

# Járványterjedés modellezése adaptív hálózatokon

Szakdolgozat

Írta: Major Levente Attila

Matematika BSc  
elemző szakirány

Témavezető: Bodó Ágnes  
PhD hallgató

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar  
Budapest, 2018

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>1. Differenciálegyenletek és bifurkációelmélet</b>	<b>6</b>
1.1. Differenciálegyenletek . . . . .	6
1.2. Bifurkációelmélet . . . . .	11
<b>2. Hálózati folyamatok</b>	<b>18</b>
2.1. Adaptív hálózatok . . . . .	18
2.2. Járványterjedési modellek . . . . .	20
2.3. Adaptív járványterjedési modellek leírása . . . . .	24
<b>3. Adaptív járványterjedési modellek vizsgálata</b>	<b>26</b>
3.1. Adaptív, párok szintjén felírt, átlagoláson alapuló SIS modell . . . . .	26
3.2. Adaptív, párok szintjén felírt, átlagoláson alapuló SIRS modell . . . . .	34
<b>Összefoglalás</b>	<b>40</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>41</b>

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Bodó Ágnesnek, hogy elvállalta a konzulensi teendőket. Hálás vagyok a rengeteg segítségért, jótanácsért, és nem utolsósorban a végtelen türelméért.

Továbbá köszönetet szeretnék mondani családomnak és barátaimnak, hogy a szakdolgozat írása alatt végig bíztattak és támogattak.

# Bevezetés

*„A hálózatokkal az a szerencse, hogy mindenki találkozott már velük. Barátaink, ismerőseink révén társadalmi hálóban élünk; naponta használjuk a világhálót, s miközben lapról lapra vándorolunk, egyre inkább érezzük, hogy minden összekapcsolódik; tudjuk, hogy gondolkodásunk szoros kapcsolatban álló neuronok hálóján alapszik; és ha nem is gondolunk rá, minden sejtünkben bonyolult hálózatok szabályozzák génjeink kölcsönhatásait. Azt azonban valószínűleg kevesen tudják, hogy ezek a hálózatok, amelyek az élet számos területén megjelennek, mély matematikai törvényekkel és roppant bonyolult összefüggésekkel írhatók le.”*

Silberer Vera

A hálózati folyamatok témaköre napjaink fontos kutatási területe. Hálózati folyamat például az aktivitás terjedése neurális hálózatokon, vagy a vélemények terjedése társadalmi hálózatokon, illetve egy populáción belüli fertőzés terjedésének időbeli lefolyása. A dolgozatban utóbbival fogunk részletesen foglalkozni.

Az emberiség történelmét a kezdetek óta meghatározzák a járványok. Egész népeket, civilizációkat söpörtek le a térképről az évszázadok alatt. Példának okáért vegyük a bibliai tularémia járványt, amely Egyiptomot sújtotta Kr. e. 1715 körül [26], vagy akár az Athénban, Kr. e. 430–425 körül a periklészi aranykor pusztulását okozó betegséget, amelyről a tudósok máig csak találgatnak, hogy milyen kórokozó okozhatta [13]. Ezen felül gondolhatunk a középkorban, 1346-ban felbukkanó fekete halálra vagy más néven bubópestisre, amely becslések szerint öt év alatt Európa lakosságát 60%-kal csökkentette [2]. Később, a 16. században a „cocolitzi” betegség ütötte fel fejét, amely 13 millió halálos áldozatot követelt [1]. Ezt követően, 1817-ben kelt lábra Ázsiában a kolera, amely több százezer ember halálát okozta, és az ezt követő évtizedekben a járvány újra és újra kiújult a térségben [8]. Egy évszázaddal később, 1918–19-ben felbukkant a spanyolnátha, amely végigsöpört Amerikán, Európán, Ázsián túl Afrikán is. A halálos áldozatok száma a becslések szerint meghaladta a 40 millió főt. Utóbbit még kettő, kevésbé súlyos influenzajárvány követett 1957-ben

és 1963-ban [27]. Nemcsak a múltban, hanem manapság is újabb és újabb járványok ütöttek fel a fejüket, mint például a szinte éves rendszerességgel kitörő influenza, vagy a nemrég lecsendesült ebola-, illetve kanyarójárvány [28, 29].

A gyors technológiai és elméleti fejlődésnek köszönhetően drámaian lecsökkent a járványok okozta halálozások száma, hiszen egyre több információ áll az emberiség rendelkezésére a betegségekről. Adott esetekben oltásokkal előzhetjük meg ezeket, illetve gyógyszereket fejlesztünk ki a betegek gyógyítására, kezelésére. A higiéniai állapot is nagy mértékben javult a világ fejlettebb régióiban, amelynek a megelőzésben van fontos szerepe. Ezeken túl kezdjük jobban megismerni a járványok viselkedését, amelyeket matematikai módon modellezhetünk, mint ahogy azt a dolgozatomban is be fogom mutatni. Ezek segítségével optimalizálni tudjuk az olyan fertőzés elterjedését megakadályozó mechanizmusokat, mint például az oltás, karantén használatát.

Ezen dolgozat a járványok terjedésének két modelljét mutatja be és vizsgálja azt az alkalmazott analízis módszereivel. Az 1. Fejezetben a modell vizsgálatához szükséges fogalmakat mutatom be, mint például a differenciálegyenletek, és bifurkációelmélet. A 2. Fejezetben az adaptív hálózat, és járványterjedések modellezéséhez használt fogalmakat, modellek fajtáit tekintjük át. Végül a 3. Fejezetben két különböző konkrét modell bevezetésére és vizsgálatára kerül sor.

# 1. fejezet

## Differenciálegyenletek és bifurkációelmélet

### 1.1. Differenciálegyenletek

Ebben a fejezetben a differenciálegyenletek alapvető fogalmait tekintjük át a [23] jegyzet alapján.

A 17. század közepétől mind az elméleti, mind az alkalmazott matematika szerves részét képezi a differenciálegyenletek témaköre. Elsőként az angol *Sir Isaac Newton* (1641–1727) foglalkozott a témával egy 1670-es években írt dolgozatában, amelyet azonban csak halála után, 1736-ban publikáltak [16]. Ebben elsőrendű differenciálegyenleteket (amelyeket ő fluxionáló egyenleteknek nevezett) sorolt osztályokba, és később meg is oldott. Tőle függetlenül a német *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) foglalkozott differenciálegyenlettel, amelynek megoldási módszerét 1693-ban egyidejűleg publikálták [12]. Az elsőbbség jogát mindkét matematikus magáénak tartotta, és az ebből adódó vita az egyik leghírhedtebb botránnyá vált a matematika tudományának történetében [20]. Ezen fontos események után vált a differenciálegyenletek témaköre a matematikában egy különálló területté.

Az alábbi részben nézzük át a szakdolgozatban használt fogalmakat. Az első kérdés, hogy tulajdonképpen mit is nevezünk differenciálegyenletnek. Olyan egyenletet, amelyben az ismeretlen, vagy ismeretlenek nem egy-egy számot, hanem egy-egy függvényt jelölnek; az egyenlet pedig az ismeretlen függvény és annak deriváltja között teremt kapcsolatot. A következőkben definiáljuk a differenciálegyenlet pontos fogalmát.

**1.1. Definíció.** Legyen  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  összefüggő nyílt halmaz (tartomány),

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény és  $(t_0, p_0) \in D$ . Ha az  $I \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallumra és az  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenciálható függvényre teljesül, hogy

(i)  $(t, x(t)) \in D$  bármely  $t \in I$  esetén,

(ii)  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  minden  $t \in I$  esetén,

akkor az  $x$  függvényt az

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

differenciálegyenlet megoldásának nevezzük az

$$x(t_0) = p_0 \quad (1.2)$$

kezdeti feltétel mellett. Az (1.1) és (1.2) egyenleteket együttesen kezdetiérték-feladatnak nevezzük.

A fenti definícióban csak az elsőrendű differenciálegyenletet foglalmaztuk meg, mivel az  $n$ -edrendű differenciálegyenlet visszavezethető elsőrendű rendszerré a következő módon.

**1.2. Megjegyzés.** Egy explicit  $n$ -edrendű egyenlet általános alakja a következő:

$$x^{(n)}(t) = g(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)),$$

ahol  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Célszerű bevezetni az alábbi új változókat:  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$ . Ezek segítségével az egyenlet az alábbi elsőrendű rendszerré transzformálható:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t),$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = g(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

A differenciálegyenletekről általánosságban elmondható, hogy a megoldásukat explicit módon nehéz megadni, azonban az alkalmazásokban sokszor a megoldás egzisztenciájának, unicitásának igazolása is elegendő. Defináljunk egy fontos tulajdonságot, amely elégséges feltételt ad a megoldás létezésére és egyértelműségére!

**1.3. Definíció.** Az  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvényt a második változójában lokálisan Lipschitz tulajdonságúnak nevezzük, ha minden  $(t_0, p_0) \in D$  pontnak létezik  $U \subset D$  környezete és  $L > 0$  szám, amelyre

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$$

teljesül bármely  $(t, p_1), (t, p_2) \in U$  esetén.

Az előbb definiált Lipschitz tulajdonság feltétele a Picard-Lindelöf tételnek (más néven Cauchy-Lipschitz egzisztenciátétel), amely a differenciálegyenletek megoldására lokális létezését és egyértelműséget mond ki.

**1.4. Tétel.** *Legyen  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$  folytonos függvény, ahol*

$$H = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p : |t - t_0| \leq a \text{ és } |x - p_0| \leq b\}$$

*henger, valamint  $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ ,  $0 < a < \infty$ ,  $0 < b < \infty$ . Legyen  $M = \max_{(t,x) \in H} |f(t, x)|$ , valamint tegyük fel, hogy az  $f$  függvény második változójában Lipschitz tulajdonságú. Ekkor az (1.1)–(1.2) kezdetiérték-problémának egyértelműen létezik megoldása a  $[t_0 - h, t_0 + h]$  intervallumon, ahol  $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ .*

Az előző tétel feltételt ad arra, hogy az (1.1)–(1.2) kezdetiérték-feladatnak mikor létezik megoldása a  $t_0$  pont egy környezetében. Felmerül a kérdés, hogy legfeljebb mekkora intervallumon lehet értelmezni a megoldást.

**1.5. Tétel.** *Legyen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos és második változójában lokálisan Lipschitz tulajdonságú függvény. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek:*

(i) *Bármely  $(t_0, p_0) \in D$  ponthoz létezik egyetlen olyan  $I(t_0, p_0)$  nyílt intervallum, amelyen az (1.1)–(1.2) kezdetiérték-feladatnak van, azonban az ezt tartalmazó nyílt intervallumon már nincsen megoldása.*

(ii) *Az  $x : I(t_0, p_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  megoldás egyértelmű, és az  $x(t)$  értékét jelölje  $\Phi(t, t_0, p_0)$ .*

(iii) *Ez a megoldás minden  $K \subset D$  kompakt halmazt elhagy, azaz minden  $K \subset D$  kompakt halmazhoz és  $(t_0, p_0) \in D$  ponthoz léteznek olyan  $t_1, t_2 \in I(t_0, p_0)$  számok, amelyekre  $t_1 < t_0 < t_2$ , valamint  $(t_i, \Phi(t_i, t_0, p_0)) \notin K$  ( $i = 1, 2$ ).*

Most pedig foglalkozzunk részletesebben egy speciális egyenlettípussal, ahol a differenciálegyenlet jobb oldalán szereplő függvény független az időtől, azaz a  $t$  változó explicit módon nem fordul elő az egyenletben. A fizikai rendszerek, törvények leírására megannyiszor ez a speciális egyenlettípus alkalmazható.

**1.6. Definíció.** *Legyen  $M \subset \mathbb{R}^n$  tartomány,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  második változójában lokálisan Lipschitz tulajdonságú függvény. Az*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1.3}$$

*differenciálegyenletet autonóm differenciálegyenletnek nevezzük.*



Bármely  $t_0 \in \mathbb{R}$  és  $p_0 \in M$  esetén létezik az (1.3) egyenletnek az (1.2) kezdeti feltételt kielégítő  $x(t) = \Phi(t, t_0, p_0)$  globális megoldása az adott  $I(t_0, p_0)$  intervallumon. Az autonóm differenciálegyenletek egyik legfontosabb tulajdonsága az eltolásinvariancia, azaz ha  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény megoldása (1.3)-nek az  $I$  intervallumon, akkor bármely  $\tau$  valós szám esetén az  $y(t) = x(t + \tau)$  függvény is megoldás az  $I_1 = I - \tau$  intervallumon. Ezért egy autonóm differenciálegyenlet esetén elég a  $t_0 = 0$  kezdeti időpontban a különböző  $p \in M$  pontokból induló megoldásokat ismerni, ugyanis a többi megoldás az eltolásból már következik. Így, az egyszerűség kedvéért bevezetjük a következő jelöléseket:

$$I(p) := I(0, p), \quad \phi(t, p) := \Phi(t, 0, p) \quad (p \in M, t \in I(p)).$$

Ezek alapján definiálhatjuk egy adott pont pályáját.

**1.7. Definíció.** *Tetszőleges  $p \in M$  pont esetén a  $p$  pont pályája/trajektóriája a*

$$\{\phi(t, p) : t \in I(p)\}$$

*görbe.*

Vannak speciális esetek, mint például egy olyan trajektória, amely egyetlen pontból áll.

**1.8. Definíció.** *Egy  $p \in M$  pontot egyensúlyi/stacionárius pontnak nevezünk, ha bármely  $t \in \mathbb{R}$  esetén  $\phi(t, p) = p$ .*

*Hasonlóan, egy  $p \in M$  pontot  $T$  szerint periodikus pontnak nevezünk, ha minden  $t \in \mathbb{R}$  számra  $\phi(t + T, p) = \phi(t, p)$ . A periodikus pont pályáját periodikus pályának nevezzük.*

Fogalmazzuk meg, hogy mit is értünk az alatt, hogy egy megoldás stabil/instabil.

