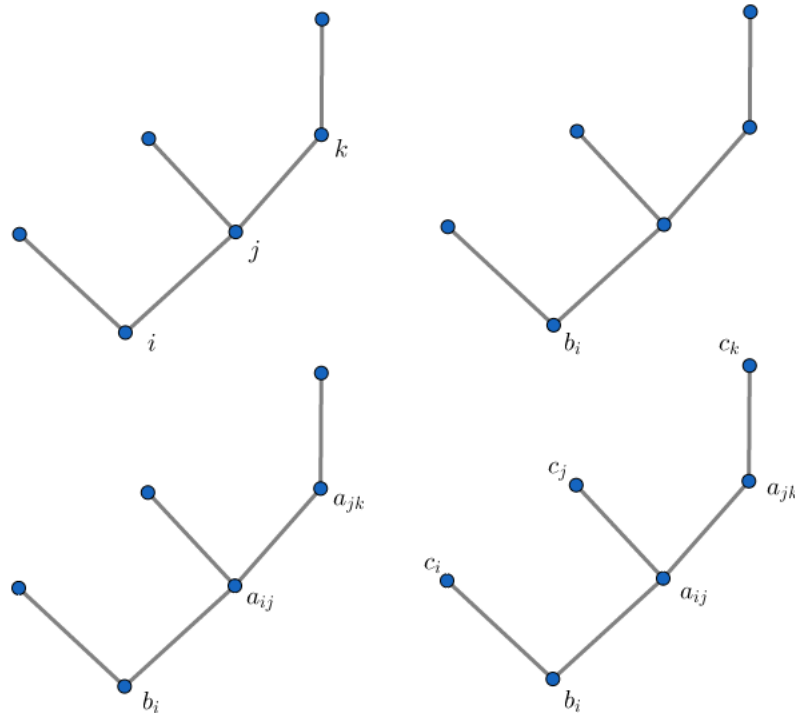
4.0.1. Példa. Pár esetben szemléltetjük a feljebb írtakat.



Minden fára fel lehet írni a Butcher-tábló segítségével egy  $\Phi(t)$  polinomot, mely az aktuális fára vonatkozik (a precíz és bonyolult összefüggések felírása nélkül közöljük ezt az állítást, mert ez a szakdolgozat szintjét és terjedelmét is meghaladná).

$\Phi(t)$  esetében először társítunk a fa minden csúcsához, a leveleket kivéve egy  $i, j, \dots$  indexet, ahol a gyökér indexe lesz  $i$ . Ekkor a gyökér legyen minden esetben  $b_i$ , majd minden csúcsához, amely nem egy levél, rendeljünk hozzá egy  $a_{jk}$  értéket, ahol  $j$  a beérkező él kiinduló pontjának indexe,  $k$  pedig az adott csúcs indexe. Végül mikor egy adott élsorozat beér egy levélbe, ott a levélhez rendeljük hozzá a  $c_j$  értéket, ahol  $j$  a levélbe érkező él másik végében levő csúcs indexe. Miután minden csúcsához hozzárendeltünk egy  $b_i, a_{jk}, c_l$  értéket, összegezzük ezen értékeket.

**4.0.2. Példa.** Nézzük meg lépésenként, hogy ez hogyan is néz ki egy konkrét példa esetén.



Egy másik fontos mérőszám  $\gamma(t)$  értéke lesz. A  $t$ -edik fa esetén kiválasztunk egy csúcsot, majd megszámloljuk, hogy hány csúcsot származtattunk ebből a kiválasztott csúcsból önmagával együtt. Ekkor  $\gamma(t)$  ezen számok szorzata lesz.

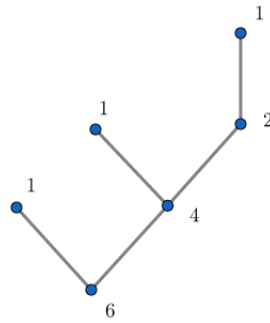
**4.0.3. Példa.** Az előző példát folytatva megadhatjuk  $\Phi(t)$ ,  $\gamma(t)$  alakját és hogy ez melyik Albrecht feltételnek felelne meg. Ekkor

$$\Phi(t) = \sum b_i c_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k,$$

$$\gamma(t) = 6 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 48.$$

Az adott Albrecht-féle megközelítésből

$$b^T C A C A c = \frac{1}{48}$$



feltételt nyernénk, ahol  $C = \text{diag}(c)$ . Azaz a  $\Phi(t)$  és  $\gamma(t)$  közötti összefüggésre a sejtésünk

$$\Phi(t) = \frac{1}{\gamma(t)}.$$



Az a sejtés, hogy a fenti összefüggés valóban a  $p$ -edrendűség szükséges és elégséges feltételeit adja. Ehhez először vezessünk be egy új jelölést. Legyen  $t_{ij}$  az  $i$ -edik rendhez tartozó  $j$ -edik rendfeltétel. A fák halmazát jelöljük  $T$ -vel. Azaz

$$T = \{t_1, t_2, t_{31}, t_{32}, \dots\}$$

és

$$T = \{ \bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet & \bullet \\ \diagdown & / \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \dots \}.$$

Továbbá használjuk [4] Definition 312A-ban szereplő *elemi súlyú*  $\Phi(t)$  kifejezést, mely kapcsolatot teremt a fás felírási mód és a Butcher-tabló között. Ekkor a technikai feltételek további részletezése nélkül közöljük Butcher eredményét.

