Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nevezetes determinánsok, nevezetes determinánstételek

Szakdolgozat

Készítette:
Józsa Mónika
Matematika BSc Tanár

Témavezető:
Ágoston István
egyetemi docens

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A dolgozatom témája a nevezetes determinánsok, nevezetes determinánstételek. Nagyon sok érdekes determináns létezik, ilyen például a Hesse-determináns, Jacobi-determináns, Scholtz-Hunyady-féle determináns, stb. A determinánsok közül néhányat emeltem ki, és ezek köré szerveztem a munkámat.

A dolgozatomat négy nagyobb egységre bontottam. Az első részben egy rövid történeti áttekintés olvasható, ahol megtudhatjuk, hogy a determináns fogalma mikor jelent meg először.

A második részben főleg a rezultánssal foglalkozom, ennek a használatával, majd a rezultáns és a determináns kapcsolatával. Ebben a fejezetben két kidolgozott példa is szerepel, ami a könnyebb megértést segíti.

A Vandermonde-determináns az egyetemi tanulmányaim alatt már előfordult, ezért erre csak érintőlegesen térek ki. A harmadik fejezet a Vandermonde-determináns néhány alkalmazásáról szól, pontosabban a ciklikus determinánsról, az általánosított Vandermonde-determinánsról és a hiperfaktoriálisról.

Az utolsó fejezetben négy olyan személyt említettem meg, amelyek nevéhez fűződik determináns. Röviden ismertettem pályafutásukat, kimondtam a róluk elnevezett tételeket, és példákat is mutattam ezekre.

1. fejezet

Történelmi áttekintés

A determináns fogalmának megjelenése az 1600-as évek végére tehető.
Leibnitz megírta egy De L'Hospital-nak címzett levelében, hogyan kell többismeretlenes elsőfokú egyenletrendszert megoldani. Az együtthatók jelölésére kettős indexeket vezetett be. Ez a jelölés nem ment át a köztudatba, de az általa készített kifejezéseket nevezzük ma determinánsoknak.
1750-ben Cramer leírta egyik munkája függelékében, hogyan kell n ismeretlenes egyenletrendszert megoldani. Ezt az eljárást Cramer-féle szabálynak hívjuk, ez ugyanaz az eljárás, amit ma is alkalmazunk, ezért a determinánsok megalapítójának Cramert kell tekinteni.
A determináns első, egyértelmű jelölése Vandermonde-tól származik, ez 1771-ben jelent meg. Gauss munkáiban sok determinánstétel szerepelt, de a jelölést nem használta. A determináns elnevezés is tőle származik.
Cauchy 1812-ben foglalkozik a determinánsokkal. A determinánst a_{nn}-nek jelöli, beszél sorokról és oszlopokról, a főátlóban lévő elemeket elnevezi főelemeknek, a determinánsok segítségével megoldja a lineáris egyenletrendszert, megállapítja a determinánsok szorzási tételét. 1821-ben és 1847-ben még visszatér a determinánsokra, 1847-ben a determinánsok elméletének összegzését közölte.
A The theory of determinants in the historical order of development[1] című irodalomban részletesebb leírás olvasható a determináns fogalmának történeti hátteréről.

2. fejezet

A rezultáns

2.1. A rezultáns fogalma

Ebben a fejezetben két egyenlet közös gyökeinek problémájával foglalkozunk.

Az egyetemi tanulmányaink során megtanultuk, hogy két polinom közös gyökeit úgy kereshetjük meg, hogy meghatározzuk a kitüntetett közös osztójukat, amiből leolvashatóak a közös gyökök.

Tegyük fel, hogy a polinomok együtthatói egy paramétertől függenek, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy mely paraméterértékek azok, amelyekre a két egyenletnek lesz közös gyöke. Az euklideszi algoritmust nehéz lenne elvégezni, ezért az a célunk, hogy olyan képletet írjunk fel a polinomok együtthatói segítségével, amelyből el tudjuk dönteni, hogy a polinomoknak van e közös gyöke.

Ezen képlet felírásához felhasználjuk a szimmetrikus polinomokat. A képlet felírása előtt ismételjük át, hogy mely polinomokat nevezzük szimmetrikus polinomoknak, és mit mond ki a szimmetrikus polinomok alaptétele.

A továbbiakban R mindig kommutatív, egységelemes és nullosztómentes gyűrűt fog jelölni.

2.1.1. Definíció. Azokat az $f \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomokat nevezzük szimmetrikus polinomoknak, amelyek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ határozatlanok tetszőleges permutációja esetén is ugyanazok maradnak.

2.1.2. Megjegyzés. Az $x_1x_2+x_2x_1$ szimmetrikus polinom, míg a $x_1x_2-x_2x_1$ polinom nem az.

Fontos megemlíteni az elemi szimmetrikus kifejezések fogalmát, amelyek olyan egyszerű szimmetrikus polinomok, amelyek segítségével minden szimmetrikus polinomot ki lehet fejezni egyértelműen. Nézzük meg pontosan, hogy épülnek fel ezek az elemi szimmetrikus polinomok.

2.1.3. Definíció. Az $x_1, ..., x_n$ határozatlanú, k-adik elemi szimmetrikus polinom úgy keletkezik, hogy az $x_1, ..., x_n$ közül kiválasztunk k darabot az összes lehetséges módon, a kiválasztott elemeket összeszorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk.
Erre a polinomra az $s_k(x_1, ..., x_n)$ jelölést használjuk, ahol $1 \leq k \leq n$. Nézzünk néhány konkrét elemi szimmetrikus polinomot:

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ \vdots \\ s_n = x_1x_2 \ldots x_n \end{cases} \tag{1}$$

Minden szimmetrikus polinom felírható elemi szimmetrikus kifejezések polinomjaként. A szimmetrikus polinomok alaptétele ezt mondja ki:

2.1.4. Tétel (Szimmetrikus polinomok alaptétele)**.** *Legyen R gyűrű. Ekkor minden $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ szimmetrikus polinom egyértelműen fölírható az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Ez azt jelenti, hogy létezik pontosan egy $F \in R[y_1, \ldots, y_n]$ polinom, melyre*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F(s_1, \ldots, s_n).$$

A F együtthatói a f együtthatóiból összeadás és kivonás segítségével kaphatók.

A polinom gyökeinek szimmetrikus kifejezései felírhatók a polinom együtthatóinak segítségével. Ezek a következőképpen néznek ki:

$$s_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \; s_2 = \frac{a_2}{a_0}, \; s_3 = -\frac{a_3}{a_0}, \; \ldots, \; s_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \tag{2}$$

Térjünk vissza két egyenlet közös gyökének problémájára. Induljunk ki az $f(x)$ és $g(x)$ tetszőleges polinomból, amelyek a következő alakúak:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) = 0 \tag{3}$$

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = b_0(x - \beta_1) \ldots (x - \beta_m) = 0 \tag{4}$$

Mindkét polinom esetében feltesszük, hogy a főegyüttható nem nulla, vagyis $a_0 \neq 0$ és $b_0 \neq 0$. Az egyenlet gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, illetve $\beta_1, \ldots, \beta_m$.

A (3) és a (4) egyenleteknek akkor és csak akkor van közös gyöke, ha a (3) polinom gyökeit a (4) polinomba behelyettesítve a kapott számok egyike nulla, azaz

$$g(\alpha_1) \cdot g(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot g(\alpha_n) = 0. \tag{5}$$

A szimmetrikus polinomok alaptétele lehetővé teszi, hogy a (5) szorzatot a (3) egyenlet gyökei ismerete nélkül, csak a (3) és a (4) egyenlet együtthatóiból ki tudjuk számítani, hiszen a

$$g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot \ldots \cdot g(x_n) \tag{6}$$

polinom szimmetrikus polinomja az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ határozatlanoknak, ezért az alaptétel szerint felírható (1) alakban elemi szimmetrikus kifejezések polinomjaként. Mivel a (6) szimmetrikus polinomban egyetlen x_k sem lép fel m-nél magasabb kitevővel, ezért csak olyan $s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_n^{k_n}$ tagok léphetnek fel az (1)-nek az $s_1, s_2, \ldots, s_n$ előállításában, amelyekre teljesül, hogy a kitevők összege legfeljebb m. A (2) behelyettesítései után a (6)-ból tört kifejezés lesz, ezért a tört elkerülése érdekében célszerű a következő kifejezést tekinteni:

$$R(f, g) = a_0^m g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_n) \tag{7}$$

Ezt nevezzük az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok rezultánsának.