**1.9. Definíció.** *A  $t \rightarrow \Phi(t, t_0, p_0)$  megoldást stabilisnak nevezünk, ha*

$$(i) [t_0, +\infty) \subset I(t_0, p_0),$$

*(ii) minden  $\varepsilon > 0$  és  $t_1 \in [t_0, +\infty)$  számhoz létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy*

$$(t_1, q) \in D, |q - \Phi(t_1, t_0, p_0)| < \delta$$

*esetén  $[t_1, +\infty) \subset I(t_1, q)$  és*

$$|\Phi(t, t_1, q) - \Phi(t, t_0, p_0)| < \varepsilon,$$

*ha  $t \geq t_1$ .*

A megoldást *instabilisnak* nevezzük, ha nem stabilis. *Aszimptotikusan stabilisnak* nevezzük, ha stabilis és  $|\Phi(t, t_1, q) - \Phi(t, t_0, p_0)| \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$  esetén.

A következő állítás arra hívja fel a figyelmet, hogy egy egyensúlyi pont stabilitás-vizsgálata visszavezethető az azonosan nulla megoldás stabilitásának vizsgálatára.

**1.10. Állítás.** *Legyen  $p \in M$  egyensúlyi pont. Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

- (i) *a  $p$  egyensúlyi pont stabilis,*
- (ii) *az  $\dot{y}(t) = f(y(t) + p)$  differenciálegyenlet azonosan 0 megoldása stabilis,*
- (iii) *bármely  $\varepsilon > 0$  számhoz létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy  $q \in M$ ,  $|q - p| < \delta$ ,  $t \geq 0$  esetén  $|\phi(t, q) - p| < \varepsilon$  teljesül.*

Most pedig nézzük meg, hogy hogyan határozhatjuk meg egy lineáris differenciálegyenlet megoldásának stabilitását!

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix. Ekkor az

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{1.4}$$

állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek stabilitását vizsgáljuk.

**1.11. Lemma.** (i) *Ha az  $A$  mátrixnak van nemnegatív valós részű sajátértéke, akkor az (1.4) rendszer nem asimptotikusan stabilis.*

(ii) *Ha az  $A$  mátrixnak van pozitív valós részű sajátértéke, akkor az (1.4) rendszer nem stabilis, azaz instabilis.*

(iii) *Ha az  $A$  mátrixnak van olyan 0 valós részű sajátértéke, amely a minimálpolinomnak többszörös gyöke, akkor az (1.4) rendszer nem stabilis, azaz instabilis.*

**1.12. Állítás.** *A következők ekvivalensek:*

(i) *Az (1.4) differenciálegyenlet asimptotikusan stabilis.*

(ii) *Minden  $\lambda \in \sigma(A)$  esetén  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ .*

*Továbbá az alábbi két kijelentés szintén ekvivalens:*

(i) *Az (1.4) differenciálegyenlet asimptotikusan stabilis.*

(ii) *Minden  $\lambda \in \sigma(A)$  esetén  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ , és  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  esetén  $\lambda$  multiplicitása a minimálpolinomban 1.*

Az alkalmazásban előforduló differenciálegyenletek többsége azonban nem lineáris. Felvetődik a kérdés, hogy nemlineáris rendszer esetében hogyan vizsgálhatjuk meg az egyensúlyi pontok stabilitását. Ehhez használjuk az úgynevezett linearizálás módszerét.

Eszerint legyen  $p \in M$  az (1.3) egyenlet egyensúlyi pontja. Legyen  $y(t) = x(t) - p$ . Ekkor

$$\dot{y}(t) = f(y(t) + p).$$

Az  $f$  függvény differenciálhatósága miatt

$$f(p + q) = f'(p)q + a(p)$$

minden  $q \in M$  pontra a  $p$  egy környezetében, ahol  $a$  olyan függvény, amelyre

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{|a(q)|}{|q|} = 0.$$

A fenti két egyenletből az  $y$  függvényre az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\dot{y}(t) = f'(p)y(t) + a(y(t)).$$

Az 1.10. Állítás szerint az (1.3) differenciálegyenlet azonosan 0 megoldásának stabilitása egyenértékű a  $p$  pont stabilitásával. A linearizálás esetünkben azt jelenti, hogy a  $p$  pont stabilitását a lineáris rész, azaz az  $f'(p)$  mátrix sajátértékeinek segítségével döntjük el, tehát az alábbiak igazak.

- 1.13. Tétel.**
1. Ha az  $f'(p)$  mátrix minden sajátértéke negatív valósrésű, akkor  $p$  aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontja az (1.1) differenciálegyenletnek.
  2. Ha az  $f'(p)$  mátrixnak van pozitív valósrésű sajátértéke, akkor  $p$  instabilis egyensúlyi pontja az (1.1) differenciálegyenletnek.

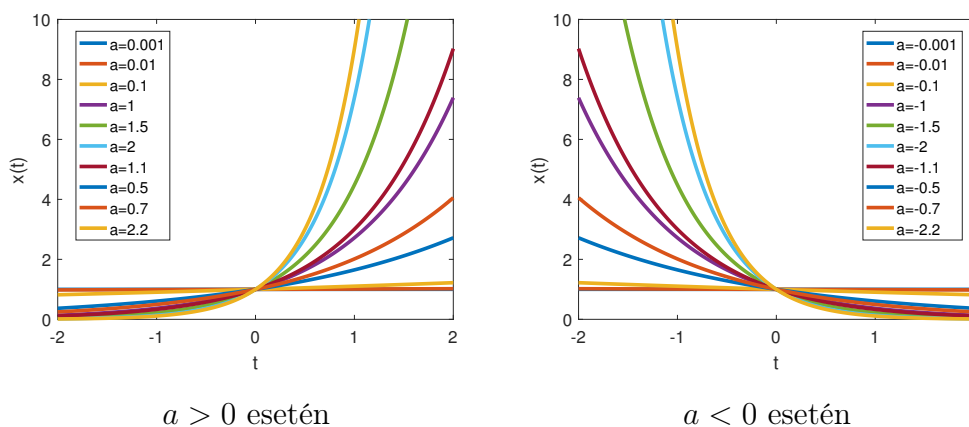
Ezt az  $f'(p)$  mátrixot nevezzük Jacobi-mátrixnak.

## 1.2. Bifurkációelmélet

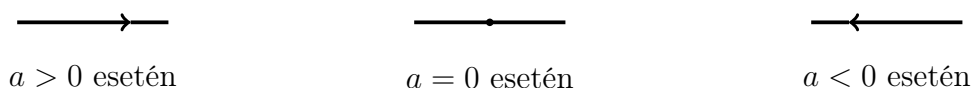
Az alábbi szakaszban a [24] jegyzet alapján tekintsük át a bifurkációelmélet alapvető definícióit, és példákkal illusztráljuk.

Gyakran nem lehetséges a differenciálegyenlet pontos megoldásának meghatározása. Ekkor célszerű az úgynevezett fázisképet vizsgálni, amelyhez a megoldások pontos ismerete nem szükséges, azonban kvalitatív tulajdonságait leírja, mint például a monotonitás. Ezt a fogalmat a következő példával szemléltetjük.

**1.14. Példa.** Tekintsük az  $\dot{x}(t) = ax$  differenciálegyenletet, ahol  $a \in \mathbb{R}$ . Ennek az egyenletnek a megoldása  $x(t) = ce^{at}$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$ . A megoldást  $c = 1$  esetén különböző „ $a$ ” paraméterértékek esetén az 1.1. ábra szemlélteti.

1.1. ábra.  $\dot{x}(t) = ax$  egyenlet megoldása

A megoldás ismerete nélkül is az a megérzésünk, hogy három esetet különböztethetünk meg. Ez a három eset:  $a < 0$ ,  $a = 0$ ,  $a > 0$ . Tudjuk, hogy amennyiben  $a > 0$ , a megoldás szigorúan monoton növekvő,  $a < 0$  esetén szigorúan monoton csökkenő,  $a = 0$  esetén pedig az értéke konstans. Ezen eseteket mutatják az 1.2. ábrán látható fázisképek.

1.2. ábra.  $\dot{x}(t) = ax$  egyenlet fázisképe

**1.15. Definíció.** A  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonosan differenciálható függvényt folytonos idejű dinamikai rendszernek nevezzük, ha teljesül rá az alábbi két feltétel:

- (i) minden  $p \in \mathbb{R}^n$  esetén  $\varphi(0, p) = p$ ,
- (ii) minden  $p \in \mathbb{R}^n$  és  $t, s \in \mathbb{R}$  esetén  $\varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(t + s, p)$ .

Egyszerűen igazolható, hogy az (1.3) differenciálegyenlet megoldása lényegében egy dinamikai rendszert határoz meg, illetve fordítva (egy dinamikai rendszerhez mindig megadható egy differenciálegyenlet, amelynek az a megoldása). Ezért az autonóm közönséges differenciálegyenletet és a dinamikai rendszert általában együtt szokták vizsgálni.

A valós folyamatokat leíró modellek rendszerint paramétereket is tartalmaznak, így természetesen adódik a kérdés, hogy ezen paraméterek hogyan befolyásolják a fázisképet. Amennyiben egy paraméter változik, akkor az egyenlet megoldása is változik, ám ez nem mindig jelentős, minőségi változás. Az előző példában  $a = 0.001$ , illetve  $a = 0.003$  esetén a megoldások hasonlóak, azonban  $a = 0.001$  és  $a = -0.001$  esetén már egészen különböznek, itt minőségi változás következik be. Azon paraméterértékeket, amelyeknél minőségi változás következik be, bifurkációs paraméterértékeknek nevezzük, a bekövetkező minőségi változást pedig bifurkációnak.

A bifurkáció elnevezést a francia *Henri Poincaré* (1854–1912) használta először 1885-ben, amikor ilyen jelenséggel találkozott [17]. Ezután az amerikai *Edward Norton Lorenz* (1917–2008) meteorológiai kutatásai során használt modelljében fedezett fel bifurkációt, amelyből később kialakult a pillangó effektus fogalma [14]. Majd, a holland elektromérnök *Baltazaar van der Pol* (1889–1959) 1927-ben bemutatta a (ma már) róla elnevezett van der Pol oszcillátort, amely szintén egy bifurkáció végett került a figyelem középpontjába [18]. Ezeken kívül még számos helyen fedezhetünk fel bifurkációkat.

A bifurkáció pontos fogalmához vezessünk be néhány fogalmat.

**1.16. Definíció.** *Legyenek  $M, N \subset \mathbb{R}^n$  halmazok. Egy  $h : M \rightarrow N$  leképezést homeomorfizmusnak (vagy  $C^0$ -diffeomorfizmusnak) nevezünk, ha folytonos bijekció és az inverze is folytonos. A leképezést  $C^k$ -diffeomorfizmusnak nevezzük, ha  $k$ -szor folytonosan differenciálható bijekció és inverze is  $k$ -szor folytonosan differenciálható.*

**1.17. Definíció.** *Legyenek  $M, N \subset \mathbb{R}^n$  tartományok, azaz összefüggő, nyílt halmazok. Azt mondjuk, hogy a  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  és  $\psi : \mathbb{R} \times N \rightarrow N$  dinamikai rendszerek  $C^k$ -ekvivalensek ( $k = 0$  esetén topologikusan ekvivalensek), ha van olyan  $h : M \rightarrow N$   $C^k$ -diffeomorfizmus ( $k = 0$  esetén homeomorfizmus), amely a pályákat egymásba viszi az idő irányításának megtartásával. Pontosabban, ha létezik olyan  $a : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, amelyre  $t \mapsto a(t, p)$  szigorúan növekvő bijekció, és minden  $t \in \mathbb{R}$ , valamint  $p \in M$  esetén*

$$h(\varphi(t, p)) = \psi(a(t, p), h(p)).$$

Ez alapján megfogalmazhatjuk a bifurkáció precíz definícióját.

**1.18. Definíció.** *A  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^k$  paraméterérték reguláris, ha létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy  $|\lambda - \lambda_0| < \delta$  esetén az  $f(\cdot, \lambda)$  rendszer topologikusan ekvivalens a  $f(\cdot, \lambda_0)$  rendszerrel. A  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^k$  bifurkációs paraméter, ha nem reguláris. A bifurkációs paraméternél bekövetkező változást nevezzük bifurkációnak.*

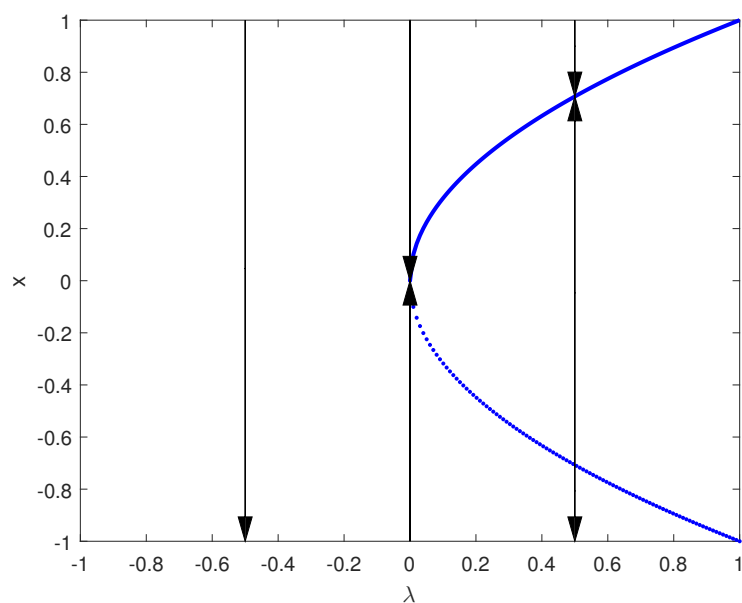
A fenti definícióban az  $a$ , illetve  $h$  függvények speciális megválasztásával különféle ekvivalenciafogalmakat kapunk, azonban ez nem képezi a dolgozat részét, részletek a [23] jegyzetben megtalálhatóak.

Most pedig nézzünk pár példát bifurkációra! Az ábrákon a vízszintes tengelyen minden egyes pont egy 1 dimenziós fázisképnek felel meg. A nyilak a trajektóriák irányát mutatják.

