Dinamikus folyamok

Horváth Manuéla

Matematika BSc

Elemző szakirány

Szakdolgozat

Témavezető:

Lukács András

Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2018

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Sokat gondolkodtam azon, hogy milyen témát válasszak a szakdolgozatomnak, egy dologban voltam biztos, hogy gráfokkal és gráfalgoritmusokkal szerettem volna egy témakört feldolgozni, méghozzá olyant, amelynek a gyakorlatban, a valóságban is lehet szerepe. A Gráfok és algoritmusok órán, harmadik félévben találkoztam először folyamokkal és a hozzájuk kötődő algoritmusokkal, amelyek már akkor felkeltették az érdeklődésemet. A témát magát témavezetőm ajánlotta nekem. Egy olyan kérdéskörrel foglalkozhattam a szakdolgozatomban, amely olyan matematikai modellekkel és algoritmusokkal foglalkozik, amelyek evakuációs problémák megoldásánál alkalmazhatóak. Evakuáció alatt az értendő, hogy egy adott épületből vagy területből minél több embert szeretnénk eltávolítani úgy, hogy az evakuáció ideje a lehető legrövidebb legyen. Rengeteg olyan modell létezik, amelyek ezt a problémát járják körül, ezek közül azonban csak pár kerül említésre a dolgozatomban. Természetesen már olyan modellek, amelyek bonyolultabbak, azonban ez talán egy következő dolgozat témája lehet.

A szakdolgozatom négy fejezetből áll. Az elsőben a többségében egyetemi kurzuson tanult és ismert statikus folyam definíciókkal és állításokkal foglalkozik, amelyek a dolgozat alapköveit szolgálják és szükséges annak megértéséhez. A második részben megjelennek már a dinamikus elemek, bemutatom a folyamok és hálózatok időbeli kiterjesztését. A harmadik fejezetben olyan dinamikus modelleket mutatok be, amelyek az előző fejezetben leírt időbeli kiterjesztésekre támaszkodik. Mindegyik modell különböző szempontból tekint a problémára és más-más tényezőt próbál meg optimalizálni. A negyedik fejezetben pedig összekapcsolom a matematikát a valósággal, vagyis az evakuációs problémával, megmutatom, hogy melyik fentebb említett modell milyen kapcsolatban van a menekülési útvonalak megtervezésében és azok hatékonyabbá tételében.

1. fejezet

Statikus folyamok

Ebben a fejezetben a statikus folyamokkal kapcsolatos alap definíciókat nézzük meg annak érdekében, hogy a következő részben a dinamikus folyamok esetében tudjunk rájuk hivatkozni, építkezni. A [5], [1] és [9] cikkeket használtam fel ebben a részben.

1.0.1. Definíció. Legyen $G = (V, A)$ egy irányított gráf, ahol feltesszük minden csúcs között található legalább egy út és nincsenek hurokélek. Ha G élein definiálva van egy $u : A \to \mathbb{R}$ kapacitásfüggvényt, amelyre teljesül, hogy $u(e) \geq 0$ $\forall e \in A$ élre, valamint léteznek $s \neq t \in V$ kitüntetett csúcsok, amelyeket forrásnak és nyelőnek nevezünk, akkor G-t hálózatnak hívjuk.

Jelölje $\delta^+(v)$ azokat az irányított éleket, amelyeknek a $v \in V$ csúcs a kezdőpontja, míg $\delta^-(v)$ pedig azokat, amelyeknek v a végpontjuk.

1.0.2. Definíció. Statikus folyamon egy olyan $f : A \to \mathbb{R}$ függvényt értünk, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

(i) $\forall e \in A$, $0 \leq f(e) \leq u(e)$ (kapacitásmegszorítás vagy megengedettség);

(ii) $\forall v \in V \setminus \{s, t\}$, $\displaystyle\sum_{\delta^-(v)} f(e) = \sum_{\delta^+(v)} f(e)$ (megmaradási szabály);

Az f folyam értéke ekkor

$$|f| = \sum_{\delta^-(t)} - \sum_{\delta^+(t)} f(e) = \sum_{\delta^-(s)} f(e) - \sum_{\delta^+(s)} f(e).$$

Azokat a folyamokat, amelyekre teljesül az első feltétel szokás megengedett folyamoknak is nevezni. Technikai okokból a következőkben tegyük fel, hogy G-ben minden $v \in V$ csúcs esetén létezik egy $s - v$ és egy $v - t$ út, mivel azok a csúcsok, amelyekre ez nem teljesül nem bizonyulnak hasznosnak, ugyanis, ha folyamot küldünk s-ből t-be, ezért a hozzá tartozó élekkel együtt akár törölhetjük is a hálózatból. Bizonyos feladatokban az éleken nem csak egy kapacitásfüggvényt értelmezünk, hanem egy úgynevezett c_e költségfüggvény is, amely azt hivatott megmondani, hogy milyen költséggel jár egy folyamegység átküldése az adott élen.

1.0.3. Definíció. Legyen $S \cup T = V$, ahol $s \in S$ és $t \in T$ teljesül. Ekkor V-nek ezen partícióját (S, T) vágásnak nevezzük. A vágás kapacitása:

$$u(S,T) = \sum_{v \in S, w \in T, vw \in A} u(vw),$$

a folyam értéke pedig:

$$f(S,T) = \sum_{v \in S, w \in T, vw \in A} f(vw) - \sum_{v \in S, w \in T, vw \in A} f(wv).$$

Minden $e = (v, w) \in A$ él esetében értelmezzünk egy úgynevezett $\overleftarrow{e} = (w, v)$ visszaélet. Megfigyelhetjük, hogy, ha $e \in A$, akkor $\overleftarrow{e} \notin A$, mivel G-ben bármely két csúcs között található legalább egy irányított él.

1.0.4. Definíció. A $G = (V, A)$ hálózatból származtatott kétirányú hálózaton egy olyan $\overleftrightarrow{G} = (V, \overleftrightarrow{A})$ hálózatot értünk, amelynél $\overleftrightarrow{A} = A \cup \{\overleftarrow{e} | e \in E\}$.

1.0.5. Definíció. Legyen f egy megengedett folyam G-ben. Egy tetszőleges $e \in A$ él reziduális kapacitásán a $c(e) - f(e)$ értéket értjük, a belőle származtatható $\overleftarrow{e}$ élén pedig a $f(e)$-t. Ekkor $G_f = (V, A_f)$-et reziduális hálózatnak nevezünk, amely minden $\overleftrightarrow{A}$-beli élet tartalmaz pozitív reziduális kapacitásokkal.

Jelölje $\mathcal{P}$ és $\mathcal{C}$ az éldiszjunkt $s - t$ utak és körök halmazát a G folyamban.

1.0.1. Állítás (Folyamdekompozíció-tétel)**.** *Minden statikus f $s - t$ folyamnak létezik egy $(f(P))_{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}}$ folyam dekopozíciója, ahol $f(P) \geq 0$ minden $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$ esetén, valamint teljesül, hogy*

$$f(e) = \sum_{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}; e \in P} f(P),$$

tetszőleges $e \in A$ élre.

1.0.6. Definíció. Legyen $G = (V, A)$ egy irányított gráf, úgy, ahogy a hálózat esetén is. Itt is értelmezünk egy $x : A \to \mathbb{R}$ függvényt a G irányított élein, amelyre f-hez hasonlóan teljesülnie kell a kapacitásmegszorításnak, azonban nem tüntetünk ki egyetlen csúcsot sem. Ebben az esetben x-et áramnak nevezzük.

2. fejezet

Dinamikus folyamok

Ebben a fejezetben bemutatom a [5] és [3] olvasmányok segítségével, hogy hogyan kapunk statikus folyamból dinamikus folyamokat az idő, mint új tényező hozzáadásával. Ezután pedig néhány fontosabb problémával és azok megoldásaival ismerkedhetünk meg.

Bizonyos problémák modellezése sokkal közelebb kerül a valósághoz, ha bevezetjük az időt, mint egy új változó, amely befolyásolni fogja a modell működését. Ilyen lehet például, ha valamilyen kommunikációs, szállítási vagy esetleg evakuációs problémát szeretnénk modellezni. Hiszen ha belegondolunk észrevehetjük, hogy ezen esetekben fontos tényezőként jelenhet meg az idő.

