Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Backhausz Ágnes

Néhány sztochasztikus folyamat nemstandard megközelítésben

Szakdolgozat

Témavezető:
Prokaj Vilmos
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2008.

Bevezetés

Célunk folytonos idejű sztochasztikus folyamatok konstrukciója hasonló jellegű diszkrét idejű véletlen bolyongásokból kiindulva, a nemstandard analízis eszközeit felhasználva. A kiindulópont Anderson Wiener-folyamatra adott konstrukciója ([1]), amely egyszerű szimmetrikus bolyongásokon alapul.

Az első fejezetben rövid összefoglalást adunk a nemstandard analízis alapjairól. A felépítés axiomatikusan is lehetséges (például [4]), mivel azonban a sztochasztikus folyamatok esetében is konstrukcióra van szükség, a nemstandard univerzumnak egy konstrukcióját mutatjuk be [2], [3] alapján. Ennek kiindulópontja a valós számok nemstandard kibővítése. Ehhez legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{N}$ nemtriviális ultraszűrő. Azt mondjuk, hogy a valós számokból álló (a_n) és (b_n) sorozatok $\mathcal{U}$ szerint ekvivalensek, ha $\{n: \ a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$. A kibővítés elemei a valós számsorozatok $\mathcal{U}$ szerinti ekvivalenciaosztályai, azaz a kibővítés $\mathbb{R}$-nek $\mathcal{U}$-ra vonatkozó ultrahatványa. Ha a relációkat és műveleteket hasonlóképpen értelmezzük, azt látjuk, hogy például $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)_{\mathcal{U}}$ és $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots\right)_{\mathcal{U}}$ minden pozitív valós számnál kisebbek, pozitívak, nullától és egymástól különbözők, sőt, az egyik a másik négyzete. $(1, 2, 3, \ldots)_{\mathcal{U}}$ és $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots\right)_{\mathcal{U}}$ pedig minden valós számnál nagyobbak, és különbözők. Az ultrahatványok segítségével más halmazok, objektumok, logikai formulák nemstandard kibővítését is megadhatjuk, így jutunk a nemstandard univerzumhoz.

A következő fejezetben [1] alapján a Wiener-folyamatra adunk konstrukciót. Lényegében független, egyszerű szimmetrikus bolyongások sorozatát vesszük, melyek lépésszáma végtelenhez tart. Megfelelő normálással nemstandard értékű valószínűségi mértéket és sztochasztikus folyamatot kapunk. Ez utóbbi olyan lesz, mintha t időközönként lépnénk $\sqrt{t}$ nagyságút véletlenszerűen felfelé vagy lefelé. Ezekből képezhetünk standard értékű sztochasztikus folyamatot, illetve valószínűségi mértéket, az úgynevezett Loeb-féle mértéket, a Carathéodory-féle mértékkiterjesztési eljárás alapján. Ilyen módon a Wiener-mértékhez, illetve Wiener-folyamathoz jutunk el.

Az utolsó fejezetben Tóth Bálint és Wendelin Werner cikkében ([5]) szereplő öntaszító folyamatokat vizsgáljuk, először a bolyongások illetve Wiener-folyamatok egy rendszerét. A folytonos esetben minden $x \in \mathbb{R}$ időpontban minden $h > 0$ szintről indul egy-egy véletlen folyamat időben előre és hátrafelé haladva. Ha véges sok kiindulópontot nézünk, akkor az így kapott folyamatok egymástól független Wiener-folyamatok, addig, amíg nem találkoznak. Találkozáskor összeolvadnak és együtt továbbhaladnak, szintén Wiener-folyamatként. A nulla szint a nulla időpont előtt visszaverő, utána elnyelő. Diszkrét esetben ugyanezek a tulajdonságok érvényesek megfelelő rácspontokkal és egyszerű szimmetrikus bolyongásokkal.

A folytonos esetben a konstrukció [5]-ben megszámlálható sok Wiener-folyamatból indul ki. Most pedig azt fogjuk látni, hogy ha egyre nagyobb méretű, diszkrét, véges rendszereket tekintünk, a nemstandard eszközök segítségével másfajta konstrukciót kaphatunk, mely az [5]-ben szereplő egyértelmű eloszlást biztosító normáló feltételeket is teljesíti.

[5]-ben a folytonos idejű egydimenziós öntaszító folyamat konstrukciója az összeolvadó Wiener-folyamatok rendszerén alapul. Továbbá, a diszkrét esetben az összeolvadó bolyongások rendszere egy labirintust alkot, az ebben bolyongó véletlen folyamat vízszintes vetülete lesz egy bizonyos öntaszító bolyongás. Azt látjuk majd, hogy ezekből a diszkrét idejű öntaszító folyamatokból megfelelő skálázással nemstandard eszközökkel kaphatunk egy folytonos idejű sztochasztikus folyamatot.

1. fejezet

A nemstandard univerzum

1.1. A nemstandard valós számok halmaza

Elsőként a valós számok halmazának nemstandard kibővítését vizsgáljuk. Ez a halmaz, melyet ${}^*\mathbb{R}$-rel jelölünk, a valós számokon kívül tartalmaz végtelenül kicsi, de nullától különböző infinitezimális számokat, továbbá pozitív és negatív végtelen számokat is. A megfelelő műveletekkel ${}^*\mathbb{R}$ rendezett test.

Egy szokásos konstrukció $\mathbb{R}$ megfelelő ultrahatványa. Legyen $\mathcal{U}$ nemtriviális ultraszűrő a természetes számok halmazán. Azaz $\mathcal{U}$ $\mathbb{N}$ részhalmazaiból álló felszálló halmazrendszer, mely zárt a véges metszetre, véges halmazt nem tartalmaz, és $\mathbb{N}$ minden részhalmaza vagy $\mathcal{U}$-beli, vagy a komplementere $\mathcal{U}$-beli. Az $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ ultrahatvány valós sorozatok ekvivalenciaosztályaiból áll. Az (a_n) és (b_n) sorozatok $\mathcal{U}$ szerint ekvivalensek, ha $\{n : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$. Ennek jelölése: $(a_n) \equiv_{\mathcal{U}} (b_n)$, egy (a_n) sorozat $\mathcal{U}$ szerinti ekvivalenciaosztályát pedig jelölje $(a_n)_{\mathcal{U}}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy valóban ekvivalenciarelációt adtunk meg.

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$-ban a konstans sorozatok $\mathcal{U}$ szerinti ekvivalenciaosztályait azonosítsuk a nekik természetes módon megfelelő valós számokkal. Az így kapott halmaz lesz ${}^*\mathbb{R}$, a valós számok halmazának nemstandard kibővítése, és valóban $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény. Ennek kibővítése az alábbi módon megadott ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ leképezés. Ha $x \in {}^*\mathbb{R}$, akkor $x = (a_n)_{\mathcal{U}}$ valamilyen valós sorozatra. Ekkor ${}^*f(x)$ legyen az $f(a_n)$ sorozat $\mathcal{U}$ szerinti ekvivalenciaosztálya, ez egyértelmű. Például ${}^*|x| = (|a_n|)_{\mathcal{U}}$. Ugyanez elmondható többváltozós valós függvényekre is, például összeadásra, szorzásra. Hasonlóképpen a következő definíciók is értelmesek. Ha $A \subseteq \mathbb{R}$, akkor a nemstandard kibővítése legyen

$$ {}^*A = \{(a_n)_{\mathcal{U}} : \{n : a_n \in A\} \in \mathcal{U}\} \subseteq {}^*\mathbb{R}. $$

Például ${}^*\mathbb{N}$ az egészekből álló sorozatok $\mathcal{U}$ szerinti ekvivalenciaosztályaiból áll. Ha adott egy reláció $\mathbb{R}$-en, azaz $H \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, akkor

$$^*H = \{((a_n)_{\mathcal{U}}, (b_n)_{\mathcal{U}}) : \{n : (a_n, b_n) \in H\} \in \mathcal{U}\} \subseteq {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R}.$$

Például $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ esetén $a \; {}^*< b$ pontosan akkor teljesül, ha az $\{n : a_n < b_n\}$ halmaz $\mathcal{U}$-beli.

Ezek segítségével tudjuk értelmezni a „végtelenül kicsi”, „végtelenül nagy” fogalmát.

1. definíció. *Legyen $x, y \in {}^*\mathbb{R}$.*

- *x végtelenül kicsi, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számra ${}^*|x| < \varepsilon$.*
- *x véges, ha valamely r valós számra ${}^*|x| < r$.*
- *x végtelen, ha minden r valós számra ${}^*|x| > r$.*
- *x és y végtelenül közeliek, ha $x - y$ végtelenül kicsi. Jelölése: $x \approx y$.*
- *$monad(r) = \{x : x \approx r\}$, ha r valós.*

Látható, hogy például $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)_{\mathcal{U}}$ és $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots\right)_{\mathcal{U}}$ nullától és egymástól különböző végtelenül kicsi számok, míg például $(1, 2, 3, \ldots)_{\mathcal{U}}$ végtelen.

A függvények és relációk kibővítésének segítségével lesz ${}^*\mathbb{R}$ rendezett test. Az összeadás és a szorzás kibővítése, ${}^*+$ és ${}^*\cdot$ ${}^*\mathbb{R}$-ből ${}^*\mathbb{R}$-be kétváltozós műveletek, ${}^*<$ pedig kétváltozós reláció ${}^*\mathbb{R}$-en. A kibővítés definíciója alapján könnyű ellenőrizni, hogy $({}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*<)$ rendezett test.

A valós számok teljességéből következik az alábbi állítás.

1. állítás. *Minden $x \in {}^*\mathbb{R}$ nemstandard véges valós számhoz van pontosan egy $r \in \mathbb{R}$ valós szám, melyre $x \approx r$.*

Bizonyítás. Legyen $r = \inf \{a \in \mathbb{R} : x \; {}^*\leq a\}$. x végessége miatt a megadott halmaz nem üres, így r véges, és világos, hogy $x \; {}^*\leq r$. Ha ε pozitív valós szám adott, akkor $r - \varepsilon$ nem lehet a fenti halmazban, hiszen r alsó korlát. Ezért $x \; {}^*> r - \varepsilon$, ebből ${}^*|x - r| < \varepsilon$ következik. r egyértelműsége nyilvánvaló. $\square$

2. definíció. *Ha $x \in {}^*\mathbb{R}$, akkor azt az egyértelmű r valós számot, melyre $x \approx r$, x standard részének nevezzük. Jelölése: ${}^\circ x$ vagy $st(x)$.*

1.2. A nemstandard univerzum konstrukciója

Ahogy az első szakaszban láttuk, hogy megadhatjuk függvények, relációk, részhalmazok kibővítését, most általánosabban, bizonyos $\mathbb{R}$ feletti objektumok kibővítését is definiálni fogjuk, hasonlóképpen ultrahatványok segítségével.

3. definíció. *Legyen adott egy S nem üres halmaz. Legyen $V_0(S) = S$, $V_k(S) = V_{k-1}(S) \cup \mathcal{P}(V_{k-1}(S))$ $\quad k = 1, 2, \ldots$ esetén, ahol $\mathcal{P}$ a hatványhalmaz képzését jelöli. Ekkor a $V(S) = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k(S)$ halmazt nevezzük S feletti szuperstruktúrának.*

Ha $A \in V(S)$, akkor azt a legkisebb k egészt, melyre $A \in V_k(S)$, A rangjának nevezzük.

Most az $\mathbb{R}$ és ${}^*\mathbb{R}$ feletti szuperstruktúrákat fogjuk vizsgálni. Jelölje $V_k(\mathbb{R})$-t röviden V_k. Legyen továbbra is $\mathcal{U}$ a természetes számok halmaza feletti nemtriviális ultraszűrő. Minden $k \geq 0$ egészre tekintsük a ${}^*V_k = V_k^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ ultrahatványt. A kibővítéseket a halmazok rangja szerinti rekurzióval adjuk meg, és egy V_k-beli halmaz kibővítése ${}^*V_k$-ban lesz.