**1.19. Példa. (Nyereg-csomó bifurkáció)** *Tekintsük az*

$$\dot{x} = \lambda - x^2$$

*egyenletet, amelyben  $\lambda \in \mathbb{R}$  paraméter. Az egyensúlyi pont létezése ez esetben függ a  $\lambda$  paraméter értékétől. Ugyanis ha  $\lambda < 0$ , akkor nincsen egyensúlyi pont, abban az esetben pedig, ha  $\lambda = 0$ , akkor pontosan egy darab egyensúlyi pontja van az egyenletnek, mégpedig az  $x = 0$ . Továbbá ha  $\lambda > 0$ , akkor két egyensúlyi pont van, nevezetesen az  $x_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ . Ezeknek az egyensúlyi pontoknak a stabilitását a korábbi 1.10. Állítás segítségével határozhatjuk meg. Tehát  $\lambda \neq 0$  értékek regulárisak és  $\lambda = 0$  érték bifurkációs érték. Az ilyen bifurkációt, ahol a paraméter növelésével (illetve csökkentésével) „születik” egy egyensúlyi pont, amely a paraméter további növelésével (csökkentésével) szétválk egy stabil és egy instabil egyensúlyi ponttá, nyereg-csomó bifurkációnak nevezzük, amelyet az 1.3. ábrán is láthatunk.*

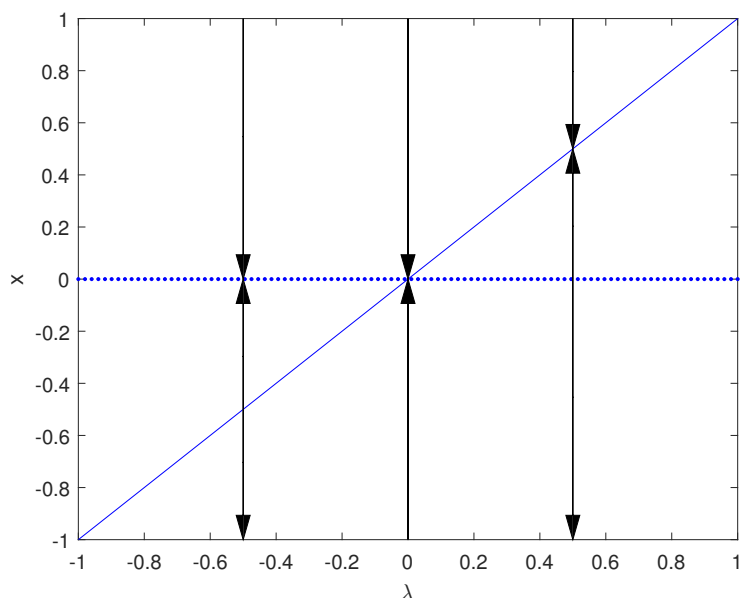


1.3. ábra. Nyereg-csomó bifurkáció. Az ábrán a  $\lambda$  paraméter függvényében ábrázoljuk az egyensúlyi pontokat.

**1.20. Példa. (Transzkritikus bifurkáció)** *Vizsgáljuk az*

$$\dot{x} = \lambda x - x^2$$

egyenletet, amelyben szintén  $\lambda \in \mathbb{R}$  paraméter. Az  $x_1 = 0$  pont bármely  $\lambda$  esetén egyensúlyi pont, ezen kívül  $x_2 = \lambda$  is egyensúlyi pont, tehát  $\lambda \neq 0$  esetén két egyensúlyi pont van, viszont  $\lambda = 0$  a két egyensúlyi pont azonos. Negatív  $\lambda$  esetén az  $x_1 = 0$  egyensúlyi pont stabil, és az  $x_2 = \lambda$  egyensúlyi pont instabil, szintén az 1.10. Állítást felhasználva. Pozitív  $\lambda$  esetén viszont az  $x_2 = \lambda$  egyensúlyi pont stabil, és  $x_1 = 0$  egyensúlyi pont instabil. Így tehát  $\lambda = 0$  értéknél bifurkáció van, ezt láthatjuk az 1.4. ábrán is. A létrejövő bifurkációt a stabilitásváltás miatt transzkritikus bifurkációnak nevezik.



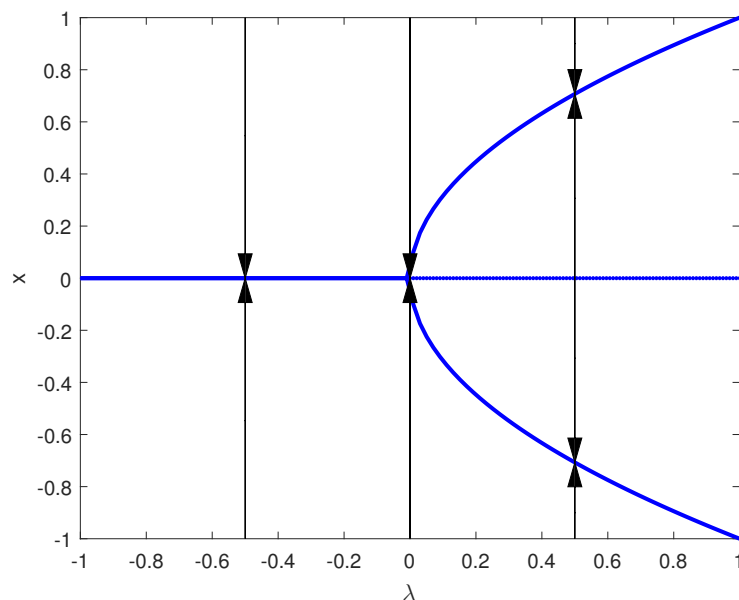
1.4. ábra. Transzkritikus bifurkáció. Az ábrán a  $\lambda$  paraméter függvényében ábrázoljuk az egyensúlyi pontokat.

**1.21. Példa. (Vasvilla-bifurkáció)** *Tekintsük az*

$$\dot{x} = \lambda x - x^3$$

egyenletet, amelyben ismét  $\lambda \in \mathbb{R}$  paraméter. Az  $x_1 = 0$  pont ebben az esetben is bármely  $\lambda$  esetén egyensúlyi pont. Ezen kívül  $x_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda}$  is egyensúlyi pont  $\lambda > 0$  esetén. Tehát  $\lambda < 0$  esetén egy egyensúlyi pont van,  $\lambda > 0$  esetén pedig három, így a  $\lambda = 0$  érték bifurkációs érték, ezt az alábbi fázisképen is láthatjuk. Negatív  $\lambda$  esetén

az  $x_1 = 0$  egyensúlyi pont globálisan stabil, pozitív  $\lambda$  esetén viszont az  $x_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda}$  egyensúlyi pontok veszik át a stabilitást. Ezt a bifurkációt a bifurkációs görbe alakja miatt vasvilla-bifurkációnak nevezik. Ez látható az 1.5. ábrán.



1.5. ábra. Vasvilla-bifurkáció. Az ábrán a  $\lambda$  paraméter függvényében ábrázoljuk az egyensúlyi pontokat.

Előfordulhat az, hogy nem csak egy, hanem több paraméter is szerepel az egyenletben. Ilyen a következő példa is.

**1.22. Példa. (Andronov–Hopf-bifurkáció)** Vizsgáljuk a polárkoordinátákkal megadott

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \lambda r + \sigma r^3, \\ \dot{\phi} &= 1\end{aligned}$$

kétdimenziós rendszert, amelyben  $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$  paraméterek. Rögzítsük először a  $\sigma = -1$  értéket és vizsgáljuk a fáziskép alakulását, amint  $\lambda$  értéke változik. Az origó bármely  $\lambda$  esetén egyensúlyi pont, stabilitása az  $r$  függvényre vonatkozó differenciálegyenlet segítségével könnyen eldönthető. Ha ugyanis  $\lambda < 0$ , akkor  $\dot{r} = \lambda r - r^3 < 0$ , azaz  $r$  szigorúan monoton csökkenő függvény, tehát minden megoldás az origóhoz tart. Ha viszont  $\lambda > 0$  és  $r < \sqrt{\lambda}$ , akkor  $\dot{r} = r(\lambda - r^2) > 0$ , azaz  $r$  szigorúan monoton növekvő függvény, tehát az origó instabil. Ezenkívül  $r = \sqrt{\lambda}$  esetén  $\dot{r} = 0$ , azaz a  $\sqrt{\lambda}$  sugarú kör a rendszer periodikus pályája, amely orbitálisan aszimptotikusan stabilis, mivel



$r < \sqrt{\lambda}$  esetén  $\dot{r} > 0$  és  $r > \sqrt{\lambda}$  esetén  $\dot{r} < 0$ . Bifurkáció tehát  $\lambda = 0$  értéknél következik be, a  $\lambda \neq 0$  értékek pedig regulárisak. Abban az esetben, ha  $\lambda < 0$ , akkor az origó globálisan aszimptotikusan stabilis, ha pedig  $\lambda > 0$ , akkor az origó instabilis és a vonzást egy stabil határciklus veszi át, amelynek mérete  $\lambda$  értékével növekszik. Ez a bifurkáció szuperkritikus Andronov–Hopf-bifurkáció néven ismert.

Egy másik esetként rögzítsük a  $\sigma = 1$  értéket, és vizsgáljuk meg a fáziskép alakulását, amint  $\lambda$  értéke változik. Az origó bármely  $\lambda$  esetén egyensúlyi pont, stabilitása az  $r$  függvényre vonatkozó differenciálegyenlet segítségével egyszerűen eldönthető. Ha ugyanis  $\lambda > 0$ , akkor  $\dot{r} = \lambda r + r^3 > 0$ , így  $r$  szigorúan monoton növekvő függvény, tehát minden megoldás instabil. Ha  $\lambda < 0$ , és  $r < \sqrt{\lambda}$ , akkor  $\dot{r} = \lambda r + r^3 < 0$  így az origó stabil, ezen kívül  $r = \sqrt{\lambda}$  esetén  $\dot{r} = 0$ , azaz a  $\sqrt{\lambda}$  sugarú kör a rendszer periodikus pályája, amely orbitálisan instabilis, mivel  $r < \sqrt{\lambda}$  esetén  $\dot{r} < 0$ , és  $r > \sqrt{\lambda}$  esetén  $\dot{r} > 0$ . Ezt a bifurkációt szubkritikus Andronov–Hopf-bifurkációnak nevezik.

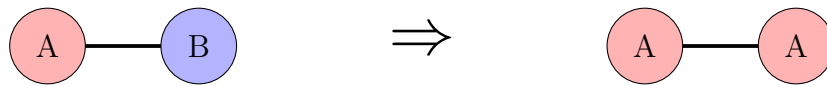
## 2. fejezet

# Hálózati folyamatok

### 2.1. Adaptív hálózatok

A való életbeli problémák leírására régóta alkalmaznak gráfokat, ugyanis a vizsgálandó hálózatok jól megfeleltethetők ezeknek a csúcsokból és élekből álló rendszereknek. Többek között ilyen az utakat és a forgalmakat leíró hálózat, vagy az emberi testben található érrendszer, vagy mint látni fogjuk, egy adott populáció egyedeit, illetve a közöttük lévő kapcsolatokat leíró hálózat. Ezeket ábrázolhatjuk súlyozott vagy súlyozatlan, illetve irányított vagy irányítatlan gráfokkal. A jelenséget reprezentálhatjuk statikus, azaz időben állandó gráfokkal. Azonban a fenti példákra, úgy mint a valós problémák jelentős részére jellemző, hogy időben változhatnak, tehát a gráf struktúrája az idő előrehaladtával módosul. Az ilyen gráfokat dinamikus gráfoknak nevezzük.

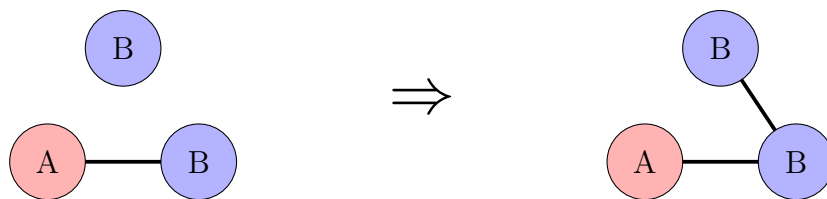
Sokáig a dinamikus hálózat két, teljesen különböző fogalmat takart [4]. Jelenthetett olyan hálózatot, amelynek szerkezete, azaz az éleinek felépítése időben változatlan, azonban a csúcsok különféle állapotban lehetnek, amelyek az időben változhatnak. A csúcsok dinamikus állapotát jellemezhetjük egy diszkrét változóval (például: foglalt/szabad, aktív/passzív) vagy vektorral, amely kettő vagy több változót is tartalmazhat. Ilyen hálózat például a járványterjedés statikus hálózatán, ahol a gráf csúcsai között lévő élek, azaz a kapcsolatok nem változnak, de a csúcsok állapotai igen. Ezen csúcsok állapota a szomszédos csúcsok állapotaitól függően változik, azaz a gráf struktúrája hatással van a rendszer dinamikájára, lásd 2.1. ábra. A másik elmélet szerint dinamikus hálózatot olyan hálózatot értünk, ahol a csúcsok állapotai változatlanok időben, azonban a gráf szerkezete változik. Ilyen például az utakon lévő forgalmakat leíró hálózat, mivel a városok – mint csúcsok – változatlanok az időben, azonban az utak, és a rajtuk lévő forgalom – élek, illetve



2.1. ábra. Két csúcsból álló állandó szerkezetű, dinamikus állapotú hálózat. A csúcsok állapotait jelölje A (piros) és B (kék). Az idő előrehaladtával az A állapotú csúcs átadja a másik csúcsnak az állapotát, így mindkét csúcs A állapotú lesz.

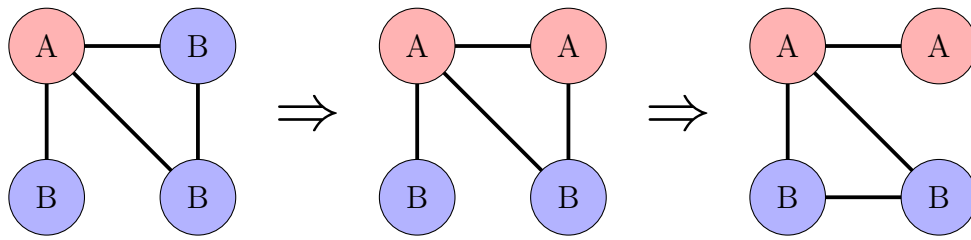
Éleknek súlya – változik. Ezt szemlélteti a 2.2. ábra. A hálózat felépítésének változása különféle lehet a vizsgált rendszertől függően. Nézzük meg a leggyakrabban alkalmazottakat.