2.1. Folyamok az időben

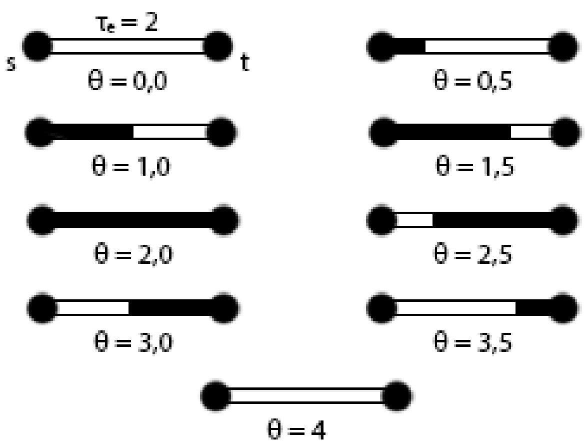
A következőkben a folyamokat az időben egy rögzített $0 \leq T$ időhorizonton fogjuk értelmezni, amely más szóval azt mondja meg, hogy mennyi ideig van folyam a hálózatban.

2.1.1. Definíció. Időbeli hálózaton egy olyan $(G = (V, A), s, t, u)$ hálózatot értünk, ahol minden $e \in E$ élen értelmezünk egy $\tau(e) \geq 0$ átfutási időt, vagy hosszot.

Amikor hálózatokról beszélünk értelmezhetjük azt úgy is, mint egy csőrendszert, ahol az irányított élekre úgy tekinthetünk, mint csövekre, a csúcsokra pedig, mint az elágazásokra a rendszerben. Ha ezekbe valamilyen folyadékot engedünk, akkor az hasonlóan fog viselkedni, mint maga a folyam. Egy csőnek van átmérője és hossza, míg előbbi azt határozza meg, hogy egyszerre mennyi folyadék tud átfolyni rajta, vagyis annak kapacitását, addig az utóbbi azt mondja meg, hogy mennyi időre van szükség, hogy egy folyamegység átérjen egyik elágazásból a másikba. Ehhez képest az időbeli folyamot a következőképpen tudjuk formálisan definiálni:

2.1.2. Definíció. Egy f folyamot időbeli folyamnak nevezünk a T időhorizonton, ha létezik egy $f_e : [0, T) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Lebesgue-integrálható függvény minden $e \in E$ esetén, valamint $f_e(\theta) = 0$ teljesül, minden $\theta \geq T - \tau(e)$-re. Ebben az esetben a $f_e(\theta)$-t az e él θ időpillanatbeli áramlási sebességének nevezzük.

Annak érdekében, hogy egyszerűsítsünk a fogalmon f_e függvény értelmezési tartományát szokás $\mathbb{R}$-nek tekinteni, ebben az esetben $f_e(\theta) = 0$ minden $\theta \notin [0, T)$-re. Tekintsük példaként az 2.1. ábrát, amely egyetlen e élből és két csúcsból (s és t) álló hálózat. Tegyük fel, hogy 2 másodperc alatt folyik át rajta egy folyamegység, vagyis $\tau(e) = 2$ valamint, hogy pontosan 2 folyamegységet szeretnénk átengedni rajta. Ha a folyam belép az e él tövénél θ időpillanatban, akkor pontosan $\tau(e)$ időegység múlva érkezik meg az e irányított él fejénél, azaz $\theta + \tau(e)$ idő alatt. Tehát, ha $0,0$ másodperckor kezdjük el beleengedni a folyadékot a csőrendszerbe, akkor az abban a pillanatban még nem fog látszani, azonban például $0,5$ másodperckor már megjelenik egy folyamegység fele, a második másodpercben a rendszer tele lesz és 4 másodperc alatt fog teljesen kiürülni a hálózat. Minden e irányított él fejénél a kiáramlás sebessége θ időpillanatban $f_e(\theta - \tau(e))$, amely a példa esetében bármely $\theta \in [2,5; 4]$ esetén 1, különben pedig 0. Az előző definíció biztosítja, hogy minden folyam rész távozott az e élből T idő alatt, mivel $f_e(\theta) = 0$ minden $\theta \geq T - \tau(e)$-re. A modell alapvetően folytonos



2.1. ábra.

idejűnek készült, ahol a folyam értéke minden $\theta \in [0, T)$ időpontban meghatározható, azonban az eredetit, amelyet Ford és Fulkersonnak nevéhez köthető diszkrét időre fejlesztették ki. Ez azt jelenti, hogy ha egész idejű $\tau(e)(e \in A)$-kat és T-ket vizsgálunk, akkor a folyamot a $g_e : \{0, 1, 2, ...T\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvény írja le.

Az imént definiált folyamnak teljesítenie kell néhány fontos tulajdonságot, mint például a kapacitási megkötéseket.

2.1.1. Állítás. *Azt mondjuk, hogy f folyam az időben teljesíti a kapacitási megkötéseket, ha $f_e(\theta) \neq u(e)$ minden $e \in E$ és $\theta \in [0, T)$ esetén. Ez azt jelenti, hogy a folyam nem lépi túl az élek kapacitásait. Ekkor az f időbeli folyamot megengedett folyamnak tekintjük.*

2.1.3. Definíció. Minden $v \in V$ csúcs esetén θ időpillanatbeli feleslegnek nevezzük azt a folyammennyiséget, amely belép a v csúcsba a θ időpillanatig bezárólag, azaz:

$$ex_f(v, \theta) := \sum_{e \in \delta^-(v)} \int_0^{\theta - \tau(e)} f_e(\xi) d\xi - \sum_{e \in \delta^+(v)} \int_0^{\theta} f_e(\xi) d\xi.$$

2.1.2. Állítás. *Azt mondjuk, hogy f folyam az időben teljesíti a gyenge folyammegmaradási megkötést, ha $ex_f(v, \theta) \geq 0$ minden $v \in V \setminus \{s\}$ és $\theta \in [0, T)$ esetén. Továbbá, $ex_f(v, \theta) = 0$-nak teljesülnie kell minden $v \in V \setminus \{s, t\}$-re.*

A gyenge folyammegmaradási megkötés megengedi, hogy folyamot tároljunk közbülső csúcsokon egy bizonyos időre, egészen addig ameddig teljesül, hogy a folyam elhagyja a csúcsot, amire az időhorizont letelik.

2.1.4. Definíció. Ha egy időbeli folyam teljesíti a gyenge folyammegmaradási megkötést, akkor az egy $s - t$ folyam az időben. Ezen időbeli $s - t$ folyam értéke a T időhorizonton $|f| := ex_f(t, T)$.

2.1.3. Állítás. *Azt mondjuk, hogy f időbeli folyam teljesíti az erős folyammegmaradási megkötést, ha $ex_f(v, \theta) = 0$ minden $v \in V \setminus \{s, t\}$ és $\theta \in [0, T]$ esetén. Ez azt jelenti, hogy nem csak T időpillanatban nincsen felesleg a csúcsokban, hanem minden $[0, T)$ időpillanatban sem.*

2.2. Hálózatok az időben

Ford és Fulkerson szerint az időbeli folyamok problémáira megoldást találhatunk, ha azokra úgy tekintünk, mint olyan statikus hálózatokra, amelyeket kiterjesztettünk az időben. Így lehetségessé válik, hogy az adott időbeli problémát visszavezessük egy statikusra. Ez pedig azért praktikus, mert így alkalmazhatóak rájuk a statikus hálózatok esetében használt algoritmusok.

2.2.1. Definíció. Legyen $G = (V, A)$ egy irányított hálózat. Minden $(i, j) \in A$ irányított élen értelmezzünk egy τ_{ij} utazási időt, amelyről feltételezzük, hogy állandóak, azaz az idő múlásával nem változnak. A G hálózat T időhorizonton történő időbeli kiterjesztését jelölje $G_T = (V_T, A_T)$, amelyet a G-ből a következőképpen kapunk:

$$N_T = \{i(\theta)|\ i \in V;\ \theta = 0, 1, \ldots, T\}$$

a csúcsok halmaza, A_T élhalmazra, pedig teljesül, hogy $A_T = A_M \cup A_H$, ahol

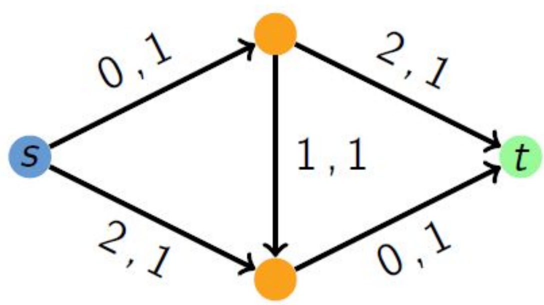
$$A_M = \{(i(\theta), j(\theta')) \mid (i, j) \in A;\ \theta' = \theta + \tau_{ij} \leq T;\ \theta = 0, 1, \ldots, T\}$$

halmazt mozgóéleknek,

$$A_H = \{(i(\theta), i(\theta + 1)) \mid i \in V;\ \theta = 0, 1, \ldots, T - 1\}$$