A $g(x)$ polinom a (4) alatti felbontását tekintve a következőképpen is felírható:

$$\begin{aligned} R(f, g) = a_0^m b_0(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) \ldots (\alpha_1 - \beta_m) \cdot \\ \cdot b_0(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) \ldots (\alpha_2 - \beta_m) \cdot \\ \vdots \qquad\qquad \\ \cdot b_0(\alpha_n - \beta_1)(\alpha_n - \beta_2) \ldots (\alpha_n - \beta_m) = \\ = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j), \end{aligned} \tag{8}$$

ahol

$$\prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j) = (\alpha_i - \beta_1)(\alpha_i - \beta_2) \ldots (\alpha_i - \beta_j),$$

míg

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j) = \prod_{j=1}^{m} (\alpha_1 - \beta_j) \cdot \prod_{j=1}^{m} (\alpha_2 - \beta_j) \cdot \prod_{j=1}^{m} (\alpha_m - \beta_j).$$

A rezultáns eredeti alakjában mindig az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeit helyettesítettük a $g(x)$ polinomba, majd a kapott mennyiségeket összeszoroztuk. Most cseréljük fel a sorrendet, és a $g(x) = 0$ egyenlet gyökeit helyettesítsük az $f(x)$ polinomba:

$$R(g, f) = b_0^n a_0^m \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) = b_0^n f(\beta_1) \dots f(\beta_m) = (-1)^{mn} R(f, g) \quad (9)$$

Észrevehetjük, hogy a rezultáns értéke nem függ a két polinom sorrendjétől, $R(g, f)$ legfeljebb előjelben különbözik $R(f, g)$-től. Ebből az is következik, hogy $R(g, f)$ akkor és csak akkor nulla, ha $R(f, g)$ is az. Ez nem lehet másként, hiszen gondoljunk arra, ha két egyenletnek van közös gyöke, akkor ez nem függhet attól, hogy a két egyenletet milyen sorrendben veszem.
Ha a (3) és (4) polinomoknak van közös zérushelye, akkor az (5) szorzat valamelyik tényezője nulla, ezért $R(f, g) = 0$. Ez az állítás megfordítható, ugyanis az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok kezdőegyütthatói közül legalább az egyik nem zérus, akkor a (7) és a (9) alapján az következik, hogy van közös zérushelye a két polinomnak, vagyis $g(\alpha_1), \dots, g(\alpha_n)$, vagy $f(\beta_1), \dots, f(\beta_m)$ számok egyike zérus.
Ezeket a tulajdonságokat fogalmazzuk meg egy tételben is:

2.1.5. Tétel. *Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok rezultánsa a két polinom együtthatóiból felépülő olyan racionális kifejezés, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: ha a két polinomnak van közös zérushelye, akkor a rezultáns értéke nulla. Ha a rezultáns értéke nulla, és legalább az egyik polinom kezdőegyütthatója nem nulla (a_0 vagy b_0), akkor a két polinomnak van közös zérushelye.*

Határozzuk meg az általános másodfokú polinomok rezultánsát (7) alapján. Az általános polinomok a következőképpen néznek ki:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^2 + a_1x + a_2 \\ g(x) &= b_0x^2 + b_1x + b_2 \end{aligned} \quad (10)$$

A (7) alatti kifejezésbe helyettesítsük be az $f(x)$ polinom gyökeit, egy háromtényezős szorzatot kaptunk. Bontsuk fel a zárójeleket, és végezzük el a lehetséges kiemeléseket.

Legyen az α_1, α_2 az f polinom gyökei. Ekkor

$$R(f, g) = a_0^2 g(\alpha_1) g(\alpha_2) = a_0^2 (b_0\alpha_1^2 + b_1\alpha_1 + b_2)(b_0\alpha_2^2 + b_1\alpha_2 + b_2) =$$

$$= a_0^2b_0^2\alpha_1^2\alpha_2^2 + a_0^2b_1\alpha_1^2\alpha_2 + a_0^2b_0\alpha_1^2b_2 + a_0^2b_0b_1\alpha_1\alpha_2^2 + a_0^2b_1^2\alpha_1\alpha_2 + a_0^2b_1b_2\alpha_1 + \\ + a_0^2b_0b_2\alpha_2^2 + a_0^2b_1b_2\alpha_2 + a_0^2b_2^2 =$$

$$= a_0^2b_0^2\alpha_1^2\alpha_2^2 + a_0^2b_0b_1\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) + a_0^2b_0b_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + a_0^2b_1b_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ + a_0^2b_1^2\alpha_1\alpha_2 + a_0^2b_2^2.$$

Ismerjük az $a_0(\alpha_1 + \alpha_2) = -a_1$, $a_0\alpha_1\alpha_2 = a_2$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2$ összefüggéseket, és ezeket visszahelyettesítve az előző képletbe a következő eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} R(f,g) &= a_2^2b_0^2 - b_0b_1a_1a_2 + (a_1^2 - 2a_0a_2)b_0b_2 - a_0a_1b_1b_2 + a_0a_2b_1^2 + a_0^2b_2^2 = \\ &= (a_0b_2 - a_2b_0)^2 + (a_1b_0 - a_0b_1)(a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned} \tag{11}$$

2.2. A rezultáns determinánsalakja

Az f és g rezultánsát meg lehet adni egy $((m+n)\times(m+n))$-es determináns alakban is , ami a következőképpen készíthető el. Az első sorba az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ együtthatókat írjuk, majd csupa nullákat. A második sor első eleme nulla, ezután jönnek sorban a (3) polinom együtthatói, majd ismét csupa nulla. A harmadik sor elején már két nulla van, ezeket a lépéseket addig ismételjük, amíg az m-edik sorban a_n lesz a legutolsó elem. Ezt az eljárást a maradék n sorban elvégezzük a g polinom együtthatóival.

Példa egy $(2+3)\times(2+3)$-as determinánsra ($m = 2$ és $n = 3$):

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Nézzük meg általánosan, hogy néz ki az $(m+n) \times (m+n)$-es determináns:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_m \end{vmatrix} \tag{12}$$

2.2.1. Tétel. *Ha a* (3) *és* (4) *egyenleteknek van közös gyökük, akkor a* (12) *determináns értéke zérus. Ha a* (12) *determináns értéke zérus, akkor vagy* $a_0 = b_0 = 0$ *teljesül, vagy van közös gyökük a* (3) *és* (4) *egyenleteknek.*

Bizonyítás. Induljunk ki abból a kérdésből, hogy a (3) és (4) egyenleteknek van e közös gyöke. Tegyük fel, hogy van, ez legyen $x = \alpha$. Ezt a gyököt helyettesítsük be a (3) és (4) egyenletekbe. Ekkor

$$f(x) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0,$$

$$g(x) = b_0\alpha^m + b_1\alpha^{m-1} + \ldots + b_{m-1}\alpha + b_m = 0.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet rendre $\alpha^{m-1}, \alpha^{m-2}, \ldots, \alpha, 1$, majd az alsó egyenletet $\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \ldots, \alpha, 1$ számokkal. Így $m+n$ egyenletet kaptunk. Úgy írjuk fel ezeket az egyenleteket, hogy az α ugyanazon hatványai egymás alá kerüljenek:

$$\begin{array}{l} a_0\alpha^{n+m-1} + a_1\alpha^{n+m-2} + \ldots + a_n\alpha^{m-1} \qquad\qquad\qquad = 0 \\ \qquad\qquad\quad a_0\alpha^{n+m-2} + \ldots + a_{n-1}\alpha^{m-1} + a_n\alpha^{m-2} = 0 \\ \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ b_0\alpha^{n+m-1} + b_1\alpha^{n+m-2} + \ldots + b_m\alpha^{n-1} = 0 \\ \qquad\qquad\quad b_0\alpha^{n+m-2} + \ldots + b_{m-1}\alpha^{n-1} + b_m\alpha^{n-2} = 0 \\ \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \end{array}$$

Tekintsük ezt az egyenletrendszert olyan homogén lineáris egyenletrendszernek, amelyben $\alpha^{n+m-1}, \alpha^{n+m-2}, \ldots, \alpha, 1$ helyén az $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$ ismeretlenek állnak. Az egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Az $x_1 = \alpha^{n+m-1}, x_2 = \alpha^{n+m-2}, \ldots, x_{n+m} = 1$ ilyen megoldás. Az egyenletrendszer determinánsának értéke nulla, ezért hogy a (3) és (4) egyenleteknek legyen közös gyöke szükséges feltétele, hogy a (12) determináns nulla legyen.

A megfordításhoz most bebizonyítjuk, hogy a (12) determináns azonos a (7) pontban leírt $f(x)$ és $g(x)$ polinomok rezultánsával.

A bizonyításhoz a teljes indukció módszerét alkalmazzuk.
$n = 0$ esetén a fenti állítás nyilvánvalóan igaz, hiszen a (3) polinomban az $a_1, a_2, \ldots$ együtthatók és a gyökök nem léteznek, csupán az a_0 konstans. Továbbá a (12) determináns olyan m-edrendű determináns lesz, amelynek főátlójában csupa a_0 elem áll, az összes többi elem nulla. Ebből az is következik, hogy a (7) értéke is a_0^m lesz ebben az esetben.