- (i) Az élek természetének változása: ez a hálózat fejlődésének leggyengébb változata, ugyanis a fő hálózati szerkezet változatlan marad, csupán az élek természete, jelleme változik, ez jelentheti az élek súlyának vagy irányának változását.
- (ii) Élek létrehozása/törlése: ebben az esetben a hálózat szerkezete drasztikusabban változik az előző esethez képest. Ekkor bizonyos élek megszűnhetnek vagy létrejöhetnek. Ennek két változata lehetséges: két adott csúcs közötti él teljesen megszűnik és két, ezektől a csúcsoktól független csúcs között keletkezik él, illetve, hogy az egyik csúcs fokszáma változatlan marad, és egy másik csúccsal létesít kapcsolatot.
- (iii) Csúcsok létrehozása/törlése: ez a hálózat fejlődésének legerősebb formája. Ebben az esetben új csúcsok jönnek létre, illetve már létező csúcsok szűnnek meg. Ekkor nemcsak a csúcsok, hanem a hozzájuk tartozó élek is megszűnnek.



2.2. ábra. Három csúcsból álló változó szerkezetű, állandó állapotú hálózat. A csúcsok állapotait jelölje A (piros) és B (kék). Először a két B állapotú csúcs között nem megy él, azonban az idő előrehaladtával az azonos állapotú csúcsok között jön létre.

Az adaptív hálózat a fent említett kétféle definíciónak az ötvözete: egy olyan fejlődő, dinamikus hálózat, amelynek szerkezete a csúcsok állapotától függően változik, és amelyben a csúcsok állapota a hálózat szerkezetétől függően vagy függetlenül változik, lásd 2.3. ábra.



2.3. ábra. Négy csúcsú adaptív hálózat. A csúcsok állapotát jelölje A (piros) és B (kék). A hálózat struktúrája a csúcsok állapotától függően változik, és a csúcsok állapota a hálózat szerkezetétől függ.

## 2.2. Járványterjedési modellek

Az emberek közötti kapcsolatokat leíró folyamatok (mint például a járványterjedés) azokon az egyszerű megfigyeléseken alapulnak, hogy egyrészt az egyének állapotai a másokkal való kapcsolataik alapján megváltozhatnak, másrészt hogy az egyedek adott esetben megválaszthatják, hogy kikkel lépnek kapcsolatba [7]. Ezt a két megfigyelést egy gráfon modellezhetjük, ahol a csúcsok az egyéneket, az élek pedig az egyének közötti kapcsolatokat reprezentálják. Ennek a gráfnak a dinamikáját két tényező szabja meg: az egyén állapotának dinamikus változása (amely a szerkezettől függ), valamint az élek állapot szelektív fejlődése. Ennek a kettőnek a kombinációjával kapjuk meg a kapcsolatokon alapuló adaptív hálózaton modellezett folyamatokat.

Ilyen folyamatok például a politikai preferenciák, vagy a járványok terjedése. Bár ezen leíró modellek sok tekintetben hasonlóak, azonban van közöttük néhány meghatározó különbség. A modellek hasonlósága legfőképp a modellek általános felépítésében jelenik meg. Egyrészt az állapotok közvetítése csakis a szomszédos csúcsok között lehetséges (csak olyan embert fertőzhetünk meg, illetve csak olyan embert tudunk meggyőzni a politikai nézeteinkről, akivel kapcsolatba kerültünk), másrészt mindkét folyamatot hasonló módon tudjuk leírni egy-egy kompartment modellel. A modellek közötti különbségek elsősorban a vizsgált folyamatok természetéből adódnak, nevezetesen a járványoknál a folyamat állapot specifikus (az egészséges állapot nem terjedhet), tehát aszimmetrikus a modell, míg a vélemények, meggyőződések modellezésénél a különböző vélemények általában egyenlően vannak kezelve, így a modell szimmetrikus. Továbbá a járványterjedés modellezésénél az állapotfüggő folyamatokból adódóan további átmeneteket szükséges bevezetni, ha az állapotok száma nő, míg a politikai preferenciák modellezésénél ez nem szükséges.

Most pedig tekintsük át a járványterjedés modellezésénél leggyakrabban használt

fogalmakat.

**2.1. Definíció.** *Legyen adott egy egyszerű, irányítatlan  $G = (V, E)$  gráf, ahol  $V$  jelöli a csúcsokat,  $E$  pedig az éleket. Jelölje  $L = \{A, B, C\}$  a modell csúcsainak lehetséges állapotait. A gráf a populációban lévő egyedeket, illetve a közöttük lévő kapcsolatokat írja le. Továbbá jelölje  $[A] = [A](t)$  a  $t$  időpillanatban az  $A$  állapotú csúcsok várható értékének számát,  $[AB] = [AB](t)$  jelentse az  $A$  típusú, illetve  $B$  típusú csúcsokat összekötő élek várható értékének számát a  $t$  időpillanatban, és jelentse  $[ABC] = [ABC](t)$  azon kettő hosszú utak várható értékének számát a  $t$  időpillanatban, amelyek egy  $A$  és egy  $C$  típusú csúcsokat köt össze, közbeiktatva egy  $B$  állapotú csúcsot.*

*A fent definiált  $[A], [AB]$  függvények nemnegatív, korlátos függvények:*

$$0 \leq [A] \leq N, \quad 0 \leq [AB] \leq \frac{N(N-1)}{2},$$

*ahol  $N$  jelöli a gráf csúcsainak számát, azaz  $N = |V|$ .*

A leggyakrabban vizsgált járványterjedési modellekben a következő állapotok ( $A, B, C$  lehetséges fajtái) fordulnak elő:

- $S$ : egészséges, fertőzhető típusú csúcsok (az angol „Susceptible” szóból),
- $I$ : beteg, fertőzött típusú csúcsok (az angol „Infected” szóból),
- $R$ : meggyógyult, immunis típusú csúcsok (az angol „Recovered” szóból),
- $E$ : látens, fertőzött, de még nem fertőző típusú csúcsok (az angol „Exposed” szóból).

A járványokat leíró modelleket nem csupán az egyének állapotai, hanem az állapotok közötti lehetséges átmenetek is jellemzik. Az átmeneteket tekintve két fő típust különböztetünk meg: spontán átmenetet, ahol az átmenetet nem befolyásolják a szomszédos csúcsok állapotai, illetve olyan átmenetet, ahol a szomszédos csúcsok befolyásolják az átmenetet. Ezen átmeneteket a leggyakrabban Poisson-folyamattal modellezzük. Tehát annak a valószínűsége, hogy egy  $A$  állapotban lévő csúcs  $B$  állapotba kerüljön  $\delta t$  idő alatt

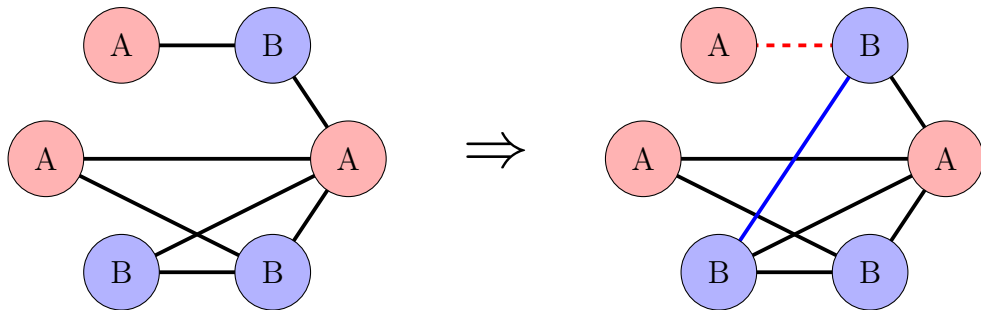
$$1 - e^{-\lambda \delta t},$$

ahol a  $\lambda > 0$  számot az  $A \rightarrow B$  állapotváltozás rátájának nevezzük. Ahogy korábban említettük, ez a  $\lambda$  szám néhány esetben függhet a szomszédos csúcsok állapotaitól, más esetben viszont konstans.

A szakirodalomban leggyakrabban a következő átmeneti rátákat alkalmazzák:

- A **fertőzés**: rátája  $k > 0$  adott szám, amely az egészséges és fertőző típusú csúcsok közötti élek számától függ,
- A **gyógyulás**: rátája  $r > 0$  adott szám, független a szomszédoktól,
- Az **immunitás elvesztése**: rátája  $q > 0$  adott szám, független a szomszédoktól.

Nemcsak a gráf csúcsai, hanem élei is változhatnak a folyamat során. Jelölje  $\alpha_{AB}$  annak a rátáját, hogy egy  $A$  és egy  $B$  állapotban lévő csúcs között él jön létre, illetve jelölje  $\omega_{AB}$  annak rátáját, hogy egy  $A$  illetve egy  $B$  állapotban lévő csúcs között él szűnik meg. Ez a változás bekövetkezhet egy speciális formában, amely az irodalomban okos átkötés néven ismert. Ugyanis ekkor egy fertőzött és egy nem fertőzött egyed közötti él törlődik, és a nem fertőzött csúcs e helyett egy másik, nem fertőzött egyeddel létesít új kapcsolatot. Így a fertőzött egyed éleinek száma csökken, azonban a nem fertőzött egyén éleinek száma változatlan marad. Mind az él törlésének, mind az él létrehozásának rátáját jelöljük a továbbiakban  $w$ -vel. Ennél a mechanizmusnál egyszerre szűnik meg él és jön létre új, így a folyamat során az élek száma nem változik. Az okos átkötést a 2.4. ábra szemlélteti.



2.4. ábra. Okos átkötés egy hat csúcsból álló hálózaton. A csúcsok állapotát jelölje  $A$  (piros) és  $B$  (kék). A piros él az idő előrehaladtával megszűnik, és helyette egy másik, vele megegyező állapotú csúcs között jön létre (egy kék) él.

Az alábbiakban megemlítünk néhány gyakran alkalmazott járványterjedési modellt.

Az egyik legegyszerűbb modell az úgynevezett  $SI$  modell, ahol az egyedek kétféle állapotban lehetnek:  $S$  és  $I$ , továbbá egy állapotváltozás lehetséges, nevezetesen az

$$S \rightarrow I$$

fertőzés, tehát egy egészséges egyed a fertőzött szomszédai hatására megbetegedhet.

Kezdetben ilyen modellt alkalmaztak a HIV betegség modellezésére vagy például a herpesz terjedésének leírására.

További széles körben elterjedt modell az *SIS* típusú járványterjedés, ahol az egyedek szintén a fenti kétféle állapotban lehetnek, azonban ebben az esetben kétféle állapotváltozás lehetséges:

$$S \rightarrow I \rightarrow S,$$

azaz egy egészséges egyed szintén megfertőződhet, ahogy a korábbi modellben, azonban egy fertőzött egyed meg is gyógyulhat. Ezt alkalmazzák számos nemi úton terjedő betegség, mint például a gonorrhoea vagy a szifilisz modellezésére.

Természetesen olyan betegségek is léteznek, ahol a fertőzésen átesett egyedek immunitást nyernek, így nem fertőződhetnek meg újra (például bárányhimlő, kanyaró). Ilyen betegségek modellezéséhez célszerű bevezetni a korábban említett *R* osztályt, amely az immunis egyedeket tartalmazza. Az *SIS* modellhez hasonlóan az úgynevezett *SIR* modellben is kétféle átmenet lehetséges, azonban ettől eltérően a fertőzött egyed nem egészségessé, hanem immunissá válik:

$$S \rightarrow I \rightarrow R.$$

Olyan eset is gyakran előfordul, hogy az immunis egyed egy idő elteltével újra fertőzhetővé válik, vagyis elveszíti az ellenálló képességét. Ilyen típusú fertőzések leírására célszerű az *SIRS* modellt alkalmazni, ahol az előbbi modellhez képest még egy további átmenet lehetséges :

$$S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S.$$

Ilyen modellt alkalmaznak például az influenza, rubeola, mumpsz, kanyaró leírására.

Az *SEIR* modellben még egy további átmenet lehetséges, ahol az egészséges egyed először egy látens osztályba kerül, azaz fertőzött, de még nem fertőző. Ilyen betegségnek tekinthető a dengue-láz, sárga láz, vagy a lyme-kór, melyeknél szignifikáns a lappangási időszak. Ebben a modellben az immunitást megszerzett egyének megtartják az ellenállóképességüket, így a következő átmenetek lehetségesek:

$$S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R.$$

Lehetséges az is, hogy az előbbi modellben az immunis egyedek elveszítik az immunitásukat, ezt írja le az *SEIRS* modell. Ekkor az átmenetek:

$$S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S.$$

Ezzel a modellel leírható betegség a malária, és a rotavírus terjedése, mivel ezeket a betegségeket hosszú lappangási idő jellemzi, és meggyógyulása esetén csak ideiglenes immunitást kap a szervezet.