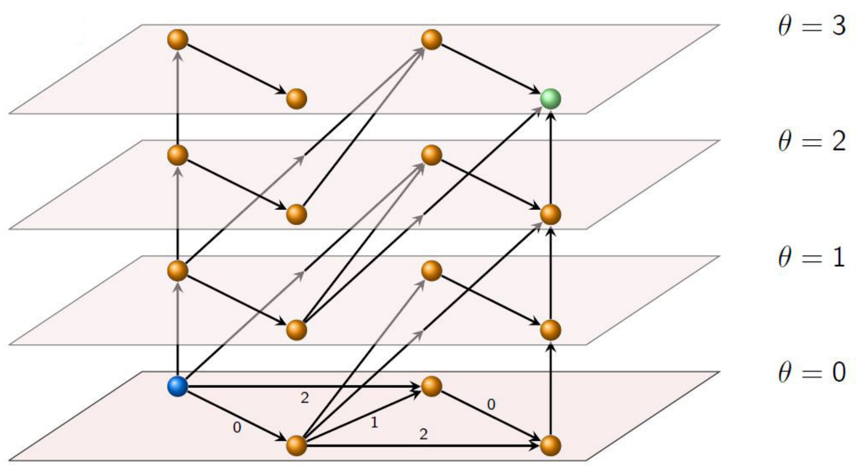
pedig maradványéleknek nevezzük. A G_T-t szokás dinamikus hálózatnak is nevezni.

Tekintsük például a 2.2. ábrán látható hálózatot, ahol s-sel jelöltük a forrást és t-vel a nyelőt. Az irányított éleken szereplő elő szám jelölje a τ_e utazási időt, a második pedig u_e az él kapacitása, minden $e \in A$ él esetén. Ha $\theta = 3$, akkor ez az előző definíció alapján kapjuk a 2.3. ábrán látható dinamikus hálózatot.



2.2. ábra.

Megfigyelhetjük, hogy ebben az új hálózatban, minden egyes θ időponthoz tartozik az eredeti pontoknak egy-egy másolata, érdemes ezeket úgy ábrázolni, mintha minden θ időpillanat egy szint lenne, ahogyan az az ábrán is látható. Ha $\theta = 0$ időpontból indulunk ki és $\theta \in [0, T)$, akkor pontosan $T + 1$ másolata lesz minden csúcsnak. Mivel minden V-beli csúcsra igaz ez, így a forrásra és a



2.3. ábra.

nyelőre is érvényes, ezért több forrásunk és több nyelőnk lesz, amely elbonyolíthatja a problémát. Annak érdekében, hogy ezt kiküszöböljük bevezethetünk egy r szuperforrást és egy d szupernyelőt. Az, hogy a ezek hogyan kapcsolódnak a forrásokhoz és a nyelőkhöz problémafüggő. A legegyszerűbb esetben a szuperforrás csak a $\theta = 0$ időpillanatbeli forrásokkal van összekötve, azonban ebben az esetben szükségünk lehet maradványélekre, mivel nem minden esetben tud elindulni a hálózatban minden folyamdarab, ez a forrásokból kiinduló élek kapacitásától függ. A szuperforrás és a forrás másolatai közötti élek utazási idejét 0-nak, a kapacitásukat pedig az egyszerűség kedvéért szokás végtelennek tekinteni. A nyelők és másolataik esetében is hasonlóan járhatunk el, az élek utazási ideje ugyanúgy 0, kapacitásuk végtelen. Az dinamikus hálózatokban felírt problémák mindig a kiterjesztett hálózatban így mindig megoldhatók, mint statikus folyam problémák.

A következő állítás pedig egy durva becslést ad a csúcsok és élek számára.

2.2.1. Állítás. *Ha $n = |V|$ és $m = |A|$, akkor legfeljebb $n(t+1)$ és $(n+m)T + m - \sum_{(i,j)\in A} \tau_{ij}$ darab csúcs és él lesz G_T-ben, a szuperforrás és szupernyelő nélkül.*

2.2.2. *Megjegyzés.* A θ idő függ a választott időegységtől, amelyben mérjük a τ utazási időt. Minél kisebb ez az egység, annál bonyolultabb hálózattal kell dolgoznunk, amely azt jelenti, hogy mag a problémát is nehezebb lesz megoldani.

3. fejezet

Dinamikus folyam feladatok

Ahogyan azt már említettük, a dinamikus folyamokat több területen is fel tudjuk használni. Ezen modellek két nagyobb csoportba sorolhatók be. Az egyik ezek közül a makroszkopikus modellek, amelyek a rendszerben áramló mennyiségeket homogénként kezelik és nem veszik figyelembe az esetleges sajátosságokat, amely ugyan egy egy folyamrészre jellemző de nem határozza meg a többit. A mikroszkopikus modellek igyekeznek kitérni ezen sajátosságokra is. A dolgozat azonban inkább csak az előbbire fog fókuszálni. Ehhez a [5], [6] és [3] cikkeket használtam fel.

Annak függvényében, hogy pontosan milyen problémát szeretnénk modellezni egy dinamikus folyam többféle modellt is fel tudunk írni. Ilyenek lesznek a következők is.

3.1. Maximum dinamikus folyam modell

A maximum folyam probléma idővel kiegészített változatát először Ford és Fulkerson mondta ki 1958-ban. Az általuk felírt eredmények eredetileg diszkrét idejű modellekre lettek tervezve. Ez azt jelenti, az időt egységnyi hosszú lépésekre bontjuk, azaz minden egyes lépésben folyamot küldhetünk egy v csúcsból a (v, w) élen keresztül a rákövetkező w csúcsba, ahova a $\tau_{(v,w)}$ idő elteltével érkezik meg. Fleischer és Tardos mutatták meg meg, hogy azok a modellek, amelyek diszkrét időre lettek kitalálva átvariálhatók, úgy, hogy folytonos idejűre is megfelelők legyenek.

Itt azonban Ford és Fulkerson eredményeivel foglalkozunk, ők arra a kérdésre szerettek volna választ találni, hogy egy hálózatban legfeljebb mennyi folyam küldhető a forrásból a nyelőbe egy előre meghatározott idő alatt. Vagyis formálisan ez a következő:

3.1.1. Feladat (Maximum folyam probléma az időben)**.** Legyen adott egy $(G = (V, A), s, t, u)$ hálózat, irányított élein $u(e)$ kapacitásokkal, egy $s \in V$ forrással és egy $t \in V$ nyelővel, valamint egy $T \geq 0$ időhorizonttal. Keressünk egy f megengedett $s - t$ folyamot az időben, T időhorizonttal, amelynek maximális az $|f|$ értéke.

A feladat megoldásához szükségünk van az átmenetileg ismételt folyam definíciójára, amelyet egy statikus $s - t$ folyamból tudunk előállítani.

3.1.2. Definíció. Legyen x egy statikus $s - t$ folyam valamilyen $(x_P)_{P \in \mathcal{P} \bigcup \mathcal{C}}$ folyamdekompozícióval. Az ebből kapható átmenetileg ismételt f folyam T időhorizonttal a következőképpen definiálható:

$$f_e(\theta) := \sum_{P \in \mathcal{P}_e(\theta)} x_P \ \forall e = (v, w) \in E, \theta \in [0, T), \tag{3.1}$$

ahol

$$\mathcal{P}_e := \{P \in \mathcal{P} : e \in P \wedge \tau(P_{s,v}) \neq \theta \wedge \tau(P_{s,t}) < T - \theta\}.$$

3.1.3. *Megjegyzés.* Az átmenetileg ismételt f folyam a következőképpen kapható meg: minden $P \in \mathcal{P}$ út esetén küldjünk folyamot x_P sebességgel P-be s forrásból $[0, T - \tau(P))$ időn keresztül és hagyjuk, hogy a folyam a nyelő felé haladjon, úgy, hogy ne késleltessük azt a közbülső csúcsoknál. Így minden elindított folyam eléri a nyelőt T időpillanatig.