Az üres halmaz kibővítése önmaga. Ha $A \in V_0 = \mathbb{R}$, akkor ${}^*A$ legyen szintén A, azaz egy valós szám kibővítése is saját maga. Ha A rangja 1, azaz $A \in V_1 \setminus V_0$, akkor $A \in \mathcal{P}(V_0)$, azaz A valós számok egy részhalmaza. A korábbi meghatározásnak megfelelően ekkor legyen

$$ {}^*A = \left\{ (a_n)_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R} : \{n : a_n \in A\} \in \mathcal{U} \right\}. $$

Látható, hogy ${}^*A$ része ${}^*\mathbb{R}$-nek, azaz ${}^*V_0$-nak, és így eleme $\mathcal{P}({}^*V_0)$-nak és $V_1({}^*\mathbb{R})$-nek.

Hasonlóképpen folytatjuk a * leképezés megadását. Ha $A \in V(\mathbb{R})$ rangja $k \geq 1$, azaz $A \in V_k \setminus V_{k-1}$, akkor $A \in \mathcal{P}(V_{k-1})$. Ebben az esetben legyen

$$ {}^*A = \left\{ (a_n)_{\mathcal{U}} \in {}^*V_{k-1} : \{n : a_n \in A\} \in \mathcal{U} \right\}. $$

Ez jó definíció, mert most $A \subseteq V_{k-1}$, a ${}^*V_{k-1}$ ultrahatvány elemei pedig V_{k-1}-beli halmazokból álló sorozatok $\mathcal{U}$ szerinti ekvivalenciaosztályai. Másrészt ha más reprezentánst választunk: $(a_n) \equiv_{\mathcal{U}} (b_n)$, akkor világos, hogy $\{n : b_n \in A\} \supseteq \{n : a_n \in A \text{ és } a_n = b_n\}$, és ez utóbbi két $\mathcal{U}$-beli halmaz metszete, ha (a_n)-nel teljesül a feltétel. Vagyis értelmes meghatározást adtunk, és a ${}^*A$ halmaz ${}^*V_{k-1}$-nek része.

A V_{k-1} halmaz maga k rangú $V(\mathbb{R})$-beli, de látható, hogy a definíciót $A = V_{k-1}$-re alkalmazva éppen az ultrahatványt kapjuk vissza, ezért a ${}^*V_{k-1}$ jelölés a kétféle értelmezésben ugyanazt adja.

Tehát a V_k-beli k rangú halmazok kibővítése a ${}^*V_{k-1}$ ultrahatványnak része. Ezt továbbvisszük úgy, hogy a kibővítést a ${}^*\mathbb{R}$ feletti szuperstruktúrában tudjuk elhelyezni. Ehhez $k \geq 1$ esetén a ${}^*V_{k-1}$ halmazt beágyazzuk a $V_{k-1}({}^*\mathbb{R})$ halmazba, és ementén végzünk azonosítást.

A $h : {}^*V \to V({}^*\mathbb{R})$ leképezést is a rang szerinti rekurzióval definiáljuk. $k = 0$-ra ${}^*V_0 = {}^*\mathbb{R}$, így h ${}^*V_0$-n legyen az identitás. Tegyük fel, hogy a $h : {}^*V_{k-1} \to V_{k-1}({}^*\mathbb{R})$ beágyazást már definiáltuk, és ${}^*V_{k-1}$ minden elemét azonosítottuk a h-nál vett képével.

Ha most $A \in {}^*V_k \setminus {}^* V_{k-1}$, akkor $A = (A_n)_{\mathcal{U}}$, ahol az $A_n \in V_k \setminus V_{k-1}$ feltételt teljesítő n-ek halmaza $\mathcal{U}$-beli, így feltehető, hogy minden n ilyen. Ez azt jelenti, hogy minden n-re $A_n \subseteq V_{k-1}$. Ezért értelmes a következő definíció:

$$h(A) = \{(a_n)_{\mathcal{U}} \in {}^*V_{k-1} : \{n : a_n \in A_n\} \in \mathcal{U}\}.$$

Vagyis $h(A) \subseteq {}^*V_{k-1}$, amit már azonosítottunk $V_{k-1}({}^*\mathbb{R})$ megfelelő elemeivel. Azaz

$$h(A) \subseteq {}^*V_{k-1} \subseteq V_{k-1}({}^*\mathbb{R}) \Rightarrow h(A) \in V_k({}^*\mathbb{R}) \setminus V_{k-1}({}^*\mathbb{R}).$$

Tehát h az $\mathbb{R}$ feletti szuperstruktúrában k rangú halmazokhoz a ${}^*\mathbb{R}$ feletti szuperstruktúrában k rangú halmazt rendel, és könnyen látható, hogy h beágyazás, ezért a rekurzió folytatható.

A h menti azonosítás segítségével megkaptuk a ${}^* : V \to V({}^*\mathbb{R})$ leképezést, amely minden V-beli halmazhoz hozzárendeli a nemstandard kibővítését, és megtartja a rangot. A nemstandard kibővítések alkotják a nemstandard univerzumot.

4. definíció. *Legyen a szuperstuktúra kibővítése* ${}^*V(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^*V_n(\mathbb{R})$. ${}^*V(\mathbb{R})$ *elemeit belső halmazoknak,* $V({}^*\mathbb{R}) \setminus {}^*V(\mathbb{R})$ *elemeit külső halmazoknak nevezzük.*

1.3. Az átviteli elv

A nemstandard univerzum alapvető tulajdonsága az átviteli elv, amely az eredeti és a kibővített struktúrákban megfogalmazható formulák igazsága között teremt kapcsolatot.

Először megadjuk, hogy mit tekintünk $\mathbb{R}$ feletti elsőrendű formulának, és rögtön azt is hozzátesszük, hogy egy formulának mi a nemstandard univerzum feletti kibővítése.

Ha α természetes számokból álló m hosszú sorozat, akkor jelölje V^α a $V_{\alpha(1)} \times \ldots \times V_{\alpha(m)}$ Descartes-szorzatot.

Ha az x_i változó $V_{\alpha(i)}$-beli $i = 1, 2, \ldots, n$-re, $\sigma(1), \ldots, \sigma(m) \in \{1, \ldots, n\}$, akkor az alábbi formulák V feletti alapformulák:

- $\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}\right) \in A$, ahol $A \subseteq V^{\alpha}$. Ennek nemstandard kibővítése $\left(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m)}\right) \in {}^*A$, ahol az X_i változó ${}^*V_{\alpha(i)}$-beli $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

- $f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}\right) = \left(x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}\right)$, ahol $f : A \to B$ függvény, $A \subseteq V_{\alpha(\sigma(1))} \times \ldots \times V_{\alpha(\sigma(k))}$, $B \subseteq V_{\alpha(\sigma(k+1))} \times \ldots \times V_{\alpha(\sigma(m))}$. Ennek nemstandard kibővítése ${}^*f\left(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}\right) = \left(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(m)}\right)$, ahol az X_i változó ${}^*V_{\alpha(i)}$-beli $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén, ${}^*f$ pedig az f függvény kibővítése.

Az első esetben a Descartes-szorzat szokásos halmazelméleti definíciójából látható, hogy A is V-beli. A második esetben az f függvény kibővítéséhez ugyanúgy járunk el, mint a valós esetben: az argumentumok az ultrahatvánnyal adott nemstandard univerzumban V-beli elemek sorozatok ekvivalenciaosztályaival adhatók meg, egy reprezentánsra f tagonként alkalmazható, a kapott sorozat ekvivalenciaosztálya lesz ${}^*f$ értéke. Ez nem függ a reprezentáns választásától.

Legyen továbbra is az x_i változó $V_{\alpha(i)}$-beli $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén, β természetes számokból álló p hosszú sorozat, az y_j változó pedig $V_{\beta(j)}$-beli $j = 1, 2, \ldots, p$ esetén.

- Ha $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$ V feletti alapformula, és $A_j \in V_{\beta(j)}$ $j = 1, \ldots, p$ esetén, akkor $\varphi(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_p)$ is V feletti alapformula. Ennek kibővítése ${}^*\varphi(X_1, \ldots, X_n, {}^*A_1, \ldots, {}^*A_p)$, ahol ${}^*\varphi$ a φ kibővítése, és az X_i változó ${}^*V_{\alpha(i)}$-beli $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

A φ és ψ formulákból a következő szabályokkal lehet újabb formulákat képezni, értelmezésük a megszokott:

- $\neg\varphi$, ennek kibővítése $\neg{}^*\varphi$;

- $\varphi \vee \psi$, kibővítése ${}^*\varphi \vee {}^*\psi$;

- $\varphi \wedge \psi$, kibővítése ${}^*\varphi \wedge {}^*\psi$;

- ha az x változó V_k-beli, akkor $\exists x\varphi$ is formula, kibővítése $\exists X{}^*\varphi$, ahol az X változó ${}^*V_k$-beli;

- ha az x változó V_k-beli, akkor $\forall x\varphi$ is formula, kibővítése $\forall X{}^*\varphi$, ahol az X változó ${}^*V_k$-beli.

${}^*\varphi$ és ${}^*\psi$ a φ és ψ formulák kibővítéseit jelölik.

A $V(\mathbb{R})$ feletti elsőrendű formulák halmaza a legszűkebb olyan halmaz, amely tartalmazza a fent megadott alapformulákat, és zárt ezekre a műveletekre. A formulák felépítése szerinti indukcióval megadtuk minden $V(\mathbb{R})$ feletti elsőrendű formula nemstandard kibővítését, melyek minden esetben ${}^*V(\mathbb{R})$ feletti formulák.

Egy formula szabad változói az alapformulák esetében az x_i-vel, X_i-vel jelölt változók. Az utolsó két esetben az x-szel, illetve X-szel jelölt változó az új formulában már nem szabad változó. A többi, φ-ből és ψ-ből képzett formula szabad változói a φ és ψ szabad változói együttesen.

Az átviteli elv a szabad változó nélküli formulákról szól.

2. tétel. *Legyen φ $V(\mathbb{R})$ feletti szabad változó nélküli formula. Ekkor*

$$\varphi \text{ igaz } V(\mathbb{R}) \text{ felett} \Leftrightarrow {}^*\varphi \text{ igaz } {}^*V(\mathbb{R}) \text{ felett.}$$

Bizonyítás. Legyen röviden $V = V(\mathbb{R})$ és ${}^*V = {}^*V(\mathbb{R})$. A bizonyításhoz tetszőleges formula igazsághalmazát vizsgáljuk, belátjuk, hogy ha

$$B = \{(x_1, \dots, x_m) : \varphi(x_1, \dots, x_m) \text{ igaz } V \text{ felett}\},$$

akkor

$${}^*B = \{(X_1, \dots, X_m) : {}^*\varphi(X_1, \dots, X_m) \text{ igaz } {}^*V \text{ felett}\}.$$

Ezt egy szabad változó nélküli formulára alkalmazva B és ${}^*B$ is vagy üres, vagy az egész halmaz, melyből a változók felvehetik értékeiket. Üres halmaz kibővítése önmaga, ha pedig az egyes változók valamilyen V_k-beliek, akkor a formula kibővítésében mindenhol ${}^*V_k$-beli változók szerepelnek, így ebből az állításból valóban következik az átviteli elv.

A B-re vonatkozó állítást a φ formula felépítése szerinti indukcióval látjuk be.

Ha a formulák definícióinak megfelelő jelöléseket használjuk, legyen először

$$B = \left\{(x_1, \dots, x_n) : \left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}\right) \in A\right\}.$$

Az ultrahatvány segítségével megadott * leképezés definícióját használva az $X_i \in V_{\alpha(i)}$ változónak sorozatok ekvivalenciaosztálya felel meg, és ezzel

$$\begin{aligned}
{}^*B &= \{(X_1, \dots, X_n) : \{k : (X_{1,k}, \dots, X_{n,k}) \in B\} \in \mathcal{U}\} = \\
&= \left\{(X_1, \dots, X_n) : \left\{k : \left(X_{\sigma(1),k}, \dots, X_{\sigma(n),k}\right) \in A\right\} \in \mathcal{U}\right\} = \\
&= \left\{(X_1, \dots, X_n) : \left(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}\right) \in {}^*A\right\} = \\
&= \{(X_1, \dots, X_n) : {}^*\varphi(X_1, \dots, X_n) \text{ igaz } {}^*V \text{felett}\}.
\end{aligned}$$

Függvényre vonatkozó alapformula esetén a bizonyítás hasonlóan végezhető, hiszen a függvény kibővítését úgy definiáltuk, hogy a sorozat elemeire alkalmaztuk a szóban forgó függvényt.