### 2.3. Adaptív járványterjedési modellek leírása

A járványterjedést legpontosabban leíró modell az alapegyenlet, amely a rendszer lehetséges állapotainak valószínűségére felírt differenciálegyenlet-rendszer. Ezen differenciálegyenlet-rendszert megoldva megkapjuk, hogy az egyes állapotban mekkora valószínűséggel található a rendszer a  $t$  időpillanatban. Azonban ezen rendszer annyi differenciálegyenletet tartalmaz, amennyi állapot lehetséges, amely például az adaptív *SIS* típusú járványterjedés esetén  $2^N \cdot 2^{\frac{N(N-1)}{2}}$ , míg *SIRS* típusú járványterjedés esetén  $3^N \cdot 2^{\frac{N(N-1)}{2}}$  egyenlet. Az állapotok száma könnyen meghatározható, ugyanis például az *SIRS* típusú járványterjedés esetén minden egyes csúcs 3 állapotban lehet, illetve  $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$  különböző módon alakulhat az egyének közötti kapcsolati rendszer. Nézzük meg az alapegyenletet  $N = 2$  csúcsú adaptív *SIRS* járványterjedés esetén. Jelölje  $X_{AB}$ , ( $A, B \in \{S, I\}$ ) annak a valószínűségét, hogy rendszer csúcsai rendre  $A$  illetve  $B$  állapotban vannak és nincsen közöttük él, valamint jelölje  $X_{\overline{AB}}$ , ( $A, B \in \{S, I\}$ ) annak a valószínűségét, amikor él van köztük. Ekkor az alapegyenlet:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_{\overline{SS}} &= q(X_{\overline{SR}} + X_{\overline{RS}}) + wX_{SS}, \\
\dot{X}_{SS} &= q(X_{SR} + X_{RS}) - wX_{SS}, \\
\dot{X}_{\overline{SI}} &= qX_{\overline{RI}} - pX_{\overline{SI}} - wX_{\overline{SI}} - rX_{\overline{SI}}, \\
\dot{X}_{SI} &= qX_{RI} + wX_{\overline{SI}} - rX_{SI}, \\
\dot{X}_{\overline{IS}} &= qX_{\overline{IR}} - pX_{\overline{IS}} - wX_{\overline{IS}} - rX_{\overline{IS}}, \\
\dot{X}_{IS} &= qX_{IR} + wX_{\overline{IS}} - rX_{IS}, \\
\dot{X}_{\overline{II}} &= pX_{\overline{SI}} + pX_{\overline{IS}} - 2rX_{\overline{II}}, \\
\dot{X}_{II} &= -2rX_{II}, \\
\dot{X}_{\overline{SR}} &= qX_{\overline{RR}} + rX_{\overline{SI}} + wX_{SR} - qX_{\overline{SR}}, \\
\dot{X}_{SR} &= qX_{RR} + rX_{SI} - wX_{SR} - qX_{SR}, \\
\dot{X}_{\overline{RS}} &= qX_{\overline{RR}} + rX_{\overline{IS}} + wX_{RS} - qX_{\overline{RS}}, \\
\dot{X}_{RS} &= qX_{RR} + rX_{IS} - wX_{RS} - qX_{RS}, \\
\dot{X}_{\overline{IR}} &= rX_{\overline{II}} - rX_{\overline{IR}} - wX_{\overline{IR}} - qX_{\overline{IR}}, \\
\dot{X}_{IR} &= rX_{II} - rX_{IR} + wX_{\overline{IR}} - qX_{IR}, \\
\dot{X}_{\overline{RI}} &= rX_{\overline{II}} - rX_{\overline{RI}} - wX_{\overline{RI}} - qX_{\overline{RI}}, \\
\dot{X}_{RI} &= rX_{II} - rX_{RI} + wX_{\overline{RI}} - qX_{RI}, \\
\dot{X}_{\overline{RR}} &= rX_{\overline{IR}} + rX_{\overline{RI}} - 2qX_{\overline{RR}} + wX_{RR}, \\
\dot{X}_{RR} &= rX_{IR} + rX_{RI} - 2qX_{RR} - wX_{RR}.
\end{aligned}$$



Látható, hogy már kis csúcsszám esetén is ezen egyenletrendszer analitikusan megoldhatatlan, nagy egyedszám esetén pedig a rendszer numerikus közelítése is a gyakorlatban kivitelezhetetlen.

Az előzőekben tapasztaltuk, hogy az adaptív járványterjedés modellezésére a gyakorlatban nem alkalmas az alapegyenlet, ezért célszerű más, kevésbé pontos, azonban nagy csúcsszám esetén is alkalmazható modelleket vizsgálni. Ilyen az úgynevezett mean-field, vagy más néven átlagoláson alapuló modell. Ez az alapegyenlethez hasonlóan egy differenciálegyenlet-rendszer, azonban itt az egyes egyenletek a különböző állapotban lévő csúcsok várható értékeinek időbeli változását adja meg.

Az átlagoláson alapuló modell *SIRS* típusú járványterjedés esetén a következő:

$$\begin{aligned} [\dot{S}] &= q[R] - p[SI], \\ [\dot{I}] &= p[SI] - r[I], \\ [\dot{R}] &= r[I] - q[R], \end{aligned} \tag{2.1}$$

ahol az egyenletrendszert megoldva megkapjuk az egészséges, fertőzött, illetve az immunis típusú csúcsok várható értékeinek időbeli változását. A (2.1) rendszer nem zárt, ugyanis tartalmazza az  $[SI]$  mennyiséget, amely az  $S$  és  $I$  állapotban lévő csúcsok közötti élek várható értékének száma. Erre a mennyiségre vagy további differenciálegyenletet írunk fel, amely tartalmazni fogja a többi típusú él várható értékeit, ezáltal ezekre szintén differenciálegyenleteket szükséges felírunk; vagy közelíthetjük az  $[SI]$  mennyiségét a csúcsok várható értékeivel az alábbi módon:

$$[SI] = \frac{n}{N-1}[S][I], \tag{2.2}$$

ahol  $N$  jelöli a gráf csúcseinak a számát,  $n$  pedig az átlagfokszámot.

Adaptív járványterjedési modell esetén célszerű felírni az élekre vonatkozó differenciálegyenleteket, ugyanis a rendszer adaptív tulajdonsága az élek változásában jelenik meg. Az így felírt differenciálegyenlet-rendszerben szintén megjelenik több új mennyiség, amely az adott állapotban lévő csúcshármasok várható értékét mutatja. Ezekre is alkalmazhatunk egy lezárást, amelyet majd a 3. Fejezetben be is mutatunk.

Az átlagoláson alapuló modell nagy hátránya, hogy mivel kompartment modell, ezért nem képes figyelembe venni, hogy a fertőzés melyik egyedről melyik egyedre terjed át. Ezért a folyamat modellezésére gyakran alkalmaznak sztochasztikus szimulációt. Adaptív esetben ez a sztochasztikus szimuláció a Gillespie algoritmuson alapul [5, 6], azonban ez nem képezi a dolgozat részét.

## 3. fejezet

# Adaptív járványterjedési modellek vizsgálata

### 3.1. Adaptív, párok szintjén felírt, átlagoláson alapuló SIS modell

A következőkben a [25] publikáció alapján vizsgáljuk meg az adaptív, párok szintjén felírt, várható értékeken alapuló *SIS* modellt. Az általános modell a következő:

$$\begin{aligned} \dot{[I]} &= p[SI] - r[I], \\ \dot{[SI]} &= r([II] - [SI]) + p([SSI] - [ISI] - [SI]) + \alpha_{SI}([S][I] - [SI]) - \omega_{SI}[SI], \\ \dot{[II]} &= -2r[II] + 2p([ISI] + [SI]) + \alpha_{II}([I]([I] - 1) - [II]) - \omega_{II}[II], \\ \dot{[SS]} &= 2r[SI] - 2p[SSI] + \alpha_{SS}([S]([S] - 1) - [SS]) - \omega_{SS}[SS], \end{aligned} \quad (3.1)$$

ahol  $p$  jelöli a fertőzési rátát,  $r$  a gyógyulási rátát,  $\alpha_{AB}$ , illetve  $\omega_{AB}$  annak a rátáját, hogy egy  $A$  és  $B$  típusú csúc között él jön létre, illetve szűnik meg. A (3.1) modell általános abban az értelemben, hogy lehetővé tesz akármilyen típusú él létrehozását/törlését. A modellre teljesül, hogy bármely  $t$  esetén  $[S] + [I] = N$ , tehát az egyedek száma időben állandó. Felfigyelhetünk arra, hogy az egyenlet tartalmazza az  $[SSI]$  és  $[ISI]$  típusú hármasokat. Ezért ezekre a változókra is vagy differenciálegyenleteket írunk fel vagy közelítjük őket az élek és a csúcsok számainak várható értékeivel. Jelen esetben alkalmazzuk az utóbbit, mégpedig az irodalomban gyakran használt

$$[SSI] = \frac{(k_S - 1)[SS][SI]}{k_S[S]}, \quad [ISI] = \frac{(k_S - 1)[IS][SI]}{k_S[S]} \quad (3.2)$$

közelítéssel, ahol  $k_S$  jelöli az  $S$  állapotban lévő csúcsok átlagos fokszámát, amelyre

$$k_S = \frac{[SS] + [SI]}{[S]} \quad (3.3)$$

teljesül.

A továbbiakban a (3.1) modell egy speciális esetét vizsgáljuk, ahol:

$$\alpha_{SI} = \alpha_{II} = 0, \quad \alpha_{SS} \neq 0, \quad \omega_{II} = \omega_{SS} = 0, \quad \omega_{SI} \neq 0.$$

Ezen utóbbi él törlési és létrehozási ráták megválasztását az az egyszerű, hétköznapi gondolat indokolja, hogy a járvány elterjedését úgy próbáljuk meg megakadályozni, hogy az egészséges egyedeket elszeparáljuk a fertőzött egyedektől, tehát  $SI$  típusú éleket törlünk, ezáltal csökkentjük annak a valószínűségét, hogy ezen egészséges egyed fertőzötté váljon. Továbbá annak érdekében, hogy az egyedeket ne izoláljuk el teljes mértékben és részben megőrizzük a hálózat szerkezetét,  $SS$  típusú éleket hozunk létre. Ezt a módszert, amelyet a 2.3. fejezetben említettünk, okos átkötésnek nevezzük.

A rendszerben kétféle egyensúlyi pont fordulhat elő. Egyrészt a triviális egyensúlyi pont, amely esetén csak egészséges egyed található a rendszerben, tehát

$$([I], [SI], [II], [SS]) = (0, 0, 0, N(N-1)).$$

Másrészt előfordul egy nemtriviális, úgynevezett endemikus egyensúlyi állapot, amikor a rendszerben a fertőzöttek várható száma nem nulla konstans.

Tekintsük a (3.1) differenciálegyenlet-rendszert a (3.2) lezárást alkalmazva. A rendszer egyensúlyi pontjait a következő algebrai rendszer határozza meg:

$$0 = p[SI] - r[I], \quad (3.4)$$

$$0 = [SI] \left( \frac{p(k_s - 1)}{k_s[S]} ([SS] - [SI]) - r - p - \omega_{SI} \right) + r[II], \quad (3.5)$$

$$0 = -2r[II] + 2p[SI] \left( \frac{(k_s - 1)[SI]}{k_s[S]} + 1 \right), \quad (3.6)$$

$$0 = 2[SI] \left( r - \frac{p(k_s - 1)[SS]}{k_s[S]} \right) + \alpha_{SS}([S]([S] - 1) - [SS]). \quad (3.7)$$

Mivel  $[I] = N - [S]$ , ezért a (3.4)-ből:

$$[SI] = \frac{r}{p}[I] = \frac{r}{p}(N - [S]). \quad (3.8)$$

Továbbá a (3.5) egyenletet 2-vel megszorozva, majd (3.6) és (3.7) egyenleteket hozzáadva kifejezhetjük  $[SS]$ -t  $[S]$  és  $[I]$  függvényében, nevezetesen:

$$[SS] = [S]([S] - 1) - 2 \frac{\omega_{SI} r}{\alpha_{SS} p} [I]. \quad (3.9)$$

Ezek után a (3.6) egyenletből pedig:

$$[II] = \frac{p[SI]}{r} \left( \frac{[SI]}{[S]} - \frac{[SI]}{[SS] + [SI]} + 1 \right). \quad (3.10)$$

Ekkor a (3.5) egyenletet 2-vel megszorozva, majd (3.10) egyenletet hozzáadva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{2p(k_s - 1)[SS][SI]}{k_s[S]} - 2r[SI] - 2\omega_{SI}[SI] = 0. \quad (3.11)$$

A fenti egyenletet leosztva  $2[SI]$ -vel a következőre jutunk:

$$\frac{[SS]}{[S]} - \frac{[SS]}{[SS] + [SI]} = \frac{r + \omega_{SI}}{p}.$$

Ebbe az egyenletbe (3.10), (3.8) egyenleteket felhasználva az alábbi negyedrendű egyenlet adódik:

$$x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0, \quad (3.12)$$

ahol az egyszerűség kedvéért az  $x = [S]$  jelölést használtuk, továbbá ahol

$$A_3 = 4ab - 3 - 2b - c,$$

$$A_2 = 2 + 2b + c + b^2 + bc - 6ab - 4ab^2 - 2abc + 4a^2b^2 + Nb(1 - 4a),$$

$$A_1 = Nb(-1 + 6a - b - c + 6ab + 2ac - 8a^2b),$$

$$A_0 = 2N^2ab^2(1 - 2a),$$

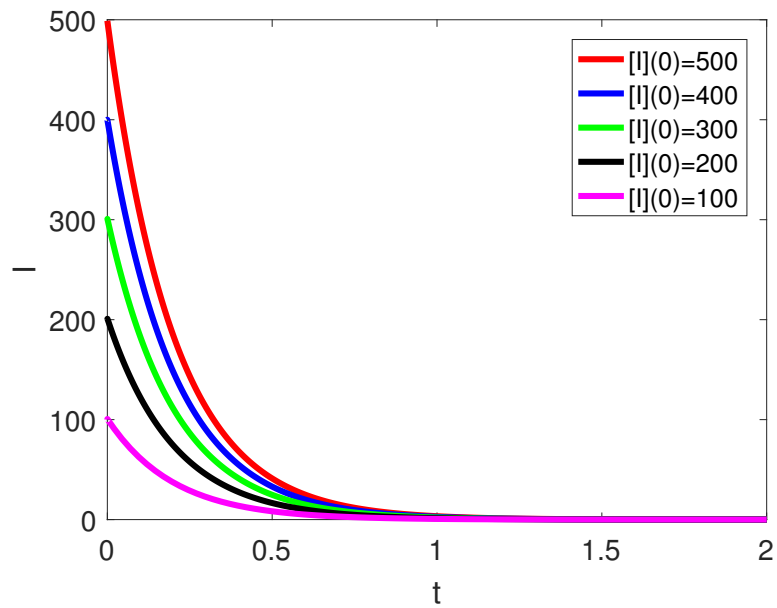
$a = \frac{\omega_{SI}}{\alpha_{SS}}, b = \frac{r}{p}, c = \frac{\omega_{SI}}{p}$  értékekkel. A (3.12) egyenlet numerikus vizsgálata alapján tetszőleges paraméterválasztás esetén legfeljebb egy nemtriviális megoldása létezik a rendszernek, amely biológiailag is realiztikus (tehát az egyensúlyi pont minden koordinátája pozitív). Fontos megjegyezni, hogy a számítás nem veszi figyelembe a triviális egyensúlyi pontot, ugyanis a számítás során  $2[SI]$ -vel osztottunk. Továbbá a rendszer triviális egyensúlyi pontjának stabilitására a következő állapítást tehetjük.

