Körök analitikus geometriája

Szakdolgozat

Barna Kinga

Elemző matematikus

Témavezető:

Lakos Gyula, adjunktus

Geometriai Tanszék,

Matematikai intézet

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Budapest, 2019

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Lakos Gyulának a téma ajánlásért, türelméért és hogy lelkesedésével motivált a szakdolgozat megírásában.

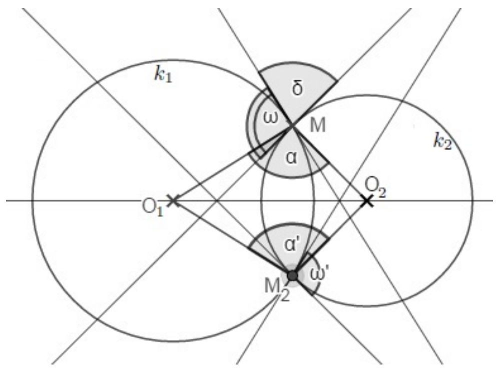
Tartalomjegyzék

1. fejezet

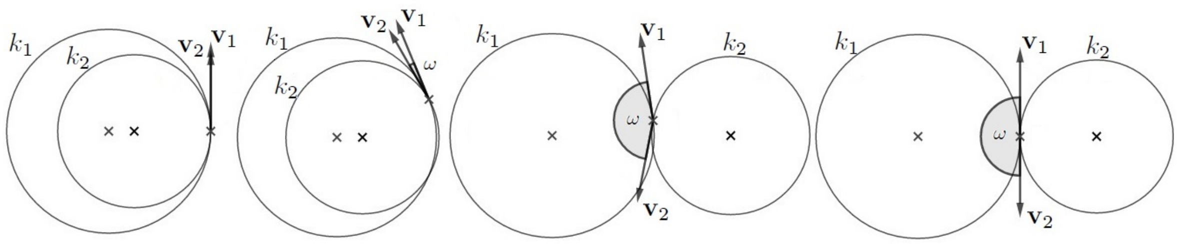
Motiváció

1.1. Bevezetés

Legyen k_1 és k_2 két egymást metsző kör, és határozzuk meg a szögüket. A két kör szögének értelmezéséhez több lehetőség is adódik, mint például valamelyik metszéspontban az érintők által meghatározott szögek egyike (δ vagy ω). Vagy akár a sugarak által bezárt szögek (α, α') is szóba jöhetnek. A lehetőségek leszűkítéséhez vegyük észre, hogy α és ω szárai egymásra merőlegesek, és egy megfelelő irányú $90°$-os forgatással egymásba vihetők. Továbbá az is észrevehető, hogy a középpontok által meghatározott egyenesre szimmetrikus az ábra. Vagyis az említett szögek, nem függenek a metszéspont megválasztásától. A felmerült lehetőségekre igaz a következő összefüggés $\alpha = \omega = 180° - \delta$, tehát egymásból könnyen kiszámíthatók.



Egy kör pozitív körüljárás alatt az óramutató járásával ellentétes, negatív körüljárás alatt pedig az óramutató járásával megegyező körüljárást értjük. A kör érintővektorai két osztályba sorolhatók az alapján, hogy melyik körüljárásnak feleltethetők meg. A továbbiakban pozitív irányítás alatt az érintővektorok azon osztályát értjük, mely a pozitív körüljárást reprezentálja, negatív alatt pedig azon osztályukat, mely a negatív körüljárást reprezentálja. Két kör szögén pedig az irányításuknak megfelelő, metszéspontjukba rajzolt érintővektorok szögét értjük, mely a fenti ábrában a körök pozitív irányítása mellett az ω-val jelölt szög. A következő példákban a pozitív irányítású körök láthatók, melyek irányítását $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ jelöli, szögüket pedig ω.

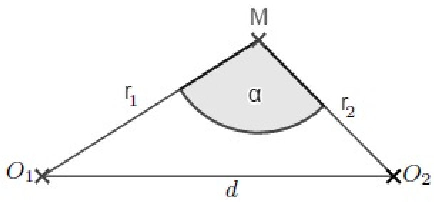


Legyen d a két kör középpontjainak távolsága. Az előbbiekben már belátott egyenlőség ($\alpha = \omega$) ismeretében, a feladat megoldása egy háromszög szögének kiszámítására egyszerűsödik, melynek ismertek az oldalhosszai. Ekkor az O_1O_2M háromszögre a koszinusz-tételt alkalmazva kapjuk az alábbi összefügést

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - \cos(\omega) r_1 r_2.$$

Innen $\cos\omega$-t kifejezve:

$$\cos\omega = \frac{-d^2 + r_1^2 + r_2^2}{2r_1r_2}. \tag{1.1}$$



Abban az esetben, ha a körök analitikusan az $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ egyenlettel adottak, akkor ehhez a megoldásmenethez előbb meg kell határoznunk a háromszög oldalhosszait. Négyzetesítéssel alakítsuk az egyenletüket $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ alakúvá a következő módon:

$$\begin{aligned}
&A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, && (A \neq 0)\\
&x^2 + y^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0,\\
&\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \left(\frac{C}{2A}\right)^2 - \frac{D}{A},\\
&\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}.
\end{aligned}$$

Ez alapján a középpont koordinátái és a sugár hossza:

$$O = \left(\frac{-B}{2A}, \frac{-C}{2A}\right), \qquad r = \sqrt{\frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}}.$$

Tegyük fel, hogy k_1 és k_2 két különböző kör, és igaz rájuk hogy $A_1, A_2 > 0$. Ekkor a fentieknek megfelelő módon kaphatjuk meg O_1-t, O_2-t, r_1-t, r_2-t, valamint $\overrightarrow{O_1O_2}$ hosszának kiszámításával d-t.

$$\begin{aligned}
&A_1(x^2 + y^2) + B_1x + C_1y + D_1 = 0, && A_2(x^2 + y^2) + B_2x + C_2y + D_2 = 0,\\
&r_1 = \sqrt{\frac{B_1^2 + C_1^2 - 4A_1D_1}{4A_1^2}}, && r_2 = \sqrt{\frac{B_2^2 + C_2^2 - 4A_2D_2}{4A_2^2}},\\
&O_1 = \left(\frac{-B_1}{2A_1}, \frac{-C_1}{2A_1}\right), && O_2 = \left(\frac{-B_2}{2A_2}, \frac{-C_2}{2A_2}\right),
\end{aligned}$$

$$d=\sqrt{\left(\frac{-B_1}{2A_1}+\frac{B_2}{2A_2}\right)^2+\left(\frac{-C_1}{2A_1}+\frac{C_2}{2A_2}\right)^2}.$$

Helyettesítsünk be az előbbi, két kör szögének meghatározására használt (1.1) képletbe.

$$\cos\omega=\frac{-\left(\left(\frac{-B_1}{2A_1}+\frac{B_2}{2A_2}\right)^2+\left(\frac{-C_1}{2A_1}+\frac{C_2}{2A_2}\right)^2\right)+\frac{B_1^2+C_1^2-4A_1D_1}{4A_1^2}+\frac{B_2^2+C_2^2-4A_2D_2}{4A_2^2}}{2\sqrt{\frac{B_1^2+C_1^2-4A_1D_1}{4A_1^2}}\sqrt{\frac{B_2^2+C_2^2-4A_2D_2}{4A_2^2}}}.$$

Végezzük el a számlálóban lévő két négyzetreemelést, a zárójel felbontását és a két tört összegre bontását.

$$\cos\omega=\frac{-\left(\frac{B_1}{2A_1}\right)^2+2\frac{B_1B_2}{4A_1A_2}-\left(\frac{B_2}{2A_2}\right)^2-\left(\frac{C_1}{2A_1}\right)^2+2\frac{C_1C_2}{4A_1A_2}-\left(\frac{C_2}{2A_2}\right)^2}{2\sqrt{\frac{B_1^2+C_1^2-4A_1D_1}{4A_1^2}}\sqrt{\frac{B_2^2+C_2^2-4A_2D_2}{4A_2^2}}}$$

$$+\frac{\frac{B_1^2}{4A_1^2}+\frac{C_1^2}{4A_1^2}-\frac{4A_1D_1}{4A_1^2}+\frac{B_2^2}{4A_2^2}+\frac{C_2^2}{4A_2^2}-\frac{4A_2D_2}{4A_2^2}}{2\sqrt{\frac{B_1^2+C_1^2-4A_1D_1}{4A_1^2}}\sqrt{\frac{B_2^2+C_2^2-4A_2D_2}{4A_2^2}}}.$$

Következő lépésben vonjuk össze a számlálóban lévő tagokat, és emeljünk ki $\frac{1}{4A_1A_2}$-t.

$$\cos\omega=\frac{2\frac{B_1B_2}{4A_1A_2}+2\frac{C_1C_2}{4A_1A_2}-\frac{4A_1D_1}{4A_1^2}-\frac{4A_2D_2}{4A_2^2}}{2\sqrt{\frac{B_1^2+C_1^2-4A_1D_1}{4A_1^2}}\sqrt{\frac{B_2^2+C_2^2-4A_2D_2}{4A_2^2}}}.$$

Ezek után a nevezőt is hozzuk szebb alakra, a gyökök alól hozzuk ki $\frac{1}{4A_1^2}$-t és $\frac{1}{4A_2^2}$-t.

$$\cos\omega=\frac{\frac{1}{2A_1A_2}(B_1B_2+C_1C_2-2A_1D_2-2A_2D_1)}{\frac{1}{2A_1A_2}\sqrt{B_1^2+C_1^2-4A_1D_1}\sqrt{B_2^2+C_2^2-4A_2D_2}}.$$

Utolsó lépésben pedig egyszerűsítsük a törtet.

$$\cos\omega=\frac{B_1B_2+C_1C_2-2A_1D_2-2A_2D_1}{\sqrt{B_1^2+C_1^2-4A_1D_1}\sqrt{B_2^2+C_2^2-4A_2D_2}}.$$

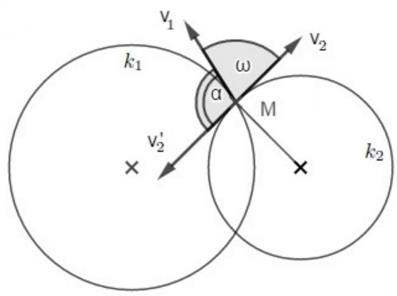
Az eredményül kapott tört számlálójában egy összeg, a nevezőjében pedig két gyök szorzata áll. Ez a vektorok szögének meghatározására emlékeztethet, amit szintén egy tört kiszámításával kapunk. A vektoros esetben a számlálóban a két vektor skaláris szorzata, a nevezőben pedig a vektorok hosszainak szorzata található. Még jobban megvizsgálva az is észrevehető, hogy akárcsak a vektorok szögénél, itt is fellelhető egy szorzat, vagy más nézőpontból egy bilineáris forma. Ez a bilineáris forma szerepel a gyökök alatt és a számlálóban is. Innen a motiváció a következő szorzat definiálásához.

$$(A_1,B_1,C_1,D_1)\cdot(A_2,B_2,C_2,D_2)\equiv B_1B_2+C_1C_2-2A_1D_2-2A_2D_1.$$

Így a $\mathbf{k}_1=(A_1,B_1,C_1,D_1)$, $\mathbf{k}_2=(A_2,B_2,C_2,D_2)$ jelölés mellett a keresett szög koszinusza a következőképp határozható meg:

$$\cos\omega=\frac{\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2}{|\mathbf{k}_1|\cdot|\mathbf{k}_2|}. \tag{1.2}$$

Ha $A_1 > 0$ és $A_2 < 0$, a képletünk $\cos\omega$ helyett $-\cos\omega$-t ad, ami az $\frac{1}{4A_2^2}$ gyök alól való kiemelésének a következménye. Ezt értelmezhetjük úgy, hogy $A_2 < 0$ esetén a kör negatív irányítású. Rajzoljuk be k_2 negatív irányítását, $\mathbf{v}_2$-et és pozitív irányítását, $\mathbf{v}_2'$-t is. Az eddigi jelölés szerint legyen $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ által bezárt szög ω és $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2'$ által bezárt szög α. Ekkor látható, hogy α és ω mellékszögek, tehát $\alpha + \omega = 180°$. Ezt kihasználva a $\cos(\beta) = -\cos(180° - \beta)$ trigonometrikus azonosságból azt kapjuk, hogy $\cos(\omega) = -\cos(\alpha)$, tehát a képletünk a keresett szöget adja meg.



Azt figyelhetjük meg, hogy (A_1, B_1, C_1, D_1)-t pozitív számmal szorozásra invariáns a képlet, és (A_1, B_1, C_1, D_1)-t negatív számmal szorozva irányítást vált a kör.

1.2. A bilineáris forma

Az előző fejezetben szereplő feladat megoldása alatt definiáltunk egy szorzatot ($(A, B, C, D) \cdot (A, B, C, D) = BB + CC - 2AD - 2AD$) a skaláris szorzat mintájára, a keresett szög kiszámításához. Az eredményül kapott összeg negatív tagjai miatt, úgy tűnik hogy a $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ szorzat értéke akár negatív is lehet. Ennek vizsgálatához nézzünk meg néhány példát adott $k : A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ körök esetén.

1. példa

$$(x^2 + y^2) + 3x + 4y + 2 = 0,$$
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (1, 3, 4, 2)(1, 3, 4, 2) = 17 > 0.$$

2. példa

$$(x^2 + y^2) + 4x + 2y + 5 = 0,$$
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (1, 4, 2, 5)(1, 4, 2, 5) = 0.$$

3. példa

$$(x^2 + y^2) + 2x + y + 4 = 0,$$
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (1, 2, 1, 4)(1, 2, 1, 4) = -11 < 0.$$

Láthatjuk, hogy $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ lehet akár 0 vagy negatív szám is. Ez szokatlan, hisz $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ a körök szögének meghatározásához használt (1.2) képletben a gyökök alatt szereppel. Illetve ez éppen az analitikusan adott sugár számlálója.

$$r^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}.$$

Ezért $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ előjele alapján a köröket a következő csoportokba sorolhatjuk:

– $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} > 0 \longrightarrow$ valódi kör,

– $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 0 \longrightarrow$ pontkör,

– $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} < 0 \longrightarrow$ képzetes kör.

Eddig kikötöttük, hogy $A \neq 0$, ugyanis ebben az esetben egyenesről lenne szó.

4. példa

$$2x + y - 4 = 0,$$
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = (0, 2, 1, -4)(0, 2, 1, -4) = 5 > 0.$$

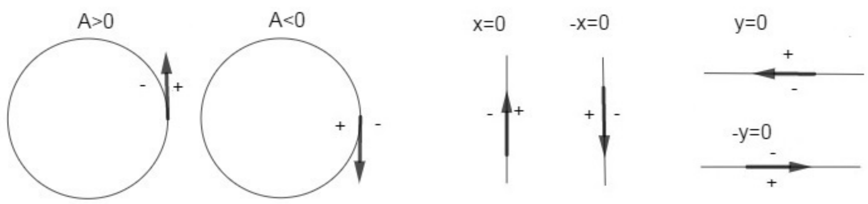
Így az egyenletük alapján megkülönböztethetjük egymástól a következőket köröket:

– $A \neq 0 \longrightarrow$ megszokott jellegű kör,

– $A = 0$ de $(B, C) \neq 0 \longrightarrow$ egyenes jellegű kör.

1. Megjegyzés. Ezentúl ha A lehet 0 is, akkor általánosított körről beszélünk, és ezt a szövegben kôrrel jelöljük.

Irányításról eddig csak valódi körök esetén beszéltünk, és ekkor A előjelével feleltettük meg. Ekkor igaz volt, hogy a kört az irányításnak megfelelően körül járva a jobb oldalon elhelyezkedő pontok koordinátáit behelyettesítve az alakzat egyenletébe pozitív értéket, bal oldalon elhelyezkedő pontok koordinátáira pedig negatív értéket kaptunk. Pontkörök és képzetes körök esetén megtehetjük, hogy A előjelével feleltetjük meg az alakzat irányítását, ám egyenesek esetén $A = 0$. Ekkor a valódi körök irányításának előbb említett tulajdonságát felhasználva rögzíthetjük, mit értünk egyenes irányításán. Vagyis egy olyan vektort, mely irányával megegyezően haladva az egyenesen, a bal oldalon elhelyezkedő pontokra az egyenes egyenlete negatív értéket, a jobb oldalon pedig pozitív értéket vesz fel.