3.1.4. Lemma (Az átmenetileg megengedett folyam megengedett $s - t$ folyam)**.** *Legyen x egy megengedett statikus $s-t$ folyam $(x_P)_{P \in \mathcal{P} \bigcup \mathcal{C}}$ folyamdekompozícióval. Ekkor az ebből kapható átmenetileg ismételt f megengedett időbeli $s - t$ folyam a T időhorizonton teljesíti az erős folyammegmaradási megkötést.*

Bizonyítás. A 3.1.3 megjegyzés miatt, ha egy folyamegység belép egy csúcsba az azonnal el is hagyja azt, azaz nem várakozik ott. Ezért f egy megengedett időbeli $s - t$ folyam T időhorizonttal, amely kielégíti az erős folyammegkötési szabályt. A 3.1 összefüggésből adódóan, x megengedettsége azt jelenti, hogy

$$f_e(\theta) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}; e \in P} x_P \leq x_e \leq u_e$$

teljesül minden $e \in A$ és $\theta \in [0, T)$-ra. Vagyis f megengedett folyam. $\square$

A következő lemmára, amellett, hogy így meg tudjunk mondani mennyi az átmenetileg ismételt folyam értéke, azért van szükség, mert elmondja, hogy hogyan kell megválasztani az x statikus $s-t$ foylamot, úgy, hogy egy ilyen folyamot kapjunk.

3.1.5. Lemma. *Legyen x egy megengedett statikus $s-t$ folyam $(x_P)_{P\in\mathcal{P}\bigcup\mathcal{C}}$ folyamdekompozícióval úgy, hogy $x_P = 0$ minden $P \in \mathcal{P}$, amelyre teljesül, hogy $\tau(P) > T$ és minden $P \in \mathcal{C}$-re. Ekkor az ebből kapható átmenetileg ismételt f folyam értéke a következő:*

$$|f| = T \cdot x - \sum_{e\in E} \tau_e \cdot x_e.$$

Azaz, f értéke nem függ attól, hogy melyik dekompozícióját tekintjük x-nek

Bizonyítás. A 3.1-es megjegyzés alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|f| &= \sum_{P\in\mathcal{P}} (T - \tau(P)) \cdot x_P \\
&= T \cdot \sum_{P\in\mathcal{P}} x_P - \sum_{P\in\mathcal{P}} \sum_{e\in P} \tau(e) \cdot x_P \\
&= T \cdot |x| - \sum_{e\in A} \tau(e) \cdot \sum_{P\in\mathcal{P};e\in P} x_P \\
&= T \cdot |x| - \sum_{e\in A} \tau(e) \cdot x_e.
\end{aligned}$$

□

3.1.6. Következmény. Legyen x egy megengedett statikus $s-t$ folyam $(x_P)_{P\in\mathcal{P}\bigcup\mathcal{C}}$ folyamdekompozícióval. Ekkor az így kapható átmenetileg ismételt f folyam értéke legalább $T \cdot |x| - \sum_{e\in E} \tau(e) \cdot x_e$.

Bizonyítás. Módosítsjuk x-et úgy, hogy kitöröljük a folyamot a $P \in \mathcal{P}$ utakon, amelyre teljesül, hogy $\tau(P) > T$ ls minden $P \in \mathcal{C}$ körön. Pontosabban, minden $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$-re.

$$\overline{x}_P := \begin{cases} x_P, & \text{ha } P \in \mathcal{P} \text{ és } \tau(P) < T, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A 3.1.3 megjegyzésből adódóan az átmenetileg ismtételt f és $\overline{f}$ folyamok az $(x_P)_P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$ és $(\overline{x}_P)_P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$ folyamdekompóziciókkal megegyeznek. Továbbá, mivel a folyamok, amelyek □

3.1.7. Algoritmus (Ford-Fulkerson algoritmus az időben)**.**
Bemenet: Egy $G = (V, A)$ hálózat, az élein $u(e)$ kapacitásokkal, $\tau(e)$ áthaladási idővel, $s \in V$ forrással, $t \in V$ nyelővel és $T \geq 0$ időhorizonttal.
Kimenet: Egy átmenetileg ismételt folyam T időhorizonttal.

1. Keressünk egy x megengedett statikus $s-t$ folyamot, amely maximalizálja, a
$$T \cdot |x| - \sum_{e \in A} \tau(e) \cdot x_e.$$
2. Keressünk egy $(x_P)_{P \in \mathcal{P} \bigcup \mathcal{C}}$ folyamdekompozíciót.
3. Írja ki az ebből kapható átmenetileg ismételt f folyamot.

Az első lépésben látható statikus $s-t$ folyamot a következőképpen kaphatjuk meg: tekintsük a $G' = (V, A')$ kiterjesztett hálózatot, ahol az irányított élek A' halmazát úgy kapjuk, hogy az A-hoz hozzávesszük a (t, s) mesterséges élt, amely kapacitása $u_{(t,s)} = \infty$ és utazási ideje $\tau_{(t,s)} = -T$. Bármely statikus x $s-t$ folyam G-ben indukál egy statikus áramot G'-ben, amely a folyam $|x|$ értékét rendeli a (t, s) mesterséges élhez. Ez fordítva is igaz, tetszőleges áram G'-ben előidéz egy x statikus $s-t$ folyamot G-ben, amelynek $|x|$ értéke megegyezik a folyam értékével a (t, s) mesterséges élen. Ha a τ_e utazási időkre úgy tekintünk, mint c_e költségekre minden $e \in A$ él esetén, akkor a probléma, hogy egy olyan statikus x $s-t$ folyamot találjunk, amely maximalizálja a
$$T \cdot |x| - \sum_{e \in A} \tau_e \cdot x_e$$
megegyezik azzal, hogy találjunk egy olyan folyamot, amely minimalizálja a következő értéket:
$$-T \cdot |x| - \sum_{e \in A} \tau_e \cdot x_e = c_{(t,s)} \cdot |x| + \sum_{e \in A} c_e \cdot x_e.$$

Ehhez pedig egy statikus minimum költségű áramot kell találni a G' kiterjesztett hálózatban.

3.1.8. Következmény. A statikus $s-t$ folyam a időbeli Ford-Fulkerson algoritmus első lépésében megkapható egy statikus minimum költségű áram kiszámításával a kiterjesztett $G' = (V, A')$ hálózatban.

3.1.9. Lemma. *Vegyünk egy tetszőleges $(x_P)_{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}}$ a Ford-Fulekrson algoritmus második lépéséhez. Ekkor teljesül a következő minden $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$-re: Ha $x_P > 0$, akkor*
$$\tau(P) \begin{cases} = 0, & ha\ P \in \mathcal{C}, \\ \leq T & ha\ P \in \mathcal{P}. \end{cases}$$
Pontosabban, minden folyam az x áramban törölhető anélkül, hogy megváltoztatná az x értékét. Az $s-t$ folyam, amelyet így kapunk megengedett folyam és teljesíti a 3.1.5. lemmában leírtakat.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az a $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$ út vagy kör, amelyre nem teljesül a fenti lemma egy negatív értékű áramot eredményez a reziduális G'_x hálózatban. Ezzel pedig nem lehet x optimális. □

Mivel a statikus x folyam az első lépésére teljesül a 3.1.5. lemma az átmenetileg ismételt folyamértéke megegyezik az az x optimális értékével.

3.1.10. Következmény. Legyen x egy statikus $s-t$ folyam, amelyet az időbeli Ford-Fulkerson algoritmus első lépéséből kaptunk és f egy átmenetileg ismételt folyam a harmadik lépésből. Ekkor

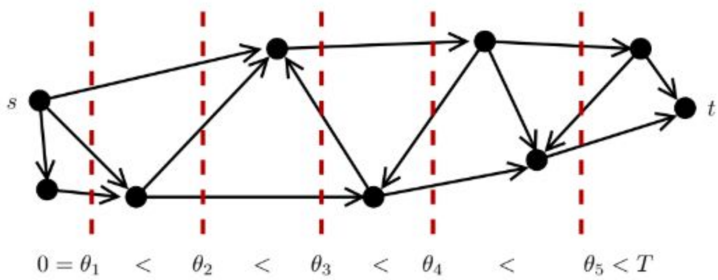
$$|f| = T \cdot |x| - \sum_{e \in A} \tau_e \cdot x_e.$$

Ebből arra következtethetünk, hogy az f időbeli $s-t$ folyam, amelyet a Ford-Fulkerson Algoritmusban kapunk értéke a legnagyobb az összes többi átmenetileg ismételt folyamhoz képest. A következő tétel, pedig még azt is kimondja, hogy f egy maximum $s-t$ folyam az időben.

3.1.11. Tétel. *Az időbeli Ford-Fulkerson algoritmus által készített átmenetileg ismételt folyam egy maximális $s-t$ folyam az időben T időhorizonttal. Az algoritmus futási ideje pedig az első lépésbeli minimum költségű folyam számításának a függvénye.*

3.1.12. Definíció. Az $s-t$ vágás az időben T időhorizonttal $\alpha_v \in \mathbb{R}$ $(\forall v \in V)$ küszöbértékek segítségével definiálható, ahol $\alpha_s = 0$ és $\alpha_t \geq T$. Az s$-t$ folyam kapacitása az időben

$$\sum_{e=(v,w) \in A} \max\{0, \alpha_w - \tau(e) - \alpha_v\} \cdot u(e).$$



3.1. ábra.