**3.1. Állítás.** *A rendszer triviális egyensúlyi pontja pontosan akkor stabil, ha*

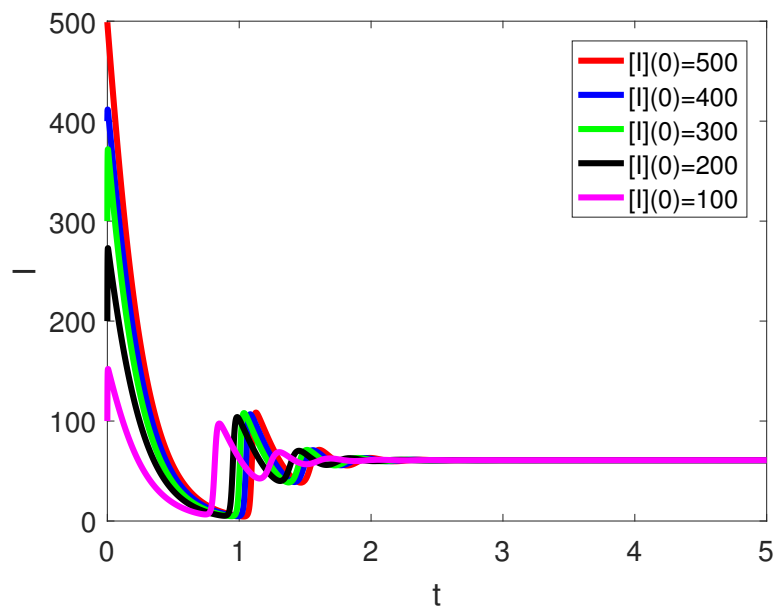
$$\omega_{SI} > p(N - 2) - r. \quad (3.13)$$

*Bizonyítás.* Az  $([I], [SI], [II], [SS]) = (0, 0, 0, N(N-1))$  pontban felírt Jacobi-mátrix meghatározza a triviális egyensúlyi pont stabilitását, az 1.13. Tétel miatt. A (3.2) lezárást felhasználva a Jacobi-mátrix megadható a következő alakban:

$$J = \begin{pmatrix} -r & p & 0 & 0 \\ 0 & -r + p(N - 2) - p - \omega_{SI} & r & 0 \\ 0 & 2p & -2r & 0 \\ \alpha_{SS}(1 - 2N) & 2r - 2p(N - 2) & 0 & -\alpha_{SS} \end{pmatrix}.$$



3.1. ábra. A eset. Fertőző csúcsok számainak időbeli változása  $p = 5, \omega_{SI} = 10000, \alpha_{SS} = 0.1, r = 5, N = 500$  esetén.



3.2. ábra. B eset. Fertőző csúcsok számának időbeli változása  $p = 20, \omega_{SI} = 500, \alpha_{SS} = 0.1, r = 5, N = 500$  esetén.

A kifejtési tételt használva felfedezhetjük, hogy  $-\alpha_{SS}$  és  $-r$  a mátrix sajátértékei, és a fennmaradó két sajátérték pedig megegyezik az alábbi mátrix sajátértékeivel:

$$\begin{pmatrix} -r + p(N - 2) - p - \omega_{SI} & r \\ 2p & -2r \end{pmatrix}.$$

Az 1.13. Állítás miatt a triviális egyensúlyi pont pontosan akkor stabil, ha a mátrix bármely sajátértékének valós része negatív. Ezt csupán a fenti  $2 \times 2$ -es mátrixra kell ellenőrizni, mivel  $-\alpha_{SS}$  és  $-r$  minden esetben negatív valós résszel rendelkeznek. Utóbbi mátrix determinánsa könnyen kiszámítható, és értéke pozitív, ha  $r + \omega_{SI} - p(N - 2) > 0$ . Továbbá a mátrix nyoma is pozitív, ha  $3r + \omega_{SI} - p(N - 3) > 0$ . Egyszerű, azonban lényeges észrevétel, hogy az első egyenlőtlenség teljesülése maga után vonja a második egyenlőtlenség teljesülését is. Így arra a következtetésre jutunk, hogy a mátrix bármely sajátértékének valós része pozitív, amennyiben  $\omega_{SI} > p(N - 2) - r$ .  $\square$

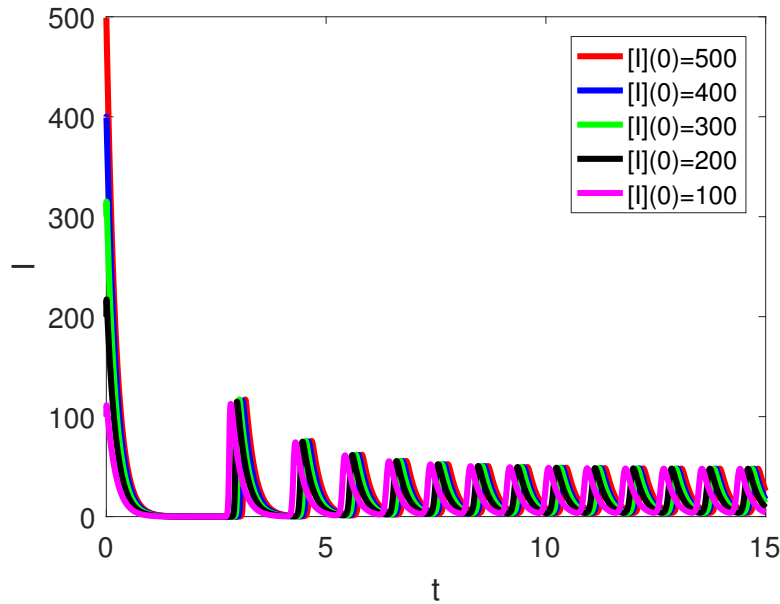
Nézzük meg a triviális egyensúlyi pont stabilitását  $p = 5, \omega_{SI} = 10000, \alpha_{SS} = 0.1, r = 5, N = 500$  paraméterekre. Ebben az esetben a (3.13) egyenlőtlenség a következőképpen alakul:  $10000 > 5 \cdot (500 - 2) - 5$ , amely teljesül, tehát a triviális egyensúlyi pont ebben az esetben stabil. Ezt az esetet láthatjuk a 3.1. ábrán.

**3.2. Állítás.** *A rendszerben van endemikus egyensúlyi pont, és koordinátái*

$$\begin{aligned} [S] &= x, & [I] &= N - x, & [SI] &= \frac{r}{p}(N - x), \\ [SS] &= x(x - 1) - 2\frac{\omega_{SI}r}{\alpha_{SS}p}(N - x), & [II] &= \frac{r(N - x)^2}{px} + \frac{(N - x)[SS]}{[SS] + [SI]}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

ahol  $x$  a (3.12) egyenlet megoldása, és  $x \in (0, N)$ .

Az endemikus egyensúlyi pont stabilitását csak numerikusan tudjuk meghatározni. Adott paraméterek esetén a (3.12) egyenletet és a 3.2. Állítást felhasználva kiszámíthatjuk az endemikus egyensúlyi pont koordinátáit. A  $J$  Jacobi-mátrixban szereplő parciális deriváltakat analitikusan ki tudjuk számolni, ezt követően ebbe helyettesítve az endemikus egyensúlyi pont numerikusan kiszámított koordinátáit, megkapjuk a Jacobi-mátrix elemeit numerikusan. Ekkor 1.13. Tételt alkalmazva megkapjuk, hogy az adott koordinátáknál az endemikus egyensúlyi pont stabil, ha minden sajátértéke negatív valósrésztű. Nézzük meg a fertőző csúcsok számának időbeli változását  $p = 5, \omega_{SI} = 500, \alpha_{SS} = 0.1, r = 5, N = 500$  paraméterértékek esetén, amely a 3.2. ábrán is látható. Ezek alapján arra következtethetünk, hogy a



3.3. ábra. C eset. A fertőző csúcsok várható értékének időbeli változása  $p = 5$ ,  $\omega_{SI} = 500$ ,  $\alpha_{SS} = 0.1$ ,  $r = 5$ ,  $N = 500$  esetén.

rendszerben Andronov–Hopf-bifurkáció lép fel. A bifurkáció tartomány meghatározásához használjuk fel a következőben tárgyaltakat.

Egy  $4 \times 4$ -es mátrix karakterisztikus polinomja felírható

$$\lambda^4 - b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 - b_1\lambda + b_0$$

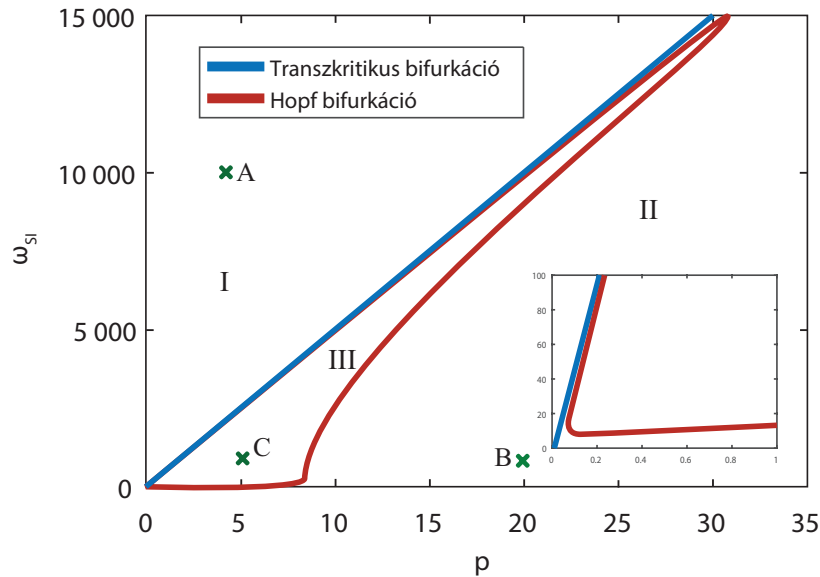
alakban, ahol  $b_3 = \text{Tr}J$ ,  $b_0 = \det J$ , és  $b_1, b_2$  pedig a Jacobi-mátrix bizonyos al-determinánsok összegeiből származtatható, amelynek konkrét formájára most nem térnénk ki. A szükséges és elégséges feltétel a tisztán képzetes sajátértékek létezésére  $4 \times 4$ -es mátrix esetén

$$b_0b_3^3 = b_1(b_2b_3 - b_1), \quad \text{valamint} \quad \text{sign}(b_1) = \text{sign}(b_3). \quad (3.15)$$

Ezek alapján meghatározhatjuk, hogy a  $(p, \omega_{SI})$  paramétersíkon hol lép fel Andronov–Hopf-bifurkáció. Adott  $p$  érték esetén numerikusan kiszámítjuk  $b_0b_3^3 = b_1(b_2b_3 - b_1)$  egyenletet  $\omega_{SI}$  paramétert változtatva. Numerikus vizsgálatok alapján megállapíthatjuk, hogy bizonyos  $p$  paraméterek esetén ez a kifejezés kétszer is előjelet vált, ahogy  $\omega_{SI}$  értékét változtatjuk. Pontosabban, adott  $N, r, \alpha_{SS}$  paraméterek esetén léteznek  $p_1, p_2$  számok, amelyekre ha  $p \in (p_1, p_2)$ , akkor létezik olyan  $\omega_1$ , illetve  $\omega_2$ , hogy  $\omega_{SI} = \omega_i$ , ( $i = 1, 2$ ) esetén  $b_0b_3^3 = b_1(b_2b_3 - b_1)$ , vagyis Andronov–Hopf-bifurkáció lép fel. Ha  $p \notin (p_1, p_2)$ , akkor nem lép fel Andronov–Hopf-bifurkáció, vagyis  $b_0b_3^3 = b_1(b_2b_3 - b_1)$  egyenlet nem igaz. Amennyiben  $p \in (p_1, p_2)$ , és  $\omega_{SI} \in (\omega_1, \omega_2)$ ,

akkor létezik egy stabil periódikus pálya. Ha  $\omega_{SI}$  az  $(\omega_1, \omega_2)$  intervallumon kívülre esik, akkor nem létezik periódikus pálya, és vagy az endemikus egyensúlyi pont, vagy a triviális egyensúlyi pont stabil.

Az Andronov–Hopf-bifurkáció mellett transzkritikus bifurkáció is megtalálható a rendszerben.



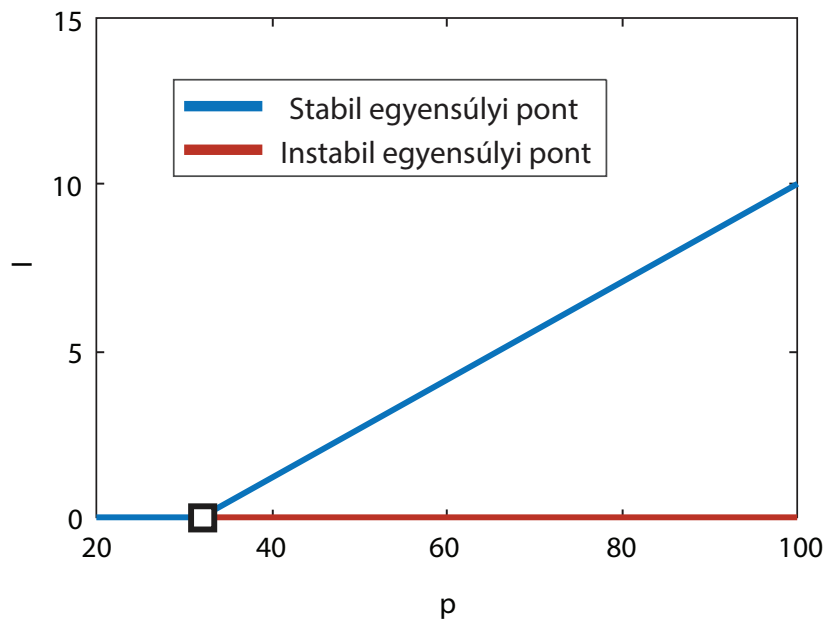
3.4. ábra. A modell bifurkációs diagrammja a  $(p, \omega_{SI})$  paramétersíkon  $N = 500, r = 5, \alpha_{SS} = 0.1$  esetén. Az A, B, C pontok jelölik azokat a paraméterpárokat, amelyekre megvizsgáltuk a fertőző csúcsok számának időbeli változását.

A rendszer bifurkációs ábrája a  $(p, \omega_{SI})$  paramétersíkon a 3.4. ábrán látható. A bifurkációs ábra alapján a  $(p, \omega_{SI})$  pont elhelyezkedése szempontjából a modell két lényegileg eltérő módon alakulhat.