Most legyen $n > 0$.
Tegyük fel, hogy a bizonyítandó állítás már az $(n-1)$-edfokú

$$f^*(x) = a_0(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n-1}) = a_0x^{n-1}+a_1^*x^{n-2}+a_2^*x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}^* \quad (13)$$

polinom esetében már igazolt, vagyis a következő teljesül az $(m+n-1)$-edrendű determinánsra:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1^* & \ldots & a_{n-1}^* & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{n-2}^* & a_{n-1}^* & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ b_0 & b_1 & \ldots & & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & & b_{m-1} & b_m & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m \end{vmatrix} = a_0^m g(\alpha_1)\ldots g(\alpha_{n-1}) \quad (14)$$

Az $f(x) = f^*(x)(x-\alpha_n)$ azonosságból a (3) és a (13) polinom együtthatói között a következő összefüggéseket vehetjük észre:

$$a_1 = a_1^* - a_0\alpha_n,\ a_2 = a_2^* - a_1^*\alpha_n,\ \ldots,\ a_{n-1} = a_{n-1}^* - a_{n-2}^*\alpha_n,\ a_n = -a_{n-1}^*\alpha_n.$$

Ezek alapján a (12) determináns így írható át:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1^* - a_0\alpha_n & a_2^* - a_1\alpha_n & \ldots & -a_{n-1}^*\alpha_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1^* - a_0\alpha_n & \ldots & & -a_{n-1}^*\alpha_n & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-1} & b_m & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & & & \ldots & b_m \end{vmatrix}$$

Alakítsuk át ezt a determinánst. Az első oszlop α_n-szeresét adjuk hozzá a második oszlophoz, majd az új determináns második oszlopának α_n-szeresét adjuk hozzá a harmadikhoz, és így tovább. $m+n-1$ számú lépés után az átalakított determináns első m sora megegyezik a (14) determináns első m sorával. Az utolsó n sor a következő lesz:

$$\begin{array}{llllllll}
b_0 & b_0\alpha_n + b_1 & b_0\alpha_n^2 + b_1\alpha_n + b_2 & \ldots\ldots & g(\alpha_n) & \alpha_n g(\alpha_n) & \ldots & \alpha_n^{n-1} g(\alpha_n) \\
0 & b_0 & b_0\alpha_n + b_1 & \ldots\ldots & & g(\alpha_n) & \ldots & \alpha_n^{n-2} g(\alpha_n) \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & b_0 \ldots & & & & g(\alpha_n)
\end{array}$$

Az utolsó sor kivételével most mindegyik sorból vonjuk le az alatta levő sor α_n szeresét. A sorok most így néznek ki az átalakítás után:

$$\begin{array}{lllllllll}
b_0 & b_1 & & \ldots & b_n & 0 & & \ldots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} & b_n & & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & 0 & & \ldots & b_0 & b_0\alpha_n + b_1 & \ldots & g(\alpha_n) &
\end{array}$$

Fejtsük ki a determinánst az utolsó oszlop szerint, ekkor azt a determináns értéket kapjuk eredményül, amit be akartunk bizonyítani:

$$g(\alpha_n) \cdot a_0^m g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_{n-1}) = a_0^m g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_n)$$

Most nézzünk két feladatot.

Példa. *(Szele Tibor: Bevezetés az algebrába, 243. oldal 2. feladat)* Állapítsuk meg a rezultáns determináns alakjából, hogy van-e közös gyökük az alábbi egyenleteknek:

$$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0,$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Megoldás. Első lépésként írjuk fel az adott egyenletek együtthatóiból a rezultáns determináns alakját. Mivel az első egyenlet harmadfokú, ezért az $n = 3$ lesz, a második egyenletből pedig az következik, hogy az $m = 2$.
Az együtthatók pedig a következőek: $a_0 = 1,\ a_1 = -4,\ a_2 = 3,\ a_3 = 2,$
$b_0 = 1,\ b_1 = -3,\ b_2 = 2.$

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Miután felírtuk a determináns alakot, határozzuk meg az értékét. Első oszlop szerinti kifejtést alkalmazzunk egészen addig, amíg egy 2×2-es determinánshoz nem jutunk. A kifejtés menetét az egyetemen tanultuk, ezért ezt ismertnek tekintem, ennek a leírásától eltekintek.

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$-4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 12 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 16 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$-12 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 4 - 12 \cdot 4 + 9 \cdot 12 + 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 12 + 16 \cdot 4 - 12 \cdot 12 -$$

$$-4 \cdot (-4) - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 0$$

Mivel a rezultáns értéke nulla, ezért a két egyenletnek van közös gyöke.

A rezultáns arra is alkalmas, hogy többismeretlenes egyenletrendszereket egyismeretlenesre vezessünk vissza. Nézzünk erre is egy példát.

Példa. *(Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, 125. oldal 3.7.12. gyakorlat)* A rezultáns módszerével vezessük vissza az alábbi egyenletrendszert egyismeretlenes egyenletre, és oldjuk meg C fölött.

$$(x-1) \cdot y^2 + (x+1) \cdot y - 2 = 0$$

$$(x-1) \cdot y^2 + x \cdot y - 1 = 0$$

Megoldás. Mindkét egyenlet bal oldalát y polinomjának képzeljük, majd írjuk fel az egyenletek rezultánsát.
A feladat tulajdonképpen a két polinom közös gyökeinek a meghatározása. Először meghatározzuk, hogy mely x értékekre lesz megoldása a polinomoknak, majd a közös x értékeknél vizsgáljuk, hogy mely y értékek a megfelelőek.

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} x-1 & x+1 & -2 & 0 \\ 0 & x-1 & x+1 & -2 \\ x-1 & x & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot \begin{vmatrix} x-1 & x+1 & -2 \\ x & -1 & 0 \\ x-1 & x & -1 \end{vmatrix} + (x-1)\cdot \begin{vmatrix} x+1 & -2 & 0 \\ x-1 & x+1 & -2 \\ x-1 & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot [(x-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} - x\cdot \begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ x & -1 \end{vmatrix} + (x+1)\cdot \begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}]+$$

$$+(x-1)\cdot [(x+1)\cdot \begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ x & -1 \end{vmatrix} - (x-1)\cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} + (x-1)\cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ x+1 & -2 \end{vmatrix}] =$$

$$= (x-1)\cdot [(x-1)\cdot 1 - x\cdot (x-1) + (x+1)\cdot (-2)]+$$

$$+(x-1)\cdot [(x+1)\cdot (x-1) - (x-1)\cdot 2 + (x-1)\cdot 4] =$$

$$= (x-1)\cdot (-x^2-3) + (x-1)\cdot (x^2+2x-3)$$

A zárójelek felbontása után vonjuk össze az egynemű tagokat, majd alakítsuk szorzattá a másodfokú egyenletet. Ezek után a következőt kapjuk:

$$2x^2 - 8x + 6 = 2\cdot (x-3)\cdot (x-1)$$

A rezultáns pontosan akkor nulla, ha mindkét főegyüttható nulla, vagy ha a két polinomnak van közös gyöke.

Vizsgáljuk meg a főegyütthatókat. Az $x-1$ akkor nulla, ha az $x=1$. Ha az eredeti polinomokba az x helyére behelyettesítjük az 1-et, akkor láthatjuk, erre az értékre van megoldása az egyenletrendszernek, ez pedig az (1,1) számpár.

Nézzük meg, hogy az egyenletrendszernek van-e több megoldása. Ehhez szükségünk van az $R(f,g)$ másodfokú polinom gyöktényezős alakjára. Ennek a másodfokú egyenletnek két gyöke van: a 3 és az 1. Az 1-et már vizsgáltuk, ezért most csak a 3-mal foglalkozunk. Az eredeti polinomokba behelyettesítve a 3-at, majd megoldva a másodfokú egyenleteket azt láthatjuk, hogy a két egyenletnek nincs közös gyöke $x=3$ esetén. Tehát csak egy megoldása van az egyenletrendszernek: az (1,1) számpár.