Azt mondjuk, hogy a $v \in V$ csúcs a t oldalhoz tartozik az időbeli $s-t$ vágásnál az α_v ideig és az s oldalhoz az α_v idő után. Így gondolhatunk az időbeli

$s-t$ vágásra úgy, is mint $s-t$ vágások egy sorozatára, amely az s forrástól a t nyelőig mozog, keresztülhaladva az egész hálózaton, úgy ahogyan az a 3.1. ábrán is megfigyelhető.

3.1.13. Lemma. *Az $s-t$ vágás értéke az időben a T időhorizonttal egy felső korlátot ad bármely megengedett $s-t$ folyam értékére az időben ugyanazzal az időhorizonttal.*

Bizonyítás. Legyen f egy megengedett $s-t$ folyam az időben a T időhorizonttal és definiáljon $(\alpha_v)_{v\in V}$ egy $s-t$ vágást az időben a T időhorizonton. Az 2.1.3. definíció alapján kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}|f| = ex_f(t,\alpha_t) &\leq \sum_{v\in V} ex_f(v,\alpha_v)\\ &= \sum_{v\in V}\left(\sum_{e\in\delta^-(v)}\int_0^{\alpha_v-\tau_e} f_e(\theta)d\theta - \sum_{e\in\delta^+(v)}\int_0^{\alpha_v} f_e(\theta)d\theta\right).\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség miatt használjuk azt a tényt is, hogy $ex_f(s,0)=0$. A jobb oldalon felcserélve a jobb oldalon lévő szummák sorrendjét kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}|f| &\leq \sum_{e=(v,w)\in A}\left(\int_0^{\alpha_w-\tau_e} f_e(\theta)d\theta - \int_0^{\alpha_v} f_e(\theta)d\theta\right)\\ &= \sum_{e=(v,w)\in A}\int_{\alpha_v}^{\alpha_w-\tau_e} f_e(\theta)d\theta\\ &\leq \sum_{e=(v,w)\in A}\max\{0,\alpha_w-\tau_v-\alpha_v\}\cdot u_e.\end{aligned}$$

□

A 3.1.11. tétel így már bizonyítható lineáris programozási eszközökkel.

3.1.14. Következmény. Az $s-t$ vágás az időben a T időhorizonttal és a minimum kapacitás megkapható a statikus minimum költségű folyamból.

3.1.15. Tétel (Maximális folyam minimális vágás az időben)**.** *A maximum értéke egy $s-t$ folyamnak az időben a T időhorizonton megegyezik az időben történő $s-t$ vágás kapacitásának minimum értékével a T időhorizonton.*

3.1.16. *Megjegyzés.* A dinamikus maximum folyam probléma is megoldható dinamikus hálózat segítségével.

3.2. Univerzálisan maximum folyam modell

Az előző részben ismertetett Ford és Fulkerson nevéhez köthető időbeli maximum folyam a lehető legtöbb folyammennyiséget szerette volna eljuttatni az s forrásból a t nyelőig adott T időhorizont alatt. Ehhez képest az univerzális folyam modell vagy másnéven legkorábban beérkező folyam modell, minden $\theta \geq 0$ időpillanatban maximalizálja at átküldhető folyammennyiséget.

3.2.1. Definíció. Egy f megengedett $s - t$ folyam az időben, a T időhorizonton rendelkezik a legkorábban beérkezés tulajdonsággal és ezért legkorábban beérkező folyamnak nevezzük, ha maximalizálja az $ex_f(t, \theta)$ értékét minden $\theta \in [0, T]$-ra egyidejűleg.

Először nem tűnik evidensnek a legkorábban beérkező folyam létezése. Megmutatható, hogy a az átmenetileg ismételt folyamok általában nem tartalmaznak ilyen folyamot. Ezért szükség lesz egy kissé általánosabb $s - t$ időbeli folyam definíciójának a bevezetésére.

3.2.2. Definíció. Legyen x egy statikus $s - t$ folyam a $(x_P)_{P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}}$ általánosított útdekompozícióval. Ekkor az általánosított átmenetileg ismételt f folyamot T időhorizonttal a következőképpen definiáljuk:

$$F_e(\theta) = \sum_{P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_e(\theta)} x_P - \sum_{P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\overleftarrow{e}}(\theta)} x_P$$

minden $e = (v, w) \in E$ és $\theta \in [0, T)$ esetén, ahol

$$\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_e(\theta) = \left\{ P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}} | e \in P \wedge \tau(P_{s,v}) \leq \theta \wedge \tau(P_{v,t}) < T - \theta \right\},$$

valamint ehhez hasonlóan

$$\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\overleftarrow{e}}(\theta) = \left\{ P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}} | \overleftarrow{e} \in P \wedge \tau(P_{s,v}) \leq \theta \wedge \tau(P_{v,t}) < T - \theta \right\}.$$

Vegyük észre, hogy az általánosított átmenetileg ismételt f folyam nem feltétlenül egy rendes folyam az időben, mivel $f_e(\theta)$ lehet negatív is. Pontosabban, az f-et a következőképpen is lehet értelmezni, származtatni:

Minden $P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}$ út esetén küldjünk P-be x_P mennyiségű folyamot a $[0, T - \tau(P))$ időintervallum alatt és hagyjuk, hogy a nyelő felé haladjon, ne késleltessük egyik közbülső csúcsnál sem. Ha valamely P tartalmaz $\overleftarrow{e} = (w, v)$ élet, amelynek az utazási ideje negatív, azaz $-\tau_e$, akkor az a folyam, amely ezen keresztülmegy tulajdonképpen visszamegy az időben. Ez azt jelenti, hogy ha a folyamdarab belép az $\overleftarrow{e}$ élbe a w csúcsnál a θ. időpillanatban, akkor v csúcsba pontosan $\theta - \tau_e$ időpillanatban érkezik meg. A definícióban ez úgy jelenik meg, hogy az $f_e(\theta - \tau_e)$ negatív folyamértéket rendel az e élhez. Azonban bizonyos esetekben ez a negatív érték kiküszöbölhető, ugyanis, ha van egy másik folyamrész a v csúcsnál, amely éppen be akar lépni az e csúcsba a $\theta - \tau_e$ időpontban, akkor a két rész, amely e-n ellentétes irányban keresztülhalad kioltják egymást, pontosabban, "identitást" cserélnek. A definícióban ez úgy jelenik meg, hogy a pozitív értékek az első szummában kompenzálnak a második szummában lévő negatív értékekért.

A következőkben az eddig τ_e-vel jelölt utazási időre úgy fogunk tekinteni, mint költségre, ezért $\tau_e = c_e$ minden $e \in A$ élre és bevezetjük a $dist_x(v, w)$ jelölést, amely a minimum utazási időt fogja jelölni a $v - w$ úton a G_x reziduális hálózatban.

3.2.3. Algoritmus (Legkorábban beérkező folyam algoritmus)**.**
Bemenet: Egy $G = (V, A)$ hálózat, az élein $u(e)$ kapacitásokkal, $\tau(e)$ áthaladási idővel, $s \in V$ forrással, $t \in V$ nyelővel és $T \geq 0$ időhorizonttal.
Kimenet: Egy általánosított átmenetileg ismételt folyam T időhorizonttal.

1. Legyen $x_P = 0$ minden $P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}$-re és x egy statikus $s - t$ folyam az $(x_P)_{P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}}$ általánosított út dekompozícióval.

2. Amíg $dist_x(s, t) < T$, addig keressünk legrövidebb $s - t$ utat G_x-ben és növeljük x_P értékét a P reziduális kapacitásával.

3. Írjuk ki az $(x_P) : P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}$-dekompozícióhoz tartozó általánosított átmenetileg ismételt folyamot, f-et, aminek időhorizontja T.

Feltételezzük, hogy az algoritmus második lépése véget ér q iteráció után. Minden $i = 1, \ldots, q$-ra jelölje x^i az x megengedett $s - t$ folyamot az i. iteráció előtt és legyen P^i a legrövidebb út, amelyet az i. iterációban megtalálható. Pontosabban, $(x_{P^i})_{i=1,\ldots,k}$ egy általánosított útdekompozíciója x^{k-1}-nek. Mivel a P^i a legrövidebb $s - t$ út a G_{x^i} reziduális hálózatban, minden $v \in P^i$ csúcsra azt kapjuk, hogy

$$\tau(P^i_{s,v}) = dist_{x^i}(s, v) \text{ és } \tau(P^i_{v,t}) = dist_{x^i}(v, t).$$

Annak érdekében, hogy megmutassuk, hogy f egy megengedett folyam az időben szükségünk van a következő lemmára:

3.2.4. Lemma. *A $dist_{x^i}(s, v)$ és $dist_{x^i}(v, t)$ értékek monoton növekednek az i növekedésével.*

A következőkben megmutatjuk, hogy a legkorábban beérkező folyam algoritmus által számolt folyam az időben egy megengedett folyam.