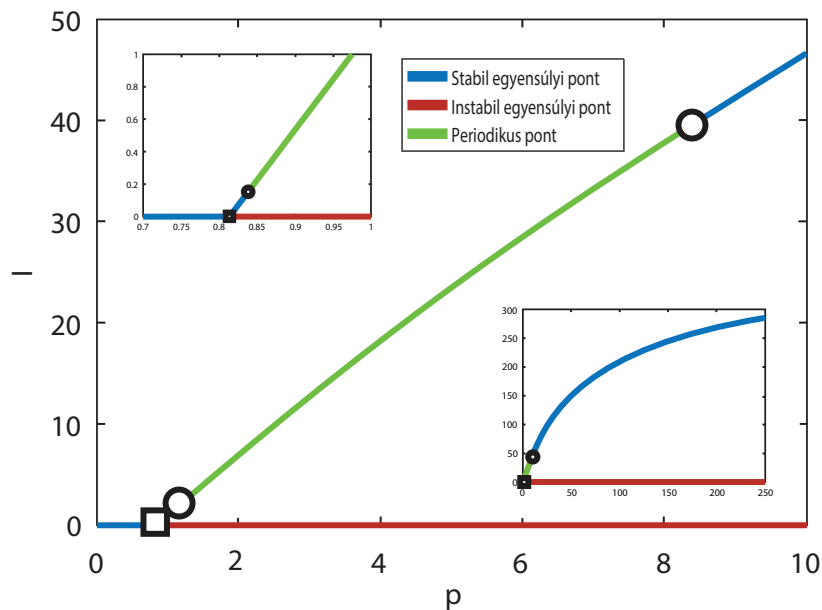
Az egyik lehetséges eset az, amikor  $\omega_{SI}$  értéke aránylag nagy. Ekkor alacsony értékű  $p$  paraméter esetén egyetlen egyensúlyi pont van, a triviális egyensúlyi pont, amely stabil. Ebben az esetben az endemikus pont negatív értéket venne fel, amely a modell esetében nem értelmes. Ha növeljük a  $p$  paraméter értékét, elérünk egy pontot, ahol a triviális egyensúlyi pont elveszíti a stabilitását, és instabil lesz, valamint létrejön egy endemikus egyensúlyi pont, amely stabil. A stabilitásváltás következőképpen a (3.13) formulával meghatározott egyenes mentén történik, tehát itt transzkritikus bifurkáció figyelhető meg. Ezt szemlélteti a 3.5. ábra. Az ábrához a Matlab Matcont csomagját használtam [15].

A második lehetséges eset akkor lép fel, amikor az  $\omega_{SI}$  értéke aránylag kicsi. Ebben az esetben alacsony  $p$  paraméter esetén a rendszer viselkedése megegyezik





3.5. ábra. Az egyensúlyi pont első koordinátájának ( $I$ ) változása  $p$  paraméterérték függvényében  $\omega_{SI} = 15000$ ,  $\alpha_{SS} = 0.1$ ,  $r = 5$ ,  $N = 500$  esetén.



3.6. ábra. Az egyensúlyi pont első koordinátájának ( $I$ ) változása  $p$  paraméterérték függvényében  $\omega_{SI} = 400$ ,  $\alpha_{SS} = 0.1$ ,  $r = 5$ ,  $N = 500$  esetén.

a korábbival. Ezek után  $p$  értékét növelve szintén fellép egy transzkritikus bifurkáció, amelyben létrejön egy új stabil egyensúlyi pont, és az eddigi triviális egyensúlyi pont instabillá válik. Majd,  $p$  paraméter értékét tovább növelve ismét egy bifurkáció lép fel, ezúttal egy Andronov–Hopf-bifurkáció, amelynek következtében a stabil

egyensúlyi pont megszűnik, és helyette egy periodikus pálya jön létre. Amennyiben  $p$  értékét tovább növeljük, ismét egy Andronov–Hopf-bifurkáció lép fel, amelynek köszönhetően a periodikus pályából ismét egy stabil egyensúlyi pont lesz. Ezt az esetet láthatjuk a 3.6. ábrán.

Ezekből arra következtethetünk, hogy a paraméterek bármilyen értéket is vesznek fel, mindig lesz olyan  $p$  érték, amelyre a rendszer stabil egyensúlyi pontja a triviális egyensúlyi pont.

## 3.2. Adaptív, párok szintjén felírt, átlagoláson alapuló SIRS modell

Az alábbi fejezetben a [21] kutatásban szereplő modellből fogunk kiindulni, azonban az előző részben szereplő modellel való konzisztencia miatt a csúcsok és élek állapotainak valószínűségeit leíró differenciálegyenletek helyett itt is a csúcsok és élek állapotainak várható számát leíró differenciálegyenleteket fogunk használni. A fejezetben szereplő ábrákhoz a Matlab Matcont programcsomagját használtam [15].

Ezen modell az *SIRS* típusú (fertőzhető, beteg, immunis, fertőzhető) betegségek viselkedését modellezi, vagyis, hogy egy egészséges egyén megfertőződhet, majd miután meggyógyul, immunitást szerez, amely azonban az idő előrehaladtával megszűnik, így ismét fertőzhetővé válik. Ilyen betegség például a rubeola, mumpsz, illetve az influenza is.

A modellben szereplő átkötés „okos átkötés”, azaz egy egészséges vagy immunis egyed megszüntetheti a kapcsolatát egy fertőzött egyénnel, és helyette egy másik egészséges vagy immunis egyeddel létesít kapcsolatot. Az ebben a modellben használt átkötés abban különbözik az előző modellben szereplőtől, hogy az  $\omega_{SI}$  és az  $\alpha_{SS}$  értéke megegyezik, amelyet a továbbiakban  $w$ -vel jelölünk.

A modellt a következő alakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
\dot{[S]} &= q[R] - p[SI], \\
\dot{[I]} &= p[SI] - r[I], \\
\dot{[R]} &= r[I] - q[R], \\
\dot{[SS]} &= q[SR] + w \frac{[S]}{[S] + [R]} [SI] - 2p[SSI], \\
\dot{[SI]} &= 2p[SSI] + q[IR] - r[SI] - w[SI] - p([SI] + [ISI]) - 2r[II], \\
\dot{[II]} &= p([SI] + [ISI]) - 2r[II], \\
\dot{[SR]} &= r[SI] + w \frac{[R]}{[S] + [R]} [SI] + 2q[RR] - q[SR] - p[ISR] + w \frac{[S]}{[S] + [R]} [IR], \\
\dot{[IR]} &= 2r[II] + p[ISR] - q[IR] - r[IR] - w[IR], \\
\dot{[RR]} &= r[IR] - 2q[RR] + w \frac{[R]}{[S] + [R]} [IR].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Mivel a modell nem veszi figyelembe a születést és a halálozást, az alábbi megfigyelést tehetjük:

$$\begin{aligned}
[S] + [I] + [R] &= N, \\
[SS] + [SI] + [II] + [SR] + [IR] + [RR] &= K,
\end{aligned}$$

ahol  $N$  jelöli a modellben szereplő csúcsok,  $K$  pedig a modellben szereplő élek számát. Utóbbi az okos átkötés miatt állandó. Mivel a csúcsszám és az élszám állandó, ezért például az  $[R]$  és  $[RR]$  változókra vonatkozó egyenletet kiküszöbölhetjük a rendszerből. Észrevehetjük, hogy a (3.16) rendszer nem zárt, ugyanis tartalmazza az  $[SSI]$ ,  $[ISI]$ ,  $[RSI]$  csúcshármasokat. Ezekre alkalmazhatjuk a következő lezárásokat:

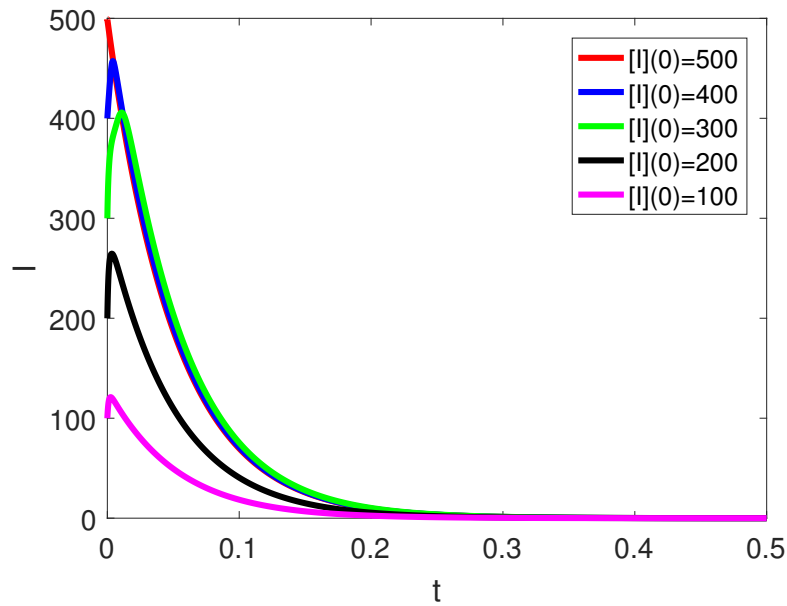
$$\begin{aligned}
[SSI] &= \frac{(k_S - 1)[SS][SI]}{k_S[S]}, \\
[ISI] &= \frac{(k_S - 1)[SI][SI]}{k_S[S]}, \\
[RSI] &= \frac{(k_S - 1)[SR][SI]}{k_S[S]},
\end{aligned}$$

ahol

$$k_S = \frac{[SS] + [SI] + [SR]}{[S]}.$$

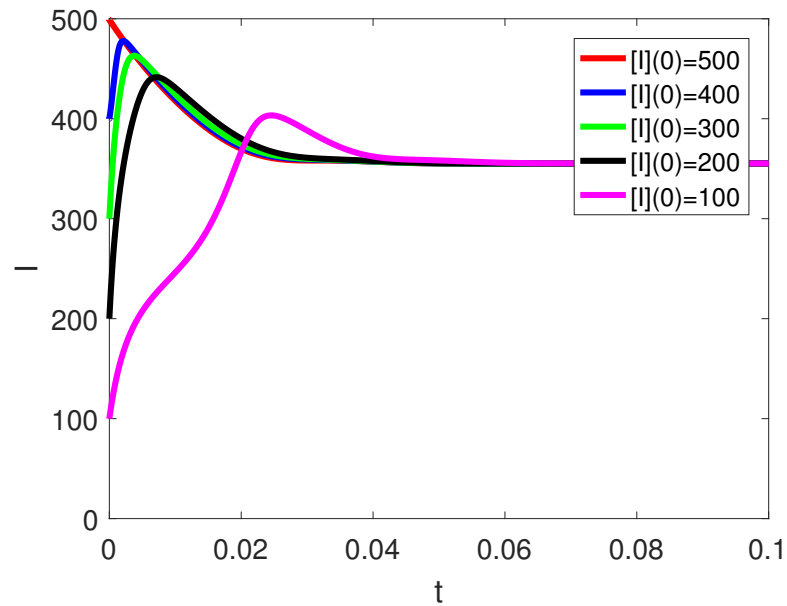
Az előző modellhez hasonlóan ennek a modellnek is kétféle egyensúlyi pontja lehet: a triviális egyensúlyi pont, amely esetén a modellben a betegség megszűnik és egy adott idő után már csak egészséges egyed található a modellben.

Ekkor  $([S], [I], [R], [SS], [SI], [II], [SR], [IR], [RR]) = (N, 0, 0, K, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Egy olyan esetre láthatunk példát a 3.7. ábrán, amikor ez a triviális egyensúlyi pont minden bizonnyal stabil. Továbbá a rendszernek létezhet egy endemikus egyensúlyi pontja is, amely esetén a rendszerben lévő fertőzöttek (illetve immunis egyedek) száma nem nulla, azonban állandó. Egy olyan eset látható a 3.8. ábrán, amikor ez az endemikus egyensúlyi pont vélhetően stabil. A (3.1) modellel ellentétben a (3.16)

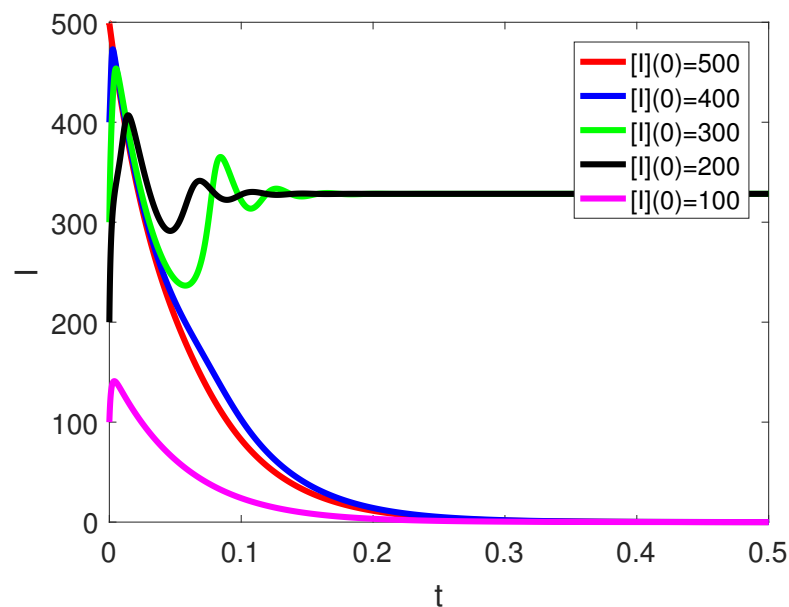


3.7. ábra. A eset. A fertőző csúcsok várható értékének időbeli változása  $p = 25, w = 1200, q = 64, r = 20, N = 500, K = 5000$  esetén. A rendszer megoldása a triviális egyensúlyi ponthoz tart.