1.1. Állítás. *A (1.2) képlet abban az esetben is megadja a szöget, ha az egyik vagy mindkét kôr egyenes.*

Bizonyítás. Elsőnek azt bizonyítjuk hogy ha mindkét kôr egyenes vagyis a $\mathbf{k}_1 = (0, B_1, C_1, D_1)$ és a $\mathbf{k}_2 = (0, B_2, C_2, D_2)$ vektorokkal írható le. Ekkor az egyenesek egyenlete $B_1x + C_1y + D_1 = 0$ és $B_2x + C_2y + D_2 = 0$. Innen az $\mathbf{n}_1 = (B_1, C_1)$, és az $\mathbf{n}_2 = (B_2, C_2)$ normálvektorokat olvashatjuk le. Az irányítási konvenciók miatt az irányvektorok, pedig a normálvektorok $+90°$-os elforgatottjai, vagyis $\mathbf{v}_1 = (-C_1, B_1)$ és $\mathbf{v}_2 = (-C_2, B_2)$. A szögüket pedig $\cos\omega = \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1|\cdot|\mathbf{v}_2|}$ képlet adja meg, ahol két vektor szorzatán a skaláris szorzatukat értjük. Tehát a két egyenes szöge ebben az esetben:

$$\cos\omega = \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1|\cdot|\mathbf{v}_2|} = \frac{C_1C_2 + B_1B_2}{\sqrt{C_1C_1 + B_1B_1}\sqrt{C_2C_2 + B_2B_2}}.$$

Most számoljuk ki a két kôr szögét formulánk segítségével:

$$\cos\omega = \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{|\mathbf{k}_1| \cdot |\mathbf{k}_2|} = \frac{(0, B_1, C_1, D_1) \cdot (0, B_2, C_2, D_2)}{|(0, B_1, C_1, D_1)| \cdot |(0, B_2, C_2, D_2)|} = \frac{B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{B_1B_1 + C_1C_1}\sqrt{B_2B_2 + C_2C_2}}.$$

Mint láthatjuk a két eredmény ugyanaz, tehát ebben az esetben alkalmazható a formulánk. A bizonyítás másik felét az az eset képezi, ha csak az egyik kôr egyenes. Elsőnek vegyük észre hogy ha berajzoljuk a kör középpontjának és az egyenesnek a távolságát (ezt a továbbiakban jelölje d), és az érintőbe húzott sugarat, ezek szöge (α) megegyezik a keresett szögünk kiegészítő szögével. A megoldás első lépése így lehet α kiszámítására, ami egy derékszögű háromszög egyik szöge és ismert két oldal, r és d. Második lépésben pedig a már ismert α-val kiszámítható a keresett ω. A Pitagorasz-tételt alkalmazva a háromszögre, a szöggel szemközti oldal $\sqrt{r^2 - d^2}$. A koszinusz-tétel alkalmazásával pedig $\cos\alpha = \frac{(r^2-d^2)-r^2-d^2}{2rd} = \frac{d}{r}$-t kapjuk. r-t már ismerjük, d-t pedig a pont és egyenes távolságára vonatkozó képlettel ($d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$) számolhatjuk ki. Az egyenes egyenletében szereplő a, b, c számok rendre B_2, C_2, D_2 és a kör középpontjának koordinátái$x_0 = \frac{-B_1}{2A_1}, y_0 = \frac{-C_1}{2A_1}$.

$$r = \sqrt{\frac{B_1^2 + C_1^2 - 4A_1D_1}{4A_1^2}},$$

$$d = \frac{|B_2\dfrac{-B_1}{2A_1} + C_2\dfrac{-C_1}{2A_1} + D_2|}{\sqrt{B_2^2 + C_2^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{|B_2\frac{-B_1}{2A_1} + C_2\dfrac{-C_1}{2A_1} + D_2|}{\sqrt{B_2^2 + C_2^2}}\sqrt{\frac{4A_1^2}{B_1^2 + C_1^2 - 4A_1D_1}},$$

$$\cos\alpha = \frac{-B_2B_1 - C_2C_1 + 2D_2A_1}{\sqrt{B_2^2 + C_2^2}\sqrt{B_1^2 + C_1^2 - 4A_1D_1}}.$$

Ezzel az eredménnyel és $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ trigonometrikus azonosság segítségével már meg tudjuk adni $\cos\omega$-t.

$$\cos\omega = -\cos\alpha = \frac{B_2B_1 + C_2C_1 - 2D_2A_1}{\sqrt{B_2^2 + C_2^2}\sqrt{B_1^2 + C_1^2 - 4A_1D_1}}.$$

A formulánk most is jól működik, ugyanis ezzel megegyező eredményt ad.

$$\cos\omega = \frac{(A_1, B_1, C_1, D_1) \cdot (0, B_2, C_2, D_2)}{|(A_1, B_1, C_1, D_1)| \cdot |(0, B_2, C_2, D_2)|} = \frac{B_2B_1 + C_2C_1 - 2D_2A_1}{\sqrt{B_2^2 + C_2^2}\sqrt{B_1^2 + C_1^2 - 4A_1D_1}}.$$

□

Azzal hogy az egyenest is elfogadtuk kôrként, már csak azokat az esetek nem tárgyaltuk, amelyekben $(A, B, C) = 0$, de $D \neq 0$. Nézzük meg, hogy mit eredményez, ha ezeket az eseteket sem zárjuk ki.

5. példa

$$1 = 0,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (0, 0, 0, 1)(0, 0, 0, 1) = 0.$$

Azt már "tudjuk", hogy egy pontkörről van szó, ugyanis a szorzat értéke 0. A felmerülő kérdés csak az, hogy hol is helyezkedik el ez a pontkör. A kérdés megválaszolásához a következő állításon keresztül jutunk.

1.2. Állítás. *A* (x_0, y_0) *pont akkor van egy* $\mathbf{k} = (A, B, C, D)$ *vektorral leírható körön, ha* $A(x_0^2 + y_0^2) + Bx_0 + Cy_0 + D = 0$*, azaz ha* $(A, B, C, D) \cdot (1, -2x_0, -2y_0, x_0^2 + y_0^2) = 0$. □

Egy kör tehát akkor megy át egy ponton, ha merőleges a pont körére. Ennek analógiáján következtethetünk arra, hogy a $(0, 0, 0, 1)$ pontkör hol helyezkedik el. Nézzük meg mikor van rajta egy adott (A, B, C, D) körön.

$$(A, B, C, D) \cdot (0, 0, 0, 1) = -2 \cdot D \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 - 2 \cdot A \cdot 1 = -2A.$$

Nincs a kôrön ha $A \neq 0$, tehát ha az közönséges valódi-, képzetes- vagy pontkör. A kôrön van, ha $A = 0$, tehát a kör egy egyenes vagy maga a pontkör. Ebből arra jutunk, hogy rajta van minden egyenesen, de nincs rajta egy körön sem. Ez a pont, ha létezik, csakis a végtelen távoli pontkör lehet.

2. Megjegyzés. Erre a szorzatra a $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2$ jelölés mellett a $B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ jelölést is használni fogjuk.

2. fejezet

Konform geometria

Az előző fejezetben tett vizsgálódások a következő formális definíciók megalapozását, és azok könnyebb megértését szolgálják. Tekinteni fogjuk a köregyenletek terét, V-t az

$$(A, B, C, D) \cdot (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = B\tilde{B} + C\tilde{C} - 2D\tilde{A} - 2A\tilde{D}$$

szorzattal. Ez egy indefinit bilineáris forma, szimmetrikus, nem elfajuló. Ezek közül a $(0, 0, 0, 0)$-t nem interpretáljuk. Az $\mathbf{k} = (A, B, C, D)$ vektorokat

- Pozitív skalárral való szorzás erejéig irányított kôrnek nevezzük, és $\lceil \mathbf{k} \rceil$ jelöljük.
- Negatív számmal szorozva kapunk egy másik irányított kôrt, ellentétesen irányított kôrt. Ezt $\lfloor \mathbf{k} \rfloor$-val jelöljük, ahol $\lfloor \mathbf{k} \rfloor = -\lceil \mathbf{k} \rceil = \lceil -\mathbf{k} \rceil \neq \lceil \mathbf{k} \rceil$
- Ha $(A, B, C, D) \neq (0, 0, 0, 0)$, és nem 0 skalár szorzásig tekintjük, akkor irányítatlan kôrről beszélünk.
- Ha $A \neq 0$ akkor megszokott jellegű körről beszélünk.
- $A = 0$ esetén egyenes jellegű kôrről beszélünk.
- Ha $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} > 0$ akkor valódi körről, ha $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0$ akkor pontkörről, ha pedig $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} < 0$ képzetes körről beszélünk.

2.1. Tétel. *Minden $(A, B, C, D) \neq (0, 0, 0, 0)$ az alábbi esetek egyikéhez tartozik.*

- $(A, B, C, D)^2 > 0$, $A \neq 0$ *közönséges kör,*
- $(A, B, C, D)^2 = 0$, $A \neq 0$ *közönséges pontkör,*
- $(A, B, C, D)^2 < 0$, $A \neq 0$ *képzetes kör,*
- $A = 0$ *és* $(B, C) \neq (0, 0)$ *közönséges egyenes,*
- $A = 0$ *és* $B = C = 0$ *és* $D \neq 0$ *végtelen távoli pont köre.*

2.2. Tétel. *Ha van két közönséges kör (irányított),* $\mathbf{k}_1$ *és* $\mathbf{k}_2$*, akkor a közönséges szögükre*

$$cos(\omega) = \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{|\mathbf{k}_1| \cdot |\mathbf{k}_2|}.$$

2.3. Következmény. $\mathbf{k}_1$ merőleges $\mathbf{k}_2$-re, ha $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = 0$.

2.4. Tétel. *Ha* (x_0, y_0) *közönséges pont, akkor pontosan akkor van egy általánosított* $\mathbf{k}_1$ *körön, ha*

$$(1, -2x_0, -2y_0, x_0^2 + y_0^2) \cdot \mathbf{k}_1 = 0.$$

3. fejezet

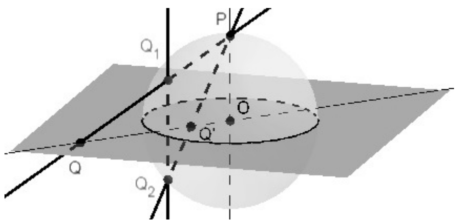
Inverzió

Ebben a fejezetben az inverzióval fogunk foglalkozni, melynek alapjaival, feltételezzük, hogy az olvasó tisztában van, mint ahogy az le van írva például Hajós György Bevezetés a Geometriába című könyvében.

3.1. Sztereografikus megközelítés

Az inverzió egy másik megközelítésére a sztereografikus vetítés használjuk. Ekkor a sík egy Q pontjához tartozó Q' pontot a következő képpen határozzuk meg.

- Az alapkörre egy olyan gömböt rajzolunk, melynek ez a kör egy főköre.
- A síkra merőlegest állítunk a kör középpontján keresztül, és az így kapott metszéspontjait a gömbnek és az egyenesnek, P-vel jelöljük.
- Berajzoljuk a Q és P által meghatározott egyenest és a gömb felületével vett P-től különböző metszéspontját Q_1-gyel jelöljük.
- Legyen Q_2 a Q_1 tükörképe a $z = 0$ síkra. És legyen Q_2 és P által meghatározott egyenes és a $z = 0$ sík metszéspontja Q'.



3.1. Állítás. *A $P(0,0,1)$ és a $Q(x_0, y_0, 0)$ pontok által meghatározott egyenes az egységkört a*

$$Q_1\left(\frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1}, \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1}, \frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{x_0^2 + y_0^2 + 1}\right)$$

pontban metszi.

Bizonyítás. A kollinearitás bizonyításához elég belátnunk, hogy Q és Q_1, valamint Q_1 és P által meghatározott egyenesek párhuzamosak, azaz irányvektoraik, $\overrightarrow{QQ_1}$ és $\overrightarrow{Q_1P}$ párhuzamosak. Elsőnek számítsuk ki $\overrightarrow{PQ_1}$ -t.

$$\overrightarrow{PQ_1} = \left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2+1} - 0, \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1} - 0, \frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^2+1} - 1\right),$$

$$= \left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^2+1} - \frac{x_0^2+y_0^2+1}{x_0^2+y_0^2+1}\right),$$

$$= \left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{-2}{x_0^2+y_0^2+1}\right),$$

$$= \frac{-2}{x_0^2+y_0^2+1}(-x_0, -y_0, 1).$$

Most pedig számítsuk ki $\overrightarrow{Q_1Q}$-ot!

$$\overrightarrow{Q_1Q} = \left(x_0 - \frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2+1}, y_0 - \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}, 0 - \frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^2+1}\right),$$

$$= \left(\frac{x_0(x_0^2+y_0^2+1)}{x_0^2+y_0^2+1} - \frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{y_0(x_0^2+y_0^2+1)}{x_0^2+y_0^2+1} - \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^21+1}\right),$$

$$= \left(\frac{x_0(x_0^2+y_0^2+1-2)}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{y_0(x_0^2+y_0^2+1-2)}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^2+1}\right),$$

$$= \frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^2+1}(-x_0, -y_0, 1).$$

Mint látható a két vektornak csak a hossza tér el, tehát a három pont egy egyenesen van. Ahhoz hogy Q_1 rajta legyen az egységkörön teljesülnie kell a $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ feltételnek.

$$\left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}\right)^2 + \left(\frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^2+1}\right)^2 = \frac{(2x_0)^2+(2y_0)^2+(x_0^2+y_0^2-1)^2}{(x_0^2+y_0^2+1)^2},$$

$$= \frac{4x_0^2+4y_0^2+x_0^4+y_0^4+1-2x_0^2-2y_0^2+2x_0^2y_0^2}{(x_0^2+y_0^2+1)^2},$$

$$= \frac{x_0^4+y_0^4+1+2x_0^2+2y_0^2+2x_0^2y_0^2}{(x_0^2+y_0^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x_0^2+y_0^2+1)^2}{(x_0^2+y_0^2+1)^2} = 1.$$

A feltétel teljesül, Q_1 az egységkörön van. Ezzel az állítást beláttuk. □

3.2. Állítás. *Az egységkörre való inverzió olyan ponttranszformáció, mely az $(x_0, y_0) \neq 0$ pontot a $(\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}, \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2})$-ba viszi. [7]*

3.3. Állítás. *A fenti eljárás valóban az egységkörre vett inverziónak felel meg.*

Bizonyítás. A Q_2-re és P-re illesztett egyenes meghatározásához Q_2-ből P-be mutató vektorral párhuzamos **v** vektort, és a P pontot fogjuk használni.

$$P(0,0,1)$$
$$Q_2\left(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}, -\frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^2+1}\right),$$
$$\overrightarrow{Q_2P} = (0-\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2+1}, 0-\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}, 1-\frac{1-x_0^2-y_0^2}{x_0^2+y_0^2+1}),$$
$$\overrightarrow{Q_2P} = (\frac{-2x_0}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{-2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}, \frac{(x_0^2+y_0^2+1)-(1-x_0^2-y_0^2)}{x_0^2+y_0^2+1}),$$
$$\overrightarrow{Q_2P} = \frac{2}{x_0^2+y_0^2+1}(-x_0,-y_0,x_0^2+y_0^2),$$
$$\mathbf{v} = (-x_0,-y_0,x_0^2+y_0^2).$$

Az egyenes egyenlete így a következő lesz:

$$\frac{-x}{x_0} = \frac{-y}{y_0} = \frac{z-1}{x_0^2+y_0^2}.$$

A $z=0$ sík egyenletéből és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszerből kifejezve x-et és y-t kapjuk a Q' pont koordinátáit.

$$x = \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2},$$
$$y = \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}.$$

Tehát Q' tényleg a Q pont inverzét adja meg. $\square$

Ez a kép azt szemlélteti, hogy a konform geometriát gömbi formában (∞-vel kiegészítve) elképzelve, az inverzió az egy tükrözés.