3. fejezet

A Vandermonde-determináns és alkalmazásai

3.1. A Vandermonde-determináns

A Vandermonde-determináns egy speciális típusú determináns, amely a következő alakú:
Az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ elemek által generált Vandermonde-determináns soraiban az elemek 0-adik,első,...,$(m-1)$-edik hatványai szerepelnek.
Nézzük pontosan a tételt:

3.1.1. Tétel. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $m \in N$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$. Ekkor*

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_m) = det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = \prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}^2,\ i>j} (a_i - a_j)$$

Példaként írjuk fel a 3×3-as Vandermonde-determinánst:

$$V(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Bizonyítás. Induljunk ki a Vandermonde-determináns $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{m-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \ldots & a_m^{m-1} \end{vmatrix}$ alakjából. Az utolsó oszlopból indulva vonjuk ki minden oszlopból az őt meg-előző oszlop a_1-szeresét egészen a második oszlopig. Vagyis:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_1 & a_1^2 - a_1^2 & \dots & a_1^{m-1} - a_1 a_1^{m-2} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{m-1} - a_1 a_2^{m-2} \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_3^{m-1} - a_1 a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_m - a_1 & a_m^2 - a_1 a_m & \dots & a_m^{m-1} - a_1 a_m^{m-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{m-1} - a_1 a_2^{m-2} \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_3^{m-1} - a_1 a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_m - a_1 & a_m^2 - a_1 a_m & \dots & a_m^{m-1} - a_1 a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

A következő lépésben vonjuk le minden sorból az első sort. Ezzel a lépéssel az első oszlop első elemén kívül minden elem nullára változik, a többi elem pedig változatlan marad. A második sorból kiemelhetjük a $a_2 - a_1$-et, a harmadik sorból a $a_3 - a_1$-et, így tovább, végül az m-edik sorból az $a_m - a_1$-et. Ezzel a következő alakra jutottunk:

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_m - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_2^{m-2} \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & a_3^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & a_m & \dots & a_m^{m-2} \end{vmatrix}$$

Ezzel a módszerrel egy eggyel kisebb rendű Vandermonde-determinánsra jutottunk. A kisebb rendű determinánsokra ezt az eljárást újra és újra alkalmazva adódik a tétel.

A Vandermonde-determinánsnak számos alkalmazása van, ezek közül a ciklikus determinánsra térek ki.

3.2. A ciklikus determináns

A ciklikus determinánst úgy írhatjuk fel, hogy az első sora egy tetszőleges sorrendben tartalmazza az elemeket, ez a sorrend legyen például az $a_1, a_2, \dots, a_m$. A determináns többi sorait úgy kapjuk meg, hogy mindig egy elemmel hátrább kezdjük el felírni az előző sor elemeit. Vagyis ha az első sorban az $a_1, a_2, \dots, a_m$ elemek ilyen sorrendben követik egymást, akkor a második sor első eleme a_m lesz, a második elem az a_1, ezt követik az

$a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}$ elemek.

Nézzük a ciklikus determinánst formálisan:

$$C_m = C_m(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ a_m & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

Ellenkező értelmű leolvasási rendszerrel kapott determináns előjeltől eltekintve megegyezik a (13)-os pontban leírt ciklikus determinánssal:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} \end{vmatrix} \tag{14}$$

A továbbiakban a (13)-os pontban ismertetett ciklikus determinánst alkalmazzuk.

A következőkben nézzük meg, hogyan lehet a C_m determináns értékét meghatározni.

3.2.1. Tétel. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $m \in N$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$. Legyenek $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m \in C$ egymástól különböző m-edik egységgyökök. Ekkor*

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_m) = f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\ldots f(\epsilon_m) = \prod_{k=1}^{m}(a_1 + a_2\epsilon_k + \ldots + a_m\epsilon_k^{m-1}),$$

ahol $\epsilon_k^m = 1$ $(k = 1,2, \ldots, m)$ és $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_mx^{m-1}$.

Bizonyítás. Legyenek $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m$ egymástól különböző n-edik egységgyökök. Írjuk fel az ezekhez tartozó Vandermonde-determináns transzponáltját:

$$V_m^T = V_m^T(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \ldots & \epsilon_m \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \epsilon_3^2 & \ldots & \epsilon_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_1^{m-1} & \epsilon_2^{m-1} & \epsilon_3^{m-1} & \ldots & \epsilon_m^{m-1} \end{vmatrix} \tag{15}$$

Ennek a Vandermonde-determinánsnak az értéke zérustól különböző, hiszen a $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m$ számok is különbözők.
Számítsuk ki a $C_m V_m^T$ mátrixszorzatot a szorzástétel értelmében:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ a_m & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_m & a_1 & \ldots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \ldots & \epsilon_m \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \epsilon_3^2 & \ldots & \epsilon_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_1^{m-1} & \epsilon_2^{m-1} & \epsilon_3^{m-1} & \ldots & \epsilon_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

A szorzást a következőképpen végezzük. A C_m determináns első sorának elemeit rendre szorozzuk össze a V_m^T determináns megfelelő elemével, majd a szorzatokat adjuk össze. Ugyanezt ismételjük meg a C_m determináns további soraira is.
Példaként nézzük meg $m = 5$-re

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_5 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \epsilon_4 & \epsilon_5 \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \epsilon_3^2 & \epsilon_4^2 & \epsilon_5^2 \\ \epsilon_1^3 & \epsilon_2^3 & \epsilon_3^3 & \epsilon_4^3 & \epsilon_5^3 \\ \epsilon_1^4 & \epsilon_2^4 & \epsilon_3^4 & \epsilon_4^4 & \epsilon_5^4 \end{vmatrix}$$

Írjuk fel példaként a $C_5 V_5^T$ mátrixszorzat harmadik sorának első elemét:

$$a_4 + a_5\epsilon_1 + a_1\epsilon_1^2 + a_2\epsilon_1^3 + a_3\epsilon_1^4$$

Az $C_m V_m^T$ mátrixszorzat i-edik sorának k-adik eleme a következőképpen néz ki az előző példát figyelembe véve:

$$a_{m-i+2} + a_{m-i+3}\epsilon_k + \ldots + a_m\epsilon_k^{i-2} + a_1\epsilon_k^{i-1} + a_2\epsilon_k^{i} + \ldots + a_{n-i+1}\epsilon_k^{n-1}$$

Vegyük észre, hogy minden tagból kiemelhetjük a ϵ_k^{i-1} tényezőt. Kiemelés után egy $(m-1)$-edfokú polinomot kapunk, majd erre felírhatunk egy zárt alakot:

$$\epsilon_k^{i-1}(a_1 + a_2\epsilon_k + a_3\epsilon_k^2 + \ldots + a_n\epsilon_k^{m-1}) = \epsilon_k^{i-1} f(\epsilon_k),$$

ahol $\epsilon_k^m = 1$ és $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_m x^{m-1}$ Az előzőeket felhasználva írjuk fel a $C_m V_m^T$-t:

$$C_m V_m^T = \begin{vmatrix} f(\epsilon_1) & f(\epsilon_2) & \ldots & f(\epsilon_m) \\ \epsilon_1 f(\epsilon_1) & \epsilon_2 f(\epsilon_2) & \ldots & \epsilon_m f(\epsilon_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_1^{m-1} f(\epsilon_1) & \epsilon_2^{m-1} f(\epsilon_2) & \ldots & \epsilon_m^{m-1} f(\epsilon_m) \end{vmatrix}$$

Az oszlopokból rendre kiemelhetjük a következő elemeket: $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \dots, f(\epsilon_m)$. Nézzük meg, hogyan változik a $C_m V_m^T$.

$$C_m V_m^T = f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \dots f(\epsilon_m) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_1^{m-1} & \epsilon_2^{m-1} & \dots & \epsilon_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

A determináns megegyezik a (15)-as pontban ismertetett determinánssal. A bizonyításunk elején kikötöttük, hogy a V_m értéke nem nulla, ezért a

$$C_m V_m = f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \dots f(\epsilon_m) V_m$$

egyenletet V_m-mel egyszerűsítve a tételben leírt képlethez jutunk:

$$C_m = f(\epsilon_1) f(\epsilon_2) \dots f(\epsilon_m).$$

3.3. Az általánosított Vandermonde-determináns

A következő két alfejezet eredményei MacMahon-tól|7| származnak.

Nézzük meg, hogy az általánosított Vandermonde-determináns milyen alakú.
Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_m \in R$, és $P_1, P_2, \dots, P_m \in R[X]$, melyre $deg(P_j) \leq$ $\leq j - 1$ teljesül. Tekintsük az alábbi determinánst:

$$det((P_j(a_i))_{1 \leq i \leq m}^{1 \leq j \leq m}) = \begin{vmatrix} P_1(a_1) & P_2(a_1) & P_3(a_1) & \dots & P_m(a_1) \\ P_1(a_2) & P_2(a_2) & P_3(a_2) & \dots & P_m(a_2) \\ P_1(a_3) & P_2(a_3) & P_3(a_3) & \dots & P_m(a_3) \\ P_1(a_4) & P_2(a_4) & P_3(a_4) & \dots & P_m(a_4) \\ \vdots & & & & \\ P_1(a_m) & P_2(a_m) & P_3(a_m) & \dots & P_m(a_m) \end{vmatrix}.$$

Ezt a determinánst általánosított Vandermonde-determinánsnak nevezzük.