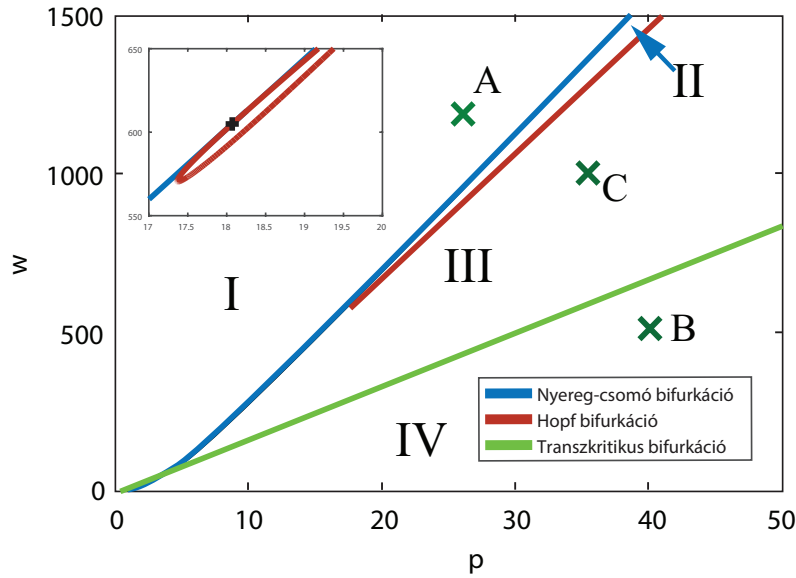
modell endemikus egyensúlyi pontjának meghatározása a modell komplexitása miatt nem lehetséges. Hasonlóan a stabilitásvizsgálat sem vezet eredményre. Azonban numerikus vizsgálatok alapján azt a következtetést tudjuk levonni, hogy adott  $w$  esetén a triviális egyensúlyi pont a  $p$  értékét növelve egy adott értéknél elveszíti a stabilitását, az előző fejezetben vizsgált modellhez hasonlóan. A  $(w, p)$  paramétersíkon ezen pontok egy egyenest határoznak meg, amelyen transzkritikus bifurkáció lép fel. Adott paraméterek esetén ez az egyenes megtalálható a 3.10. ábrán. A rendszer  $q = 64, r = 20, N = 500, K = 5000$  paramétereit rögzítve, a 3.10 ábrán látható a bifurkációs görbe a  $(p, w)$  paramétersíkon. Ezt az ábrát a bifurkációs görbék négy jól elkülöníthető részre osztják. Az I. területen csak a triviális egyensúlyi pont létezik, amely stabil. Ahogy a rendszer áthalad a nyereg-csomó bifurkációs ponton, kis  $w$  esetén létrejön egy stabil, illetve egy instabil endemikus egyensúlyi pont. Itt, a III.



3.8. ábra. B eset. A fertőző csúcsok várható értékének időbeli változása  $p = 40, w = 500, q = 64, r = 20, N = 500, K = 5000$  esetén. A rendszer megoldása az endemikus egyensúlyi ponthoz tart.



3.9. ábra. C eset. A fertőző csúcsok várható értékének időbeli változása  $p = 35, w = 1000, q = 64, r = 20, N = 500, K = 5000$  esetén. A rendszerben két stabil egyensúlyi pont található, így a kezdeti koordináták értékétől függ, hogy a rendszer megoldása a triviális vagy az endemikus stabil egyensúlyi ponthoz tart.

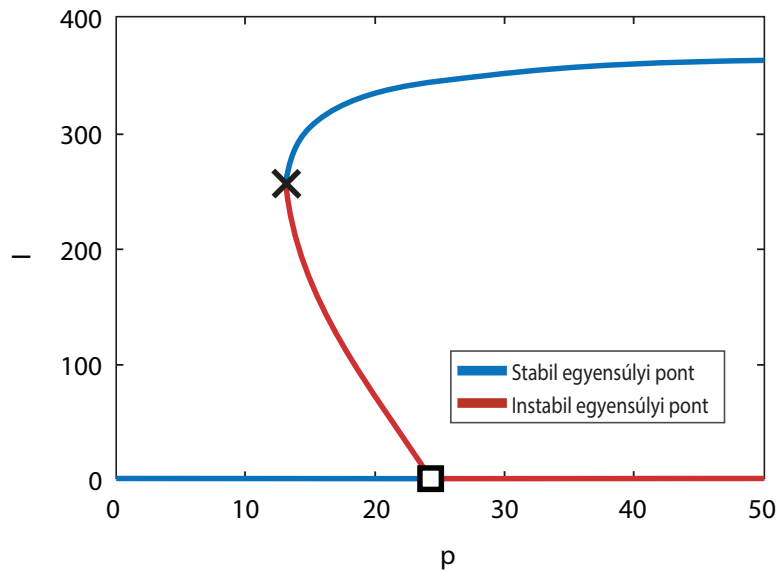


3.10. ábra. A modell bifurkációs diagrammja a  $(p, w)$  paramétersíkon  $q = 64, r = 20, N = 500, K = 5000$  esetén. Az A, B, C pontok jelölik azokat a paraméterpárokat, amelyekre megnéztük a fertőző csúcsok várható értékének időbeli változását.

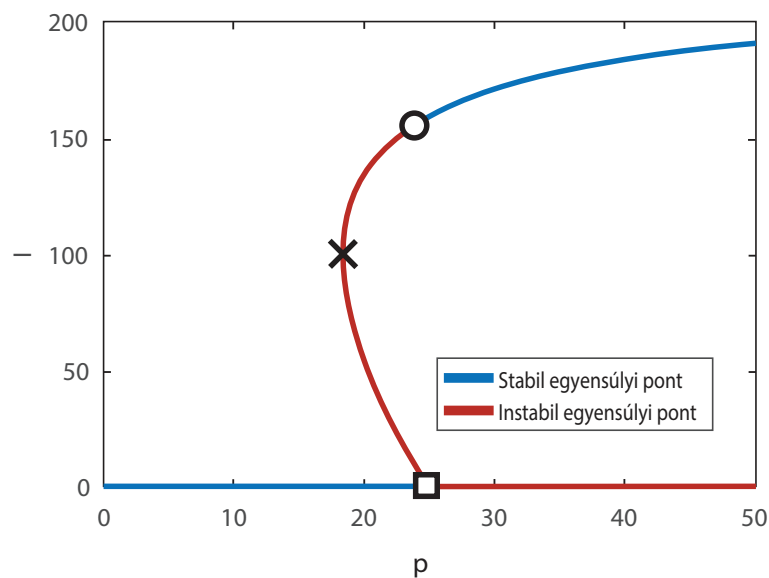
területen bistabilitás fedezhető fel, ahol a kezdeti koordinátáktól függ, hogy a rendszer megoldása a triviális vagy az endemikus egyensúlyi ponthoz tart. Ezt az érdekes esetet szemlélteti a 3.9. ábra. Ahogy a  $p$  paraméter értékét tovább növeljük, egy kritikus értéknél transzkritikus bifurkáció megy végbe, azaz a triviális egyensúlyi pont elveszíti a stabilitását, és instabil lesz, míg az endemikus egyensúlyi pont stabilis lesz. A stabilitást váltott endemikus egyensúlyi pont azonban nem értelmezhető a modell szempontjából, mivel ezekben az egyensúlyi pontokban a fertőzött egyedek várható száma negatív értékű lesz. Ahogy a transzkritikus bifurkáció végbement, átléptünk a IV. területre, ahol már csak az endemikus egyensúlyi pont stabil, míg a triviális egyensúlyi pont instabil. Egy ilyen eset látható a 3.11. ábrán  $p$  paraméter függvényében.

Amennyiben nagyobb  $w$  paraméterérték esetén vizsgáljuk, a nyereg-nyereg bifurkáció hatására két instabil endemikus egyensúlyi pont jön létre, amely a 3.10. ábrán a II. területen található. A  $p$  paramétert tovább növelve a rendszer egyik endemikus egyensúlyi pontja átlép egy Andronov–Hopf-bifurkáción, amely hatására az endemikus egyensúlyi pont stabillá válik, és átlép az ábrán a III. területre, ahol bistabilitás található, mind az endemikus, mind az endemikus, mind a triviális egyensúlyi pont stabil. Vegyük észre, hogy az Andronov–Hopf-bifurkáció görbéje szintén egy zárt területet ír le, azonban ez a tartomány nagyon szűk. A fertőzési ráta értékét tovább növelve itt egy transzkritikus bifurkáció lép fel, amely hatására a triviális egyensú-

lyi pont elveszíti a stabilitását, és a rendszerben egyetlen stabil egyensúlyi állapot található, az endemikus. A 3.12. ábrát más  $q$  érték esetén készítettük el, mint ami a bifurkációs diagrammhoz tartozik, ugyanis ebben az esetben a II. tartomány bővebb.



3.11. ábra. Az egyensúlyi pont első koordinátáinak ( $I$ ) változása  $p$  paraméter függvényében  $w = 400, q = 64, r = 20, N = 500, K = 5000$  paraméterek esetén.



3.12. ábra. Az egyensúlyi pont első koordinátáinak ( $I$ ) változása  $p$  paraméter függvényében  $w = 400, q = 16, r = 20, N = 500, K = 5000$  paraméterek esetén.

# Összefoglalás

A dolgozatban járványterjedési folyamatokat vizsgáltunk adaptív hálózatokon. Az első modellben a párok szintjén felírt, átlagoláson alapuló *SIS* modellt vizsgáltuk meg. Az egyensúlyi pontok száma és stabilitás alapján az  $(p, \omega_{SI})$  paramétersíkot három különböző területre oszthattuk fel. Ezt a modellt egy speciális esetben kiterjesztettük *SIRS* dinamikára, ezáltal újabb változókat és egyenleteket volt szükséges bevezetni. Ez utóbbi a modell összetettségét növelte, azonban a Matlab Matcont programcsomagja segítségével itt is felosztottuk a  $(p, w)$  paramétersíkot, amelyet ebben az esetben négy részre partícionáltunk. Általánosan is elmondható, hogy a modellben az állapotok és átmenetek számát növelve a rendszerek analitikus és numerikus vizsgálata is komplikáltabbá válik.



# Irodalomjegyzék

- [1] R. Acuna-Soto, L. C. Romero, J. H. Maguire: Large Epidemics of Hemorrhagic Fevers in Mexico 1545–1815, *AM J Trop Med Hyg.* **62**(6), 733–742, (2000).
- [2] O. J. Benedictow: The Black Death: The Greatest Catastrophe Ever, *History Today* **55**(3), (2005).
- [3] D. Bernoulli: Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, *Mem. Acad. r. Sci. Paris* **3**(2), (1766).
- [4] B. Blasius: Adaptive Networks (2009);  
[http://www.mathmod.icbm.de/download/MCS\\_LNmain.pdf](http://www.mathmod.icbm.de/download/MCS_LNmain.pdf)
- [5] D. T. Gillespie: A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions, *J. Comput. Phys.* **22**, 403–434, (1976).
- [6] D. T. Gillespie: Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions, *J. Phys. Chem.* **81**, 2340–2361, (1976).
- [7] T. Gross, H. Sayama: Adaptive Networks: Theory, Models and Applications, *Springer*, (2009).
- [8] J. N. Hays: Epidemics and pandemics: their impacts on human history: First cholera pandemic, *ABC-CLIO* 1817–1824, (2005).
- [9] W. O. Kermack, A. G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proc. Royal Soc. Lond.* **115**(772), 700–721, (1927).
- [10] J. H. Lambert: Die Tödlichkeit der Kinderblattern. Beytrage zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, *Buchhandlung der Realschule* **3**, (1772).
- [11] P. S. Laplace: Th’eorie analytique des probabilit’es, *Paris, Ve. Courcier* (1812).

- [12] G. W. Leibnitz: Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione, *Acta Euriditorum* **Sept**, 385–392, (1693).
- [13] R. J. Littman: The Plague of Athens: Epidemiology and Paleopathology, *Mt Sinai J Med.* **76**(5) 456–467, (2009).
- [14] E. N. Lorenz : Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmospheric Sci.* **20**(2), 130–148, (1963).
- [15] H. Meijer: Matcont Tutorial: ODE GUI version (2004);  
[http://wwwhome.math.utwente.nl/~meijerhge/MT\\_JR\\_slow.pdf](http://wwwhome.math.utwente.nl/~meijerhge/MT_JR_slow.pdf)
- [16] I. Newton: The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines, *Henry Woodfall, John Nourse, London*, (1736).
- [17] H. Poincare: L'Équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, *Acta Mathematica* **7**, 259–380, (1885).
- [18] B. Van der Pol, J. Van der Mark: Frequency demultiplication, *Nature* **120**, 363–364, (1927).
- [19] R. Ross: The prevention of malaria, *New York, E.P. Dutton & company*, (1910).
- [20] S. S. Sastry: The Newton-Leibniz controversy over the invention of the calculus, *University of Wisconsin*, (2004).
- [21] L.B. Shaw, I.B. Schwartz: Fluctuating epidemics on adaptive networks, *Phys. Rev. E*, **77**(6), 066101, (2008).
- [22] Constantinos I. Siettos, Lucia Russo: Mathematical modeling of infectious disease dynamics, *Virulence* **4**(4), 295–306, (2013).
- [23] P. L. Simon: Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek (2012);  
<http://simonp.web.elte.hu/files/dinrendjegyzet.pdf>
- [24] P. L. Simon: Közönséges Differenciálegyenletek Jegyzet (2007);  
<http://simonp.web.elte.hu/files/kozdiff.pdf>
- [25] A. Szabó-Solticzky, L. Berthouze, I. Z. Kiss, P. L. Simon: Oscillating epidemics in a dynamic network model: stochastic and mean-field analysis, *J. Math. Biol.* **72**(5), 1153–1176, (2016).

- [26] S. I. Trevisanato: The biblical plague of the Philistines now has a name, tularmia, *Med Hypotheses* **69**(5), 1144–1146, (2007).
- [27] World Health Organisation: Avian influenza: assessing the pandemic threat(2005);  
[http://www.who.int/influenza/resources/documents/h5n1\\_assessing\\_pandemic\\_threat/en/](http://www.who.int/influenza/resources/documents/h5n1_assessing_pandemic_threat/en/)
- [28] World Health Organisation: Situation Report (2016);  
[http://apps.who.int/iris/bitstream/10665/208883/1/ebolasitrep\\_10Jun2016\\_eng.pdf?ua=1](http://apps.who.int/iris/bitstream/10665/208883/1/ebolasitrep_10Jun2016_eng.pdf?ua=1)
- [29] World Health Organisation, Regional Office of Europe: Measles no longer endemic in 79% of the WHO European Region (2017);  
<http://www.euro.who.int/en/media-centre/sections/press-releases/2017/measles-no-longer-endemic-in-79-of-the-who-european-region>