3.2. Körök inverze

Most nézzük meg hogy mi lesz az egységkörre való inverze egy $\{(x,y) : f(x,y)=0\}$ alakzatnak.

$$\{(x,y) : f(x,y)=0\}$$
$$\Downarrow$$
$$\{I(x,y) : f(x,y)=0\}$$
$$\|$$
$$\left\{\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) : f(x,y)=0\right\}$$
$$\|$$
$$\{(u,v) : f(I^-1(u,v))=0\}$$
$$\|$$
$$\{(u,v) : f\left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)=0\}$$
$$\|$$
$$\{(x,y) : f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)=0\}$$

Következmény: Az $f(x,y)=0$ egyenlet megoldásainak halmazát invertálva az $f(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})=0$ egyenlet megoldásainak halmazát kapjuk. Adott $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ kör vagy egyenes, ennek az inverze:

$$A\left(\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right)+B\frac{x}{x^2+y^2}+C\frac{y}{x^2+y^2}+D=0,$$
$$A\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+B\frac{x}{x^2+y^2}+C\frac{y}{x^2+y^2}+D=0,$$
$$A+Bx+Cy+D(x^2+y^2)=0.$$

Tehát kôr inverze kôr, és az egységkör inverzió a (A,B,C,D)-t (D,B,C,A)-ba viszi.

3. Megjegyzés. Az origót ($x^2+y^2=0$ pontkört) reprezentáló vektor az $(1,0,0,0)$ vektor. Ehhez a vektorhoz az egységkörre való inverzió a

$$(1,0,0,0)\longrightarrow(0,0,0,1)$$

vektort rendeli, ami pedig a végtelen távoli pontkört reprezentáló vektor.

A fentiek alapján könnyen látható, hogy az inverzió a következő tulajdonságokkal bír.

$$(A,B,C,D)\longrightarrow(D,B,C,A),$$
$$(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)'=\mathbf{k}_1'+\mathbf{k}_2',$$
$$(\lambda\mathbf{k}_1)'=\lambda\mathbf{k}_1',$$
$$\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{k}_2'.$$

Következmény:

- Valódi kört valódi körbe visz ($\Longleftarrow \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{k}_1'=r^2$),
- Képzetes kört képzetes körbe visz ($\Longleftarrow \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{k}_1'=r^2$),
- Pontkört pontkörbe visz ($\Longleftarrow \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{k}_1'=r^2$),
- Illeszkedés tartó ($\Longleftrightarrow \mathbf{k}'\cdot\mathbf{p}'=\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}=0$),
- Szögtartó ($\Longleftarrow \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{k}_2'$).

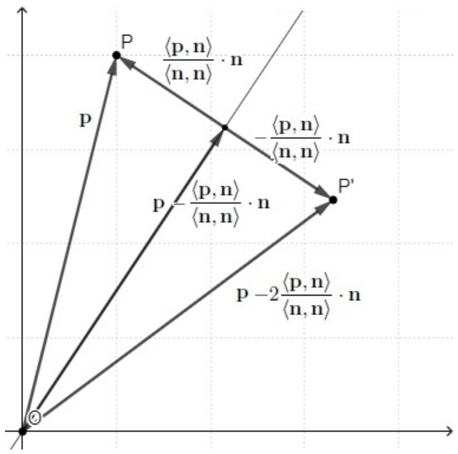
4. Megjegyzés. Pontkörökön és valódi körökön tesztelhetjük hogy az inverzió szögtartó, de képzetes körökön, mivel ezeknek nincsenek pontjai ezt nem tudjuk megtenni. De azért helyesnek tűnik a képzetes körökön is.

3.3. Inverzió mint tükrözés

Láthattuk, hogy az inverzió megcseréli az első és utolsó koordinátákat. Erről eszünkbe juthat az R^2 beli $y=x$ egyenesre való tükrözés ami szintén a két koordináta felcserélődésével jár. Ha általánosabban nézzük ezt a ponttranszformációt, egy az orgión átmenő egyenesre való tükrözés a következő hozzárendelést jelenti:

$$\mathbf{p}\longrightarrow\mathbf{p}-2\frac{\langle\mathbf{p},\mathbf{n}\rangle}{\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\cdot\mathbf{n}.$$

ahol $\mathbf{p}$ a P pont helyvektora, $\mathbf{n}$ az egyenes normálvektora, és $\langle .,. \rangle$ a skaláris szorzatot jelöli. Ez a képlet a következő eljárás eredménye; a $\mathbf{p}$ helyvektort egy $\mathbf{n}$-nel párhuzamos, $\dfrac{\langle \mathbf{p},\mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\cdot\mathbf{n}$ vektorra, és egy $\mathbf{n}$-nel $90°$-ot bezáró, $\mathbf{p}\longrightarrow\mathbf{p}-\dfrac{\langle \mathbf{p},\mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}\cdot\mathbf{n}$ vektorra bontjuk, majd a párhuzamos vektort -1-gyel szorozuk, és hozzáadjuk az $\mathbf{n}$-nel $90°$-ot bezáró vektorhoz, így kapjuk meg P' helyvekotrát.



Ezt az eljárást követve a köregyenletek terén a körök szögének meghatározásához használt szorzattal, a következőt kapjuk:

$$\mathbf{x}\longrightarrow\mathbf{x}-2\frac{B(\mathbf{x},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\cdot\mathbf{k}.$$

ahol $\mathbf{k}$ az a kör melyre tükrözünk, és $\mathbf{x}$ a tükrözendő pont vektora. Könnyen látható, hogy azon p pontokat, melyek a k körön helyezkednek el, ez az eljárás helyben hagyja, ugyanis ekkor $B(\mathbf{p},\mathbf{k})=0$. A szimetrikusság is teljesül, ezt bizonyítja a következő számolás.

Jelöljük $\mathbf{x}'$-vel az így kapott vektort.

$$\mathbf{x}\longrightarrow\mathbf{x}-2\frac{B(\mathbf{x},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{x}'.$$

Alkalmazzuk $\mathbf{x}'$-re az eljárást.

$$\mathbf{x}'\longrightarrow\mathbf{x}'-2\frac{B(\mathbf{x}',\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\cdot\mathbf{k}.$$

Helyetesítsünk be.

$$\mathbf{x}'\longrightarrow\mathbf{x}-\mathbf{2}\frac{\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{k})}{\mathbf{B}(\mathbf{k},\mathbf{k})}\cdot\mathbf{k}-2\frac{B\left(\mathbf{x}-\mathbf{2}\dfrac{\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{k})}{\mathbf{B}(\mathbf{k},\mathbf{k})}\cdot\mathbf{k},\mathbf{k}\right)}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\cdot\mathbf{k}.$$

Emeljük ki az összeg második és harmadik tagjából a következőként:

$$\mathbf{x}'\longrightarrow\mathbf{x}-2\frac{\mathbf{k}}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\left(B(\mathbf{x},\mathbf{k})+B(\mathbf{x}-2\frac{B(\mathbf{x},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\mathbf{k},\mathbf{k})\right).$$

Bontsuk szorzatok összegére az utolsó tagot.

$$\mathbf{x}'\longrightarrow\mathbf{x}-2\frac{\mathbf{k}}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\left(B(\mathbf{x},\mathbf{k})+B(\mathbf{x},\mathbf{k})-2B(\mathbf{x},\mathbf{k})\frac{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\right).$$

Így azt kaptuk, hogy:

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}' \longrightarrow \mathbf{x}.$$

A szimetrikusság után, ugyanilyen módon, azt is beláthatjuk, hogy ez a transzformáció nem változtat két kôr szögén. Ehhez a következő jelölést fogjuk használni.

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} - 2\frac{B(\mathbf{x},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{x}', \qquad \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{y} - 2\frac{B(\mathbf{y},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{y}'.$$

Számítsuk ki $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ képének szorzatát

$$B(\mathbf{x}',\mathbf{y}') = B\left(\mathbf{x} - 2\frac{B(\mathbf{x},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})} \cdot \mathbf{k}, \mathbf{y} - 2\frac{B(\mathbf{y},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})} \cdot \mathbf{k}\right).$$

Az összegek szorzatát bontsuk szorzatok összegére.

$$B(\mathbf{x}',\mathbf{y}') = B(\mathbf{x},\mathbf{y}) - 2B\left(\frac{B(\mathbf{x},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}, \mathbf{y}\right) - 2B\left(\frac{B(\mathbf{y},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\mathbf{k}, \mathbf{x}\right) + 4B\left(\frac{B(\mathbf{x},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\mathbf{k}, \frac{B(\mathbf{y},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\mathbf{k}\right).$$

Egyszerűsítsük az utolsó tagot $B(\mathbf{k},\mathbf{k})$-val

$$B(\mathbf{x}',\mathbf{y}') = B(\mathbf{x},\mathbf{y}) - 2\frac{B(\mathbf{x},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}B(\mathbf{k},\mathbf{y}) - 2\frac{B(\mathbf{y},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}B(\mathbf{k},\mathbf{x}) + 4\frac{B(\mathbf{y},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}\frac{B(\mathbf{x},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}B(\mathbf{k},\mathbf{k})$$

$$B(\mathbf{x}',\mathbf{y}') = B(\mathbf{x},\mathbf{y}) - 2\frac{B(\mathbf{x},\mathbf{k})B(\mathbf{k},\mathbf{y})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})} - 2\frac{B(\mathbf{y},\mathbf{k})B(\mathbf{k},\mathbf{x})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})} + 4\frac{B(\mathbf{y},\mathbf{k})B(\mathbf{x},\mathbf{k})}{B(\mathbf{k},\mathbf{k})}$$

Az összegben szereplő tagok kiesése után azt kaptuk, hogy $B(\mathbf{x}',\mathbf{y}') = B(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Ezzel beláttuk, hogy ez a ponttranszformáció illeszkedés és szögtartó, illetve hogy pontkört pontkörbe, képzetes kört képzetes körbe és valódi kört valódi körbe visz. A kör-merőlegesség tartás miatt ez a ponttranszformáció csakis az identitás vagy a $\mathbf{k}$ körre való tükrözés lehet, de látható hogy nem az identitás[7].

4. fejezet

Indefinit vektorterek

A lineáris algebra alapjaival Freud könyvében [4] ismerkedhetünk meg , Praszolov művéből [10] további információkat szerezhetünk, és Gohberg, Lancaster, Rodman pedig egy teljes monográfiában [5] dolgoza fel az inndefinit vektortereket.

4.1. A szignatúra

$\mathbb{R}^n$-en tetszőleges szimmetrikus bilineáris forma reprezentálható egy szimmetrikus mátrixszal. A köregyenletek terén definiált szorzatunkat a szokásos bázisban következő mátrix testesíti meg.

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_4 - 2x_4y_1 = \mathbf{x}^TA\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

A B bilineáris forma esetén tehát a szokásos bázis nem ortogonális. Keressünk olyan bázist ami B-ortogonális, vagyis amiben a szorzat mátrixa diagonális lesz. Ezt a Gram-Schmidt ortogonalizációval tegyük[4]. Legyen az első, $\mathbf{b}_1$ báziselem az $(1,1,0,0)$ vektor. Ez jó választás, ugyanis $B(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_1) = 1 \neq 0$. Legyen W_1 a $\mathbf{b}_1$-re merőleges vektorok által meghatározott altért. Ebből az altérből válasszuk ki a következő báziselemet.

$$W_1 = \{\mathbf{y} \in V : B(\mathbf{b}_1,\mathbf{y}) = 0\},$$
$$B(\mathbf{b}_1,\mathbf{y}) = 1\cdot y_2 + 0\cdot y_3 - 2\cdot 1\cdot y_4 - 2\cdot 0\cdot y_1 = y_2 - 2y_4,$$
$$y_4 = \frac{y_2}{2}.$$

Vagyis W_1 az $(y_1, y_2, y_3, \frac{y_2}{2})$ alakú vektorok halmaza. Innen választva $\mathbf{b}_2$-t $B(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2) = 0$. A $(0,1,0,\frac{1}{2})$ vektor jó választás, ugyanis $B(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2) = 1 \neq 0$ A következő báziselemet a $\mathbf{b}_1$,$\mathbf{b}_2$ vektorokra merőleges W_2 altérből válaszuk. Ehhez előbb meg kell határoznunk W_2-t.

$$W_2 = \{\mathbf{y} \in W_1 : B(\mathbf{b}_2,\mathbf{y}) = 0\},$$
$$B(\mathbf{b}_2,\mathbf{y}) = 1\cdot y_2 + 0\cdot y_3 - 2\cdot 0\cdot \frac{y_2}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot y_1 = y_2 - y_1,$$
$$y_1 = y_2.$$

W_2 tehát $(y_2, y_2, y_3, \frac{y_2}{2})$ alakú vektorokat tartalmaz. Ebből a halmazból választva $\mathbf{b}_3$-at, az ortogonális lesz a már meglévő bázis elemekre. Az $(1, 1, 0, \frac{1}{2})$ jó választás, ugyanis $B(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3) = -1 \neq 0$.

$$W_3 = \{\mathbf{y} \in W_2 : B(\mathbf{b}_3, \mathbf{y}) = 0\},$$
$$B(\mathbf{b}_3, \mathbf{y}) = 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{y_2}{2} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{y_2}{2} = y_2,$$
$$y_2 = 0.$$

A $(0, 0, 1, 0)$ vektor jó választás.

Az eredményül kapott bázis tehát a következő:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis elemeket a megfelelő konstansokkal szorozva, az is elérhető, hogy a mátrix főátlójában csak az $1, -1, 0$ számok szerepelhessenek. Ebben az esetben pont ilyen bázist kaptunk, így tehát a szorzat mátrixa ebben a bázisban:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Megjegyzés. Nevezzük a mátrixok azon diagonális alakját, ahol csak 1,-1,0 elemek szerepelnek a főátlóban pszeudoortonormált bázisra vonakozó alaknak.

4.1. Definíció. A bilineáris forma nem elfajuló, ha nincs olyan nemnulla vektor, ami minden másik vektorra merőleges. Azaz ha a leképezés általános alakú mátrixában nincs a főátlóban 0 elem, vagyis ha $\det A \neq 0$.

4.2. A $n_+(B)$,$n_-(B)$,$n_0(B)$ jelölés

4.2. Definíció. legyen B szimmetrikus bilineáris forma a V vektortéren, és $W \subset V$. Ekkor a $W^\perp \colon = \{v \colon \forall w B(v, w) = 0\}$ alteret, W merőleges alterének nevezzük.

4.3. Állítás. *Ha B nem elfajuló, akkor* $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$ *és* $(W^\perp)^\perp = W$*. Ha B lehet elfajuló, akkor pedig* $\dim W^\perp \geq \dim V - \dim W$ *és* $(W^\perp)^\perp \supseteq W$*. [6]*

4.4. Állítás. *Ha $B|_{W \times W}$ nem elfajuló, akkor $W^\perp \cap W = \mathbf{0}$ és $W^\perp \oplus W = V$. [6]*

4.5. Definíció. Azokat a $\mathbf{v} \neq 0$ vektorokat, amelyek önmagukra merőlegesek, azaz $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ izotróp vektornak nevezük.

4.6. Definíció. Tegyük fel, hogy V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, $B : V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris forma. A B-hez tartozó kvadratikus alak alatt azt a $b : V \to \mathbb{R}$ függvényt értjük, ahol

$$b(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

4.7. Állítás. *A szimmetrikus bilineáris forma és a kvadratikus alak meghatározza egymást.*

Bizonyítás. A kvadratikus alakot meghatározza a szimmetrikus bilineáris forma, hisz így definiáltuk. A bilineáris formát pedig a polarizációs formulával lehet meghatározni a kvadratikus alakból:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(b(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - b(\mathbf{x}-\mathbf{y})) &= \frac{1}{4}(B(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - B(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y})), \\ &= \frac{1}{4}((B(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2B(\mathbf{x},\mathbf{y}) + B(\mathbf{y},\mathbf{y})) - (B(\mathbf{x},\mathbf{x}) - 2B(\mathbf{x},\mathbf{y}) + B(\mathbf{y},\mathbf{y}))), \\ &= \frac{1}{4}(4B(\mathbf{x},\mathbf{y})) = B(\mathbf{x},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

□

Tehát $B \neq 0 \to b \neq 0$.

4.8. Tétel. *Ha V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, és B szimmetrikus bilineáris forma, akkor létezik egy olyan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ bázisa V-nek, hogy*

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\quad}^{n_+}\overbrace{\qquad\quad}^{n_-}\overbrace{\qquad\quad}^{n_0} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

[4]

4.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ az előző tételben említett bázis. Ekkor*

$$n_+ = \max\{\dim W : W \subset V, B|_{W \times W} \text{ pozitív definit}\},$$

$$n_+ + n_0 = \max\{\dim W : W \subset V, B|_{W \times W} \text{ pozitív szemidefinit}\},$$

$$n_- = \max\{\dim W : W \subset V, B|_{W \times W} \text{ negatív definit}\},$$

$$n_- + n_0 = \max\{\dim W : W \subset V, B|_{W \times W} \text{ negatív szemidefinit}\}.$$

Bizonyítás.