Most tegyük fel, hogy φ-re már tudjuk az állítást, és legyen

$$B = \{(x_1, \ldots, x_n) : \varphi(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_p) \,\text{igaz}\; V \text{ felett}\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} {}^*B &= \{(X_1, \ldots, X_n) : \{k : (X_{1,k}, \ldots, X_{n,k}) \in B\} \in \mathcal{U}\} = \\ &= \{(X_1, \ldots, X_n) : \{k : \ \varphi(X_{1,k}, \ldots, X_{n,k}, A_1, \ldots, A_p) \,\text{igaz}\} \in \mathcal{U}\}. \end{aligned}$$

Jelölje $j = 1, \ldots, p$ esetén $\overline{A_j}$ a konstans A_j sorozatot, mely ${}^*V_{\beta(j)}$-beli, hiszen $A_j \in V_{\beta(j)}$. Így a feltétel $\overline{A_j}$-vel is megfogalmazható, és mivel φ-re teljesül az állítás, ekkor azt kapjuk, hogy ${}^*\varphi\left(X_1, \ldots, X_n, \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_p}\right)$-nek kell teljesülnie. Azonban a korábbi beágyazásra $h\left(\overline{A_j}\right) = {}^*A_j$, ezek tehát a h menti azonosítás miatt megegyeznek. Tehát valóban

$${}^*B = \{(X_1, \ldots, X_n) : \ {}^*\varphi(X_1, \ldots, X_n, \ {}^*A_1, \ldots, \ {}^*A_p)\}.$$

Tehát most is a kibővített formula igazsághalmazát kaptuk meg.

A $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ esetekben a bizonyítás hasonló, ha φ-re és ψ-re már tudjuk az állítást. Például a metszetre:

$$B = \{(x_1, \ldots, x_n) : (\varphi \wedge \psi)(x_1, \ldots, x_n)\}$$

Két halmaz metszete pontosan akkor van $\mathcal{U}$-ban, ha mindkettő $\mathcal{U}$-ban van, hiszen $\mathcal{U}$ felszálló és a véges metszetre zárt. Ezt és az indukciós feltevést felhasználva:

$$\begin{aligned} {}^*B &= \{(X_1, \ldots, X_n) : \{k : (X_{1,k}, \ldots, X_{n,k}) \in B\} \in \mathcal{U}\} = \\ &= \{(X_1, \ldots, X_n) : \{k : \varphi(X_{1,k}, \ldots, X_{n,k})\} \in \mathcal{U}\} \cap \\ &\cap \{(X_1, \ldots, X_n) : \{k : \psi(X_{1,k}, \ldots, X_{n,k})\} \in \mathcal{U}\} = \\ &= \{(X_1, \ldots, X_n) : \ {}^*\varphi(X_1, \ldots, X_n), \ {}^*\psi(X_1, \ldots, X_n)\} = \\ &= \{(X_1, \ldots, X_n) : ({}^*\varphi \wedge^* \psi)(X_{1,k}, \ldots, X_{n,k})\} = \\ &= \{(X_1, \ldots, X_n) :^* (\varphi \wedge \psi)(X_{1,k}, \ldots, X_{n,k})\}. \end{aligned}$$

Az utolsó két eset közül csak a létezést vizsgáljuk. Most

$$B = \{(x_1, \ldots, x_n) : \exists x \in V_j : \ \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)\},$$

$${}^*B = \{(X_1, \ldots, X_n) : \{k : \exists x \in V_j : \ \varphi(x, X_{1,k}, \ldots, X_{n,k})\}\}.$$

Rögzítsük ennek egy elemét. Azokra k-kra, melyekre létezik ilyen $x \in V_j$, legyen ez x_k, különben x_k tetszőleges.

Ekkor az (x_k) sorozat ekvivalenciaosztálya, mely ${}^*V_j$-beli, mutatja, hogy létezik $X \in^* V_j$, melyre $\varphi(X_k, X_{1,k}, \ldots, X_{1,n})$ teljesül k-knak $\mathcal{U}$-beli halmazára. Ha φ-re már teljesül az állítás, ebből következik, hogy erre az elemre létezik $X \in {}^*V_k$, mellyel ${}^*\varphi$ igaz. Ugyanígy megfordítva, ha létezik ilyen $X \in {}^*V_k$, az k-knak $\mathcal{U}$-beli halmazára megad egy-egy x_k-t, mellyel φ teljesül. Azaz valóban

$${}^*B = \{(X_1, \ldots, X_n) : \exists X \in {}^*V_j : \varphi(X, X_1, \ldots, X_n)\}.$$

□

Az átviteli elv alábbi következményei gyakran alkalmazhatók.

3. állítás. *Ha az $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ belső halmaz tetszőlegesen nagy számot tartalmaz, akkor tartalmaz végtelen számot is.*

Bizonyítás. A valós számok teljessége miatt tudjuk, hogy minden nem üres valós számhalmaznak van legkisebb felső korlátja. Ez megfogalmazható elsőrendű formulával is, minden $V_1 \setminus V_0$-beli halmaz teljesíti ezt a tulajdonságot. Ezért az átviteli elv szerint minden ${}^*V_1 \setminus^* V_0$-beli halmaznak is van legkisebb felső korlátja. Vagyis ha $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ nem üres belső halmaz, van legkisebb felső korlátja. Ha A tetszőlegesen nagy számot tartalmaz, akkor véges szám nem lehet A felső korlátja. Ha viszont A-ban csak véges számok vannak, akkor bármely végtelen szám felső korlát. Ezek közül pedig nincs legkisebb, könnyen látható az 1. definíció alapján, hogy végtelen számból egyet levonva is végtelent kapunk. Az ellentmondás bizonyítja az állítást. □

4. állítás. *Legyen $\varphi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ V feletti formula, ahol az x_j változó $V_{\alpha(j)}$-beli $j = 1, \ldots, m$ esetén, az y_k változó pedig $V_{\beta(k)}$-beli $k = 1, \ldots, n$ esetén. Ha $a_j \in {}^*V_{\beta(k)}$ minden $j = k, \ldots, n$ esetén, akkor az alábbi halmaz belső halmaz:*

$$b = \{(X_1, \ldots, X_m) \in {}^*V^\alpha : {}^*\varphi(X_1, \ldots, X_m, a_1, \ldots, a_n) \text{ igaz } {}^*V \text{ felett}\}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő $V(\mathbb{R})$ feletti formulát:

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists z \forall x_1 \ldots \forall x_m [(x_1, \ldots, x_m) \in z \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)].$$

Az egyes változókra ugyanaz vonatkozik, mint ami az állításban szerepel, a z változó pedig V_p-beli, ahol p az az index, amelyre V_p tartalmazza az $(x_1, \ldots, x_m)$ alakú objektumokat.

Ez egy szabad változók nélküli formula, mely igaz V felett, hiszen a z igazsághalmaz benne van a V szuperstruktúrában. Ezért az átviteli elv alkalmazható, a formula kibővítése igaz ${}^*V$-ben. Az, hogy egy objektum z-beli, az eredeti struktúrában természetes módon értelmezhető, és megadható egy relációval. Könnyen látható, hogy az azonosítás miatt ennek kibővítése megegyezik azzal, hogy a $V\left({}^*\mathbb{R}\right)$ szuperstruktúrában az első halmaz eleme a másiknak. Tehát az átviteli elv szerint a következő formula teljesül ${}^*V$ felett:

$$\forall Y_1 \ldots \forall Y_n \exists Z \forall X_1 \ldots \forall X_m \left[(X_1, \ldots, X_m) \in Z \leftrightarrow \varphi\left(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n\right) \right]$$

A feltétel szerint $a_k \in {}^*V_{\beta(k)}$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén, ezért ezek $Y_1, \ldots, Y_n$ helyére kerülhetnek a kibővített formulában, és így

$$\exists Z \forall X_1 \ldots \forall X_m \left[(X_1, \ldots, X_m) \in Z \leftrightarrow \varphi\left(X_1, \ldots, X_m, a_1, \ldots, a_n\right) \right].$$

A kibővített formulában a Z változó ${}^*V_p$-beli, vagyis egy belső halmaz teljesíti a formula feltételét. Látható, hogy ez éppen a b halmazt adja meg, tehát b belső halmaz. $\square$

A 4. állítás a belső definíció elve.

2. fejezet

A Wiener-folyamat konstrukciója

Célunk a Wiener-folyamat konstrukciója, a Wiener-mérték reprezentációja nemstandard eszközökkel [1], [3] nyomán. Az n lépésből álló szimmetrikus bolyongás lehetséges trajektóriái n hosszú $\{-1,1\}$ sorozatokkal adhatók meg, és az egyes trajektóriák egyformán valószínűek. Ennek megfelelően a nemstandard esetben legyen $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Azokat az N-nél nem nagyobb nemstandard pozitív egészekből álló $\{1, \ldots, N\}$ halmazon értelmezett, $\{-1,1\}$ értékű függvényeket fogjuk vizsgálni, melyek gráfja belső halmaz. Ezek a függvények alkotják majd az eseményteret, és a belőlük nyert töröttvonalak standard részeit véve kapjuk a folyamat lehetséges trajektóriáit. Olyan valós értékű mértéket kell megadnunk az eseménytéren, melyre a folyamat Wiener-folyamat. Ehhez először jellemezzük az eseménytér elemeit az ultrahatványok segítségével felépített nemstandard univerzumban, majd nemstandard valós értékű, normált számlálómértéket adunk meg az eseménytéren, mely végesen additív. Azonban az ultrahatványokkal megadott nemstandard univerzum egy fontos tulajdonsága, az úgynevezett $\aleph_1$-szaturáltság miatt ez a nemstandard számlálómérték σ-additív is, és ez lehetővé teszi, hogy valós értékű mértéket származtassunk belőle. Így kapjuk az úgynevezett Loeb-mértéket. Végül belátjuk, hogy ezzel a mértékkel valóban Wiener-folyamatot kaptunk.

2.1. Belső függvények és hipervégesség

5. definíció. *Legyenek $A \subseteq {}^*V_k$ és $B \subseteq {}^*V_l$ valamilyen k és l pozitív egészekre. Egy $f : A \to B$ függvényt akkor nevezünk belső függvénynek, ha gráfja, azaz $\Gamma_f = \{(a,b) \in A \times B : y = f(x)\}$ belső halmaz.*

A belső definíció elve, a 4. állítás szerint ilyenkor A és B belső halmazok. Az alábbi állítás adja a belső függvények jellemzését az ultrahatványokkal képzett nemstandard univerzumban.

5. állítás. *Legyenek* $A = (A_n)_{\mathcal{U}} \subseteq {}^*V_k$ *és* $B = (B_n)_{\mathcal{U}} \subseteq {}^*V_l$ *belső halmazok.* $f : A \to B$ *pontosan akkor belső függvény, ha megadható* $f_n : A_n \to B_n$ *függvények sorozata úgy, hogy ha* $a = (a_n)_{\mathcal{U}} \in {}^*A$*, akkor* $f(a) = (f_n(a_n))_{\mathcal{U}}$.

Bizonyítás. Egyrészt ha $b = (b_n)_{\mathcal{U}} \in B$, és Γ_{f_n} jelöli f_n gráfját, akkor az f_n sorozattal megadott függvény gráfja:

$$\{(a,b) \in A \times B : \{n : b_n = f_n(a_n)\} \in \mathcal{U}\} =$$
$$= \{(a,b) \in A \times B : \{n : (a_n, b_n) \in \Gamma_{f_n}\} \in \mathcal{U}\} = (\Gamma_{f_n})_{\mathcal{U}}$$

a h beágyazás menti azonosítás miatt. Ez a megfelelő ultrahatvány egy eleme, így belső halmaz.