**4.0.1. Tétel** ([4], Theorem 315A). *Egy  $\Phi : T \mapsto \mathbb{R}$  elemi súlyú Runge–Kutta módszer pontosan akkor  $p$ -edrendű, ha*









$$\Phi(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$$

*minden  $t \in T$  esetén, hogy  $r(t) \leq p$ , ahol  $r(t)$  a csúcsok száma.*

## 4.1. Összehasonlítás




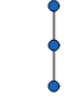




A fejezet hátralévő részében összevetjük a két lehetséges megközelítési módot negyedrenddel bezárólag. Első lépésként Butcher-fa megközelítéssel adjuk meg és foglaljuk össze a negyedrendű rendfeltételeket a 4.4.táblázatban.



$p$	fa száma	fa	Butcher feltétel	egzakt megoldás	komponensenként
1	$t_1$		$\sum b_j = 1$	$f$	$f^i$
2	$t_2$		$\sum b_j c_j = 1/2$	$f' f$	$f_j^i f^j$
3	$t_{31}$		$\sum b_j c_j^2 = 1/3$	$f''(f, f)$	$f_{jki} f^j f^k$
	$t_{32}$		$\sum b_j a_{jk} c_k = 1/6$	$f' f' f$	$f_j^i f_k^j f^k$
4	$t_{41}$		$\sum b_j c_k^3 = 1/4$	$f'''(f, f, f)$	$f_{jkl}^i f^j f^k f^l$
	$t_{42}$		$\sum b_j c_j a_{jk} c_k = 1/8$	$f''(f, f' f)$	$f_j^i f^j f_k^l f^l$
	$t_{43}$		$\sum b_j a_{jk} c_k^2 = 1/12$	$f' f''(f, f)$	$f_j^i f_k^j f^k f^l$
	$t_{44}$		$\sum b_j a_{jk} a_{kl} c_l = 1/24$	$f' f' f' f$	$f_j^i f_k^j f_l^k f^l$

4.4. táblázat. A Butcher-fa megközelítés negyedrenddel bezárólag

A 3.1.táblázat Albrecht-féle rendfeltételeit is megadjuk a Butcher-fa megközelítést felíró 4.5.táblázatban az egyszerűség kedvéért.

$p$	fa száma	fa	Butcher feltétel	Albrecht feltétel
1	$t_1$		$\sum b_j = 1$	$b^T e = 1$
2	$t_2$		$\sum b_j c_j = 1/2$	$b^T c = 1/2$
3	$t_{31}$		$\sum b_j c_j^2 = 1/3$	$b^T c^2 = 1/3$
	$t_{32}$		$\sum b_j a_{jk} c_k = 1/6$	$b^T A c = 1/6$
4	$t_{41}$		$\sum b_j c_k^3 = 1/4$	$b^T c^3 = 1/4$
	$t_{42}$		$\sum b_j c_j a_{jk} c_k = 1/8$	$b^T C A c = 1/8$
	$t_{43}$		$\sum b_j a_{jk} c_k^2 = 1/12$	$b^T A c^2 = 1/12$
	$t_{44}$		$\sum b_j a_{jk} a_{kl} c_l = 1/24$	$b^T A^2 c = 1/24$

4.5. táblázat. A Butcher-fa és Albrecht megközelítések negyedrenddel bezárólag

A 3.fejezet egy alfejezete a  $p$ -edrendűség szükséges feltételének levezetéséről szolt. Ennek végső alakja a (3.13) egyenlet volt. A fenti 4.5. táblázatból könnyen látható, hogy ezek a feltételek negyedrenddel bezárólag a  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_{32}$  és  $t_{44}$  fákat jelentik.

---

## Irodalomjegyzék

---

- [1] P. ALBRECHT, *A new theoretical approach to Runge-Kutta methods*, SIAM J. Numer. Anal., 24 (1987), pp. 391–406.
- [2] —, *The Runge-Kutta theory in a nutshell*, SIAM J. Numer. Anal., 33 (1996), pp. 1712–1735.
- [3] J. C. BUTCHER, *On Runge-Kutta processes of high order*, Journal of the Australian Mathematical Society, 4 (1964), pp. 179–194.
- [4] —, *Numerical methods for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, third ed., 2016. With a foreword by J. M. Sanz-Serna.
- [5] L. EULER, *Institutionum Calculi Integralis*, vol. XI., Volumen Primum, Opera Omnia, 1768.
- [6] I. FARAGÓ, *Numerikus modellezés és közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei*, Typotex, 2013.
- [7] E. HAIRER, S. P. NØRSETT, AND G. WANNER, *Solving ordinary differential equations. I*, vol. 8 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1993. Nonstiff problems.
- [8] W. KUTTA, *Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen*, Zeit. Math. Phys., 46 (1901), pp. 435–53.
- [9] C. RUNGE, *Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen*, Math. Ann., 46 (1895), pp. 167–78.
- [10] P. TÓTH, JÁNOS ÉS SIMON, *Differenciálegyenletek, Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, Typotex, Második kiadás, 2009.