- Legyen $Z_+ = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n_+}\}$, és legyen ideiglenesen $m_+ = \max\{\dim W : W \subset V, B|_{W \times W} \text{ pozitív definit}\}$. Z_+ pozitív definit, tehát $m_+ \geq n_+$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $m_+ > n_+$. Vagyis hogy létezik egy olyan $W \subset V$, hogy $\dim W > n_+$ és $B|_{W \times W}$ pozitív definit.Legyen $Z_{0-} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_{n_++1}, \ldots, \mathbf{v}_{n_++n_0+n_-}\}$. Ekkor $\dim Z_{0-} = n_0 + n_-$.Láthatjuk, hogy

$$\dim W + \dim Z_{0-} > n_+ + (n_0 + n_-) = n$$

, és mindkettő altere V-nek, tehát $Z_{0-} \cap W \neq 0$. Ebből következik hogy létezik $\mathbf{x} \in Z_{0-} \cap W \neq 0$, hogy $\mathbf{x} \neq 0$, $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, ami $\mathbf{x}_0 \in Z_{0-}$ miatt ellentmondás.

- Legyen $Z_{+0} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n_+} \dots, \mathbf{v}_{n_+ + n_0}\}$, és legyen ideiglenesen $m_{+0} = \max\{\dim W : W \subset V, B|_{W \times W}$ pozitív szemidefinit$\}$. Ekkor $m_{+0} \geq n_+ + n_0$, ugyanis Z_{+0} pozitív szemidefinit. Tegyük fel indirekt módon, hogy $m_{+0} > n_{+0}$. Vagyis, hogy létezik egy olyan $W \subset V$, hogy $\dim W > n_+ + n_0$ és $B|_{W \times W}$ pozitív szemidefinit. Legyen $Z_- = \text{span}\{\mathbf{v}_{n_+ + n_0 + 1}, \mathbf{v}_{n_+ + n_0 + 2}, \dots, \mathbf{v}_{n_+ + n_0 + n_-}\}$. Ebben az esetben $\dim Z_- = n_-$. Láthatjuk hogy

$$\dim W + \dim Z_- > (n_+ + n_0) + n_- = n$$

, és mindkettő altere V-nek, tehát $Z_- \cap W \neq 0$. Tehát létezik $\mathbf{x} \in Z_- \cap W \neq 0$, hogy $\mathbf{x} \neq 0$, $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, ami $\mathbf{x} \in Z_-$ miatt ellentmondás.

- Legyen ideiglenesen $m_- = \max\{\dim W : W \subset V, B|_{W \times W}$ negatív definit$\}$. A már definiált Z_- negatív definit, szóval m_- legalább akkora mint n_-. Tegyük fel indirekt módon, hogy $m_- > n_-$. Ekkor létezik egy olyan $W \subset V$, hogy $\dim W > n_-$ és $B|_{W \times W}$ negatív definit. Láthatjuk hogy

$$\dim Z_{+0} + \dim W > (n_+ + n_0) + n_- = n$$

, és mindkettő altere V-nek, tehát $Z_{+0} \cap W \neq 0$. Ebből következik hogy létezik $\mathbf{x} \in Z_{+0} \cap W \neq 0$, hogy $\mathbf{x} \neq 0$, $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$, ami $\mathbf{x} \in Z_{+0}$ miatt ellentmondás.

- Legyen ideiglenesen $m_{0-} = \max\{\dim W : W \subset V, B|_{W \times W}$ negatív szemidefinit$\}$. Ekkor $m_{0-} \geq n_0 + n_-$, ugyanis Z_{0-} negatív szemidefinit. Tegyük fel indirekt módon, hogy $m_{0-} > n_{0-}$. Vagyis hogy létezik egy olyan $W \subset V$, hogy $\dim W > n_0 + n_-$ és $B|_{W \times W}$ negatív szemidefinit. Láthatjuk hogy

$$\dim Z_+ + \dim W > n_+ + (n_0 + n_-) = n$$

, és mindkettő altere V-nek, tehát $Z_+ \cap W \neq 0$. Vagyis létezik $\mathbf{x} \in Z_+ \cap W \neq 0$, hogy $\mathbf{x} \neq 0$, $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq 0$, ami $\mathbf{x} \in Z_+$ miatt nem lehetséges.

$\square$

A tételben szereplő négy formula olyan módon karakterizálja az $n_+(B)$,$n_-(B)$,$n_0(B)$ számokat, hogy nem hivatkozik bázisra. Így aztán $n_+(B)$,$n_-(B)$,$n_0(B)$ jelölés használható. E módon a Sylvester-féle tehetetlenségi tétel egy általános alakját láttuk be.

4.10. Állítás. $n_0(B) + \min(n_+(B), n_-(B)) = \max\{\dim W : W \subset V, B|_{W \times W} = 0\}$

Bizonyítás. A $k = \min(n_+(B), n_-(B))$ jelölés mellett a korábbi mátrixos állítás szerint léteznek $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n_0}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}, \dots, \mathbf{z}_k$ báziselemek, melyekre $B(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 0$, $B(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) = -1$, $B(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i) = 1$. Ezek egymásra ortogonálisak, tehát $B(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) = 0$. Legyenek $\mathbf{x}_{n_0+i} = \mathbf{y}_i + \mathbf{z}_i$ vektorok, ekkor $B(\mathbf{x}_{n_0+i}, \mathbf{x}_{n_0+i}) = 0$, ugyanis

$$B(\mathbf{y}_i + \mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i + \mathbf{z}_i) = B(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) + 2B(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) + B(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i) = -1 + 2 \cdot 0 + 1 = 0.$$

Vagyis legalább $n_0(B) + k$ darab egymásra ortogonális vektor van. Tegyük fel hogy $W \subset V$ olyan hogy $B|_{W \times W} = 0$, és $\dim W > \min(n_+(B), n_-(B)) + n_0$. Feltehető, hogy $\min(n_+(B), n_-(B)) = n_+(B)$. Ekkor

$$\dim W > n_+ + n_0,$$

ami ellentmondás azzal, hogy $n_+ + n_0 = max\{\dim W : W \subset V, B|_{W \times W} \text{ pozitív szemidefinit}\}$. Ezzel az egyenlőséget beláttuk. □

A következő állítás a (4.9) tételből következik.

4.11. Állítás. *Legyen $V_1 \subset V_2$ véges dimenziós vektorterek $\mathbb{R}$ felett, és B szimmetrikus bilineáris V_2-n. Ekkor*

- $n_+(B|_{V_1}) \leq n_+(B)$,
- $n_-(B|_{V_1}) \leq n_-(B)$,
- $n_+(B|_{V_1}) + n_0(B|_{V_1}) \leq n_+(B) + n_0(B)$,
- $n_-(B|_{V_1}) + n_0(B|_{V_1}) \leq n_-(B) + n_0(B)$.

4.12. Tétel. *Legyen V_1,V_2 két vektortér B_1,B_2 szimmetrikus bilineáris formákkal. (V_1, B_1) akkor és csak akkor ágyazható be izometrikusan (V_2, B_2)-be, ha:*

- $n_+(B_1) \leq n_+(B_2)$,
- $n_-(B_1) \leq n_-(B_2)$,
- $n_+(B_1) + n_0(B_1) \leq n_+(B_2) + n_0(B_2)$,
- $n_-(B_1) + n_0(B_1) \leq n_-(B_2) + n_0(B_2)$.

Bizonyítás. Az előző állítás miatt ezek szükséges feltételek, így azt kell bizonyítani hogy elégségesek is. A bizonyítás első két pontja $\dim V_1$ szerinti teljes indukció, harmadik pontja pedig direkt bizonyítási módszer.

1. eset: $\dim V_1 = 0$-ra igaz az állítás. Ha $n_+(V_1) \geq 1$, akkor $n_+(V_2)$ is ≥ 1. Legyenek $\mathbf{x}_1 \in V_1$ ás $\mathbf{x}_2 \in V_2$ az első báziselemek a diagonális alakokban, vagyis $B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = 1$ és $B(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) = 1$. Továbbá legyen $V_1' = \{\mathbf{v} \in V_1 : B(\mathbf{v}, \mathbf{x}_1) = 0\}$, és $V_2' = \{\mathbf{v} \in V_1 : B(\mathbf{v}, \mathbf{x}_2) = 0\}$, vagyis $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ merőleges alterei, ezeket a többi báziselem generálja. Ekkor igazak a következő állítások:

$$n_+(B_i|_{V_i'}) + 1 = n_+(B_i|_{V_i}),$$

$$n_-(B_i|_{V_i'}) = n_-(B_i|_{V_i}),$$

$$n_0(B_i|_{V_i'}) = n_0(B_i|_{V_i}).$$

És ekkor a teljes indukció szerint, $(V_1', B_1|_{V_1'})$ beágyazható $(V_2', B_2|_{V_2'})$-be. Valamint $\mathbb{R}\mathbf{x}_1$ beleágyazódik $\mathbb{R}\mathbf{x}_2$-be. És tudjuk, hogy $V_1 = \mathbb{R}\mathbf{x}_1 \oplus V_1'$, és $V_2 = \mathbb{R}\mathbf{x}_2 \oplus V_2'$

2. eset: Ha $n_-(V_1) \geq 1$, akkor $n_-(V_2) \geq 1$. Legyenek $\mathbf{x}_1 \in V_1$ ás $\mathbf{x}_2 \in V_2$ az első báziselemek a diagonális alakokban, amelyekre $B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = -1$ és $B(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) = -1$. Továbbá legyen $V_1' = \{\mathbf{v} \in V_1 : B(\mathbf{v}, \mathbf{x}_1) = 0\}$ és $V_2' = \{\mathbf{v} \in V_1 : B(\mathbf{v}, \mathbf{x}_2) = 0\}$, vagyis $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ merőleges alterei, ezeket a többi báziselem generálja. Ekkor a következők teljesülnek:

$$n_+(B_i|_{V_i'}) = n_+(B_i|_{V_i}),$$

$$n_-(B_i|_{V_i'}) + 1 = n_-(B_i|_{V_i}),$$

$$n_0(B_i|_{V_i'}) = n_0(B_i|_{V_i}).$$

És ekkor a teljes indukció szerint, $(V_1', B_1|_{V_1'})$ beágyazható $(V_2', B_2|_{V_2'})$-be. Valamint $\mathbb{R}\mathbf{x}_1$ beleágyazódik $\mathbb{R}\mathbf{x}_2$-be. És tudjuk, hogy $V_1 = \mathbb{R}\mathbf{x}_1 \oplus V_1'$, és $V_2 = \mathbb{R}\mathbf{x}_2 \oplus V_2'$

3. eset: Ha $n_+(B_1|_{V_1}) = 0$ és $n_-(B_1|_{V_1}) = 0$, akkor $n_0(B_1) \leq n_0(B_2) + n_+(B_2)$ $n_0(B_1) \leq n_0(B_2) + n_-(B_2)$ vagyis $n_0(B_1) \leq n_0(B_2) + \min(n_+(B_2), n_-(B_2))$ és n.

□

6. Megjegyzés. Az n_+, n_-, n_0 számokat a mátrix szignatúrájának nevezük. Az alatt hogy egy adott vektortér $(\overbrace{+\cdots+}^{n_+}\overbrace{-\cdots-}^{n_-}\overbrace{0\ldots0}^{n_0})$ szignatúrával ellátott azt értjük, hogy rajta egy n_+, n_-, n_0 szignatúrájú metrika van értelmezve.

4.3. A köregyenletek alterei

A $(+++-)$ szignatúrával ellátott $\mathbb{R}^4$ valódi altereinek klasszifikálása esetén a (4.12) tétel alapján következő feltételeknek kell teljesülnie:

- $n_+(B_1) \leq 3$,
- $n_-(B_1) \leq 1$,
- $n_+(B_1) + n_0(B_1) \leq 3$,
- $n_-(B_1) + n_0(B_1) \leq 1$.

4.13. Tétel. *A V $(+++-)$ szignatúrával ellátott vektortér valódi, nem triviális alterei $(+)$, $(-)$, (0), $(++)$, $(+-)$, $(+0)$, $(+++)$, $(++-)$ vagy $(++0)$ szignatúrájúak lehetnek.*

A $(+)$,$(-)$,$(++)$,$(+++)$ alterek nem tartalmaznak izotróp vektort.

Skalárral való szorzás erejéig egy darab izotróp vektort tartalmaznak a (0),$(+0)$,$(++0)$ szignatúrájú alterek.

Két izotróp vektort tartalmaznak a $(+-)$ szignatúrájú alterek.

A $(++-)$ szignatúrájú alterek pedig skalárral való szorzás erejéig kontinuum számosságú izotróp vektort tartalmaznak.

A köregyenletek terének kétdimenziós altereivel, bár más néven, de már találkoztunk. Ezeket az altereket a geometria nyelvén körsoroknak neveztük. Három csoportjukat pontköreik száma alapján különböztettük meg. A köregyenletek $(+-)$ szignatúrájú, két izotróp vektort tartalmazó alterei az elliptikus körsorok voltak. Az egy izotróp vektort tartalmazó $(+0)$ szignatúrájú altereket parabolikus körsorokként ismertük meg. A $(++)$ szignatúrájú, izotróp vektort nem tartalmazó esetet pedig hiperbolikus körsorként. Azt is láthattuk már, hogy az elliptikus körsorra merőleges körök halmaza egy hiperbolikus körsor.Vagyis egy $(+-)$ szignatúrájú altér merőleges komplementere egy $(++)$ szignatúrájú altér. A parabolikus körsorok merőleges körök pedig egy másik parabolikus körsort alkotnak. Vagyis $(+0)$ szignatúrájú alterek merőleges komplementerei szintén $(+0)$ szignatúrájúak. A három csoportot tovább is bontottuk elfajuló és nem elfajuló esetre. Az elfajuló eseteket a koncentrikus körök, a párhuzamos sugársorok és centrális sugársorok jelentették. Ezek geometriailag látható módon különböztek a nem elfajuló esetektől. De mint a köregyenletek alterei csak annyiban különböztek a nem elfajuló esetektől, hogy az őket generáló vagy rájuk merőleges izotróp vektorok egyike a $(0,0,0,1)$ volt. (A körsorok részletesebb tárgyalása megtalálható Hajós György könyvében [7])

4.4. Ekvivalencia osztályok

$(++\cdots+-)$ szignatúrával vegyünk egy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}$ pszeudoortonormált bázist. Tegyük fel, hogy $B(\mathbf{x},\mathbf{x}) < 0$, $\mathbf{x} \neq 0$ negatív definit vektor. Ekkor

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 \cdots + x_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + x_n\mathbf{w},$$

$$B(\mathbf{x},\mathbf{x}) < 0 \Longrightarrow x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 < 0. \tag{4.1}$$

Tehát x_n nem lehet 0, ugyanis $\mathbf{x} \neq 0$. Vagyis a negatív definit vektorok két osztályba sorolhatók utolsó koordinátájuk előjele alapján. Ez bázisfüggő, ezért egyelőre nevezzük a két osztályt első és második osztálynak. Nézzük meg, hogy milyen értékeket kapunk, ha egy osztályba és ha külön osztályba tartozó vektorokra számoljuk ki a bilineáris forma értékét.

- Ha $x_n > 0$, és $\tilde{x}_n > 0$, akkor

$$\begin{aligned} &B(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}) = x_1\tilde{x}_1 + x_2\tilde{x}_2 \cdots + x_{n-1}\tilde{x}_{n-1} - x_n\tilde{x}_n \leq && \text{(Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség)} \\ &\sqrt{x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_{n-1}^2}\sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 \cdots + \tilde{x}_{n-1}^2} - x_n\tilde{x}_n < && \text{((4.1) miatt)} \\ &\sqrt{x_n^2}\sqrt{\tilde{x}_n^2} - x_n\tilde{x}_n = 0. \end{aligned}$$

- Ha $x_n > 0$, és $\tilde{x}_n < 0$, akkor $-\tilde{x}_n > 0$. Vagyis $B(\mathbf{x},-\tilde{\mathbf{x}}) < 0 \Longrightarrow B(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}) > 0$.
- Ha $x_n < 0$, és $\tilde{x}_n > 0$, akkor $B(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}) > 0$.
- Ha $x_n < 0$, és $\tilde{x}_n < 0$, akkor $B(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}) < 0$.