Megfordítva, ha Γ_f belső halmaz, akkor megadható a megfelelő ultrahatvány egy elemeként, így valamely (F_n) halmazsorozatra

$$\Gamma_f = \{(a,b) \in A \times B : \{n : (a_n, b_n) \in F_n\} \in \mathcal{U}\}.$$

Ha létezne n-eknek $\mathcal{U}$-beli halmaza, melyekre valamilyen $a_n \in V_k$-ra (a_n, b_n) és (a_n, b'_n) is F_n-beli, ahol $b_n \neq b'_n$, akkor Γ_f alakja miatt az $((a_n)_{\mathcal{U}}, (b_n)_{\mathcal{U}})$ és $((a_n)_{\mathcal{U}}, (b'_n)_{\mathcal{U}})$ is Γ_f-beli lenne. Ugyanakkor a két pár első eleme megegyezik, a második viszont különböző, hiszen n-ek $\mathcal{U}$-beli halmazára $b_n \neq b'_n$. Ez ellentmond annak, hogy Γ_f az f függvény gráfja. Másrészt minden a_n-re, mely szerepelhet egy A-beli elemben, van olyan pár F_n-ben, melynek első eleme a_n. Tehát n-ek $\mathcal{U}$-beli halmazára az F_n halmaz maga is egy függvény gráfja, így az f függvény valóban felírható függvények sorozatával. □

Ezután a végességnek megfelelő fogalmat vezetünk be a nemstandard univerzumban, és egy lehetséges meghatározását adjuk a véges halmazok számosságának.

6. definíció. *Jelölje* F_k *a* $V_k(\mathbb{R})$*-beli véges halmazok családját. Egy* $a \in V({}^*\mathbb{R})$ *halmazt hipervégesnek vagy* **-végesnek nevezünk, ha* $a \in {}^*F_k$ *valamely* k *pozitív egészre.*

Látható, hogy hipervéges halmaz csak belső halmaz lehet. A hipervégesség más módon is megfogalmazható. F_k bizonyos V_k-beli halmazokból áll, így $F_k \subseteq V_k$, azaz $F_k \in \mathcal{P}(V_k) = V_{k+1} \setminus V_k$. Tehát F_k $k+1$ rangú halmaz az $\mathbb{R}$ feletti szuperstruktúrában. Ezért az ultrahatványok segítségével megadott konstrukcióban

$${}^*F_k = \{(a_n)_{\mathcal{U}} \in {}^*V_k : \{n : a_n \in F_k\} \in \mathcal{U}\},$$
$${}^*F_k = \{(a_n)_{\mathcal{U}} \in {}^*V_k : \{n : a_n \text{ véges}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Vagyis ${}^*F_k$ a véges V_k-beli halmazokból álló sorozatok ekvivalenciaosztályait tartalmazza. Fontos példa lesz a következő.

7. definíció. *Ha $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, akkor az $\{n \in {}^*\mathbb{N} : n \, {}^*\!\leq N\}$ halmazt jelölje $\{1, \ldots, N\}$.*

N egy természetes számokból álló sorozat $\mathcal{U}$ szerinti ekvivalenciaosztálya, jelölésben $N = (N_n)_{\mathcal{U}}$. Ekkor $\{1, \ldots, N\}$ pontosan azokat az $a = (a_n)_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}$ számokat tartalmazza, melyekre $\{n : a_n \in \{1, 2, \ldots, N_n\}\} \in \mathcal{U}$. A nemstandard univerzumban ez a halmaz azonos az $A = (A_n)_{\mathcal{U}} \in {}^*V_1$ elemmel, ahol $A_n = \{1, 2, \ldots, N_n\}$, hiszen ez $h(A)$, és h mentén azonosítást végeztünk. Ez utóbbiról pedig világos, hogy hipervéges, minden N_n véges, így véges halmazokból álló sorozat ekvivalenciaosztálya. Tehát $\{1, \ldots, N\}$ hipervéges. Ugyanakkor szintén a h leképezés segítségével látható, hogy ${}^*\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, \ldots)_{\mathcal{U}}$ nem hipervéges, csupa végtelen halmazból álló sorozat ekvivalenciaosztálya.

A következő állítás lényege, hogy a hipervéges halmazoknak a nemstandard univerzumon belül is értelmezhető számossága, ami egy ${}^*\mathbb{N}$-beli szám.

6. állítás. *$A \in V({}^*\mathbb{R})$ pontosan akkor hipervéges, ha valamely $N \in {}^*\mathbb{N}$-re létezik $b : A \to \{1, \ldots, N\}$ belső bijekció. Ha létezik ilyen N, akkor az egyértelmű.*

Bizonyítás. Ha A hipervéges, akkor $A = (A_n)_{\mathcal{U}}$, ahol A_n véges halmaz. Legyen $N_n \in \mathbb{N}$ az A_n elemszáma, ilyenkor létezik $b_n : A_n \to \{1, \ldots, N_n\}$ bijekció. Ekkor ha $a = (a_n)_{\mathcal{U}} \in A$, azaz n-ek $\mathcal{U}$-beli halmazára $a_n \in A_n$, akkor legyen $b(a) = (b_n(a_n))_{\mathcal{U}}$. Ez egyértelmű, és a belső függvények jellemzésénél láttuk, hogy az ilyen alakban megadott b belső függvény. Világos, hogy b bijekció: egyrészt minden sorozat előfordul, hiszen minden n-re is az összes N_n-nél nem nagyobb pozitív egész előfordul, másrészt, ha $b(a)$ és $b(a')$ n. tagja egyenlő, akkor b alakja miatt a_n és b_n megegyezik, hiszen b_n bijekció. Tehát valóban belső bijekciót adtunk meg.

Megfordítva, ha adott $b : A \to \{1, \ldots, N\}$ belső bijekció valamely $N = (N_n)_{\mathcal{U}}$-re, az is csak ilyen alakú lehet: $b(a) = (b_n(a_n))_{\mathcal{U}}$. Azt kellene belátni, hogy n-eknek $\mathcal{U}$-beli halmazára b_n bijekció A_n és $\{1, \ldots, N_n\}$ között. Ha n-eknek $\mathcal{U}$-beli halmazára van olyan $a_n \neq a'_n$, melyekre $b_n(a_n) = b_n(a'_n)$, akkor $b(a) = b(a')$, holott $a \neq a'$, ez nem lehet, mert b bijekció. Hasonlóképpen, ha n-eknek $\mathcal{U}$-beli halmazára $k_n \in \{1, \ldots, N_n\}$ nem szerepel b_n értékkészletében, akkor $(k_n)_{\mathcal{U}} \in \{1, \ldots, N\}$ nem szerepel b értékkészletében, ez sem lehet. Tehát n-eknek $\mathcal{U}$-beli halmazára b_n bijekció A_n és $\{1, \ldots, N_n\}$ között, így A_n véges. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $A = (A_n)_{\mathcal{U}}$ hipervéges.

Az egyértelműség a megfordítás bizonyításából adódik. Láttuk, hogy ha $b : A \to \{1, \ldots, N\}$ belső bijekció, akkor n-eknek $\mathcal{U}$-beli halmazára b_n bijekció A_n és $\{1, \ldots, N_n\}$ között, így N_n csak A_n elemszáma lehet, $N = (N_n)_{\mathcal{U}}$ egyértelmű. $\square$

8. definíció. *Egy $A \in V({}^*\mathbb{R})$ hipervéges halmaz belső számossága az az egyetlen $N \in {}^*\mathbb{N}$ nemstandard természetes szám, melyre létezik $b : A \to \{1, \ldots, N\}$ belső bijekció. Jelölése: $|A|$.*

Ezek alapján már meg tudjuk adni azt az eseményteret, melyen később Wiener-folyamatot definiálunk, és azt a normált nemstandard számlálómértéket, melyből a standard valószínűségi mértéket származtatjuk majd.

Legyen tehát $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, Ω pedig az $\{1, \ldots, N\}$-n értelmezett, $\{-1, 1\}$-be képező belső függvények halmaza. Vagyis ha $\omega \in \Omega$, akkor minden $a \in \{1, \ldots, N\}$ esetén $\omega(a) \in \{-1, 1\}$. Mivel ω belső függvény, minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik $\omega_n : \{1, \ldots, N_n\} \to \{-1, 1\}$ függvény úgy, hogy $\omega(a) = (\omega_n(a_n))_{\mathcal{U}}$, ha $a = (a_n)_{\mathcal{U}} \in \{1, \ldots, N\}$, és $N = (N_n)_{\mathcal{U}}$. Ez azt jelenti, hogy $\omega(a)$ értéke -1, ha n-eknek $\mathcal{U}$-beli halmazára $\omega_n(a_n) = -1$, és 1, ha n-eknek $\mathcal{U}$-beli halmazára $\omega_n(a_n) = 1$.

Az $\omega_n : \{1, \ldots, N_n\} \to \{-1, 1\}$ függvény egy N_n lépésből álló trajektóriát ír le, vagyis ω tekinthető bolyongások sorozatának.

Jelölje Ω_n az $\{1, \ldots, N_n\}$-n értelmezett, $\{-1, 1\}$ értékű függvények halmazát. Ilyen függvény 2^{N_n} van. Ebből következik, hogy Ω belső számossága $\left(2^{N_1}, 2^{N_2}, \ldots\right)_{\mathcal{U}} = 2^N$. Másrészt, ha $A \subseteq \Omega$ belső halmaz, azaz $A = (A_n)_{\mathcal{U}}$, ahol $A_n \subseteq \Omega_n$, akkor minden A_n véges, így A hipervéges, A belső számossága értelmezhető. Ezért ha $\mathcal{A}$ az Ω belső részhalmazainak algebrája, akkor értelmes a következő $M : \mathcal{A} \to {}^*[0, \infty)$ függvény:

$$M(A) = \frac{|A|}{2^N}.$$

Könnyen látható, hogy M maga is belső függvény, végesen additív, és $M(\Omega)$ értéke 1.

A következő lépésben tehát egy végesen additív nemstandard mértékből kell valós értékű mértéket származtatnunk, ez lesz a Loeb-mérték.

2.2. A Loeb-mérték

Legyen $\Omega \in {}^*V$ belső halmaz, $\mathcal{A}$ olyan belső algebra, amely Ω bizonyos belső részhalmazaiból áll. Legyen $M : \mathcal{A} \to {}^*[0, \infty)$ olyan függvény, amely

- belső függvény az 5. definíció értelmében;
- végesen additív, azaz $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$, ha $A, B \in \mathcal{A}$ diszjunkt halmazok;
- véges, azaz $M(\Omega)$ véges.

Az 1. állítás szerint minden véges valós számnak van standard része, vagyis van egy olyan valós szám, amellyel végtelenül közel vannak egymáshoz. Ezt $^\circ x$-szel vagy $\mathrm{st}\,(x)$-szel jelöljük. Minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra $M\,(A)$ véges valós szám, ezért definiálhatjuk a $^\circ M : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ leképezést, úgy, hogy $^\circ M\,(A) = {}^\circ\,(M\,(A))$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmaz esetén. Könnyen látható, hogy $^\circ M$ is végesen additív. Ebből a Carathéodory-tétel segítségével adjuk meg a Loeb-mértéket. Ehhez szükséges, hogy $^\circ M$ σ-additív is legyen, ezt az alábbi állítás biztosítja, hiszen ebből következik, hogy a nemstandard univerzumban megszámlálható sok halmaz uniója megkapható az első néhány halmaz uniójaként.

7. állítás. *Legyen $\mathcal{F}$ belső halmazok egy családja a nemstandard univerzumban. Ha $\mathcal{F}$ megszámlálható, és bármely véges sok $\mathcal{F}$-beli halmaz metszete nem üres, akkor az összes $\mathcal{F}$-beli halmaznak van közös eleme.*

Bizonyítás. Ha $k \in \mathbb{N}$, F_k belső halmaz, ezért az ultraszorzatban $(F_{k,n})_{\mathcal{U}}$ alakban írható.

F_1 nem üres, ami azt jelenti, hogy $\mathcal{U}$-beli sok n-re $F_{1,n}$ nem üres. Ha például $F_{1,\overline{n}} \neq \emptyset$ valamely $\overline{n} \in \mathbb{N}$-re, akkor legyen $F_{1,n} = \emptyset$ esetén $F'_{1,n} = F_{1,\overline{n}}$, különben pedig $F'_{1,n} = F_{1,n}$. Így $F'_{1,n}$ egyetlen n-re sem üres, továbbá $(F_{1,n})$ és $\left(F'_{1,n}\right)$ $\mathcal{U}$ szerint ekvivalensek, hiszen $\mathcal{U}$-beli sok n-re nem változtattunk.