Nézzünk konkrét példát az általánosított Vandermonde-determinánsra. Legyen $P_1 = 1$, $P_2 = x$ és $P_3 = x + 2$. Ekkor

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1 + 2 \\ 1 & a_2 & a_2 + 2 \\ 1 & a_3 & a_3 + 2 \end{vmatrix}$$

A tétel kimondása előtt rögzítek néhány jelölést.
P_j a j-edik polinomot jelöli, a $coeff_j P$ pedig a P polinom x^j együtthatóját.

3.3.1. Tétel. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $m \in N$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$. Minden $j \in \{1,2,\ldots,m\}$-re $P_j \in R[X]$, ahol $deg(P_j) \leq$ $\leq j-1$. Ekkor*

$$det((P_j(a_i))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = \prod_{j=1}^{m} coeff_{j-1}(P_j) \cdot \prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}^2,\ i>j} (a_i - a_j)$$

Ha olyan polinomokat választunk, amelyek főegyütthatója egy, akkor a $(coeff_0(P_1) \cdot coeff_1(P_2) \cdot coeff_2(P_3) \cdot coeff_3(P_4) \cdot \ldots \cdot coeff_{j-1}(P_j))$ szorzat értéke is egy, tehát egy együtthatójú polinomok esetén a fenti tétel egy speciális esetéhez jutunk.

Az általánosított Vandermonde-determináns értékének van egy fontos következménye, ez így hangzik:

3.3.2. Következmény. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $m \in N$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$. Ekkor*

$$det((\prod_{k=1}^{j-1}(a_i - k))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = \prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}^2,\ i>j} (a_i - a_j)$$

A következményben a determináns szerkezete zárt alakban látható, írjuk fel ennek egy másik, áttekinthetőbb alakját.

$$det((\prod_{k=1}^{j-1}(a_i - k))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 - 1 & (a_1-1)(a_1-2) & \ldots \\ 1 & a_2 - 1 & (a_2-1)(a_2-2) & \ldots \\ \vdots & & & \\ 1 & a_m - 1 & (a_m-1)(a_m-2) & \ldots \end{vmatrix}$$

A következő lemmából az általánosított Vandermonde determináns értékére vonatkozó tételt vezetjük le.

3.3.3. Lemma. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $m \in N$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$. Minden $j \in \{1,2,\ldots,m\}$-re $P_j \in R[X]$, ahol $deg(P_j) \leq$ $\leq j-1$. Ekkor*

$$det((P_j(a_i))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = \prod_{j=1}^{m} coeff_{j-1}(P_j) \cdot det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}).$$

A lemmában szereplő $det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m})$ tényező felírható

$$\prod_{(i,j)\leq\{1,2,\ldots,m\}^2,\ i>j} (a_i - a_j)$$

alakban is. Ha ezt a két tagot kicseréljük, akkor a (3.2.3) lemmában, akkor az általánosított Vandermonde-determinánst kapjuk meg. Nézzük a lemma bizonyítását:

Bizonyítás. Minden $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ esetén a P_j polinomot megadhatjuk a következő zárt alakkal:

$$P_j(X) = \sum_{k=0}^{m-1} coeff_k(P_j) \cdot X^k$$

Minden $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ és $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ esetén, ha az X helyére a_i-t írunk, akkor is igaz marad az egyenlőség, továbbá, ha a szorzatban a tényezőket felcseréljük, akkor sem változik az összeg.

$$P_j(a_i) = \sum_{k=0}^{m-1} coeff_k(P_j) \cdot a_i^k = \sum_{k=0}^{m-1} a_i^k \cdot coeff_k(P_j) = \sum_{k=1}^{m} a_i^{k-1} \cdot coeff_{k-1}(P_j)$$

Ha az összeg indexeit 1-gyel növeljük, akkor nem változik az összeg, hiszen ugyanannyi tagnak kell venni az összegét. Ezért:

$$(P_j(a_i))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m} = (a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m} \cdot (coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}. \tag{16}$$

$i > j$ esetén $coeff_{i-1}(P_j) = 0$, ezért $(coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}$ felső háromszögmátrix.
A (16) pontban leírt egyenlet, akkor sem változik, ha vesszük mindkét oldal determinánsát.

$$det((P_j(a_i))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m} \cdot (coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m})$$

Két mátrix szorzatának a determinánsa megegyezik a mátrixok determinánsértékének a szorzatával, ezért:

$$det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m} \cdot (coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) =$$

$$= det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) \cdot det((coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) \tag{17}$$

A determinánsok tulajdonságairól szóló tétel kimondja, hogy a felső háromszögmátrix determinánsának értéke egyenlő a főátlóban lévő elemek szorzatával. Ez formálisan így néz ki:

$$det((coeff_{i-1}(P_j))_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m}) = \prod_{j=1}^{m} coeff_{j-1}(P_j) \tag{18}$$

Ha jobban megnézzük a (17) és a (18) összefüggéseit, akkor észrevehetjük, hogy a (18) jobb oldalán lévő zárt alak megtalálható a (17)-ben is. Amennyiben kicseréljük ezt a zárt alakot a (18) bal oldalán lévő zárt alakkal, akkor éppen a lemmához jutunk:

$$\prod_{j=1}^{m} coeff_{j-1}(P_j) \cdot det((a_i^{j-1})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq m})$$

3.4. A hiperfaktoriális

Jelöljük H-val a hiperfaktoriális függvényt: ez egy $H : N \to N$ függvény, melynél $n \in N$-re

$$H(n) = \prod_{k=0}^{n-1} k!\,.$$

A továbbiakban az általánosított Vandermonde-determináns segítségével bebizonyítjuk a következő tételt, amely a hiperfaktoriális egy oszthatósági tulajdonságáról szól.

3.4.1. Tétel. (MacMahon)
Minden $a \in N$-re, minden $b \in N$-re és minden $c \in N$-re

$$H(b+c)H(c+a)H(a+b)|H(a)H(b)H(c)H(a+b+c)$$

A (3.4.1) tétel bizonyítása előtt nézzünk pár fontos lemmát, amelyet felhasználunk majd a bizonyításban.

3.4.2. Lemma. *Legyen $m \in N$. Ekkor*

$$\prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}^2;\ i>j} (i-j) = H(m).$$

Milyen eredményt kapunk $m = 3$-ra:

$$\prod_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2;\ i>j} (i-j) = H(3) = \prod_{k=0}^{2} k!\,.$$

$$(2-1)\cdot(3-1)\cdot(3-2) = 0!\cdot 1!\cdot 2! = 2.$$

Bizonyítás. *(3.4.2 Lemma)* Induljunk ki a lemma jobb oldalán álló szorzatból. Ha az i és j lehetséges értékeinek halmazát eggyel eltoljuk, akkor nem változik semmi sem, az $i-j$ állandó marad, vagyis:

$$\prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}^2;\ i>j} (i-j) = \prod_{(i,j)\in\{0,1,\ldots,m-1\}^2;\ i>j} (i-j) =$$

Az előző sorban a két futóindexet egy produktum alatt helyeztük el, ezt szedjük ketté:

$$= \prod_{i \in \{0,1,\ldots,m-1\}} \prod_{j \in \{0,1,\ldots,m-1\};\ i>j} (i-j) =$$

$$= \prod_{i \in \{0,1,\ldots,m-1\}} \prod_{j=0}^{i-1} (i-j) = \prod_{i \in \{0,1,\ldots,m-1\}} \prod_{j=1}^{i} j = \prod_{i \in \{0,1,\ldots,m-1\}} i! =$$

Az i-t kicserélve a k-ra elérkeztünk a lemmához:

$$= \prod_{k=0}^{m-1} k! = H(m).$$

3.4.3. Lemma. *Minden $i, j \in N$-re, melyre $i \geq 1$ és $j \geq 1$ teljesül a következő*

$$\binom{a+b+i-1}{a+i-j} = \frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)! \cdot (b+j-1)!} \cdot \prod_{k=1}^{j-1} (a+i-k).$$

Bizonyítás. *Triviális számolás.*

Nézzünk erre is példát a következő értékekkel: $i = 3$, $j = 2$, $a = 2$, $b = 1$

$$\binom{2+1+3-1}{2+3-2} = \frac{(2+1+3-1)!}{(2+3-1)! \cdot (1+2-1)!} \cdot \prod_{k=1}^{1} (2+3-k)$$

$$10 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{4! \cdot 2!} \cdot 4 = 10$$

3.4.4. Lemma. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és legyen $u \in N$, és $a_{i,j} \in$ $\in R$ minden $(i,j) \in \{1,2,\ldots,u\}^2$. Legyen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_u \in R$ és $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_u \in$ $\in R$. Ekkor*

$$det\left((\alpha_i a_{i,j} \beta_j)_{1 \leq i \leq u}^{1 \leq j \leq u}\right) = \prod_{i=1}^{u} \alpha_i \cdot \prod_{i=1}^{u} \beta_i \cdot det\left((a_{i,j})_{1 \leq i \leq u}^{1 \leq j \leq u}\right).$$