Vagyis ha a két negatív definit vektor egy osztályban van, akkor szorzatuk negatív értéket vesz fel. Ha pedig a két vektor két különböző osztályban van, akkor pozitívat. Most tegyük fel, hogy $\mathbf{x} \neq 0$ vektor, és $B(\mathbf{x},\mathbf{x}) \leq 0$, vagyis izotróp vagy negatívdefinit vektor. Ekkor

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 \cdots + x_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + x_n\mathbf{w},$$

$$B(\mathbf{x},\mathbf{x}) \leq 0 \Longrightarrow x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 \leq 0. \tag{4.2}$$

Tehát x_n nem lehet 0, mert az azt jelentené, hogy $\mathbf{x}$ minden koordinátája 0. Vagyis az ilyen tulajdonságú vektorok is két osztályba sorolhatók utolsó koordinátájuk előjele alapján. Vizsgáljuk meg hogy milyen értékeket kapunk, ha egy osztályba és ha külön osztályba tartozó vektorok szorzatát számoljuk ki. Tegyük fel hogy $\mathbf{x}$ és $\tilde{\mathbf{x}}$ két ilyen vektor és egymásnak nem pozitív skalárszorosai.

- Ha $x_n > 0$, és $\tilde{x}_n > 0$, akkor

$$B(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = x_1\tilde{x}_1 + x_2\tilde{x}_2 \cdots + x_{n-1}\tilde{x}_{n-1} - x_n\tilde{x}_n \leq \qquad \text{(Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség)}$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_{n-1}^2}\sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 \cdots + \tilde{x}_{n-1}^2} - x_n\tilde{x}_n \leq \qquad \text{((4.2) miatt)}$$
$$\sqrt{x_n^2}\sqrt{\tilde{x}_n^2} - x_n\tilde{x}_n = 0.$$

  Vagyis azt kaptuk, hogy $B(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) \leq 0$. Az egyenlőség akkor állhat fent, ha $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{n-1})$, $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_{n-1}^2} = x_n$ és $\sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 \cdots + \tilde{x}_{n-1}^2} = \tilde{x}_n$. De ez nem lehet, mert a két vektor egymásnak nem skalárszorosai. Vagyis $B(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) < 0$, ha a két vektor azonos osztályban van.

- Ha $x_n > 0$, és $\tilde{x}_n < 0$, akkor $-\tilde{x}_n > 0$. Vagyis $B(\mathbf{x}, -\tilde{\mathbf{x}}) < 0 \Longrightarrow B(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) > 0$.
- Ha $x_n < 0$, és $\tilde{x}_n > 0$, akkor $B(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) > 0$.
- Ha $x_n < 0$, és $\tilde{x}_n < 0$, akkor $B(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) < 0$.

Vagyis ha az $\mathbf{x}$ és az $\tilde{\mathbf{x}}$ izotróp vagy negatív definit vektorok egy osztályban vannak, és egymásnak nem pozitív skalárszorosai, akkor a $B(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) < 0$. Ha a két vektor különböző osztályban van, és egymásnak nem negatív skalárszorosai akkor pedig $B(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) > 0$. A szorzat értéke bázisfüggetlen, amiből a következő állítás adódik.

4.14. Állítás. *Ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *izotróp vagy negatív definit vektorok, és egymásnak nem pozitív skalárszorosai, akkor* $B(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < 0$ *azonos osztályba tartozást jelent. Vagyis* $B(.,.) < 0$ *ekvivalencia reláció.*

További szemléltetés

Az ekvivalencia relációk harmadik feltétele, hogy ha $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} \sim \mathbf{c}$, akkor ebből következik, hogy $\mathbf{a} \sim \mathbf{c}$. Ennek szemléltetéséhez a három vektor által meghatározott altér dimenziója szempontjából esetekre bonthatjuk az állítást.

1. eset: Az $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ vektorok egy egyenest feszítenek ki. Ekkor $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ azt jelenti, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egyirányúak. Ez igaz $\mathbf{b} \sim \mathbf{c}$-re is. Amiből következik, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ egyirnyúak, azaz $\mathbf{a} \sim \mathbf{c}$.

2. eset: Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ síkot feszít ki, akkor ennek a síknak $(+-)$ szignatúrájúnak kell lennie. Vagyis tartalmaznia kell két izotróp vektort. A két izotróp vektor meghatároz két egyenest, melyek négy nyílt részre osztják a síkot. A negatív definit vektorokat tartalmazó síkrészhez vegyük hozzá a határoló félegyeneseket. Ekkor $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ azt jelenti, hogyha a két vektor ugyanabban a negatív szemidefiniteket tartalmazó síkrészben van, akkor minden $(1-t)a+tb$ alakú vektor is ebben van. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, valamint $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ ekvivalens, akkor $\mathbf{a}$-nak és $\mathbf{c}$-nek is ekvivalensnek kell lennie.

3. eset: Ha a három vektor független, akkor a generátum csakis $(++-)$ szignatúrájú lehet. Ekkor a negatív definit és az izotróp vektorok egy kettős kúp belsejét és határát alkotják, az origó kivételével. A teret három diszjunkt részre oszthatjuk e forgástest segítségével, egy pozitív definit vektorokat tartalmazó és két negatív definit vektorokat, és izotróp vektorokat egyaránt tartalmazó részre. Ekkor az ekvivalencia a kettős kúp azonos feléhez való tartozást jelent. Vagyis ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ valamint $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ egy tér részbe esnek, akkor tehát $\mathbf{a}$-nak és $\mathbf{c}$-nek is egy tér részbe kell lenni.

Albert Einstein speciális relativitás elmélete kapcsán a következő elnevezések használatosak a $(+++-)$ szignatúrával ellátott $\mathbb{R}^4$ vektoraira.

- A $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$, $\mathbf{x} \neq 0$ negatív definit vektorokat időszerű vektoroknak nevezzük.
- A $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \neq 0$ izotróp vektorokat fényszerű vektoroknak.
- A $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \neq 0$ pozitív definit vektorokat pedig térszerű vektoroknak nevezzük.

A fény és a időszerű vektorok két osztályára pedig az ortokron és az antikron elnevezés használatos. A fizikában a kauzalitás miatt az időszerű és a fényszerű vektorok nyernek nagyobb figyelmet, mi inkább a fényszerű és a térszerű vektorokat vizsgáljuk.

5. fejezet

Ékszorzat és csillagoperátor

Ebben a fejezetben a célunk alapvető konstrukció előkészítése. Ehhez felhasználjuk a Grassmann algebrák és csillag operátorok elméletét, melyek a differenciálgeometriából lehetnek ismerősek. Ezek pontos bevezetése sokáig tartana, úgyhogy csak felidézzük a megfelelő fogalmakat. Pontosabban, azokból is csak azokat, melyekre szükségünk lesz. Az érdeklődő olvasó Praszolov [10] és Greub [6] könyveiben megtalálhatja a teljes tárgyalást.

5.1. Grassman algebra

Legyen $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$ egy bázisa $\mathbb{R}^n$-nek. Az $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_k}$ kifejezés ékszorzatnak nevezzük, és a következő tulajdonságokkal bír.

- Multi lineáris, azaz minden tagjában lineáris.

$$\dots \mathbf{e}_{i_j} \wedge (a\mathbf{e}_{i_k} + b\mathbf{e}_{i_l}) \wedge \mathbf{e}_{i_m} = a(\dots \mathbf{e}_{i_j} \wedge \mathbf{e}_{i_k} \wedge \mathbf{e}_{i_m} \dots) + b(\dots \mathbf{e}_{i_j} \wedge \mathbf{e}_{i_l} \wedge \mathbf{e}_{i_m} \dots).$$

- Antiszimmetrikus

$$\dots \wedge \mathbf{e}_{i_j} \wedge \mathbf{e}_{i_k} \wedge \dots = - \dots \wedge \mathbf{e}_{i_k} \wedge \mathbf{e}_{i_j} \wedge \dots.$$

- Speciálisan

$$\dots \wedge \mathbf{e}_{i_j} \wedge \mathbf{e}_{i_j} \wedge \dots = 0.$$

Ezek a szorzatok generálnak egy 2^n dimenziós teret, $\bigwedge V$-t. Ennek a térnek az $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_k}$ kifejezések, ahol $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ és $k = 1, \dots, n$, egy bázisát alkotják.

$$\bigwedge V = \underbrace{\bigwedge^1 V}_{\mathbb{R},1\,\mathrm{dim}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\bigwedge^k V}_{\binom{n}{k}\,\mathrm{dim}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\bigwedge^n V}_{1\,\mathrm{dim}}.$$

5.1. Állítás. *Legyen V^n vektortér egy bázisa $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, és $A : V \to V$ lineáris leképzés. Ekkor*

$$\det A = \frac{A\mathbf{v}_1 \wedge A\mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge A\mathbf{v}_n}{\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_n}.$$

Bizonyítás. $A\mathbf{v}_i$ felírható a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ báziselemek lineáris kombinációjaként, vagyis A $a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{in}\mathbf{v}_n$ alakban. Ezt felhasználva a következő kifejezést kapjuk a báziselemek képeit összeékelve.

$$A\mathbf{v}_1 \wedge A\mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge A\mathbf{v}_n = (a_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{1n}\mathbf{v}_n) \wedge (a_{21}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{2n}\mathbf{v}_n) \wedge \dots \wedge (a_{n1}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{v}_n)$$

Az így kapott szorzat n tagú, és minden tagjában lineáris. Tehát kibontva egy olyan összeget kapunk, aminek minden tagja n darab báziselem összeékelve, és megszorozva valamilyen skalárral. Azok a tagok, ahol az ékszorzatban legalább egy bázis elem legalább kétszer szerepel, az ékszorzat antiszimmetrikussága miatt 0-val egyenlők. Így már csak olyan tagok vannak az összegben, melyekben az ékszorzat minden bázis elemet tartalmaz. Vagyis

$$A\mathbf{v}_1 \wedge A\mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge A\mathbf{v}_n = \sum_{(j_1,j_2\dots,j_n)} a_{1j_1}\mathbf{v}_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{nj_n}\mathbf{v}_{j_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2 \dots n$ indexek összes permutációja alapján történik. Ezekben a tagokban hozzuk ki a skalár szorzókat az ékszorzat elé, és rendezzük a báziselemeket növekvő sorrendbe. Ha az a_{ij} szorzók sorrendjén nem változtattunk, mikor kiemeltük őket, akkor az első index alapján rendezettek (az első index $A\mathbf{v}_i$ indexével egyezik meg). A második index pedig az ékszorzatot alkotó bázielemek rendezés előtti sorrendjével egyezik meg. Ekkor az összeget alkotó tagok $(-1)^{s_j}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_n$ alakú kifejezések, ahol s_j az $j_1, j_2 \dots, j_n$ indexsorozatban lévő azon párok száma, ahol $k < l$ esetén $i_k > i_l$. Az ékszorzatot kiemelve az összegből, A determinánsát kapjuk.

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_n \sum_{(j_1,j_2\dots,j_n)} (-1)^{s_j}a_{1j_1}\dots a_{2j_n} = \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_n \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

□

$\bigwedge^n V$ egydimenziós, vagyis két fele van. Ha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ elemek lineárisan összefüggők , akkor $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_n = 0$. Ha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ elemek bázist alkotnak a V vektortéren, akkor $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_n \neq 0$. Lineáris algebra nyelvén az irányítás V-n $\bigwedge^n V$ egyik felének kiválasztása. Ha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ és $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_n$ két bázis által meghatározott irányítása V-nek, akkor beszélhetünk az ékszorzatuk által meghatározott irányításáról is a térnek. Ekkor a $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_n$ ékszorzat által meghatározott irányítása a térnek azonos a $\tilde{\mathbf{v}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{v}}_2 \wedge \cdots \wedge \tilde{\mathbf{v}}_n$ ékszorzat által meghatározott irányításával, ha a két ékszorzat hányadosa pozitív.

5.2. Állítás. *$W \subset V$ k dimenziós altér, és $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ egy bázisa. Ekkor a $\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_k \in \bigwedge^k V$ ékszorzatokból W rekonstruálható.*

Bizonyítás.

- Ha $\mathbf{s} \in W$, akkor $\mathbf{s} = a_1\mathbf{w}_1 + \cdots + a_k\mathbf{w}_k$, $(\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_k) \wedge \mathbf{s} = 0$.
- Ha $\mathbf{s} \notin W$, akkor $(\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_k) \wedge \mathbf{s} \neq 0$.

□

5.2. Hodge operátor

5.3. Definíció. Legyen $B : V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilinieáris forma. Ekkor legyen a $B^{\bigwedge^k} : \bigwedge^k V \times \bigwedge^k V \to \mathbb{R}$ hozzárendelés a következő:

$$B^{\bigwedge^k}(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_k) = \det \begin{bmatrix} B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) & \dots & B(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_k) & \dots & B(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) \end{bmatrix}.$$

Példa. Tekintsük a $(+++-)$ szignatúrájú bilineáris formát, és a kéttagú ékszorzatok által generált $\bigwedge^2 V$ $\binom{4}{2}$ dimenziós vektorteret. Legyen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ pszeudoortonormált bázis, vagyis

$$B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1, \qquad B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \qquad B(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1, \qquad B(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4) = -1.$$

És $B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ ha $i \neq j$. Ekkor $\bigwedge^2 V$ egy bázisa $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$. Elsőnek a főátlóban lévő elemeket számítsuk ki.

$$B^{\bigwedge^k}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \det \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \\ B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$B^{\bigwedge^k}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4) = \det \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1) \\ B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4) & B(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1,$$

$$B(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) = 1,$$

$$B(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4) = -1,$$

$$B(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = 1,$$

$$B(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) = -1.$$

Két olyan bázis eleme esetén, melyek legalább egy tagjukban eltérnek egymástól, a szorzat mátrixa legalább három 0-át fog tartalmazni. Vagyis a determináns értéke 0 lesz.

$$B^{\bigwedge^k}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \det \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \\ B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

A köregyenletek terén használt szorzat felhasználásával készült, $\bigwedge^2 V$ értelmezett szorzat, tehát $(+++---)$ szignatúrájú.

5.4. Definíció. Legyen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ pszeudoortonormált bázis, és a $*^{1,3} : \bigwedge^1 V \to \bigwedge^3 V$ a következő hozzárendelés:

$$\mathbf{e}_1 \to \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4,$$
$$\mathbf{e}_2 \to -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4,$$
$$\mathbf{e}_3 \to \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4,$$
$$\mathbf{e}_4 \to \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3.$$

7. Megjegyzés. Ebben a definícióban egy pszeudo ortonormált bázisra definiáltuk a $*$-ot, de később lesz olyan állítás, mely $\wedge^4 V$ egy elemének felhasználásával, vagyis V egy irányításának a felhasználásával karakterizálja ezt az operátort.

Példa. Legyen $\mathbf{f}_1$,$\mathbf{f}_2$,$\mathbf{f}_3$,$\mathbf{f}_4$ a következő négy vektor:

$$\mathbf{f}_1 = (1,0,0,0), \qquad \mathbf{f}_2 = (0,1,0,0), \qquad \mathbf{f}_3 = (0,0,1,0), \qquad \mathbf{f}_4 = (0,0,0,1).$$

És legyen $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$,$\mathbf{e}_4$ a következő pszeudoortonormált bázis:

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{2},0,0,-\frac{1}{2}\right), \qquad \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0), \qquad \mathbf{e}_3 = (0,0,1,0), \qquad \mathbf{e}_4 = \left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right).$$

Ekkor $\mathbf{f}_1$,$\mathbf{f}_2$,$\mathbf{f}_3$,$\mathbf{f}_4$ felírható $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$,$\mathbf{e}_4$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \qquad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{f}_4 = \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_1.$$

Illetve $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$,$\mathbf{e}_4$ is felírható $\mathbf{f}_1$,$\mathbf{f}_2$,$\mathbf{f}_3$,$\mathbf{f}_4$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{f}_4, \qquad \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2, \qquad \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3, \qquad \mathbf{e}_4 = \frac{1}{2}\mathbf{f}_4 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_1.$$

Ekkor $*\mathbf{f}_i$ a következő módon határozzuk meg.

1. lépés: $\mathbf{f}_i$ kifejezése pszeudoortonormált bázis segítségével, a $*$ operátor használata.