Indukcióval haladunk tovább. Tegyük fel, hogy már minden $1 \leq j \leq m$-re és minden $n \in \mathbb{N}$-re definiáltuk az $F'_{j,n}$ halmazt, úgy, hogy $F'_{1,n} \cap \ldots \cap F'_{m,n}$ egyetlen $n \in \mathbb{N}$-re sem üres, és minden $1 \leq j \leq m$-re $(F_{j,n})$ és $\left(F'_{j,n}\right)$ $\mathcal{U}$ szerint ekvivalensek. Ha egy adott $n \in \mathbb{N}$-re $F'_{1,n} \cap \ldots \cap F'_{m,n} \cap F_{m+1,n} = \emptyset$, akkor legyen $F'_{m+1,n} = F'_{1,n} \cap \ldots \cap F'_{m,n}$, tudjuk, hogy ez nem üres halmaz, különben pedig legyen $F'_{m+1,n} = F_{m+1,n}$. A feltételezés szerint $F_1 \cap \ldots \cap F_{m+1}$ nem üres, azaz $F_{1,n} \cap \ldots \cap F_{m+1,n}$ $\mathcal{U}$-beli sok n-re nem üres, és az eddigi definíciókban minden $1 \leq j \leq m$-re $\mathcal{U}$-beli sok n-re $F'_{j,n} = F_{j,n}$, így teljesül, hogy $(F_{m+1,n})$ és $\left(F'_{m+1,n}\right)$ $\mathcal{U}$ szerint ekvivalensek. A definícióból könnyen látható, hogy a megfelelő metszet egyetlen n-re sem üres, mindkét tulajdonság teljesül, folytatható az indukció.

Végül legyen $a_m \in F_{1,m} \cap \ldots \cap F_{m,m}$. Azaz minden $1 \leq j \leq m$-re $a_m \in F_{j,m}$, és $\mathcal{U}$ nem triviális ultraszűrő, így $(a_m)_{\mathcal{U}} \in F_j$ minden $j \in \mathbb{N}$-re, a metszet valóban nem üres.

$\square$

A 7. állításban megfogalmazott tulajdonságot $\aleph_1$-szaturáltságnak nevezik.

8. tétel. *A $^\circ M$ valós, végesen additív halmazfüggvény egyértelműen kiterjeszthető mértékké a $\sigma(\mathcal{A})$ σ-algebrára.*

Bizonyítás. $^\circ M$ σ-additivitását ellenőrizzük. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$-re $A_n \in \mathcal{A}$ úgy, hogy ezek páronként diszjunkt halmazok, és egyesítésük $\mathcal{A}$-beli. Legyen $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, és $B_n = A \setminus \bigcup_{m=1}^{n} A_m$. Tegyük fel, hogy egyik B_n sem üres. A (B_n) halmazsorozat monoton fogyó, ezért ebben az esetben véges sok B_n halmaz metszete közülük a legnagyobb indexű halmaz, tehát nem üres. Az A_n halmazok és A is $\mathcal{A}$-beliek, így belső halmazok, ezért könnyen látható, hogy B_n is belső halmaz minden n pozitív egészre. Vagyis a (B_n) halmazsorozatra alkalmazható a 7. állítás, azaz a $\aleph_1$-szaturáltság miatt ekkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ sem üres, ez ellentmond A definíciójának.

Tehát nem lehet, hogy egyik B_n sem üres, létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $A = \bigcup_{n=1}^{m} A_n$. Mivel az A_n halmazok páronként diszjunktak, ez azt jelenti, hogy $A_k = \emptyset$, ha $k > m$ egész. Tudjuk, hogy M és $^\circ M$ végesen additív, így

$$^\circ M\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = {}^\circ M\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} {}^\circ M(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}^\circ M(A_k),$$

hiszen az eddigiekből következik, hogy $k > m$-re $^\circ M(A_k) = {}^\circ M(\emptyset) = 0$.

Vagyis $^\circ M$ valóban σ-additív. Feltételeztük, hogy $M(\Omega)$ véges, így az is teljesül, hogy $^\circ M$ σ-véges. Ezért a Carathéodory-tétel szerint $^\circ M$ egyértelműen terjeszthető ki a $\sigma(\mathcal{A})$ σ-algebrára. □

A Loeb-mérték a $^\circ M$ végesen additív mérték ebben tételben szereplő kiterjesztésének teljessé tétele lesz.

9. definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, M)$ mint fent. A $\sigma(\mathcal{A})$ σ-algebra teljessé tételét Loeb-féle σ-algebrának nevezzük, jelölése: $L(\mathcal{A})$. A $^\circ M$ végesen additív mérték a 8. tétel alapján egyértelműen kiterjeszthető teljes mértékké a $L(\mathcal{A})$ Loeb-féle σ-algebrára is, ezt a teljes mértéket nevezzük az M-ből származatott Loeb-mértéknek. Jelölése: M_L.*

A Loeb-mértéket is megadhatjuk másféleképpen. Egy lehetséges megközelítés a következő: egy $B \subseteq \Omega$ halmazt Loeb-nullmértékűnek nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $A \in \mathcal{A}$ halmaz, melyre $B \subseteq A$, és $M(A) < \varepsilon$. Ekkor ha $B \subseteq \Omega$ tetszőleges, B pontosan akkor $L(\mathcal{A})$-beli, ha van olyan $\mathcal{A}$-beli A halmaz, melyre a $B \triangle A$ szimmetrikus differencia Loeb-nullmértékű. Ilyenkor legyen $M_L(B) = {}^\circ M(A)$ bármelyik olyan $A \in \mathcal{A}$-ra, mely teljesíti az előző feltételt. Belátható, hogy B pontosan akkor Loeb-nullmértékű, ha $M_L(B) = 0$, és visszakapjuk az előbbi fogalmakat ([2]).

Az is igazolható, hogy $B \subseteq \Omega$ pontosan akkor $L(\mathcal{A})$-beli, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz léteznek A és C $\mathcal{A}$-beli halmazok úgy, hogy $A \subseteq B \subseteq C$, és $M(C \setminus A) < \varepsilon$. Végül definálhatjuk a belső és külső Loeb-mértéket is:

$$\underline{M}(B) = \sup\{{}^{\circ}M(A) : A \subseteq B,\ A \in \mathcal{A}\},$$

$$\overline{M}(B) = \inf\{{}^{\circ}M(A) : A \supseteq B,\ A \in \mathcal{A}\}.$$

B pontosan akkor Loeb-mérhető, ha $\overline{M}(B) = \underline{M}(B)$.

2.3. Loeb-integrálelmélet

Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{A}, M)$-ből származtatott $(\Omega, L(\mathcal{A}), M_L)$ Loeb-féle mértékteret. Ω-n értelmezett valós, illetve nemstandard valós értékű függvények mérhetőségét és integrálját definiáljuk az M_L és M mértékek szerint, majd kapcsolatot keresünk a kétféle integrál között. $\overline{\mathbb{R}}$ a valós számok halmazát jelöli $-\infty$-nel és ∞-nel kiegészítve.

10. definíció. *Az $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény Loeb-mérhető, ha mérhető az $L(\mathcal{A})$ Loeb-féle σ-algebrára nézve.*

Az $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ függvény *-mérhető, ha belső függvény, és $\alpha, \beta \in {}^*\mathbb{R}$ esetén $F^{-1}([\alpha, \beta]) \in \mathcal{A}$, ahol $[\alpha, \beta]$ az $\{x \in {}^*\mathbb{R} : \alpha \; {}^*\!\leq x \; {}^*\!\leq \beta\}$ hipervalós intervallum.

A két fogalom közötti kapcsolatot leíró tétel bizonyításához először egy lemmára van szükségünk.

1. lemma. *Legyen B belső halmaz, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ B elemeiből álló tetszőleges sorozat. Ekkor létezik olyan $g : {}^*\mathbb{N} \to B$ belső függvény, melyre $g(k) = c_k$ teljesül minden $k \in \mathbb{N}$-re.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}_m$ az olyan $g : {}^*\mathbb{N} \to B$ belső függvények halmaza, melyekre $g(m) = c_m$. A 4. állítás, a belső definíció elve szerint $\mathcal{F}_m$ belső halmaz, és világos, hogy bármely véges sok $\mathcal{F}_m$ metszete nem üres, kimaradó indexekre legyen $g(n) = c_1$, így szintén a belső definíció elve szerint belső sorozatot kapunk. Ezért a 7. állítás, az $\aleph_1$-szaturáltság szerint az összes $\mathcal{F}_m$ metszete sem üres, a metszetbeli elem pedig megfelelő kiterjesztés. $\square$

9. tétel. *Legyen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. *f Loeb-mérhető;*

2. *van olyan $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ *-mérhető függvény, melyre $f(\omega) \approx F(\omega)$ M_L-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.*

Ha f korlátos, akkor F ugyanazzal a korláttal választható.

Bizonyítás. Legyen $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ *-mérhető függvény. Tetszőleges $r \in \mathbb{R}$-re

$$\{\omega \in \Omega : \ {}^\circ F(\omega) \leq r\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega : \ F(\omega) \leq r + \frac{1}{n}\right\}.$$

A jobb oldalon álló halmaz F mérhetősége miatt $\sigma(\mathcal{A})$-beli halmazok metszete, így $\sigma(\mathcal{A}) \subset L(\mathcal{A})$-beli. Tehát ${}^\circ F$ Loeb-mérhető. Ha $f(\omega) \approx F(\omega)$ M_L-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, akkor az M_L Loeb-mérték teljessége miatt ebből f Loeb-mérhetősége is következik.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f Loeb-mérhető. Rendezzük sorozatba a racionális számokat: $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, és legyen $B_n = \{\omega \in \Omega : \ f(\omega) \leq q_n\}$. Minden $n = 1, 2, \ldots$-re válasszuk meg az $A_n \in \mathcal{A}$ belső halmazokat úgy, hogy $M_L(A_n \triangle B_n) = 0$, ilyen van B_n Loeb-mérhetősége miatt van. Az is feltehető, hogy $A_n \subseteq A_m$, ha $q_n \leq q_m$. Az (A_n) sorozat kiterjeszthető $(A_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$-beli sorozattá az 1. lemma szerint, hiszen $\mathcal{A}$ maga is belső halmaz.

Mivel ez a tulajdonság tetszőleges $\mathbb{N}$-beli indexre teljesül, és belső halmazt ír le, a 3. állítás szerint van olyan $K \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, hogy bármely $n, m \leq K$ ${}^*\mathbb{N}$-beli számokra $q_n \leq q_m$-ből $A_n \subseteq A_m$ következik. A $(q_n)_{n \leq K}$ halmaz hipervéges, és válasszuk meg az i_n indexeket úgy, hogy $q_{i_1} < q_{i_2} < \ldots < q_{i_n}$ teljesüljön. Ennek segítségével legyen $A_{i_0} = \emptyset$, és

$$F(\omega) = \begin{cases} q_{i_j} & \text{ha } \omega \in A_{i_j} \setminus A_{i_{j-1}}, \\ q_{i_K} + 1 & \text{ha } \omega \notin A_{i_K}. \end{cases}$$

Az $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \triangle B_n$ M_L szerint nullmértékű halmazon kívül $F(\omega) \leq q_n$ pontosan akkor teljesül, ha $f(\omega) \leq q_n$ fennáll minden $n \in \mathbb{N}$-re, így ${}^\circ F(\omega) = f(\omega)$, F megfelelő.

Ha $f \leq k$ valamilyen k-ra, akkor $F \wedge k$ is kielégíti az állítás feltételeit. $\square$

11. definíció. *Ha f és F teljesíti a tételben szereplő második feltételt, akkor F-t f felemeltjének nevezzük az M_L Loeb-mértékre nézve.*

Ha M nemstandard valós értékű mérték, akkor az $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ függvényekre a standard integrál átvitelével kapjuk az $\int_\Omega FdM$ integrál értelmezését. Az $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény esetében pedig a M_L mérték szerint vehetünk integrált a szokásos értelemben, ez $\int_\Omega fdM_L$. Az alábbi állítások, melyek bizonyítása [2]-ben megtalálható, a kétféle integrál viszonyáról szólnak, f és F között megfelelő kapcsolatot feltételezve.