Bizonyítás.

$$(\alpha_i a_{i,j} \beta_j)_{1 \leq i \leq u}^{1 \leq j \leq u} = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_u) \cdot (a_{i,j})_{1 \leq i \leq u}^{1 \leq j \leq u} \cdot diag(\beta_1, \ldots, \beta_u)$$

Vegyük mindkét oldal determinánsát:

$$det\left((\alpha_i a_{i,j} \beta_j)_{1 \leq i \leq u}^{1 \leq j \leq u}\right) = det\left(diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_u) \cdot (a_{i,j})_{1 \leq i \leq u}^{1 \leq j \leq u} \cdot diag(\beta_1, \ldots, \beta_u)\right) =$$

A szorzat tagjainak külön-külön vegyük a determinánsát:

$$= det(diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_u)) \cdot det\left((a_{i,j})_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\right) \cdot det(diag(\beta_1,\ldots,\beta_u)),$$

ami éppen

$$= \prod_{i=1}^{u} \alpha_i \cdot det\left((a_{i,j})_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\right) \cdot \prod_{i=1}^{u} \beta_i = det\left((\alpha_i a_{i,j} \beta_j)_{1\le i\le u}^{1\le j\le u}\right).$$

Most térjünk rá a (3.4.1)-es tétel bizonyítására.

Bizonyítás. A tételben szerepel a $H(a+b+c)$ tényező, első lépésként ezt írjuk át más alakúra.
Mivel $H(n) = \prod_{k=0}^{n-1} k!$, ezért

$$H(a+b+c) = \prod_{k=0}^{a+b+c-1} k!$$

A zárt szorzatot két tényezős szorzattá alakíthatjuk, ahol az egyik tényező a $H(a+b)$, ami szintén a tételben szerepel. Ekkor a fent említett kifejezés megegyezik a következő kifejezéssel:

$$\prod_{k=0}^{a+b-1} k! \cdot \prod_{k=a+b}^{a+b+c-1} k! = H(a+b) \cdot \prod_{k=a+b}^{a+b+c-1} k!$$

Végül k helyére írjuk be az $(a+b+i-1)$-et.

$$H(a+b) \cdot \prod_{i=1}^{c} (a+b+i-1)! \,. \tag{19}$$

Most a $H(b+c)$-t írjuk át a $H(n)$ függvény segítségével, majd írjuk át kéttényezős szorzatalakba. Itt is észrevehetjük, hogy az egyik tényező a tételben is előfordul:

$$H(b+c) = \prod_{k=0}^{b+c-1} k! = \prod_{k=0}^{b-1} k! \cdot \prod_{k=b}^{b+c-1} k! = H(b) \cdot \prod_{k=b}^{b+c-1} k! =$$

A k helyére most a $(b+i-1)$-et írjuk, a következőt eredményezi:

$$= H(b) \cdot \prod_{i=1}^{c} (b+i-1)! \,. \tag{20}$$

Ugyanezeket a lépéseket végezzük el $H(c+a)$-n is, de itt a k helyére $(a+i-$ $-1)$-et helyettesítsünk. Tehát:

$$H(c+a) = \prod_{k=0}^{c+a-1} k! = \prod_{k=0}^{a-1} k! \cdot \prod_{k=a}^{c+a-1} k! = H(a) \cdot \prod_{k=a}^{c+a-1} k! =$$

$$= H(a) \cdot \prod_{i=1}^{c} (a+i-1)!\,. \tag{21}$$

A bizonyítás második részében írjuk fel azt a $c \times c$ determinánst, amelynek (i,j)-edik eleme $\binom{a+b+i-1}{a+i-j}$ Vagyis:

$$det\left(\left(\binom{a+b+i-1}{a+i-j}\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}\right)$$

A (3.4.3) lemma alapján az előző determináns megegyezik a következővel:

$$det\left(\left(\frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!\cdot(b+j-1)!} \cdot \prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k)\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}\right)$$

A kéttényezős szorzatot alakítsuk háromtényezős szorzattá úgy, hogy a tört nevezőjéből emeljük ki a $(b+j-1)!$-t.

$$det\left(\left(\frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!} \cdot \prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k) \cdot \frac{1}{(b+j-1)!}\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}\right) \tag{22}$$

Ennek a háromtényezős szorzatnak a determinánsa megegyezik a (3.4.4)-es lemmában szereplő determinánssal, az $a_{i,j}$, α_i és a β_i rendre a következők:

$$a_{i,j} = \prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k),$$

$$\alpha_i = \frac{(a+b+i-1!)}{(a+i-1)!},$$

$$\beta_i = \frac{1}{(b+i-1)!}.$$

Tehát a (3.4.4)-es lemma értelmében a (22)-es pontban ismertetett determináns átírható ilyen alakúra:

$$\prod_{i=1}^{c}\frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!}\cdot\prod_{i=1}^{c}\frac{1}{(b+i-1)!}\cdot det\left(\left(\prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k)\right)_{1\le i\le c}^{1\le i\le c}\right)$$

A (3.3.2) következmény alapján, alkalmazva az $m=c$ és az $a_i=a+i$ helyettesítéseket:

$$det\left(\left(\prod_{k=1}^{j-1}(a+i-k)\right)_{1\le i\le c}^{1\le i\le c}\right)=\prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,c\}^2;\ i>j}((a+i)-(a+j))=$$

Észrevehetjük, hogy az a-k kiesnek, és éppen a (3.4.2) lemmához jutunk $m=$ $=c$ helyettesítéssel:

$$\prod_{(i,j)\in\{1,2,\ldots,c\}^2;\ i>j}(i-j)=H(c)$$

Az eddigi bizonyításból kiderült a következő:

$$det\left(\left(\binom{a+b+i-1}{a+i-j}\right)_{1\le i\le c}^{1\le i\le c}\right)=\prod_{i=1}^{c}\frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!}\cdot\prod_{i=1}^{c}\frac{1}{(b+i-1)!}\cdot H(c). \tag{23}$$

Most írjuk fel a tételben szereplő oszthatóságot törtalakba, majd a $H(a+$ $+b+c)$, $H(b+c)$, $H(c+a)$ helyére azokat a szorzatokat írjuk, amelyek a (19), (20), és (21)-es pontokban szerepelnek:

$$\frac{H(a)H(b)H(c)H(a+b+c)}{H(b+c)H(c+a)H(a+b)}=$$

$$\frac{H(a)H(b)H(c)H(a+b)\cdot\prod_{i=1}^{c}(a+b+i-1)!}{H(b)\prod_{i=1}^{c}(b+i-1)!\cdot H(a)\prod_{i=1}^{c}(a+i-1)!\cdot H(a+b)}$$

Egyszerűsíthetünk $H(a)$-val, $H(b)$-vel, és $H(a+b)$-vel:

$$=\frac{\prod_{i=1}^{c}(a+b+i-1)!}{\prod_{i=1}^{c}(b+i-1)!\cdot\prod_{i=1}^{c}(a+i-1)!}\cdot H(c)=$$

A törtet szedjük szét kéttényezős szorzatalakba:

$$\frac{\prod_{i=1}^{c}(a+b+i-1)!}{\prod_{i=1}^{c}(a+i-1)!}\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^{c}(b+i-1)!}\cdot H(c)=$$

$$\prod_{i=1}^{c} \frac{(a+b+i-1)!}{(a+i-1)!} \cdot \prod_{i=1}^{c} \frac{1}{(b+i-1)!} \cdot H(c) =$$

Ez pedig a (23)-as összefüggés alapján épp az alábbi determinánssal egyenlő:

$$det\left(\left(\binom{a+b+i-1}{a+i-j}\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}\right)$$

Mivel $\left(\binom{a+b+i-1}{a+i-j}\right)_{1\leq i\leq c}^{1\leq i\leq c}$ egész szám, ezért pont az oszthatóságot adja.

4. fejezet

Egyéb determinánsok és névadóik

4.1. Carl Wilhelm Borchardt

Carl Wilhelm Borchardt (1817. február 22. - 1880. június 27.) német matematikus volt.
Borchardt Berlinben, egy zsidó családban született. Édesapja, Moritz kereskedő volt, édesanyját Emma Heilbornnak hívták. Számos oktatótól tanult, például Julius Plücker-től és Jakob Steiner-től. 1836-ban a berlini egyetemen Lejeune Dirichlet tanította, később a königsbergi egyetemen folytatta tanulmányait. 1848-ban kezdett el a berlini egyetemen tanítani.
Kutatásokat folytatott a számtani-mértani közép területén, együtt dolgozott Gauss-szal és Lagrange-zsal is. 1856 és 1880 között a Crelle által alapított folyóirat szerkesztője volt.
Rüdersdorf-ban halt meg.