2. lépés: A pszeudoortonormált báziselemek kifejezése az $\mathbf{f}_1$,$\mathbf{f}_2$,$\mathbf{f}_3$,$\mathbf{f}_4$ báziselemek segítségével.

3. lépés: A zárójel felbontása.

4. lépés: Az ékszorzatban szereplő báziselemek rendezése az indexük alapján, a tagok összevonása.

$$
\begin{aligned}
*\mathbf{f}_1 &= *\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3), && \text{1. lépés}\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_4+\frac{1}{2}\mathbf{f}_1\right)+\left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_1-\frac{1}{2}\mathbf{f}_4\right)\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\right), && \text{2. lépés}\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\frac{1}{2}\mathbf{f}_4+\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\frac{1}{2}\mathbf{f}_1+\frac{1}{2}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3-\frac{1}{2}\mathbf{f}_4\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\right), && \text{3. lépés}\\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\mathbf{f}_4+\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3+\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3-\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\mathbf{f}_4), && \text{4. lépés}\\
&= \frac{1}{2}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
*\mathbf{f}_2 &= *(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4, && \text{1. lépés}\\
&= -\left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_1-\frac{1}{2}\mathbf{f}_4\right)\wedge\mathbf{f}_3\wedge\left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_4+\frac{1}{2}\mathbf{f}_1\right), && \text{2. lépés}\\
&= -\frac{1}{4}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_3\wedge\mathbf{f}_4+\frac{1}{4}\mathbf{f}_4\wedge\mathbf{f}_3\wedge\mathbf{f}_1, && \text{3. lépés}\\
&= -\frac{1}{4}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_3\wedge\mathbf{f}_4-\frac{1}{4}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_3\wedge\mathbf{f}_4, && \text{4. lépés}\\
&= -\frac{1}{2}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_3\wedge\mathbf{f}_4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
*\mathbf{f}_3 &= *(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_4, && \text{1. lépés}\\
&= \left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_1-\frac{1}{2}\mathbf{f}_4\right)\wedge\mathbf{f}_2\wedge\left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_4+\frac{1}{2}\mathbf{f}_1\right), && \text{2. lépés}\\
&= \frac{1}{4}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_4-\frac{1}{4}\mathbf{f}_4\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_1, && \text{3. lépés}\\
&= \frac{1}{4}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_4+\frac{1}{4}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_4, && \text{4. lépés}\\
&= \frac{1}{2}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
*\mathbf{f}_4 &= *\frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4) = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3), && \text{1. lépés}\\
&= \frac{1}{2}\left(-\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_4+\frac{1}{2}\mathbf{f}_1\right)+\left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_1-\frac{1}{2}\mathbf{f}_4\right)\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\right), && \text{2. lépés}\\
&= \frac{1}{2}\left(-\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\frac{1}{2}\mathbf{f}_4-\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\frac{1}{2}\mathbf{f}_1+\frac{1}{2}\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3-\frac{1}{2}\mathbf{f}_4\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\right), && \text{3. lépés}\\
&= \frac{1}{4}(-\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\mathbf{f}_4-\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3+\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3-\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\mathbf{f}_4), && \text{4. lépés}\\
&= -\frac{1}{2}\mathbf{f}_2\wedge\mathbf{f}_3\wedge\mathbf{f}_4.
\end{aligned}
$$

5.5. Állítás. *Legyen* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *két eleme a köregyenletek terének. Ekkor*

$$\mathbf{a}\wedge *^{1,3}\mathbf{b} = B(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$,$\mathbf{e}_4$ pszeudoortonormált bázis. $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ felírható a báziselemek lineáris kombinációjaként, vagyis elég a bázis elemekre belátni az állítást.

$$\mathbf{e}_1 \wedge *^{1,3}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) = B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4,$$

$$\mathbf{e}_2 \wedge *^{1,3}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \wedge (-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) = B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4,$$

$$\mathbf{e}_3 \wedge *^{1,3}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4) = B(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4,$$

$$\mathbf{e}_4 \wedge *^{1,3}\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_4 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = B(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4.$$

Ha $i \neq j$, akkor a $*^{1,3}\mathbf{e}_j$ ékszorzat tagjai között szerepelni fog $\mathbf{e}_i$, ezért 0-t kapunk.

$$\mathbf{e}_i \wedge *^{1,3}\mathbf{e}_j = 0 = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4.$$

□

5.6. Állítás. *Legyen* $\mathbf{v}$ *és* $\mathbf{w}$ *két eleme a köregyenletek terének. Ekkor*

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -B(*^{1,3}\mathbf{v}, *^{1,3}\mathbf{w}).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ pszeudoortonormált bázis. Ekkor

$$B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1, \text{és} \qquad B(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1.$$

$$B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \qquad B(-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1.$$

$$B(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1, \qquad B(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1.$$

$$B(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4) = -1, \qquad B(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Egy pszeudoortonormált bázis két különböző elemére a szorzat értéke 0. Két ilyen báziselemhez rendelt ékszorzatok pedig legalább egy tagjukban eltérnek. Vagyis maximum két nem nulla eleme lehet a mátrixnak, tehát a determinánsa 0.

$$B(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0.$$

□

5.7. Állítás. $(*^{1,3})^{-1}(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)$ *a* $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3$ *vektorokra merőleges vektor.*

Bizonyítás. Azt kell bizonyítanunk, hogy $B(\mathbf{v}_i, (*^{1,3})^{-1}(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)) = 0$, az $i = 1, 2, 3$ indexekre. Az előző állítás szerint:

$$B(\mathbf{v}_i, (*^{1,3})^{-1}(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)) = -B(*^{1,3}\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3).$$

Legyen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots, \mathbf{e}_4$ pszeudoortonormált bázis a köregyenletek terén. Ekkor minden v_i elő áll a báziselemek lineáris kombinációjaként. Vagyis $\mathbf{v}_i = v_{i1}\mathbf{e}_1 + v_{i2}\mathbf{e}_2 + v_{i3}\mathbf{e}_3 + v_{i4}\mathbf{e}_4$. Ezt felhasználva

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = (v_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots + v_{14}\mathbf{e}_4) \wedge (v_{21}\mathbf{e}_1 + \cdots + v_{24}\mathbf{e}_4) \wedge (v_{31}\mathbf{e}_1 + \cdots + v_{34}\mathbf{e}_4) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{34} \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4$$

$$+ \det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{33} & v_{34} \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + \det \begin{bmatrix} v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{32} & v_{33} & v_{34} \end{bmatrix} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4.$$

Ekkor a szorzat értéke a következő lesz:

$$B(*^{1,3}\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = \det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \mathbf{v}_{i1}(-1) + \det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{34} \end{bmatrix} \mathbf{v}_{i2}(+1)$$

$$+ \det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{33} & v_{34} \end{bmatrix} \mathbf{v}_{i3}(-1) + \det \begin{bmatrix} v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{32} & v_{33} & v_{34} \end{bmatrix} \mathbf{v}_{i4}(+1).$$

Ami a kifejtés tétel szerint:

$$= -\det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{i1} & v_{i2} & v_{i3} & v_{i4} \end{bmatrix} = -\frac{\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_i}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}.$$

$\dfrac{\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_i}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}$ pedig 0 az $i = 1, 2, 3$ indexekre. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

Példa. Legyen **a**,**b**,**c** a következő három pontkör, és számítsuk ki a képlet segítségével a rájuk merőleges kôrt.

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} : x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0, && (1, 0, -2, 1), \\ &\mathbf{b} : x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0, && (1, 0, 2, 1), \\ &\mathbf{c} : x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0, && (1, -2, 0, 1). \end{aligned}$$

A három pontkört felírhatjuk a következő pszeudoortonormált bázis segítségével.

$$\mathbf{e}_1 : \left(\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right), \qquad \mathbf{e}_2 : (0, 1, 0, 0), \qquad \mathbf{e}_3 : (0, 0, 1, 0), \qquad \mathbf{e}_4 : \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right).$$

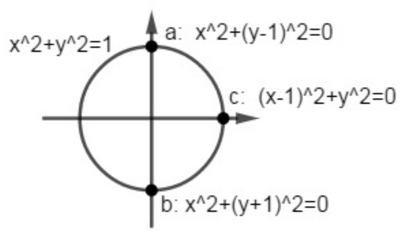
Ekkor az $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ ékszorzatra a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= (-2\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4) \wedge (2\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4) \wedge (-2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4), \\ &= (-2\mathbf{e}_3) \wedge (2\mathbf{e}_4) \wedge (-2\mathbf{e}_2) + (2\mathbf{e}_4) \wedge (2\mathbf{e}_3) \wedge (-2\mathbf{e}_2), \\ &= 8\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2, \\ &= 8\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + 8\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, \\ &= 16\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4. \end{aligned}$$

A $*^{1,3}$ hozzárendelés definíciója alapján:

$$(*^{1,3})^{-1}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (*^{1,3})^{-1} 16\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 = 16\mathbf{e}_1.$$

Az eredményül kapott $(8, 0, 0, -8)$ vektor pedig a $8(x^2 + y^2) - 8 = 0$ kört reprezentálja.



5.3. Irányított szög

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{p}$ pontkör rajta van a $\mathbf{k}_1$,$\mathbf{k}_2$ körökön. Vagyis $B(\mathbf{k}_i, \mathbf{p}) = 0$. Továbbá tegyük fel azt is, hogy a két kör két egymástól különböző pontban metszi egymást, azaz $\dfrac{B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)^2}{B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)B(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2)} \neq 1$. Tehát a három kör lineárisan független. Ebből tudjuk, hogy kifeszítenek egy háromdimenziós alteret, ahol $\mathbf{p}$ minden körre merőleges. Tekintsük ennek a merőleges altérnek a $\mathbb{R}\mathbf{p}$ szerinti faktorterét, $(\mathbb{R}\mathbf{p})^\perp/\mathbb{R}\mathbf{p}$-t. Vagyis azon diszjunkt halmazok halmazát, ahol egy csoporton belül egymástól a vektorok csak $\mathbf{p}$ skalárszorosával térnek el. Ekkor a faktortér $\mathbf{k}_1'$,$\mathbf{k}_2'$ elemeire igaz, hogy

$$B(\mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2') = B(\mathbf{k}_1 + c_1\mathbf{p}, \mathbf{k}_2 + c_2\mathbf{p}) = B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + c_2 \overbrace{B(\mathbf{k}_1, \mathbf{p})}^{0} + c_1 \overbrace{B(\mathbf{p}, \mathbf{k}_2)}^{0} + c_1c_2 \overbrace{B(\mathbf{p}, \mathbf{p})}^{0}.$$

Látható hogy c_1-től és c_2-től nem függ a szorzat értéke. Vagyis B leszáll a faktortérre. Továbbá a $\mathbf{p}$ merőleges altere előáll egy a $\mathbf{p}$ által generált altér, és egy W altér összegeként, ahol W nem kanonikus választás.

$$\overbrace{(\mathbb{R}\mathbf{p})^\perp}^{3\,\text{dim}} = \overbrace{\mathbb{R}\mathbf{p}}^{1\,\text{dim}} \oplus \overbrace{W}^{2\,\text{dim}}.$$

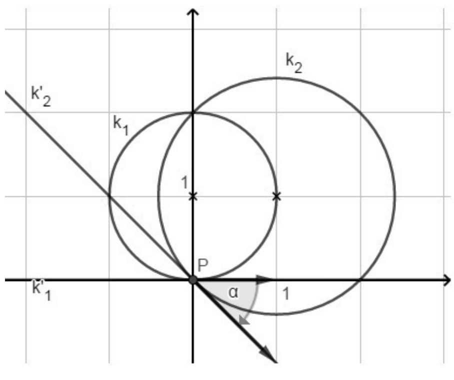
Tegyük fel, hogy W a $(\mathbb{R}\mathbf{p})^\perp \cap (\mathbb{R}\mathbf{q})^\perp$ altér, ahol $\mathbf{q}$ a végtelen távoli pontkör.

$$W = (\mathbb{R}\mathbf{p})^\perp \cap (\mathbb{R}\mathbf{q})^\perp \simeq (\mathbb{R}\mathbf{p})^\perp/\mathbb{R}\mathbf{p}$$

Ekkor $\mathbf{p}$,$\mathbf{q}$,$\mathbf{k}_1$,$\mathbf{k}_2$ lineárisan függetlenek, vagyis egy sorrendjük a tér egy irányítását adja meg. Az hogy ez a sorrend tér egy adott irányításával megegyező vagy ellentétes irányítást határoz meg, függ a vektorok irányításától.

5.8. Definíció. Legyen $\mathbf{k}_1$ és $\mathbf{k}_2$ irányított kôrök, $\mathbf{p}$ a metszéspontjuk, és $\mathbf{q}$ a $\mathbf{p}$-vel azonos irányítású végtelen távoli pontkör. És legyen $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$ a tér egy rögzített irányítása.Ekkor $\mathbf{k}_1$ és $\mathbf{k}_2$ kôrök $\mathbf{p}$ beli irányított szögén, azt a szöget értjük, mely szinuszának előjele megegyezik $\dfrac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}$ előjelével.

Példa. Számítsuk ki $k_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ és $k_2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ körök $p : x^2 + y^2 = 0$ pontbeli irányított szögét. Ekkor a köröket reprezentáló vektorok:



$$\mathbf{k}_1 = (1, 0, -2, 0), \qquad \mathbf{k}_2 = (1, -2, -2, 0), \qquad \mathbf{p} = (1, 0, 0, 0).$$

A két kör szögének koszinuszára vonatkozó képlet alapján α-ra a következő értékeket kapjuk.

$$B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = (1,0,-2,0)(1,-2,-2,0) = 4,$$
$$B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1) = (1,0,-2,0)(1,0,-2,0) = 4,$$
$$B(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2) = (1,-2,-2,0)(1,-2,-2,0) = 8,$$
$$\cos\alpha = \frac{B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{\sqrt{B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1)}\sqrt{B(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{8}} \to \alpha = 45^\circ \text{ vagy } -45^\circ.$$

$\sin\alpha$ előjelét pedig a definició alapján, $\dfrac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{k}_1' \wedge \mathbf{k}_2'}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}$ kiszámításával határozzuk meg, ahol $\mathbf{k}_1'$ és $\mathbf{k}_2'$ a következő egyenesek.

$$\mathbf{k}_1' \longrightarrow \mathbf{k}_1 - \frac{B(\mathbf{k}_1, \infty)}{B(\mathbf{p}, \infty)}\mathbf{p}, \qquad \mathbf{k}_2' \longrightarrow \mathbf{k}_2 - \frac{B(\mathbf{k}_2, \infty)}{B(\mathbf{p}, \infty)}\mathbf{p}.$$

$\mathbf{k}_1'$ és $\mathbf{k}_2'$ elemei $(\mathbb{R}\mathbf{p})^\perp \cap (\mathbb{R}\mathbf{q})^\perp$-nak.

$$B(\mathbf{k}_1 - \frac{B(\mathbf{k}_1, \infty)}{B(\mathbf{p}, \infty)}\mathbf{p}, \infty) = B(\mathbf{k}_1, \infty) - \frac{B(\mathbf{k}_1, \infty)B(\mathbf{p}, \infty)}{B(\mathbf{p}, \infty)} = 0,$$
$$B(\mathbf{k_2} - \frac{B(\mathbf{k}_2, \infty)}{B(\mathbf{p}, \infty)}\mathbf{p}, \infty) = B(\mathbf{k}_2, \infty) - \frac{B(\mathbf{k}_2, \infty)B(\mathbf{p}, \infty}{B(\mathbf{p}, \infty)} = 0.$$

így a következő vektorokat kaptuk.

$$\mathbf{k}_1' = (1,0,-2,0) - \frac{(1,0,-2,0)(0,0,0,1)}{(1,0,0,0)(0,0,0,1)}(1,0,0,0) = (0,0,-2,0),$$
$$\mathbf{k}_1' = (1,-2,-2,0) - \frac{(1,-2,-2,0)(0,0,0,1)}{(1,0,0,0)(0,0,0,1)}(1,0,0,0) = (0,-2,-2,0).$$

A $\dfrac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{k}_1' \wedge \mathbf{k}_2'}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}$ hányados értéke pedig:

$$\frac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{k}_1' \wedge \mathbf{k}_2'}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -4.$$

Legyen $\mathbf{q}'$ a másik metszéspontot ($Q' : x^2 + (y-2)^2 = 0$) reprezentáló vektor, vagyis $(1,0,-2,1)$. Ekkor a $\dfrac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}' \wedge \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}$ hányados értéke:

$$\frac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}' \wedge \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -4.$$

Vagyis a szinusz előjele negatív, ami azt jelenti hogy a k_1 és k_2 szöge -45°.