10. tétel. *Ha $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ korlátos *-mérhető függvény, akkor*

$$^\circ\!\int FdM = \int {}^\circ FdM_L.$$

11. tétel. *Ha $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ *-mérhető függvény, melyre $F \; {}^* \geq 0$, akkor*

$$\int {}^\circ FdM_L \leq {}^\circ\!\int FdM.$$

12. definíció. *Legyen $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ *-mérhető függvény, M véges belső mérték. Ekkor azt mondjuk, hogy F S-integrálható, ha*

1. *$\int_\Omega |F|dM$ véges;*
2. *ha $A \in \mathcal{A}$ és $M(A) \approx 0$, akkor $\int_A |F|dM \approx 0$.*

12. tétel. *Legyen $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ *-mérhető függvény, melyre $F \; {}^* \geq 0$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *F S-integrálható;*
2. *${}^\circ F$ Loeb-integrálható, és ${}^\circ\!\int FdM = \int {}^\circ FdM_L$.*

13. állítás. *Egy belső F függvény pontosan akkor S-integrálható, ha minden végtelen K-ra $\int_{|F|>K} |F|dM \approx 0$.*

2.4. A Wiener-folyamat konstrukciója a Loeb-mérték segítségével

Visszatérve a Wiener-folyamat konstrukciójához és a korábbi jelölésekhez, $N = (N_n)_\mathcal{U} \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, Ω az $\{1, \ldots, N\}$-n értelmezett belső függvények halmaza, $\mathcal{A}$ pedig az Ω belső részhalmazaiból álló algebra. Továbbá, ha $A \in \mathcal{A}$, és $|\cdot|$ jelöli a belső számosságot, akkor

$$M(A) = \frac{|A|}{2^N}.$$

Láttuk, hogy M teljesíti azokat a feltételeket, amelyek a Loeb-mérték származtatásához szükségesek, így beszélhetünk az $(\Omega, L(\mathcal{A}), M_L)$ Loeb-féle valószínűségi mértéktérről.

Ahogy a véges sok lépésből álló bolyongásoknál is a $-1, 1$ sorozatokból töröttvonalakat képeztünk, most is ehhez hasonlóan járunk el.

Ehhez szükség van a nemstandard egész rész értelmezésére. Egy $r \in \mathbb{R}$ pozitív valós szám esetén tudjuk, hogy egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ egész, mely a legnagyobb az r-nél nem nagyobb pozitív egészek közül, ez r egész része, jelölése $[r]$. Ennek alapján ha $x = (x_n)_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}$ nemstandard valós, akkor ${}^*[x] = ([x_n])_{\mathcal{U}}$. Azonban a fenti tulajdonság elsőrendű formulával megfogalmazható, ezért az átviteli elv szerint ${}^*[x]$ az az egyértelmű nemstandard pozitív egész, mely legnagyobb az x-nél nem nagyobb ${}^*\mathbb{N}$-beli számok között, vagyis ezt tekinthetjük x nemstandard egész részének, és röviden $[x]$-szel jelöljük.

Az is látható, hogy ha $x \ {}^*\!\leq N$, akkor $[x] \ {}^*\!\leq N$. Ezek alapján az alábbi definíció értelmes:

$$\chi(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{a=1}^{[Nt]} \omega(a) + (Nt - [Nt]) \, \omega([Nt + 1]) \right),$$

ha $t \in {}^*[0,1]$ és $\omega \in \Omega$. Ezzel tehát megadtuk a $\chi : {}^*[0,1] \times \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ függvényt. Ebből származtatjuk a következő, valós értékű véletlen folyamatot:

$$\beta(t, \omega) = {}^\circ\chi(t, \omega), \qquad t \in [0,1], \quad \omega \in \Omega.$$

Azt szeretnénk belátni, hogy az így megadott $\beta : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ folyamat Wiener-folyamat az $(\Omega, \mathcal{D}, P) = (\Omega, L(\mathcal{A}), M_L)$ Loeb-féle valószínűségi mértéktéren.

Világos, hogy $\beta(\omega, 0) = 0$ minden $\omega \in \Omega$-ra.

Minden $t \in [0,1]$-re $\chi(t, \cdot)$ belső függvény, így $\mathcal{A}$-mérhető a 10. definíció értelmében. Ezért a 9. tétel nyomán $\beta(t, \cdot)$ Loeb-mérhető, azaz mérhető $L(\mathcal{A})$-ra nézve. Filtrációként az $\mathcal{F}_t = \sigma(\{\beta(s, \cdot) : s \leq r\}) \subseteq L(\mathcal{A})$ természetes filtrációt használjuk.

14. állítás. *Legyen $s \in [0,1]$, $s < t$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor $\beta(t, \omega) - \beta(s, \omega)$ normális eloszlású 0 várható értékkel és $t - s$ szórásnégyzettel.*

Bizonyítás. Definíció szerint

$$P(\{\omega : \beta(t, \omega) - \beta(s, \omega) \leq \alpha\}) = P(\{\omega : {}^\circ\chi(t, \omega) - {}^\circ\chi(s, \omega) \leq \alpha\}).$$

Könnyen látható, hogy $x \in {}^*\mathbb{R}$, ${}^\circ x \leq \alpha$ pontosan akkor teljesül, ha minden $m \in \mathbb{N}$-re $x \ {}^*\!\leq \alpha + 1/m$. Ezért ez utóbbi esemény az $X(\omega) =$

$\chi(t,\omega)-\chi(s,\omega)$ jelöléssel az $X \leq \alpha+1/m$ események metszete, és így a P valószínűségi mérték folytonossága miatt

$$P\left({}^\circ X\leq\alpha\right)=\lim_{m\to\infty}P\left(X\leq\alpha+\frac{1}{m}\right).$$

$X(\omega)$ is belső függvény, ezért ez utóbbi események mind $\mathcal{A}$-beliek. A Loeb-mérték konstrukciója miatt pedig $\mathcal{A}$-n P megegyezik M standard részével. Tehát

$$P\left({}^\circ X\leq\alpha\right)=\lim_{m\to\infty}{}^\circ M\left(X\leq\alpha+\frac{1}{m}\right).$$

Ha $\omega=(\omega_n)_{\mathcal{U}}\in\Omega$ rögzített, akkor χ-t is felírhatjuk $\chi=(\chi_n)_{\mathcal{U}}$ alakban, ahol

$$\chi_n(t,\omega)=\frac{1}{\sqrt{N_n}}\left(\sum_{a=1}^{[N_nt]}\omega_n(a)+(N_nt-[N_nt])\,\omega_n([N_nt]+1)\right).$$

Hasonlóan kapható $\chi_n(s,\omega)$, és ebből $X_n(\omega)=\chi_n(t,\omega)-\chi_n(s,\omega)$. Láttuk, hogy $\Omega=(\Omega_n)_{\mathcal{U}}$, ahol Ω_n az N_n lépésből álló szimmetrikus bolyongás trajektóriáit tartalmazza. Legyen P_n az egyenletes valószínűségi mérték Ω_n-n, ekkor az M nemstandard számlálómérték definíciója miatt

$$M_n\left(X\leq\alpha+\frac{1}{m}\right)=P_n\left(X_n\leq\alpha+\frac{1}{m}\right).$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\lambda_n=[N_nt]-[N_ns]\,,\qquad S_n(\omega)=\sum_{a=[N_ns]+1}^{[N_nt]}\omega_n(a)\,.$$

Ekkor $\sqrt{N_n}X_n(\omega)$ az alábbi módon írható át:

$$S_n(\omega)+(N_nt-[N_nt])\,\omega_n([N_nt]+1)-(N_ns-[N_ns])\,\omega_n([N_ns]+1)\,,$$

amiből leolvashatjuk, hogy $\sqrt{N_n}X_n$ és S_n eltérése legfeljebb 2.

α és m most rögzített, legyen még $\varepsilon>0$ adott. P_n egyenletes eloszlást adott meg a -1, 1 sorozatokon, ezért S_n $\lambda_n=[N_nt]-[N_ns]$ darab, független, 1/2-1/2 valószínűséggel 1-t illetve -1-t felvevő valószínűségi változó összege. Ezért a centrális határeloszlás-tételt alkalmazhatjuk, létezik olyan k_0, hogy ha $N_n>k_0$, akkor

$$\left|P_n\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}S_n\leq\alpha+1/m\right)-\Phi\left(\alpha+\frac{1}{m}\right)\right|<\varepsilon,$$

ahol Φ jelöli a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét. Ez egyenletesen folytonos, így van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - y| < \delta$-ból $|\Phi(x) - \Phi(y)| < \varepsilon$ következik.

Válasszuk k_0-t olyannak, az előző feltételen kívül hogy minden $k > k_0$ esetén ezek is teljesüljenek:

$$\left| \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{[kt] - [ks]}} - \frac{1}{\sqrt{t-s}} \right| < \frac{1}{2} \frac{\delta}{\alpha + \frac{1}{m}}, \qquad \frac{2}{\sqrt{[kt] - [ks]}} < \frac{1}{2}\delta.$$

Ekkor ha $N_n > k_0$, akkor

$$\begin{aligned} P_n\left(X_n \le \alpha + \frac{1}{m}\right) &= P_n\left(\frac{\sqrt{N_n}}{\sqrt{\lambda_n}} X_n \le \frac{\sqrt{N_n}}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\alpha + \frac{1}{m}\right)\right) \le \\ &\le P_n\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} S_n \le \frac{\sqrt{N_n}}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\alpha + \frac{1}{m}\right) + \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \le \\ &\le P_n\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} S_n \le \frac{\alpha + \frac{1}{m}}{\sqrt{t-s}} + 2\delta\right) \le \Phi\left(\frac{\alpha + \frac{1}{m}}{\sqrt{t-s}}\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

$N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, így n-eknek $\mathcal{U}$-beli halmazára teljesül az $N_n > k_0$ feltétel. Vagyis a kapott egyenlőtlenség is fennáll n-eknek $\mathcal{U}$-beli halmazára, így

$$M\left(X \le \alpha + \frac{1}{m}\right) \le \Phi\left(\frac{\alpha + \frac{1}{m}}{\sqrt{t-s}}\right) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért a bal oldal standard része legfeljebb $\Phi\left(\frac{\alpha + \frac{1}{m}}{\sqrt{t-s}}\right)$. Hasonló módon alsó becslést is végezhetünk. Tehát

$$\begin{aligned} P\left({}^\circ X \le \alpha\right) &= \lim_{m\to\infty} {}^\circ M\left(X \le \alpha + \frac{1}{m}\right) = \\ &= \lim_{m\to\infty} \Phi\left(\frac{\alpha + \frac{1}{m}}{\sqrt{t-s}}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{t-s}}\right), \end{aligned}$$

vagyis valóban $\beta(t,\cdot) - \beta(s,\cdot)$ normális eloszlású 0 várható értékkel és $t - s$ szórásnégyzettel. □

A függetlenség kérdését először általánosabban közelítjük meg nemstandard valószínűségi változók esetén.

13. definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, M)$ nemstandard valószínűségi mértéktér, azaz $M(\Omega) = 1$. $X : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ nemstandard valószínűségi változó, ha $\mathcal{A}$-mérhető.*

Legyen I tetszőleges indexhalmaz, ekkor az $\{X_i\}_{i\in I}$ valószínűségi változók *-függetlenek, ha $N \in {}^*\mathbb{N}$ esetén minden hipervéges $\{X_1, \ldots, X_N\}$ részhalmazra és $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in {}^*\mathbb{R}^m$ belső sorozatra

$$M\left(\{\omega : X_1(\omega) < \alpha_1, \ldots, X_N(\omega) < \alpha_N\}\right) = \prod_{k=1}^{N} M\left(\{\omega : X_k(\omega) < \alpha_k\}\right).$$

Az $\{X_i\}_{i\in I}$ valószínűségi változók S-függetlenek, ha $n \in \mathbb{N}$ esetén minden véges $\{X_1, \ldots, X_n\}$ részhalmazra és $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^m$ sorozatra

$$M\left(\{\omega : X_1(\omega) < \alpha_1, \ldots, X_n(\omega) < \alpha_n\}\right) \approx \prod_{k=1}^{n} M\left(\{\omega : X_k(\omega) < \alpha_k\}\right).$$

Világos, hogy a *-függetlenségből következik az S-függetlenség.