Most mondjuk ki a nevéhez kötődő tételt:

4.1.1. Tétel. Borchardt-féle determináns

Ha a $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ *determináns olyan, hogy a mátrix szimmetrikus, és minden sorban az elemek összege nulla, akkor a determináns nulla, és minden előjelezett* $(n-1) \times (n-1)$*-es aldeterminánsa egyenlő.*

Bizonyítás. Először bizonyítsuk be a tétel első felét, vagyis, hogy ha a feltételek teljesülnek, akkor a determináns értéke 0.

Az egyszerűség kedvéért $n = 5$-re végezzük el a bizonyítást. Induljunk ki a következő determinánsból:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Az első oszlophoz adjuk hozzá az összes többi oszlopot. A tétel kimondja, hogy a főátlóban lévő elem mínusz egyszerese az ő sorában lévő elemek összegének – például $a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = -\ a_{11}$ –, ezért ha az első oszlophoz hozzáadjuk a többi oszlopot az első oszlopban csupa nulla elem fog szerepelni.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} + a_{45} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} + a_{52} + a_{53} + a_{54} + a_{55} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + (-\ a_{11}) & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} + (-\ a_{21}) & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} + (-\ a_{31}) & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} + (-\ a_{41}) & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} + (-\ a_{51}) & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Ha az első oszlop szerint kifejtjük, akkor a determináns nulla lesz. Ezzel a tétel első részét bebizonyítottuk.

Nézzük a bizonyítás második részét. A bizonyítás elején definiált determinánsból készítsünk aldeterminánst úgy, hogy az első sort és az első oszlopot elhagyjuk. Ez a következő lesz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Adjuk a 2 indexű sorához a többit. A 2. indexű sorban a következő összegek szerepelnek majd: $a_{22}+a_{32}+a_{42}+a_{52}$, $a_{23}+a_{33}+a_{43}+a_{53}$, $a_{24}+a_{34}+a_{44}+a_{54}$, $a_{25} + a_{35} + a_{45} + a_{55}$.
Tudjuk, hogy az

$$
\begin{aligned}
a_{22} &= -\,(a_{21}+a_{23}+a_{24}+a_{25}) = -\,a_{21} -\, a_{23} -\, a_{24} -\, a_{25},\\
a_{33} &= -\,(a_{31}+a_{32}+a_{34}+a_{35}) = -\,a_{31} -\, a_{32} -\, a_{34} -\, a_{35},\\
a_{44} &= -\,(a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{45}) = -\,a_{41} -\, a_{42} -\, a_{43} -\, a_{45},\\
a_{55} &= -\,(a_{51}+a_{52}+a_{53}+a_{54}) = -\,a_{51} -\, a_{52} -\, a_{53} -\, a_{54},
\end{aligned}
$$

valamint $a_{ik} = a_{ki}$. Ezeket az előző összegek helyébe írva egy új $(n-1)$-edrendű determinánshoz jutunk:

$$
\begin{vmatrix} -\,a_{12} & -\,a_{13} & -\,a_{14} & -\,a_{15} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}
$$

Olyan determinánst kaptunk, ami úgy keletkezett, hogy az első oszlopot és a második sort hagytuk el. Ez nem más, mint az a_{21}-hez tartozó előjelezett aldetermináns.
Tehát $A_{11} = A_{21}$. Az eljárást bármely aldeterminánsra alkalmazva ugyanerre az eredményre jutunk.
Bebizonyítottuk, hogy az összes aldetermináns a megfelelő előjellel véve egyenlők.

Példa. Tekintsük egy olyan 3×3-es determinánst, amelyre az előző tétel feltételei teljesülnek, majd ellenőrizzük le, hogy ennek a determinánsnak mi az értéke, és aldeterminánsok egyenlők e.
A determináns értékét a Sarrus-szabállyal határozzuk meg.

$$
\begin{vmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-\,6) + 24 + 24 + 16 - 54 - 4 = 0
$$

Ezzel a tétel első állítását leellenőriztük, hiszen a determináns értéke nulla.
Írjuk fel az algebrai aldeterminánsokat és számoljuk ki az értékeiket. Láthatjuk, hogy az aldeterminánsok is megegyeznek.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 9 = -10 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 8 = -10$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 8 = -10$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10$$

4.2. Hermann Hankel

Hermann Hankel édesapja Wilhelm Gottlieb Hankel volt, aki Halleban fizikusként dolgozott. Hermann itt kezdte a tanulmányait, de 1849-ben Lipcsébe költöztek. Lipcsében, a Nicolai Gimnáziumban folytatta tanulmányait.
1857-ben beiratkozott a lipcsei egyetemre, ahol matematikát tanult Möbiustól, és fizikát saját édesapjától. Tanulmányait nem fejezte be az egyetemen, de számos másik egyetemre ellátogatott. 1860-ban Göttingenben Riemanntól kezdett el tanulni, a következő évben Berlinben Weierstrass-szal és Kroneckerrel dolgozott együtt. 1862-ben megkapta a doktori címet.
1863-ban Lipcsében kezdett el tanítani, ahol 1867-ben professzornak nevezték ki.
A komplex számok, a függvények elméletén és a matematika történetén dolgozott. Megvizsgálta a Riemann-integrálás elméletét, és újrafogalmazta az ezzel kapcsolatos koncepciókat.

Nézzük, hogy milyen alakú a róla elnevezett determináns.

4.2.1. Definíció. Hankel-féle determináns
A következő n-edrendű determinánst n-edrendű Hankel-féle determinánsnak nevezzük:

$$H_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Képzési módja: Az első sor első eleme a_0, majd az indexek természetes sorban nőnek addig, amíg n elem nem lesz a sorban. A második sor első eleme az első sor második eleme, és itt is természetes sorban nőnek az indexek. Ezt az eljárást ismételjük n soron keresztül. Észrevehetjük, hogy $a_{ik} = a_{ki}$, azaz a mátrix szimmetrikus.

Kezdjük el átalakítani a determinánst, de az általános n-edrendű determináns helyett vizsgáljuk a 3-rendűt:

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

A harmadik sorból vonjuk ki a második sort, majd a másodikból az elsőt, az első sort írjuk le változatlanul:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 - a_0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 \\ a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & a_4 - a_3 \end{vmatrix}$$

A különbségek helyett vezessünk be egy új jelölést: az $a_{i+1} - a_i$ különbséget Δa_i-vel jelöljük, $\Delta a_{i+1} - \Delta a_i$ különbséget $\Delta^2 a_i$-vel stb. Az előző determinánst írjuk át úgy, hogy ezeket a jelöléseket használjuk:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ \Delta a_0 & \Delta a_1 & \Delta a_2 \\ \Delta a_1 & \Delta a_2 & \Delta a_3 \end{vmatrix}$$

Most a harmadik sorból vonjuk ki a másodikat, és az első két sort írjuk le változatlanul:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ \Delta a_0 & \Delta a_1 & \Delta a_2 \\ \Delta^2 a_0 & \Delta^2 a_1 & \Delta^2 a_2 \end{vmatrix}$$

Az előző eljárást ismételjük meg úgy, most sorok helyett oszlopokkal, és végül ezt a determinánst kapjuk:

$$\begin{vmatrix} a_0 & \Delta a_0 & \Delta^2 a_0 \\ \Delta a_0 & \Delta^2 a_0 & \Delta^3 a_0 \\ \Delta^2 a_0 & \Delta^3 a_0 & \Delta^4 a_0 \end{vmatrix}$$

4.2.2. Állítás. *Ha az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozat $n-1$-edrendű számtani sor, akkor $\Delta^n a_0 = \Delta^{n+1} a_0 = \ldots = 0$ és így a H_n a mellékdiagonálisban lévő elemek előjeles szorzata lesz. Tehát*

$$H_n = (-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} (\Delta^{n-1} a_0)^n.$$

Megjegyzés. A Hankel-féle determináns speciális esete a ciklikus determináns.