5.9. Állítás. $\dfrac{\mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}' \wedge \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4(-B(\mathbf{p}', \mathbf{q}'))}$ *előjele megegyezik* $\dfrac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}$ *előjelével, ahol* $\mathbf{p}'$ *és* $\mathbf{q}'$ *nem feltétlenül azonos irányításúak.*

Bizonyítás. Ha a két vektor azonos időirányítású akkor $B(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$ értéke kisebb 0-nál, így ebben az esetben azonos előjelű lesz a két hányados. Ha a két vektor nem azonos irányítású, akkor az egyiket -1-gyel szorozva azonos irányításúak lesznek. Ahhoz, hogy a hányados előjele ne változzon, a nevezőt is szükséges egy negatív számmal szorozni, $-B(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$ értéke pedig kisebb 0-nál. □

5.10. Állítás. $\dfrac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4(-B(\mathbf{p}, \mathbf{q}))}$ *előjele megegyezik* $\dfrac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p}}{*^{1,3}\mathbf{p}}$ *előjelével.*

Bizonyítás. Elsőnek azt kell bizonyítanunk, hogy $(\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p})$ skalárszorosa $*^{1,3}\mathbf{p}$-nek. A $(*^{1,3})^{-1}\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p}$ vektor merőleges a $\mathbf{k}_1$,$\mathbf{k}_2$,$\mathbf{p}$ vektorokra. Vagyis merőleges $\mathbf{p}$ merőleges alterére, tehát $\mathbf{p}$ skalárszorosa. Ebből következik hogy $(\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p})$ és $*^{1,3}\mathbf{p}$ proporcionálisak. Így már csak azt kell bizonyítanunk, hogy egymás pozitív számszorosai. $\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p}$-t két cserével $\mathbf{p} \wedge \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2$-vé alakíthatjuk. Ekkor a $\dfrac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p}}{*^{1,3}\mathbf{p}}$ tört nevezőjét és számlálóját is összeékelve $\mathbf{q}$-val.

$$\frac{\mathbf{q} \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2}{\mathbf{q} \wedge *^{1,3}\mathbf{p}}.$$

Alkalmazzuk a nevezőben lévő kifejezésre az $\mathbf{a} \wedge *^{1,3}\mathbf{b} = B(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$ azonosságot.

$$\frac{\mathbf{q} \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2}{B(\mathbf{q}, \mathbf{p})\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}.$$

$\mathbf{q}$ és $\mathbf{p}$ cseréjével $\dfrac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2}{(-B(\mathbf{q}, \mathbf{p}))\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}$-t kapunk. Vagyis az állítást beláttuk. □

5.11. Állítás. *Legyen* $\mathbf{k}_1$ *és* $\mathbf{k}_2$ *két kör,* $\mathbf{p}$ *a metszéspontjuk, és* $\mathbf{q}$ *a végtelen távoli pontkör. Ekkor* $\mathbf{k}_1$ *és* $\mathbf{k}_2$ *szögének szinusza* $\mathbf{p}$*-ben:*

$$\sin = \frac{\dfrac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}}{(-B(\mathbf{p}, \mathbf{q}))\sqrt{B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1)}\sqrt{B(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2)}}.$$

Bizonyítás. Ha $\cos^2 + \sin^2 = 1$ teljesül, akkor igaz. Vagyis azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\frac{B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)^2}{B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2)} + \frac{\dfrac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4} \cdot \dfrac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}}{B(\mathbf{p}, \mathbf{q})^2 B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2)} = 1.$$

Az ékszorzatok szorzatára vonatkozó definíció alapján az összeg második tagjában szereplő tört nevezője:

$$\frac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4} \cdot \frac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4} = \frac{\det \begin{bmatrix} B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_1) & B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1) & B(\mathbf{p},\mathbf{k}_1) & B(\mathbf{q},\mathbf{k}_1) \\ B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) & B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_2) & B(\mathbf{p},\mathbf{k}_2) & B(\mathbf{q},\mathbf{k}_2) \\ B(\mathbf{k}_1,\mathbf{p}) & B(\mathbf{k}_2,\mathbf{p}) & B(\mathbf{p},\mathbf{p}) & B(\mathbf{q},\mathbf{p}) \\ B(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}) & B(\mathbf{k}_2,\mathbf{q}) & B(\mathbf{p},\mathbf{q}) & B(\mathbf{q},\mathbf{q}) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1) & B(\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1) \\ B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2) & B(\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_2) \\ B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3) & B(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) & B(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3) & B(\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_3) \\ B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_4) & B(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_4) & B(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4) & B(\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_4) \end{bmatrix}}.$$

$\mathbf{q}$ és $\mathbf{p}$ izotróp vektorok, és merőlegesek $\mathbf{k}_1$-re és $\mathbf{k}_2$-re, vagyis az önmagukkal és $\mathbf{k}_1$-gyel, $\mathbf{k}_2$-vel vett szorzatuk 0.

$$\frac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4} \cdot \frac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4} = \frac{\det \begin{bmatrix} B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_1) & B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1) & 0 & 0 \\ B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) & B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B(\mathbf{q},\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & B(\mathbf{p},\mathbf{q}) & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}},$$

$$\frac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4} \cdot \frac{\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4} = \frac{-B(\mathbf{p},\mathbf{q})(B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_2)B(\mathbf{p},\mathbf{q}) - B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)^2 B(\mathbf{p},\mathbf{q}))}{-1}.$$

Ezt visszahelyettesítve az egyenlőséget beláttuk.

$$\begin{aligned} &\frac{B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)^2}{B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_2)} + \frac{B(\mathbf{p},\mathbf{q})^2(B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_2) - B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)^2)}{B(\mathbf{p},\mathbf{q})^2 B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_2)} = \\ &\qquad = \frac{B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)^2}{B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_2)} + \frac{B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_2) - B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)^2}{B(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_2)} = 1. \end{aligned}$$

□

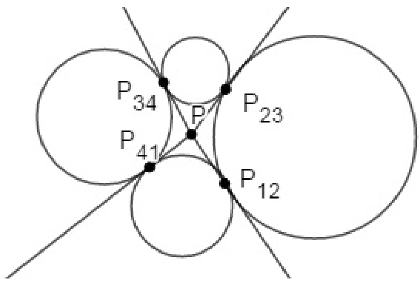
6. fejezet

Feladatok

6.1. Egymást érintő körök

Adottak a k_1, k_2, k_3, k_4 körök, úgy hogy a belsejük diszkjunktak, és k_1 érinti k_2-t a P_{12}-ben, k_2 érinti k_3-at a P_{23}-ban, k_3 érinti k_4-et a P_{34}-ben, k_4 érinti k_1-et a P_{41}-ben. Bizonyítsuk be, hogy P_{12},P_{23},P_{34},P_{41} egy körre esik.

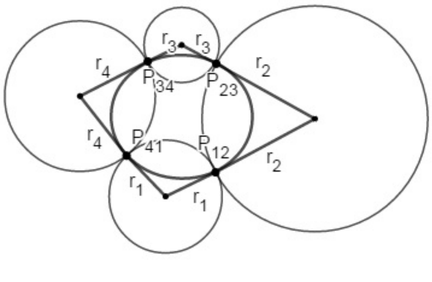
Rossz megoldás. Rajzoljuk be a P_{12},P_{23},P_{34},P_{41} pontokba az érintőket. Jelölje a metszéspontjukat P. Tudjuk hogy a P-ből húzott érintőszakaszok hossza egy adott kör esetén megegyezik, vagyis $PP_{12} = PP_{23}$,$PP_{23} = PP_{34}$,$PP_{34} = PP_{41}$,$PP_{41} = PP_{12}$. Ebből következik hogy a négy szakasz hossza egyenlő. Tehát a P középpontú, PP_{12} sugarú kör, olyan kör lesz, melyen rajta van mind a négy érintési pont.



□

{ A feladat ezen megoldása, azért hibás, mert azt feltételezi hogy az érintők egy pontban metszik egymást.}

Rossz megoldás. Húzzuk be a sugarakat az érintési pontokba, és jelölje őket r_1,r_2,r_3,r_4. Ekkor minden érintési pontban mindkét sugár merőleges az adott pontba rajzolt érintőre, vagyis egy egyenesre esnek. Tehát a sugarak berajzolásával egy négyszöget kaptunk, melynek oldalhosszai r_1+r_2,r_2+r_3,r_3+r_4,r_4+r_1. Vagyis igaz rá, hogy a szemközti oldal hosszainak az összege megegyezik. Ez az állítás csak az érintőnégyszögekre igaz, vagyis van egy olyan kör, melynek érintői a négyszög oldalai. Mivel egy körhöz külsőpontból húzott érintőszakaszok hossza megegyezik, ezért ezen a körön rajta kell lennie a P_{12},P_{23},P_{34},P_{41} pontoknak.

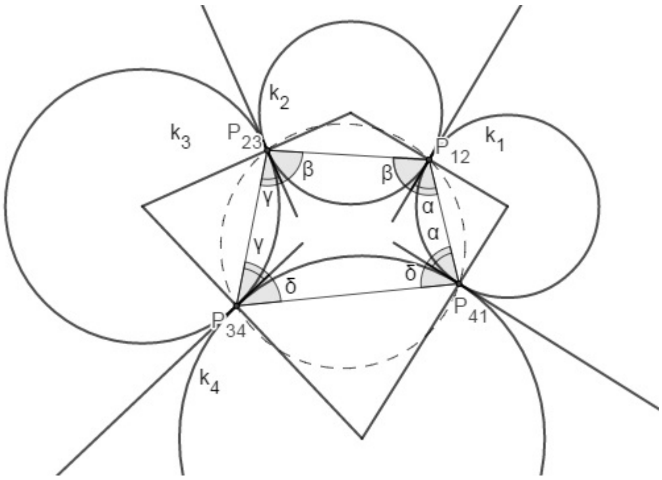


□

{A feladat ezen megoldása hasonlóan az előzőhöz, olyat feltételez, ami nem igaz. Vagyis hogy a érintőnégyszögbe rajzolt kör a körök érintési pontjában érinti az oldalakat.}

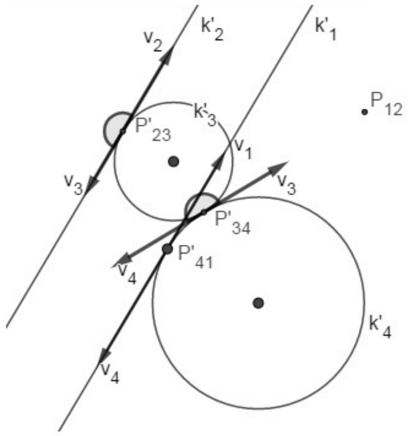
1. megoldás. A P_{12}-be,P_{23}-ba,P_{34}-be és P_{41}-be az érintőket berajzolva, és az azonos körön lévőket összekötve, négy egyenlő szárú háromszöget kapunk. Tehát tudjuk, hogy az alapon fekvő szögek egyenlők. Ebből következik, hogy a metszéspontok által meghatározott négyszög szemközti szögei egyenlők. Ami csak abban az esetben lehetséges, ha a négyszög húrnégyszög. A húrnégyszögeknek pedig van köré írt körük, tehát létezik olyan kör, amin rajta van mind a négy csúcs, érintési pont.

$$(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=(\beta+\gamma)+(\alpha+\delta)$$

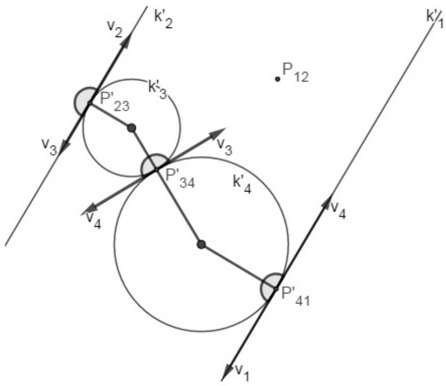


□

2. megoldás. Invertálva a P_{12} érintési pontba, olyan ábrát kapunk, ahol két párhuzamos egyenes és két kör lesz. A feladatból tudjuk, hogy a körök belseje diszjunkt. Ha kikötjük hogy a körök irányítása megegyezik, azt jelenti hogy 180°-ot zárnak be. Ebből és abból hogy az inverzió szögtartó, azt is tudjuk hogy a két kör az egyenesek között helyezkedik el. Abban az esetben, ha nem így lenne, kell lennie két körnek, melyek szöge és inverzeik szöge nem egyezik meg. Példaként a k_2' és k_1' irányszöge 180° helyett 0°.



Az érintési pontokba a sugarakat berajzolva észrevehető hogy az ábra középpontosan hasonló. A hasonlóság miatt pedig az inverzió pólusának kivételével az érintési pontok egy egyenesre esnek. Az ábrát vissza invertálva, ez az egyenes egy kör lesz, mely átmegy a póluson, vagyis mind a négy érintési pont rajta lesz.



□

3. megoldás. Ha a köröket a $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_4$ vektorokkal adjuk meg, akkor tetszőleges (egymást érintő) két kör által generált parabolikus körsor egyetlen pontköre a $\mathbf{p}_i = \dfrac{\mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_i|} + \dfrac{\mathbf{k}_{i+1}}{|\mathbf{k}_{i+1}|}$ vektort jelenti.

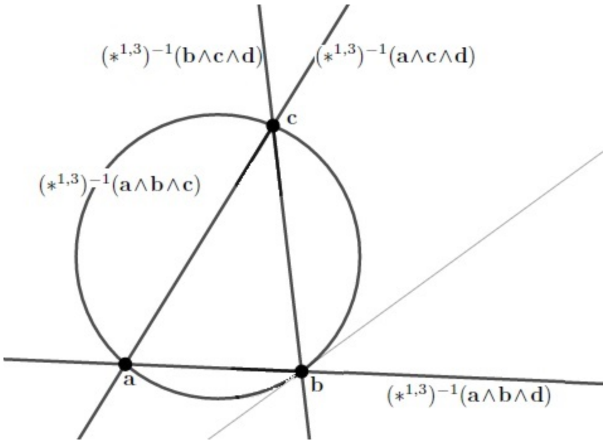
$$\left(\frac{\mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_i|} + \frac{\mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_i|}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_i|} + \frac{\mathbf{k}_{i+1}}{|\mathbf{k}_{i+1}|}\right) = \frac{\mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_i|} \cdot \frac{\mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_i|} + 2\frac{\mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_i|} \cdot \frac{\mathbf{k}_{i+1}}{|\mathbf{k}_{i+1}|} + \frac{\mathbf{k}_{i+1}}{|\mathbf{k}_{i+1}|} \cdot \frac{\mathbf{k}_{i+1}}{|\mathbf{k}_{i+1}|} = 1 - 2 + 1 = 0.$$

A $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ pontkörök által generált altere a köregyenleteknek nem lehet $(+0)$ vagy $(++0)$, ugyanis vannak benne olyan pontkörök (izotróp vektorok), amelyek nem generálják ezeket a pontköröket. Illetve nem lehet $(+++-)$ sem, mert $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 = 0$, tehát maximum három dimenziós alteret generálhatnak. A fent maradó (0),$(+-)$,$(++-)$ esetekben pedig a merőleges altér tartalmaz valódi kört, amire mind a négy pontkör merőleges. □

A harmadik megoldásban a körökre vektorokként tekintettünk. És nem használtuk ki, hogy megszokott jellegű köröket jelentő vektorok szerepelnek a feladatban. Viszont irányítással láttuk el őket. Vagyis azt bizonyítottuk, hogyha van négy alakzatunk k_1, k_2, k_3 és k_4, melyek körök vagy egyenesek, és megadható egy irányításuk, illetve k_i érinti k_{i+1}-et P_{ii+1}-ben, akkor a P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} pontok egy körre esnek. Így az adott feladatra egy általánosabb megoldást adtunk.