3.2.5. Lemma. *Az f általánosított átmenetileg ismételt folyam, amelyet a legkorábban beérkező folyam algoritmus kimenetében kapunk egy megengedett $s-t$ folyam az időben, T időhorizonttal.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az f egy megengedett folyam az időben, vagyis teljesül rá, hogy $0 < f_e(\theta) < u_e$ minden $e = (v, w) \in E$ és $\theta \in [0, T)$-ra. Rögzített e-re és θ-ra:

$$k := \max \left\{ i | dist_{x^i}(s, v) \leq \theta \wedge dist_{x^i}(v, t) < T - \theta \right\}.$$

Az általánosított átmenetileg ismételt folyam definíciójából és a 3.2.4. lemmából adódóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_e(\theta) &= \sum_{P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_e(\theta)} x_P - \sum_{P \in \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{\overleftarrow{e}}(\theta)} x_P \\ &= \sum_{i \in \{1,\ldots,k\};\ e \in P^i} x_{P^i} - \sum_{i \in \{1,\ldots,k\};\ \overleftarrow{e} \in P^i} x_{P^i} \\ &= x^{k+1}(e) \in [0, u_e]. \end{aligned}$$

Az lemma előttiekben leírtak alapján f teljesíti az erős folyammegmaradási szabály és időhorizontja T. □

3.2.1. Állítás. *Az f általánosított átmenetileg ismételt folyam, amelyet a legkorábban beérkező folyam algoritmus kimenetében kapunk egy legkorábban beérkező folyam, T időhorizonttal.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $ex_f(t, \theta)$ értéke maximális minden $\theta \in [0, T]$ esetén. Rögzített θ-ra legyen

$$k := \max \left\{ i | dist_{x^i}(s, t) \leq \theta \right\}.$$

Mivel $\tau(P^i) = dist_{x^i}(s, t)$ monoton növekszik i növekedésével a lemma előttiek alapján kapjuk, hogy

$$ex_f(t, \theta) = \sum_{i=1}^{k} (\theta - \tau(P^i)) \cdot x_{P^i} = \theta \cdot |x^{k+1}| - \sum_{e \in A} \tau_e \cdot x_e^{k+1}.$$

Megfelelő k választással az x^{k+1} $s-t$ folyam egy minimum költségű $s-t$ folyam G-ben, mivel $c_e = \tau_e$ minden $e \in A$ élre. Ezen kívül indukál egy minimum költségű áramot a kiterjesztett hálózatban, amelyet úgy kapunk, hogy G élhalmazához hozzávesszük a (t,s) élet $\tau_{(t,s)} = -\theta$ utazási idővel. Ez a mesterséges él és a hozzá tartozó visszaél nem idéznek elő negatív kört a reziduális gráfban, mivel a megfelelő k megválasztásával minden x^{k+1} $s-t$ út, amin keresztülmegy a folyam korlátolva van θ által, továbbá, minden $s-t$ út hossza $G_{x^{k+1}}$-ben nagyobb, mint θ. Ezért x^{k+1} maximalizálja

$$\theta \cdot |x| - \sum_{e \in A} \tau_e \cdot x_e\text{-t},$$

ami miatt $ex_f(t,\theta)$ értéke maximális. $\square$

3.3. Leggyorsabb út és leggyorsabb folyam modell

A leggyorsabb út modell a legrövidebb útkeresés egy variációja. A feladat az, hogy egy előre meghatározott folyammennyiséget eljuttassunk a forrásból a nyelőbe, amilyen gyorsan csak lehet, egyetlen útvonalat felhasználva. A "legrövidebb" szó azonban nem csak az élek utazási idején múlik, hanem a folyamrészek számán is, amelyet át szeretnénk juttatni rajtuk. A folyamot folyamatosan küldjük át a rendszeren, ahogyan telik az idő.

3.3.1. A leggyorsabb út probléma

3.3.1. Definíció. Legyen adott a $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ a statikus G hálózatban. Ekkor a P út kapacitása, amelyet $c(P)$-vel jelölünk a következőképpen definiálható:

$$c(P) = \min_{1 \le i \le k-1} b(v_i, v_{i+1}).$$

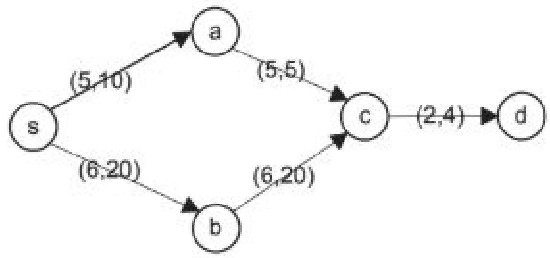
A P út hosszán, vagyis utazási idején a következőt érjük:

$$\tau(P) = \sum_{i=1}^{k-1} \tau(v_i, v_{i+1}).$$

Az időt, amelyre szükség van σ mennyiségű folyam v_i csúcsból a v_k csúcsba való P úton történő eljuttatására megkaphatjuk az alábbi képlettel:

$$T(\sigma, P) = \tau(P) + \frac{\sigma}{\tau(P)}.$$

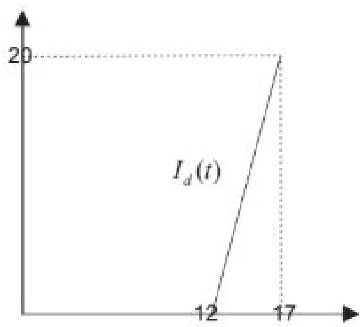
A klasszikus legrövidebb út problémától az, hogy minden részútja a legrövidebb útnak is legrövidebb út nem teljesül ebben a modellben, ahogyan azt a következő példában is látni lehet.



3.2. ábra.

Tekintsük a 3.2. ábrán látható hálózatot, ahol az éleken elsőnek azok utazási ideje, másodiknak pedig a kapacitása van feltüntetve. Tegyük fel, hogy 20 egységnyi folyamot szeretnénk keresztül küldeni a rendszeren az s forrástól a c nyelőig. Ekkor a legrövidebb út $P_1 = (s, b, c)$ lesz, így $T(20, P_1) = 12 + \frac{20}{20} = 13$. Ha a c helyett a d csúcsot tekintjük nyelőnek, akkor a legrövidebb út a $P_2 = (s, a, c, d)$ és $T(20, P_2) = 17$. Azonban, ha megnézzük a $P_3 = (s, a, c) \subset P_2$ részutat az nem a leggyorsabb út lesz s-ből c-be. Azt is megfigyelhetjük, hogy P_1 nem a klasszikus értelemben vett legrövidebb út, az utazási időt tekintve, s-ből c-be. A folyam mennyiség, amely eléri a d nyelőt a θ idő alatt megadható a következő függvénnyel, amely az 3.3. ábrán is látható:

$$I_d(\theta) = \begin{cases} 4(t-12), & t \leq 12, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



3.3. ábra.

A következő két tétel megmutatja a kapcsolatot a legrövidebb út és a leggyorsabb út között. Ehhez definiáljuk a G hálózathoz és egy adott z értékhez egy $G(z) = (V, A(z))$ szubgráfot, ahol $A(z) = \{(i, j) : (i, j) \in A \text{ és } c_ij \geq z\}$.

3.3.2. Tétel (Rosen)**.** *Ha P a leggyorsabb $s - t$ folyam a G statikus hálózatban, ahol σ mennyiségű folyamot szeretnénk átküldeni, akkor* *(i) P a legrövidebb $s-t$ út a $G(c(P))$-ben,*

(ii) P bármely részútja is legrövidebb út $G(c(P))$-ben.

3.3.3. Tétel (Rosen)**.** *Legyen r a különböző kapacitásértékek száma és legyen P_j a legrövidebb $s-t$ út $G(c_j)$, $j = 1, \dots, r$. Ha*

$$\tau(P_l) + \frac{\sigma}{(P_l)} = \min_{1 \le j \le r} \left\{ \tau(P_j) + \frac{\sigma}{c(P_j)} \right\},$$

akkor P_l a legrövidebb $s-t$ út G-ben, amelyen σ mennyiségű folyam folyik keresztül.