4.3. Jacques Hadamard

Jacques Hadamard édesapja Amédée Hadamard, 1864-ben feleségül vette Claire Marie Jeanne Picardt. Az édesapa zsidó családból származott, latin és görög nyelvet, nyelvtant, történelmet és földrajzot tanított, az édesanyja pedig magán zongoraórákat adott az otthonukban.
Jacques születése idején Amédée Versailles-ban tanított, de amikor a fiú három éves volt, akkor Párizsba költöztek, mert az édesapa elfogadott egy új munkát a Lycée Charlemagne-ben.
Jacques az iskolát ott kezdte el, ahol az édesapja is tanított. Az első néhány évben minden tantárgyból jó volt, kivéve a matematikát. Volt egy jó matematika tanára, aki visszafordította a matematika felé, amikor ő ötödik osztályos volt.
1875-ben édesapja tanárként hírnevet szerzett, ezért átment a Louis-le-Grandbe, és 1876-tól Jacques is ebbe az iskolába járt. 1882-ben érettségi bizonyítványt szerzett, az első díjat 1883-ban algebrából ítélték meg számára.
1884-ben felvételizett az École Polytechniqu-ra és a École Normale Supérieure-ra. Mindkét iskolában sikeres felvételit tett, ő az École Normale Supérieure-t választotta. Itt Jules Tannery, Hermite, Darboux, Appell, Goursat és Emile Picard tanították. 1888-ban diplomázott le.
Tanárként dolgozott, míg kutatásokat folytatott a doktori munkájához. Tanárként nem becsülték meg, mert a diákjaitól többet követelt, mint amit a képességeik megengedtek.
1892-ben elnyerte a doktori címet. Ugyanebben az évben megnősült, és Bordeaux-ba költözött a feleségével, amikor elvállalt az egyetemen egy előadói állást. Nagyon sok lapnak publikált, amíg Bordeaux-ban élt.
1898-ban írt a kétdimenziós geometria megjelenéséről, majd 1901-ben a háromdimenziós geometriáról.
A háború alatt nagyos súlyos csapások érték, a háborúban életét vesztette mindhárom fia. 1962-ben, amikor 96 éves volt, a fiúunokáját is megölték, ami végleg megölte a lelkét. Ezután már nem mozdult ki otthonából, várta a halálát, ami 1963-ban bekövetkezett.

Mondjuk ki a nevéhez fűződő tétel.

4.3.1. Tétel. Hadamard-féle determinánstétel
A determináns abszolút értéke nem nagyobb, mint az egyes sorokban lévő elemek abszolút értékének a négyzetösszegeinek szorzatából vont négyzetgyök.

Formálisan: $A \in C^{n\times n}$*, ekkor*

$$|detA| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^{n}(|a_{j1}|^2 + \ldots + |a_{jn}|^2)}$$

Bizonyítás. A bizonyítás analitikus módszerekkel történik.

Példa. Nézzük a következő 3×3-as determinánst: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Ellenőrizzük az előző tételt a determinánsra, vagyis soronként vegyük az elemek abszolút értékét, emeljük négyzetre őket, majd adjuk össze, végül ezeket az összegeket szorozzuk össze. Vagyis:

$$\sqrt{(4^2 + 3^2 + 5^2) \cdot (4^2 + 0^2 + 1^2) \cdot (2^2 + 2^2 + 3^2)} = \sqrt{50 \cdot 17 \cdot 17} \approx 120{,}21$$

A Sarrus-szabály segítségével meghatározzuk a determináns értékét, ez 90. Tehát:

$$|D| \leq \sqrt{(4^2 + 3^2 + 5^2) \cdot (4^2 + 0^2 + 1^2) \cdot (2^2 + 2^2 + 3^2)}$$

$$90 \leq 120{,}21$$

4.4. Leopold Kronecker

Leopold Kronecker (1823. december 7. – 1891. december 29.) német matematikus volt.
Liegnitzben született, a gimnáziumot is itt végezte el. Matematikatanára Kummer volt. Egyetemi tanulmányait Berlinben, Bonnban és Boroszlóban végezte, és 1845-ben Berlinben megkapta a doktori címet. A doktori értekezését számelméletből írta.
1850-ben írt egy cikket az ötödfokú egyenlet általános megoldásáról csoportelméleti vonatkozásban. 1855-ben Berlinbe költözött, 1861-ben az akadémia tagjává választották. Az egyetemen is tartott előadásokat, de tanári képesítést csak 1883-ban szerzett.
Weierstrass-szal és társaival részt vett a Crelle által alapított folyóirat szerkesztésében. Tudományos vizsgálatait a számelméletben, az algebrában és az analízisben folytatta. Hensel adta ki értekezéseit.
A Magyar Tudományos Akadémia külső tagjává vált.

4.4.1. Definíció. Kronecker-féle determináns
Vegyünk két determinánst, az egyik n-edrendű (X), a másik m-edrendű (Y) legyen. Állítsuk elő az $n \times m$-edrendű determinánst a következőképpen:

$$X \otimes Y = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cdot Y & x_{12} \cdot Y & \dots & x_{1n} \cdot Y \\ x_{21} \cdot Y & x_{22} \cdot Y & \dots & x_{2n} \cdot Y \\ \vdots & & & \\ x_{n1} \cdot Y & x_{n2} \cdot Y & \dots & x_{nn} \cdot Y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} \cdot y_{11} & \dots & x_{11} \cdot y_{1m} & \dots & \dots & x_{1n} \cdot y_{11} & \dots & x_{1n} \cdot y_{1m} \\ x_{11} \cdot y_{21} & \dots & x_{11} \cdot y_{2m} & \dots & \dots & x_{1n} \cdot y_{21} & \dots & x_{1n} \cdot y_{2m} \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{11} \cdot y_{m1} & \dots & x_{11} \cdot y_{mm} & \dots & \dots & x_{1n} \cdot y_{m1} & \dots & x_{1n} \cdot y_{mm} \\ x_{21} \cdot y_{11} & \dots & x_{21} \cdot y_{1m} & \dots & \dots & x_{2n} \cdot y_{11} & \dots & x_{2n} \cdot y_{1m} \\ x_{21} \cdot y_{21} & \dots & x_{21} \cdot y_{2m} & \dots & \dots & x_{2n} \cdot y_{21} & \dots & x_{2n} \cdot y_{2m} \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{21} \cdot y_{m1} & \dots & x_{21} \cdot y_{mm} & \dots & \dots & x_{2n} \cdot y_{m1} & \dots & x_{2n} \cdot y_{mm} \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{n1} \cdot y_{11} & \dots & x_{n1} \cdot y_{1m} & \dots & \dots & x_{nn} \cdot y_{11} & \dots & x_{nn} \cdot y_{1m} \\ x_{n1} \cdot y_{21} & \dots & x_{n1} \cdot y_{2m} & \dots & \dots & x_{nn} \cdot y_{21} & \dots & x_{nn} \cdot y_{2m} \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{n1} \cdot y_{m1} & \dots & x_{n1} \cdot y_{mm} & \dots & \dots & x_{nn} \cdot y_{m1} & \dots & x_{nn} \cdot y_{mm} \end{pmatrix}$$

4.4.2. Tétel. Kronecker-féle tétel
A fenti módon képzett Kronecker-féle determináns értéke a következőképpen számítható ki: $det(X \otimes Y) = (detX)^m \cdot (detY)^n$

Bizonyítás. A bizonyítás Beke Manó Determinánsok|3| című könyvében megtalálható.

Példa. Adott a következő két determináns:

$$X_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \text{ és } Y_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Írjuk fel a megadott determinánsokból a Kronecker-féle determinánst, majd számítsuk ki az értékét.

$$det(X_3 \otimes Y_2) = \begin{vmatrix} 6 & 12 & 8 & 16 & 4 & 8 \\ 9 & 0 & 12 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 10 & 20 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 16 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}^3 =$$

$$= (-48)^2 \cdot (-12)^3 = 2304 \cdot (-1728) = (-3981312)$$

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom a témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak a szakdolgozat elkészítésében nyújtott segítségéért, támogatásáért.

Irodalomjegyzék

[1] Thomas Muir, M.A., L.L.D., F.R.S.: The theory of determinants in the historical order of development, London, 1906, Macmillan.

[2] Szele Tibor: Bevezetés az algebrába, Dabas, 1977, Tankönyvkiadó.

[3] Beke Manó: Determinánsok, Budapest, 1946, Athenaeum irodalmi és nyomdai részvénytársulat.

[4] Freud Róbert: Lineáris algebra, Budapest, 2006, ELTE Eötvös Kiadó.

[5] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, Budapest, 2007, Typotex Kiadó.

[6] Bánhegyesiné Topor Gizella, Bánhegyesi Zoltán: Matematika Nem matematika szakosoknak, Budapest, 2002, Műszaki Kiadó.

[7] http://web.mit.edu/ darij/www/hyperfactorialBRIEF.pdf

[8] http://www.apprendre-math.info/mathematiciens/hongrois/history Detail.htm?id=KroneckermenuH=wiki

[9] http://learn-math.info/historyDetail.htm?id=Hadamard

[10] http://www.learn-math.info/mathematicians/historyDetail.htm?id= BorchardtmenuH=wiki

[11] http://learn-math.info/historyDetail.htm?id=Hankel

Nyilatkozat

Név: Józsa Mónika
ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc Tanári Szakirány
NEPTUN azonosító: HR19ZW
Szakdolgozat címe:
Nevezetes determinánsok, nevezetes determinánstételek

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2014. január 6.

a hallgató aláírása