6.2. Kerületi szögek

6.1. Állítás. *Legyen* $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ *két rögzített pontkör, melyek irányítása megyegyezik, és* $\mathbf{d}$ *a végtelen távoli pontkör. Továbbá legyen adott egy valódi kör, melyre merőleges* $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$, *és egy harmadik pontkör* $\mathbf{c}$, *melynek irányítása megegyezik* $\mathbf{d}$ *irányításával. Ekkor* $(*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})$ *és* $(*^{1,3})^{-1}(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})$ *kôrök szögének koszinusza független attól, hogy az adott valódi körön* $\mathbf{c}$ *hol helyezkedik el. (Az irányítási feltételek teljesülnek, ha mindegyik pontkört ortokron irányítással veszünk.)*



Bizonyítás. Jelöljük α-val az $(*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})$ és $(*^{1,3})^{-1}(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})$ kôrök szögét. Első lépésben számítsuk ki e két kôr szögének koszinuszát. Ehhez helyettesítsük be az (1.2) képletbe a kôröket reprezentáló vektorokat.

$$\cos\alpha = \cos((*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}), (*^{1,3})^{-1}(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})),$$

$$= \frac{B((*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}), (*^{1,3})^{-1}(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}))}{\sqrt{B((*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}), (*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}))}\sqrt{B((*^{1,3})^{-1}(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}), (*^{1,3})^{-1}(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}))}}.$$

Ekkor a $B(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -B^{\wedge}(*^{1,3}\mathbf{v}, *^{1,3}\mathbf{w})$ egyenlőséget felhasználva, a képlet a következőre egyszerűsödik:

$$\cos\alpha = \frac{-B^{\wedge}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}, \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})}{\sqrt{(-1)B^{\wedge}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}, \mathbf{a}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})}\sqrt{(-1)B^{\wedge}(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}, \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})}}.$$

Ami pedig az ékszorzatok szorzatának definíciója alapján:

$$\cos\alpha = \frac{-\det\begin{bmatrix} B(\mathbf{a},\mathbf{b}) & B(\mathbf{c},\mathbf{b}) & B(\mathbf{d},\mathbf{b}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{c}) & B(\mathbf{c},\mathbf{c}) & B(\mathbf{d},\mathbf{c}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{d}) & B(\mathbf{c},\mathbf{d}) & B(\mathbf{d},\mathbf{d}) \end{bmatrix}}{\sqrt{-\det\begin{bmatrix} B(\mathbf{a},\mathbf{a}) & B(\mathbf{c},\mathbf{a}) & B(\mathbf{d},\mathbf{a}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{c}) & B(\mathbf{c},\mathbf{c}) & B(\mathbf{d},\mathbf{c}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{d}) & B(\mathbf{c},\mathbf{d}) & B(\mathbf{d},\mathbf{d}) \end{bmatrix}}\sqrt{-\det\begin{bmatrix} B(\mathbf{b},\mathbf{b}) & B(\mathbf{c},\mathbf{b}) & B(\mathbf{d},\mathbf{b}) \\ B(\mathbf{b},\mathbf{c}) & B(\mathbf{c},\mathbf{c}) & B(\mathbf{d},\mathbf{c}) \\ B(\mathbf{b},\mathbf{d}) & B(\mathbf{c},\mathbf{d}) & B(\mathbf{d},\mathbf{d}) \end{bmatrix}}}.$$

Tudjuk, hogy **a**, **b**, **c** és **d** izotróp vektorok, vagyis az önmagukkal vett szorzatuk 0. Ezt felhasználva a két kôr szögének koszinuszára vonatkozó képlet eredményeként a következőt kapjuk:

$$\cos\alpha = \frac{-\det\begin{bmatrix} B(\mathbf{a},\mathbf{b}) & B(\mathbf{c},\mathbf{b}) & B(\mathbf{d},\mathbf{b}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{c}) & 0 & B(\mathbf{d},\mathbf{c}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{d}) & B(\mathbf{c},\mathbf{d}) & 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{-\det\begin{bmatrix} 0 & B(\mathbf{c},\mathbf{a}) & B(\mathbf{d},\mathbf{a}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{c}) & 0 & B(\mathbf{d},\mathbf{c}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{d}) & B(\mathbf{c},\mathbf{d}) & 0 \end{bmatrix}}\sqrt{-\det\begin{bmatrix} 0 & B(\mathbf{c},\mathbf{b}) & B(\mathbf{d},\mathbf{b}) \\ B(\mathbf{b},\mathbf{c}) & 0 & B(\mathbf{d},\mathbf{c}) \\ B(\mathbf{b},\mathbf{d}) & B(\mathbf{c},\mathbf{d}) & 0 \end{bmatrix}}},$$

$$\cos\alpha = \frac{-(-B(\mathbf{b},\mathbf{a})B(\mathbf{d},\mathbf{c})^2 + B(\mathbf{b},\mathbf{c})B(\mathbf{c},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{d}) + B(\mathbf{b},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{c})B(\mathbf{c},\mathbf{d}))}{\sqrt{-2B(\mathbf{a},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{c})B(\mathbf{c},\mathbf{d})}\sqrt{-2B(\mathbf{b},\mathbf{d})B(\mathbf{b},\mathbf{c})B(\mathbf{c},\mathbf{d})}},$$

$B(\mathbf{d},\mathbf{c})$ előjele **d** és **c** irányításától függ.

$$\cos\alpha = \operatorname{sgn}(B(\mathbf{d},\mathbf{c}))\frac{(+B(\mathbf{b},\mathbf{a})B(\mathbf{d},\mathbf{c}) - B(\mathbf{b},\mathbf{c})B(\mathbf{a},\mathbf{d}) - B(\mathbf{b},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{c}))}{2\sqrt{B(\mathbf{a},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{c})B(\mathbf{b},\mathbf{d})B(\mathbf{b},\mathbf{c})}}.$$

Most számítsuk ki a $(*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$ és a $(*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{d})$ kôrök szögének koszinuszát. Ezt a szöget jelöljük $\bar{\alpha}$-val. A (1.2) képletbe behelyettesítve a megfelelő vektorokat:

$$\cos\bar{\alpha} = \cos((*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}), (*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{d})),$$

$$= \frac{B((*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}), (*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{d}))}{\sqrt{B((*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}), (*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}))}\sqrt{B((*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{d}), (*^{1,3})^{-1}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{d}))}}.$$

Akárcsak $\cos\alpha$ kiszámításánál, itt is használjuk fel a $B(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -B^\wedge(*^{1,3}\mathbf{v}, *^{1,3}\mathbf{w})$ egyenlőséget.

$$\cos\bar{\alpha} = \frac{-B^\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}, \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{d})}{\sqrt{(-1)B^\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{d}, \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{d})(-1)B^\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}, \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})}}.$$

Ez pedig definíció alapján a következő hányadost jelenti:

$$\cos\bar{\alpha} = \frac{-\det\begin{bmatrix} B(\mathbf{a},\mathbf{a}) & B(\mathbf{b},\mathbf{a}) & B(\mathbf{c},\mathbf{a}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{b}) & B(\mathbf{b},\mathbf{b}) & B(\mathbf{c},\mathbf{b}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{d}) & B(\mathbf{b},\mathbf{d}) & B(\mathbf{c},\mathbf{d}) \end{bmatrix}}{\sqrt{-\det\begin{bmatrix} B(\mathbf{a},\mathbf{a}) & B(\mathbf{b},\mathbf{a}) & B(\mathbf{d},\mathbf{a}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{b}) & B(\mathbf{b},\mathbf{b}) & B(\mathbf{d},\mathbf{b}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{d}) & B(\mathbf{b},\mathbf{d}) & B(\mathbf{d},\mathbf{d}) \end{bmatrix}}\sqrt{-\det\begin{bmatrix} B(\mathbf{a},\mathbf{a}) & B(\mathbf{b},\mathbf{a}) & B(\mathbf{c},\mathbf{a}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{b}) & B(\mathbf{b},\mathbf{b}) & B(\mathbf{c},\mathbf{b}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{c}) & B(\mathbf{b},\mathbf{c}) & B(\mathbf{c},\mathbf{c}) \end{bmatrix}}}.$$

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok izotróp vektorok. Vagyis

$$\cos\bar{\alpha} = \frac{-\det\begin{bmatrix} 0 & B(\mathbf{b},\mathbf{a}) & B(\mathbf{c},\mathbf{a}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{b}) & 0 & B(\mathbf{c},\mathbf{b}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{d}) & B(\mathbf{b},\mathbf{d}) & B(\mathbf{c},\mathbf{d}) \end{bmatrix}}{\sqrt{-\det\begin{bmatrix} 0 & B(\mathbf{b},\mathbf{a}) & B(\mathbf{d},\mathbf{a}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{b}) & 0 & B(\mathbf{d},\mathbf{b}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{d}) & B(\mathbf{b},\mathbf{d}) & 0 \end{bmatrix}}\sqrt{-\det\begin{bmatrix} 0 & B(\mathbf{b},\mathbf{a}) & B(\mathbf{c},\mathbf{a}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{b}) & 0 & B(\mathbf{c},\mathbf{b}) \\ B(\mathbf{a},\mathbf{c}) & B(\mathbf{b},\mathbf{c}) & 0 \end{bmatrix}}},$$

$$\cos\bar{\alpha} = \frac{-(-B(\mathbf{b},\mathbf{a})B(\mathbf{d},\mathbf{c})^2 + B(\mathbf{b},\mathbf{c})B(\mathbf{c},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{d}) + B(\mathbf{b},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{c})B(\mathbf{c},\mathbf{d}))}{\sqrt{-2B(\mathbf{a},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{b})B(\mathbf{b},\mathbf{d})}\sqrt{-2B(\mathbf{a},\mathbf{c})B(\mathbf{a},\mathbf{b})B(\mathbf{b},\mathbf{c})}},$$

$B(\mathbf{a},\mathbf{b})$ előjele $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ irányításától függ.

$$\cos\bar{\alpha} = \operatorname{sgn}(B(\mathbf{a},\mathbf{b}))\frac{B(\mathbf{d},\mathbf{c})B(\mathbf{a},\mathbf{b}) - B(\mathbf{b},\mathbf{c})B(\mathbf{a},\mathbf{d}) - B(\mathbf{b},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{c})}{2\sqrt{B(\mathbf{a},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{c})B(\mathbf{b},\mathbf{c})B(\mathbf{b},\mathbf{d})}}.$$

Felhasználva a feladatban szereplő feltételeket, melyek a pontkörök irányítására vonatkoznak, a $\operatorname{sgn}(B(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ és a $\operatorname{sgn}(B(\mathbf{c},\mathbf{d}))$ előjelekre -1-et kapunk. Tehát $-\cos\bar{\alpha}$-ra ugyanazt kaptuk eredményül, mint $-\cos\alpha$-ra. Ezzel az állítást beláttuk.

$$-\cos\bar{\alpha} = \frac{B(\mathbf{b},\mathbf{a})B(\mathbf{d},\mathbf{c}) - B(\mathbf{b},\mathbf{c})B(\mathbf{a},\mathbf{d}) - B(\mathbf{b},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{c})}{2\sqrt{B(\mathbf{a},\mathbf{d})B(\mathbf{a},\mathbf{c})B(\mathbf{b},\mathbf{c})B(\mathbf{b},\mathbf{d})}} = -\cos\alpha. \tag{$*$}$$

□

A feladatban szereplő a kôrök irányítása a meghatározásukhoz használt ékszorzatokban szereplő pontkörök sorrendjétől, és irányításától függ. Ahhoz hogy jobban megértsük, hogy az $(*^{1,3})^{-1}\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$ kôr milyen irányítású, szorozzuk össze a $\mathbf{d}$ pontkörrel. (Az (A,B,C,D) és a $(0,0,0,1)$ vektorok szorzata $-2A$ és egy kör irányítását A előjelével definiáltuk.) Tehát a (5.2) tétel bizonyításában látottak alapján

$$B((*^{1,3})^{-1}\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c},\mathbf{d}) = -B(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}, *^{1,3}\mathbf{d}) = \frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}}{\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4}.$$

Legyenek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ pontköröket reprezentáló vektorok a következők:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}a_1, -\sqrt{2}a_2, \frac{a_1^2+a_2^2}{\sqrt{2}}\right), \qquad \mathbf{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}b_1, -\sqrt{2}b_2, \frac{b_1^2+b_2^2}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\mathbf{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}c_1, -\sqrt{2}c_2, \frac{c_1^2+c_2^2}{\sqrt{2}}\right), \qquad \mathbf{d} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ekkor az ékszorzatukra azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}}{\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4} = \frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}} = -\frac{\det\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}a_1 & -\sqrt{2}a_2 & \frac{a_1^2+a_2^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}b_1 & -\sqrt{2}b_2 & \frac{b_1^2+b_2^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}c_1 & -\sqrt{2}c_2 & \frac{c_1^2+c_2^2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}.$$

Az utolsó sor alapján kibontva a determinánst azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}}{\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}b_1\sqrt{2}c_2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}a_1\sqrt{2}b_2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}a_2\sqrt{2}c_1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}a_2\sqrt{2}b_1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}a_1\sqrt{2}c_2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}b_2\sqrt{2}c_1}{\sqrt{2}}\right)}{1}.$$

Bontusk fel a zárójelet, egyszerűsítsük a törteket és adjunk hozzá $b_1b_2 - b_1b_2$-t.

$$\frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}}{\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4} = a_2b_1 + a_1c_2 + b_2c_1 - b_1c_2 - a_1b_2 - a_2c_1 + b_2b_1 - b_2b_1.$$

Emeljünk ki c_1-et, c_2-t, b_1-et és b_2-t.

$$\frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}}{\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4} = c_1(b_2 - a_2) + c_2(a_1 - b_1) + b_1(a_2 - b_2) + b_2(b_1 - a_1).$$

Emeljünk ki $(b_2 - a_2)$-et és $(b_1 - a_1)$-et.

$$\frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}}{\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4} = (b_1 - a_1)(b_2 - c_2) - (b_1 - c_1)(a_2 - b_2).$$

Az így kapott kifejezés nem más, mint a $\mathbf{a}$-ból $\mathbf{b}$-be, és a $\mathbf{b}$-ből $\mathbf{c}$-be mutató vektorok ékszorzata, vagyis $\mathbb{R}^2$ ezen vektorok által meghatározott irányítása

$$\frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}}{\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4} = \det\begin{bmatrix} b_1 - a_1 & b_1 - c_1 \\ b_2 - a_2 & b_2 - c_2 \end{bmatrix} = \frac{(b_1 - a_1, b_2 - a_2)\wedge(b_1 - c_1, b_2 - c_2)}{(1,0)\wedge(0,1)}.$$

Vagyis ha az $(*^{1,3})^{-1}\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$ körön a $\mathbf{c}$ pontkör az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontkörök által meghatározott másik köríven helyezkedik el, a kör irányítást vált.

8. Megjegyzés. Ugyanígy összeszorozhatjuk a másik három kört a rájuk nem merőleges pontkörrel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$B((*^{1,3})^{-1}\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{d}, \mathbf{c}) = -\frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}}{\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4}, \quad B((*^{1,3})^{-1}\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}}{\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4},$$

$$B((*^{1,3})^{-1}\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{a}) = -\frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4}.$$

Vagyis a szorzatok eredményéből, és a $\mathrm{sgn}(B(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ és az $\mathrm{sgn}(B(\mathbf{c}, \mathbf{d}))$ előjelek alapján meg tudjuk mondani bármely két kôrről, hogy azonos vagy ellentétes irányításúak.

A feladat utáni megfigyelésekből kiindulva meggondolható, hogy egy pontkör irányításának megváltoztatásakor hogyan változik a körök irányítása, és hogyan változik a $*$ képlet által megadott koszinusz értéke.

Irodalomjegyzék

[1] Artin, Emil: *Geometric Algebra*. Interscience Publishers, New York, 1957

[2] Berger, Marcel: *Geometry*. Springer, Berlin, 1994-1996.

[3] Coxeter, Harold Scott Macdonald: *A geometriák alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[4] Freud Róbert: *Lineáris algebra*. ELTE Eötvös Könyvkiadó, Budapest, 2009.

[5] Gohberg, Lancaster, Rodman; Israel, Peter, Leiba: *Indefinite Linear Algebra and Applications*. Springer Science & Business Media, 2006.

[6] Greub, Werner H.: *Multilinear algebra*. Springer, Berlin, 1967.

[7] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[8] Hilbert, Stefan; Cohn-Vossen, David: *Szemléletes geometria*. Gondolat, Budapest, 1982.

[9] Jaglom, I. M. : *Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria*. Gondolat, Budapest, 1985.

[10] Praszolov, V. V.: *Lineáris algebra*. Typotex, Budapest, 2005.

[11] Reiman István: *Geometria és határterületei*. Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., Kisújszállás, 1999.