Ezen két tétel alapján Rosen és társai kifejlesztették a következő egyszerű algoritmust:

3.3.4. Algoritmus. Minden $j = 1, \dots, r$-re számoljuk ki a legrövidebb $s-t$ utat $G(c_j)$-ben, majd alkalmazzuk a 3.3.3. tételt.

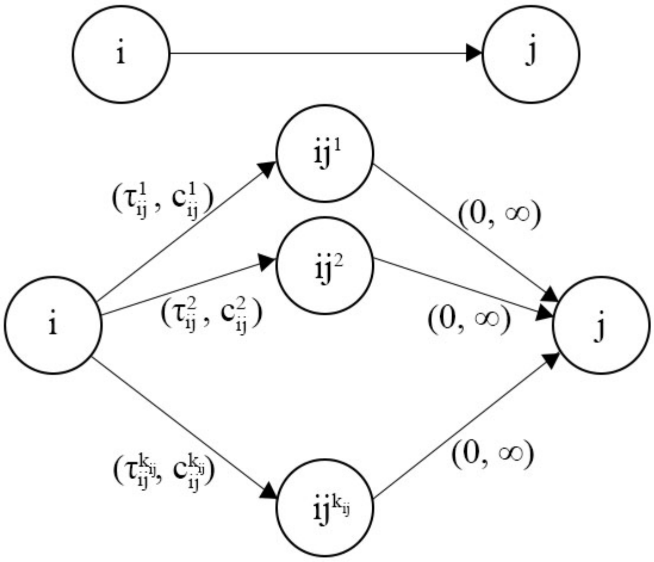
Minden P_j út kiszámolása $O(m+n\log n)$ időt vesz igénybe, így tehát az egész algoritmus $O(rm + rn\log n)$ idő alatt fog lefutni.

Egy még pontosabb megoldást kaphatunk, ha figyelembe vesszük, hogy az idő függ a folyamtól magától is. Itt feltesszük, hogy az utazási idő a folyam egy lépcsős függvénye, amely nemcsökkenő és konstans minden folyamegység esetén. Legyen k_{ij} a különböző utazási idők száma az (i,j) élnek minden $e = (i,j) \in A$ esetén, továbbá legyen $k^* = \max_{(i,j)\in A} \{k_{ij}\}$. Ekkor az (i,j) él utazási idejét a következőképpen definiálhatjuk:

$$\tau_{ij}(x_{ij}) := \begin{cases} \tau_{ij}^1, & 0 \le x_{ij} \le c_{ij}^1, \\ \tau_{ij}^2, & 0 \le x_{ij} \le c_{ij}^2, \\ \dots & \dots \\ \tau_{ij}^{k_{ij}}, & 0 \le x_{ij} \le c_{ij}^{k_{ij}}. \end{cases}$$

Minden (i,j) élhez létrehozunk egy k_{ij} mesterséges csúcsot, amelyet jelöljünk $ij^1, \dots, ij^{k_{ij}}$-vel. Kössük össze az i csúcsot az ij^l csúccsal, amelyet aztán kössünk össze a j csúccsal, minden $l = 1, \dots, k_{ij}$ esetén, ahogyna az a 3.4. ábrán is látható. Az (i, ij^l) él kapacitása c_{ij}^l, utazási ideje τ_{ij}^l, az (ij^l, j) él kapacitása és utazási ideje pedig ∞ és 0. A módosított hálózatnak így legfeljebb $(n + mk^*)$ csúcsa, $2mk^*$ éle és mk^* darab különböző kapacitása lesz. A leggyorsabb utat pedig úgy kapjuk meg ezek után, hogy alkalmazzuk az előző algoritmust.

3.3.1. Állítás. *Legyen P a leggyorsabb út és $(i,j) \in P$. Ekkor az (i,j) él a $c(P)$-hez legközelebb eső kapacitást fogja használni, pontosabban ha $b_{ij}^{l-1} \le c(P) \le b_{ij}^l$, akkor $(i, ij^r) \in P$ ha $r = l$ és $(i, ij^r) \notin P$ ha $r \ne l$.*



3.4. ábra.

3.3.2. A leggyorsabb folyam probléma

A leggyorsabb út problémával ellentétben a leggyorsabba folyam probléma esetében megengedett, hogy egyszerre több úton is haladjon a folyam. A feladat pedig az, hogy egy dinamikus hálózatban az egyetlen forrásból eljuttassa a folyamot a nyelőbe a legrövidebb idő alatt. Vagyis pontosabban, a $T = T(v)$ függvényt szeretnénk minimalizálni, ahol v az előre megadott folyammennyiség, amelyet szeretnénk keresztüljuttatni a rendszeren. A következő tétel a problémát megoldó algoritmus felírásához szükséges.

3.3.5. Tétel.

(i) *Legyen T_0 a forrástól a nyelőig tartó legrövidebb idő alatt megtehető út ideje. Ekkor $v(T)$ egy monoton növekvő függvény,sőt minden $T \geq T_0$ esetén szigorúan növekvő.*

(ii) $\Delta(T) = v(T) - v(T-1)$ *minden* $T > 0$ *esetén növekszik, vagyis másképpen:*

$$\Delta(T+1) \geq \Delta(T),\ \forall T > 0.$$

(iii) $\Delta(T)$ *a* $\{0, 1, \ldots, |x_{\max}|\}$ *halmazbeli értékeket veheti fel, ahol* $|x_{\max}|$ *a statikus* G *hálózatbeli folyam maximum értéke.*

A maximum dinamikus folyam és a leggyorsabb folyam között és található összefüggés, amelyet a következő lemmában fogalmazunk meg.

3.3.6. Lemma.

(i) $T(v) = \min\{T|v(T) \geq v\}$, *ahol* $v(T)$ *a dinamikus maximum folyam a* T *időhorizonton.*

(ii) *Legyen* x *egy dinamikus maximum folyam* v *értékkel és* $[0, T]$ *idővel, ahol* $T \geq 0$. *Ha* $v(T-1) < v$, *akkor* x *a leggyorsabb* v *értékű folyam és a minimum kijutási idő* $T(v) = T$.

(iii) $v(T(v) - 1) < v$.

A megoldást egy iterációs folyamatból kaphatunk meg, amelynek két fő lépése van. Az első megbecsüli a T időt egy bináris kereséssel, Newton vagy más interpolációs technikákkal. A második pedig megoldja a minimum értékű folyam problémát a T paraméterrel. A folyamat addig ismétlődik, ameddig $v(T) \approx v$.

3.4. Minimum költségű folyam modell

A minimum költségű folyam probléma esetében az időbeli folyamot egy olyan hálózatban tekintjük, ahol minden $e \in A$ élnek van egy $c_e \leq 0$ költsége. Ahogyan az a statikus hálózatoknál is c_e azt mondja meg, hogy mennyi a költsége egy folyamegység egyik csúcsból az e élen keresztül a másikba történő átküldésének. Így a egy f időbeli folyam költsége T időhorizonttal:

$$c(f) = \sum_{e \in A} c_e \cdot \int_0^T f_e(\theta) d\theta.$$

A következő feladatot tekintjük az minimum költségű folyam problémát az időben.

3.4.1. Feladat (Minimum költségű $s - t$ folyam probléma az időben)**.**
Adott: Egy $G = (V, A)$ hálózat kapacitásokkal, utazási időkkel, költségekkel az éleken, $s \in V$ forrással, $t \in V$ nyelővel, $T \geq 0$ időhorizonttal és d követeléssel.
Feladat: Keressünk egy f megengedett $s - t$ folyamot az időben, amelynek az időhorizontja T, értéke d és minimális a költsége.

4. fejezet

Evakuációs probléma

Az előző fejezetben ismertetett modelleknek többféle gyakorlati alkalmazása is lehetséges. Egyik ilyen például az evakuációs probléma. Ebben a fejezetben a [3] és [2] cikkeket használtam fel.