15. állítás. *Ha az $\{X_i\}_{i\in I}$ valószínűségi változók S-függetlenek az $(\Omega, \mathcal{A}, M)$ téren, akkor a $\{{}^\circ X_i\}_{i\in I}$ valószínűségi változók függetlenek az $(\Omega, L(\mathcal{A}), M_L)$ Loeb-féle valószínűségi mezőn.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\begin{gathered} M_L\left(\{\omega : {}^\circ X_{i_1}(\omega) < \alpha_1, \ldots, {}^\circ X_{i_n}(\omega) < \alpha_n\}\right) = \\ = \lim_{m\to\infty} {}^\circ M\left(\left\{\omega : {}^\circ X_{i_1}(\omega) < \alpha_1 - \frac{1}{m}, \ldots, {}^\circ X_{i_n}(\omega) < \alpha_n - \frac{1}{m}\right\}\right), \end{gathered}$$

az előző bizonyításban látott gondolatmenettel. Ezután felhasználjuk az S-függetlenséget, a standard rész és határérték képzését felcseréljük a véges szorzattal, és az előző átalakítást visszafelé elvégezzük minden egyes tényezőben:

$$\begin{aligned} M_L\left(\{\omega : {}^\circ X_{i_1}(\omega) < \alpha_1, \ldots, {}^\circ X_{i_n}(\omega) < \alpha_n\}\right) &= \\ = \lim_{m\to\infty} {}^\circ\left(\left\{\prod_{k=1}^{n} M\left(\omega : X_{i_k} < \alpha_k - \frac{1}{m}\right\}\right)\right) &= \\ = \prod_{k=1}^{n} \lim_{m\to\infty} {}^\circ M\left(\left\{\omega : X_{i_k} < \alpha_k - \frac{1}{m}\right\}\right) &= \\ = \prod_{k=1}^{n} M_L\left(\{\omega : {}^\circ X_{i_k} < \alpha_k\}\right). \end{aligned}$$

□

Ezek után a β folyamat véges együttes eloszlásait vizsgálva legyenek $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \ldots \leq s_n < t_n$ mind $[0,1]$-beliek. Ekkor

$$\chi(t_1,\cdot) - \chi\left(s_1 + \frac{1}{N}, \cdot\right), \ldots, \chi(t_n,\cdot) - \chi\left(s_n + \frac{1}{N}, \cdot\right)$$

*-függetlenek, így S-függetlenek. A 15. állítás szerint ebből következik, hogy

$$\beta(t_1,\cdot) - \beta(s_1,\cdot), \ldots, \beta(t_n,\cdot) - \beta(s_n,\cdot)$$

függetlenek. $s_1 = 0, s_2 = t_1, \ldots, s_n = t_{n-1}$ választással kapjuk, hogy $\beta(t_1,\cdot)$, $\beta(t_2,\cdot) - \beta(t_1,\cdot), \ldots, \beta(t_n,\cdot) - \beta(t_{n-1},\cdot)$ is függetlenek, így a 14. állítás szerint együttesen is normális eloszlásúak. A várható érték mindenhol 0, a szórásnégyzet pedig rendre $t_1, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}$. Ezért $\beta(t_1,\cdot), \ldots, \beta(t_n,\cdot)$ együttesen normális eloszlásúak, vagyis Gauss-folyamatról van szó, és az is következik, hogy a várható értékek és kovarianciák megegyeznek a Wiener-folyamat esetén kaphatókkal. Ezért ha belátjuk, hogy a trajektóriák egy valószínűséggel folytonosak, az is következik, hogy β Wiener-folyamat.

16. állítás. *$\beta(\cdot,\omega)$ folytonos P szerint majdnem minden $\omega \in \Omega$-ra.*

Bizonyítás. Legyenek k, l pozitív egészek. Ekkor legyen

$$\Omega_{k,l} = \left\{\omega : \exists i < l \sup_{t\in\left[\frac{i}{l},\frac{i+1}{l}\right]} \chi(t,\omega) - \inf_{t\in\left[\frac{i}{l},\frac{i+1}{l}\right]} \chi(t,\omega) > \frac{1}{k}\right\}.$$

$\Omega_{k,l}$ belső halmaz, és $(\Omega_{k.l})_n$ a korábban látott χ_n segítségével adható meg:

$$(\Omega_{k,l})_n = \left\{\omega : \exists i < l \sup_{t\in\left[\frac{i}{l},\frac{i+1}{l}\right]} \chi_n(t,\omega) - \inf_{t\in\left[\frac{i}{l},\frac{i+1}{l}\right]} \chi_n(t,\omega) > \frac{1}{k}\right\}.$$

A 14. tétel bizonyításához hasonlóan járunk el. Most legyen $\lambda_n = N_n/l + 1$ és $S_n(t) = \sum_{a=1}^{[N_n t]} \omega(a)$. Most tehát P_n szerint $S_n(t)$ $[N_n t]$ lépésből álló szimmetrikus bolyongás, és $\sqrt{N_n}\chi_n$ legfeljebb 1-gyel tér el S_n-től. Ezért érvényesek az alábbi becslések:

$$\begin{aligned}
P_n\left((\Omega_{k,l})_n\right) &\leq l P_n\left((\sup - \inf)_{t\in[0,1/l]} \chi_n(t,\omega) > \frac{1}{k}\right) \leq \\
&\leq l P_n\left(\max_{1\leq a\leq\lambda} |S_n(t)| > \frac{\sqrt{N_n}}{2k} - 1\right) \leq \\
&\leq 4 l P_n\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} S_n(t) > \frac{\sqrt{N_n/\lambda_n}}{2k} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right).
\end{aligned}$$

Ezután ugyanúgy, ahogy az előző bizonyításban, a centrális határeloszlás-tétel alapján belátható, hogy

$$M\left(\Omega_{k.l}\right) \leq 1 - 4l\Phi\left(\frac{\sqrt{l}}{2k}\right) = \int_{\sqrt{l}/2k}^{\infty} e^{-t^2/2}dt \leq 4ke^{-\frac{\sqrt{l}}{4k}},$$

ha $\sqrt{l}/4k > 1$, a sűrűségfüggvényt $e^{-t/2}$-vel felülről becsülve.

Legyen

$$\Omega' = \Omega \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_{m,n}.$$

Az előző becslés alapján

$$P\left(\Omega'\right) = 1 - \sup_m \inf_n M\left(\Omega_{m,n}\right) \geq 1 - \sup_m \inf_n 4ne^{-\frac{\sqrt{n}}{4m}} = 1.$$

Tegyük fel, hogy $s, t \in {}^*[0,1]$, $s \approx t$, és $\chi(s,\omega) \not\approx \chi(t,\omega)$. Ekkor ha $m > 2/\,{}^\circ|\chi(s,\omega) - \chi(t,\omega)|$, akkor $\omega \in \Omega_{m,n}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, így $\omega \notin \Omega'$. Ha $\chi(s,\omega)$ végtelen valamely $s \in {}^*[0,1]$-re, akkor $\omega \in \Omega_{m,n}$ minden m-re és n-re, megint csak $\omega \notin \Omega'$.

Legyen most $\omega \in \Omega$. Eszerint ilyenkor $\beta(t,\omega)$ véges minden t-re. Legyen $t \in [0,1]$ és $\varepsilon > 0$ valós adott.

$\{n \in {}^*\mathbb{N} : |t-s| < 1/n \Rightarrow |\chi(s,\omega) - \chi(t,\omega)| < \varepsilon/2\}$ belső halmaz, és tartalmazza ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$-t. Ez utóbbi viszont nem belső halmaz. Ezért létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, mely teljesíti a feltételt, azaz ha $|t-s| < 1/n$, akkor fennáll, hogy $|\chi(s,\omega) - \chi(t,\omega)| < \varepsilon/2$, és így $|\beta(s,\omega) - \beta(t,\omega)| < \varepsilon$.

Tehát $\beta(\cdot,\omega)$ 1 valószínűséggel folytonos P szerint. $\square$

Ha $\beta(\cdot)$ folytonos, $t \approx s$ esetén ${}^*\beta(t,\omega) \approx {}^*\beta(s,\omega)$. Így minden $t \in {}^*[0,1]$-re

$$\begin{aligned}|{}^*\beta(t,\omega) - \chi(t,\omega)| \leq |{}^*\beta(t,\omega) - \beta({}^\circ t,\omega)| + |\beta({}^\circ t,\omega) - \chi({}^\circ t,\omega)| + \\ + |\chi({}^\circ t,\omega) - \chi(t,\omega)| \approx 0.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Így ${}^*\beta(\cdot,\omega)$ és $\chi(\cdot,\omega)$ supremum normában végtelenül közeliek, χ ${}^*C[0,1]$-ben végtelenül közel van egy standard elem kibővítéséhez, 1 valószínűséggel.

Ezzel beláttuk, hogy β Wiener-folyamat.

3. fejezet

Az összeolvadó Wiener-folyamatok rendszere

Tóth Bálint és Wendelin Werner cikkében ([5]) szerepel bizonyos összeolvadó Wiener-folyamatok egy rendszere, illetve ennek diszkrét változataként összeolvadó szimmetrikus bolyongások egy rendszere. Most az előbbire szeretnénk konstrukiót adni nemstandard eszközökkel.

3.1. Az előrehaladó rendszer

[5] jelöléseivel legyen

$$\mathbb{E} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}),$$

$$\mathbb{F}^+ = \{(x, h, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R} : y \geq x\}.$$

Legyen B valamely P_h mérték szerint $h > 0$-ból induló Wiener-folyamat, és legyen még $x \in \mathbb{R}$ adott. A B folyamatot úgy módosítjuk, hogy a 0 időpont előtt a nulla szint visszaverő, utána elnyelő, azaz a folyamatot megállítjuk a 0 szint 0 időpont utáni első elérésénél. Vagyis

$$B'(y) = |B(y - x)|, \quad \text{ha } y \geq x,$$

$$\tau = \inf\{y \geq \max(x, 0) : B'(y) = 0\},$$

$$R(y) = B'(y \wedge \tau).$$

Az így kapott R-rel azonos eloszlású folyamatokat nevezzük visszaverődő-elnyelődő Wiener-folyamatnak vagy RAB-folyamatnak (reflecting/absorbing Brownian motion), mely az x időpontban a $h > 0$ szintről indul.

Most független RAB-folyamatok olyan rendszerét tekintjük, melyek más-más időpontokban más-más helyekől indulnak, de ha két folyamat találkozik, összeolvadnak.

Legyen $I = \mathbb{N}$ vagy $I = \{0, 1, \ldots, p\}$ indexhalmaz, ahol $p \in \mathbb{N}$. Tekintsük $\mathbb{E}$-beli pontoknak egy $(x_j, h_j)_{j\in I}$ sorozatát. Legyen $(R^j)_{j\in I}$ független RAB-folyamatok egy családja úgy, hogy R^j az x_j időpontban indul h_j szintről, azaz $R^j(y)$ $y \geq x_j$ esetén értelmes, és $R^j(x_j) = h_j$. Legyen $C^0 = R^0$, majd rekurzióval minden I-beli $j \geq 1$ indexre

$$\omega_j = \inf\left\{x \geq x_j : R^j(x) \in \left\{C^0(x), \ldots, C^{j-1}(x)\right\}\right\},$$
$$\nu_j = \min\left\{k \in \{0, \ldots, j-1\} : R^j(\omega_j) = C^k(\omega_j)\right\},$$
$$C^j(x) = \begin{cases} R^j(x) & \text{ha } x_j \leq x \leq \omega_j, \\ C^{\nu_j}(x) & \text{ha } \omega_j \leq x < \infty. \end{cases}$$

Ha I véges, akkor az $(C^0, \ldots, C^p)$ rendszert független, összeolvadó RAB-folyamatok véges családjának nevezzük, mely $((x_0, h_0), \ldots, (x_p, h_p))$-ből indul. Most az összeolvadó folyamatok a legkisebb indexű folyamat mentén haladnak tovább, de a rendszer eloszlása nem változik, ha itt más indexet tekintünk.

Általánosan, legyen A nem üres halmaz, és $\{(x_a, h_a) : a \in A\} \subset \mathbb{E}$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy $(C^a)_{a\in A}$ független, összeolvadó visszaverődő-elnyelődő Wiener-folyamatok $((x_a, h_a))_{a\in A}$-ból induló családja, ha A bármely $\{a_1, \ldots, a_n\}$ véges részhalmazára $(C^{a_1}, \ldots, C^{a_p})$ független, összeolvadó RAB-folyamatok $\left((x_{a_1}, h_{a_1}), \ldots, \left(x_{a_p}, h_{a_p}\right)\right)$-ból induló véges családja. Ilyenkor $(C^a)_{a\in A}$-t röviden FICRAB-rendszernek nevezzük (family of independent coalescing reflected-absorbed Brownian motions).