4.1. Az evakuációs modellek feltételezései és céljai

Evakuáció alatt azt a folyamatot értjük, amelyben embereket távolítunk el egy bizonyos területről mivel azok veszéses zónának minősülnek biztonságügyi okokból kifolyólag, emiatt az ott tartózkodók mielőbbi biztonságos kijuttatása a cél. Kétféleképpen tekinthetünk erre a problémára, elsősorban mielőtt a veszély kialakulna, elővigyázatosságból vagy az erre vonatkozó jogszabályok miatt szükség van evakuációs útvonalak megtervezésére, a második lehetőség pedig, ha valamilyen okból kifolyólag nem lehetséges az eredeti terv véghezvitele ezért a kialakult szituációhoz alkalmazkodva, mint például a sebesültek mentése vagy eltorlaszolt utak, kell ott helyben egy újabb tervet kitalálni. Evakuációs helyzet több helyszínen is kialakulhat, mint például egy épület, város, vagy egy nagyon régióban. Ennek köszönhetően több befolyásoló tényező is hathat a kiürítésre váró rendszerre, ilyen például, hogy milyen a rendszer alaprajza, a veszély és a biztonságos terület elhelyezkedése vagy, hogy milyen tulajdonságokkal bírnak a menekülők, amelyek nehezíthetik a haladást. Ezeket az információkat egy úgynevezett súlyossági mátrixban szokták tárolni, ahol az oszlopvektorokban megtalálhatóak a veszély súlyossága egy adott helyen és adott időpontban.

Az evakuációs idő, vagyis az az idő amelyre szükség van ahhoz, hogy az összes embert kijusson a veszélyes területről több minden is befolyásolni tudja, ilyen például az, hogy mennyi idő alatt ismerik fel a veszélyhelyzetet vagy az, hogy mennyi időbe telik míg eldöntik, hogy melyik útvonalat válasszák a meneküléshez, vagy az, hogy mennyi időbe telik onnan elérni a biztonságos területet. Mivel a két előbbit rendkívül nehéz meghatározni, mivel azok az embereken és azok viselkedésén múlik, ezért a menekülési útvonalak tervezésénél leginkább az utóbbit szokták figyelembe venni.

4.2. Makro- és mikroszkopikus modellek

A dolgozatban bemutatott modelleken kívül is még rengeteg modell létezik, amelyek az evakuációs problémára specializálódtak. Már említettük, hogy ezen modelleket egy csoportosítási módja, ha mint makroszkopikus vagy mikroszkopikus modellekként tekintünk rájuk.

Az előbbi eset nem foglalkozik többek között olyan részletekkel, mint az emberek közötti egyéni különbségek. Inkább egy homogén csoportként tekint rájuk és csak a közös tulajdonságait veszi figyelembe. A makroszkopikus modelleknek általában dinamikus hálózati folyamok adják az alapját. Az ötlet az, hogy az épület vagy terület alaprajzát és egyéb tulajdonságait egy statikus G hálózatban jelenítsük meg. Ezután maga a modellezést pedig a G_T dinamikus hálózatban történik, amely, mint ahogyan azt már feljebb említettük az idővel kibővített változata a G-nek. Magát az evakuációs folyamatot pedig a folyam haladásával lehet lekövetni. Egy épület evakuálása esetén a statikus hálózatban a csúcsok fogják a különböző szobákat, termeket vagy egyéb helységeket szimbolizálni, a hálózat élei pedig az ezen helyek közötti utakat, folyosókat jelölik. Azt a helyet vagy helységeket, ahol emberek nagy számban fordulnak elő forrásnak vagy forrásoknak nevezzük, míg a biztonságos helyeket vagy vészkijáratokat pedig nyelőnek vagy nyelőknek, attól függően, hogy pontosan hány darab is van belőlük. Ahogyan azt a 2.2. fejezetben említettük, abban az esetben ha több van bármelyikből létrehozhatunk egy szuperforrást és egy szupernyelőt, amelyeket összekötjük a megfelelő csúcsokkal és megfelelő utazási időt, illetve kapacitást rendelünk hozzájuk. Azonban meg kell jegyeznünk, hogy léteznek olyan modellek is, amelyek több forrást és nyelőt is tudnak kezelni. Modelltől függően lehetnek a csúcsoknak kapacitásaik, amelyek azt hivatottak megszabni, hogy mennyi ember tartózkodhat legfeljebb az adott helységben, ezt akár egy függvénnyel is megadhatjuk. Az éleknek van kapacitásuk, amely egy felső korlátot ad arra, hogy mennyi ember tud egy időegység alatt áthaladni az élen, valamint utazási idejük, amely pedig megmondja, hogy az egyik csúcsból, vagyis helységből a másikba mennyi idő alatt tudnak emberek átjutni. Az evakuációs problémákban ennek van a legnagyobb szerepe, mivel ez szabja meg, hogy mennyi idő alatt lehetséges az egész folyamatot véghezvinni. Egyes modellekben figyelembe tudják venni azt is, hogy két helység között nem mindig lesz ott az folyosó, mivel az a veszély terjedésével megszűnhet, mint potenciális út. Ezt például úgy jeleníthető meg, hogy a folyosót reprezentáló él kapacitását egy idő után 0-ra változtatjuk. A dinamikus hálózati folyam problémákra létrehozott modellek többsége feltételezi, hogy az attribútumok állandóak, tehát például az utazási idő egyik csúcsból a másikba állandó. Ezeket az időket pedig előzetes mérések alapján tudjuk meghatározni.

A modellek egy másik lehetséges csoportosítási módja az, ha az időt tekintve folytonosnak vagy diszkrétnek nevezzük őket.

A mikroszkopikus modellek az emberek közötti egyéni különbségekre, mint például a haladásuk sebességére, reakcióidejükre vagy fizikai állapotukra jobban rá vannak hangolódva. Ezen kívül figyelembe veszi az emberek közötti mozgás közben bekövetkező interakciókat is, amelyekről a [2] cikkben olvashatunk részletesebben.

A dolgozatban csak makroszkopikus modellekkel foglalkoztunk.

4.3. Modellek és evakuáció

A maximum dinamikus folyam modell esetében azt szeretnénk meghatározni, hogy egy előre megadott T idő alatt pontosan mennyi ember tud eljutni a forrásból a nyelőbe. Tehát, ez akkor alkalmazható, ha nem áll módunkban meghatározni, hogy mennyi menekülő embert kell biztonságos helyre vinni.

Az univerzálisan maximum folyam modellnél, mivel az egy speciális fajtája az előzőnek ugyan ezt szeretnénk meghatározni azzal a plusz feltétellel, hogy minden időpillanatban maximális mennyiségű embert szeretnénk tudni kimenekíteni.

A leggyorsabb út probléma akkor hasznos, ha az emberek egyetlen egy utat tudnak csak használni a menekülés során. Ezt az utat csak és kizárólag az az egy ember vagy embercsoport veszi igénybe, akik eleinte elindultak rajta, vagyis más ember vagy emberek nem zavarják meg őket. A leggyorsabb folyam modell hasonló az előzőhöz, azonban itt megengedett, hogy folyamot, azaz embereket küldjünk több útvonalon is. Fontos megemlíteni, hogy a két modell nem feltétlen eredményezi ugyan azt az utat, vagyis a legrövidebb út nem mindig azonos a leggyorsabb folyam útjával. Egyes esetekben érdemes elgondolkozni, hogy melyik modellt érdemes alkalmazni, ugyanis előfordulhat, hogy míg az egyikkel több időbe telhet, mire az első ember kijut, de több embert tudunk vele megmenekíteni, addig a másikkal rövidebb idő telik el az első ember kijutásáig, de kevesebb ember juthat csak biztonságba. Sok múlik a kimenekítendő emberek számán.

A minimum költségű folyam modell pedig akkor hasznos, ha meg szeretnénk határozni egy ember átlagos kijutási idejét.

Irodalomjegyzék

[1] András Frank: Operációkutatás, 2008.

[2] Dirk Helbing, Illés Farkas, Tamás Vicsek: Simulating dynamical features of escape panic, *Nature* 407, 2000, 487-490.

[3] Horst W. Hamacher, Stevanus A. Tjandra : Mathematical Modelling of Evacuation problems: A State of the Art, 2002.

[4] L. Fleischer, É. Tardos: Efficient Continuous-Time Dynamic Network Flow Algorithms, *Operations Research Letters* 23.3-5 (1998): 71-80.

[5] Martin Skutella: An Introduction to Network Flows Over Time, *Research Trends in Combinatorial Optimization*, 2009, 451-482.

[6] Martin Skutella: The notion of time in network routing problems and a novel view on algortihms' complexity, *17th British-French-German Conference on Optimatization*, 2015.

[7] P.Lin, S.M.Lo, H.C.Huang, K.K.Yuen: On the use of multi-stage time-varying quickest time approach for optimization of evacuation planning, *Fire Safety Journal* 43(4):282-290, 2008.

[8] Yasuki Iizuka, Katsuya Kinoshita, Kayo Iizuka:Agent Based Disaster Evacuation Assistance System, *Information Engineering Express*, International Institute of Applied Informatics, 2015, Vol. 1, No. 2, 41-50.

[9] Zoltán Király: Gráfok és Algoritmusok elmélete, 2013.