[5]-ben szerepel a következő tétel:

17. tétel. *Létezik olyan $\mathbb{F}^+ \ni (x, h, y) \mapsto \Lambda_{(x,h)}(y) \in \mathbb{R}_+$ valószínűségi változó, melyre*

1. *$\left(\Lambda_{(x,h)}\right)_{(x,h)\in\mathbb{E}}$ FICRAB-rendszer, mely $((x, h))_{(x,h)\in\mathbb{E}}$-ből indul;*
2. *1 valószínűséggel minden $(x, h) \in \mathbb{E}$-re $\Lambda_{(x,h)}(x) = h$;*
3. *1 valószínűséggel minden $(x_1, h_1), (x_2, h_2) \in \mathbb{E}$ és $z \geq y \geq \max\{x_1, x_2\}$ esetén*
$$\Lambda_{(x_1,h_1)}(y) < \Lambda_{(x_2,h_2)}(y) \Longrightarrow \Lambda_{(x_1,h_1)}(z) \leq \Lambda_{(x_2,h_2)}(z);$$
4. *1 valószínűséggel minden $x \leq y$-ra a $h \mapsto \Lambda_{(x,h)}(y)$ leképezés balról folytonos $(0, \infty)$-en.*

Ezekkel a tulajdonságokkal Λ eloszlása egyértelmű.

Most nemstandard eszközökkel szeretnénk ilyen Λ-t konstruálni. Ehhez kiindulópont az előbbi rendszer [5]-ben szereplő diszkrét megfelelője.

3.2. Az összeolvadó bolyongások rendszere

Most szimmetrikus bolyongások indulnak különböző időpontokból és szintekről, az előző szakaszban leírtakhoz hasonló módosításokkal.

Ehhez használjuk a következő jelöléseket:

$$\mathbb{G}^+ = \{(z,h) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : h + z \text{ páratlan és } h \geq 2\},$$

$$\mathbb{G}_0^+ = \{(z,h) \in \mathbb{Z} \times \{0,1\} : h + z \text{ páratlan}\} \setminus \{(-1,0)\}.$$

Legyen $(\xi(z,h), (z,h) \in \mathbb{G}^+)$ független valószínűségi változók családja úgy, hogy

$$P(\xi(z,h) = 1) = P(\xi(z,h) = -1) = \frac{1}{2}.$$

$(z,h) \in \mathbb{G}_0^+$ esetén determinisztikusan adjuk meg $\xi(z,h)$-t:

$$\xi(z,1) = \begin{cases} -1 & \text{ha } z \geq 0 \\ 1 & \text{ha } z \leq -2 \end{cases}$$

$$\xi(z,0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } z \geq 1 \\ -1 & \text{ha } z \leq -3 \end{cases}$$

A független, összeolvadó véletlen bolyongások családját a következőképpen definiáljuk. Minden $(z,h) \in \mathbb{G}^+$-re megadunk egy $y \mapsto L^+_{(z,h)}(y)$ bolyongást, melyet az $y \geq x$ egészekre definiálunk rekurzióval: $L^+_{(z,h)}(z) = h$, majd

$$L^+_{(z,h)}(y+1) = L^+_{(z,h)}(y) + \xi\left(y, L^+_{(z,h)}(y)\right).$$

Mivel a $(\xi(z,h), (z,h) \in \mathbb{G}^+)$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak, L^+ független, összeolvadó bolyongások családja, melynek értékei $\mathbb{N} \setminus \{1,0\}$-ből kerülnek ki. A $\mathbb{G}_0^+$-ra vonatkozó feltétel szerint pedig a nulla időpont előtt az 1 szint visszaverő, utána pedig nulla első elérése után felváltva a 0 és 1 értékeket veszi fel ez a folyamat. Ilyen értelemben ez az előrehaladó összeolvadó Wiener-folyamatok rendszerének diszkrét megfelelője.

3.3. A nemstandard konstrukció

Az előrehaladó rendszerre szeretnénk nemstandard eszközökkel konstrukciót adni, hasonlóképpen, mint ahogy a Wiener-folyamat esetében jártunk el.

14. definíció. *Az eddigi jelölésnek megfelelően, ha $k \leq l$ ${}^*\mathbb{Z}$-beli számok, akkor legyen $\{k, \dots, l\} = \{m \in {}^*\mathbb{Z} : k \leq m \leq l\}$.*

Legyen $M \in {}^*\mathbb{N}$ rögzített, és legyen $N = M^2 \in {}^*\mathbb{N}$. Az ultrahatványok segítségével megadott konstrukcióban: $N = (N_n)_{\mathcal{U}}$, $M = (M_n)_{\mathcal{U}}$, ahol $N_n = M_n^2$. Jelölje $\mathbb{H}^+$ azt a halmazt, melyet úgy kapunk, hogy az alábbi „infinitezimális rácsból” elhagyjuk a $\left(-\frac{1}{N}, 0\right)$ pontot:

$$\left\{\left(\frac{k}{N}, \frac{l}{M}\right) : k \in \left\{-N^2, \ldots, N^2\right\},\ l \in \left\{0, \ldots, M^2\right\},\ k + l \text{ páratlan}\right\}.$$

A $k + l \in {}^*\mathbb{Z}$ szám akkor páratlan, ha $\mathcal{U}$-beli sok koordinátája páratlan.

Valószínűségi mezőnk alaphalmaza az alábbi lesz:

$$\Omega = \left\{\xi : \mathbb{H}^+ \to \{-1, 1\} \text{ belső függvény, melyre (1)-(4) teljesül}\right\}.$$

A peremfeltételek az alábbiak:

1. $\xi\left(\frac{k}{N}, \frac{1}{M}\right) = 1$, ha $k < 0$, $k \in \{-N^2, \ldots, -2\}$;
2. $\xi\left(\frac{k}{N}, 0\right) = -1$, ha $k < 0$, $k \in \{-N^2, \ldots, -3\}$;
3. $\xi\left(\frac{k}{N}, \frac{1}{M}\right) = -1$, ha $k \geq 0$, $k \in \{0, \ldots, N^2\}$;
4. $\xi\left(\frac{k}{N}, 0\right) = 1$, ha $k \geq 0$, $k \in \{1, \ldots, N^2\}$.

Ω belső halmaz, hiszen ha $\xi \in \Omega$, akkor ξ belső függvény, ezért megadható $\xi_n : \mathbb{H}_n^+ \to \{-1, 1\}$ függvények sorozatával, ahol

$$\mathbb{H}_n^+ = \left\{\left(\frac{k}{N_n}, \frac{l}{M_n}\right) : k \in \left\{-N_n^2, \ldots, N_n^2\right\},\ l \in \left\{0, \ldots, M_n^2\right\},\ 2 \nmid k + l\right\},$$

és ξ_n teljesíti az alábbi peremfeltételeket:

1. $\xi\left(\frac{k}{N_n}, \frac{1}{M_n}\right) = 1$, ha $k < 0$, $k \in \{-N_n^2, \ldots, -2\}$;
2. $\xi\left(\frac{k}{N_n}, 0\right) = -1$, ha $k < 0$, $k \in \{-N_n^2, \ldots, -3\}$;
3. $\xi\left(\frac{k}{N_n}, \frac{1}{M_n}\right) = -1$, ha $k \geq 0$, $k \in \{0, \ldots, N_n^2\}$;
4. $\xi\left(\frac{k}{N_n}, 0\right) = 1$, ha $k \geq 0$, $k \in \{1, \ldots, N_n^2\}$.

Az ilyen ξ_n függvények halmazát jelölje Ω_n, és legyen P_n egyenletes valószínűségi mérték Ω_n-n.

Ω_n véges halmaz, hiszen egy véges sok pontból álló rács pontjaihoz véges sokféleképpen rendelhetünk -1-t vagy 1-t. A peremfeltételeket is teljesítő ξ_n

függvények száma $2^{N_n^3-N_n^2+N_n/2-1}$, ha N_n páros, és $2^{N_n^3-N_n^2+N_n/2-1/2}$, ha N_n páratlan. Vagyis Ω hipervéges.

Legyen $\mathcal{A}$ az Ω belső részhalmazaiból álló algebra. Ekkor minden $A \in \mathcal{A}$ hipervéges belső halmaz, ezért értelmes az alábbi $\mu : \mathcal{A} \to {}^*[0,\infty)$ függvény:

$$\mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

ahol $|\cdot|$ a belső számosságot jelöli a 8. definíció értelmében. μ végesen additív belső függvény, $\mu(\Omega) = 1$, ezért a 2.2. szakasz szerint μ-ből lehet Loeb-mértéket származtatni. Jelölje $\mathcal{D} = L(\mathcal{A})$ az így kapott Loeb-algebrát, P pedig az μ-ből kapott μ_L Loeb-mértéket. Az $(\Omega, \mathcal{D}, P)$ standard valószínűségi mezőt fogjuk vizsgálni, ezen adjuk meg véletlen folyamatok egy családját.

Legyen $(x,h) \in \mathbb{H}^+$, és $y \geq x$ úgy, hogy $y \cdot N \in \{-N^2, \ldots, N^2\}$. Olyan nemstandard véletlen folyamatot adunk meg, mely az x időpontban h-ból indul, és az $y \geq x$ időpontban felvett értékét $\chi_{(x,h)}(y)$ jelöli. Rögzített $\xi \in \Omega$-ra legyen definíció szerint

$$\chi_{(x,h)}(x) = h, \qquad (x,h) \in \mathbb{H}^+,$$

majd rekurzióval definiálható olyan $\chi_{(x,h)}(y)$ belső függvény, melyre minden $(x,h) \in \mathbb{H}^+$ és $y \geq x$, $y \cdot N \in \{-N^2, \ldots, N^2\}$ esetén

$$\chi_{(x,h)}\left(y + \frac{1}{N}\right) = \chi_{(x,h)}(y) + \frac{1}{\sqrt{N}}\xi\left(y, \chi_{(x,h)}(y)\right).$$

Látható, hogy χ értékei megfelelő nemstandard rácspontok lesznek.

Ennek segítségével adjuk meg standard véletlen folyamatok egy családját az $(\Omega, \mathcal{D}, P)$ valószínűségi mezőn. Korábbi jelölés szerint $\mathbb{E} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$, illetve $\mathbb{F}^+ = \{(x,h,y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R} : y \geq x\}$. Legyen

$$\beta_{(x,h)}(y) = {}^\circ\chi_{\left(\frac{[xN]}{N}, \frac{[hM]}{M}\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right), \qquad (x,h,y) \in \mathbb{F}^+.$$

χ $\mathcal{A}$-mérhető belső függvény, ezért a 9. tétel szerint β Loeb-mérhető rögzített $\mathbb{F}^+$-beli pontra. χ definíciójából világos, hogy ha $(x,h) \in \mathbb{E}$, akkor

$$\beta_{(x,h)}(x) = {}^\circ\chi_{\frac{[xN]}{N}, \frac{[hM]}{M}}\left(\frac{[xN]}{N}\right) = {}^\circ\left(\frac{[hM]}{M}\right) = h.$$

18. állítás. *Ha* $(x,h) \in \mathbb{E}$ *rögzített, akkor* $\beta_{(x,h)}(y)$ *elnyelődő-visszaverődő Wiener-folyamat.*

Bizonyítás. Legyen röviden $\beta(y) = \beta_{(x,h)}(y)$, illetve $\chi(y) = \chi_{\left(\frac{[xN]}{N}, \frac{[hM]}{M}\right)}(y)$. Bővítsük ki a valószínűségi mezőt, és vezessük be a következőket:

$$\mathbb{H} = \left\{ \left(\frac{k}{N}, \frac{l}{M} \right) : k \in \left\{ -N^2, \ldots, N^2 \right\}, l \in \left\{ -N, \ldots, N \right\}, k + l \text{ páratlan} \right\};$$

$$\Omega' = \{\eta : \mathbb{H} \to \{-1, 1\} \text{ belső függvény}\};$$
$$\mathcal{A}' = \{A \subset \Omega' : A \text{ belső halmaz}\};$$
$$\mu' : \mathcal{A}' \to {}^*[0, \infty), \qquad \mu'(A') = \frac{|A'|}{|\Omega'|}.$$

A definíciók értelmesek, Ω' most is hipervéges belső halmaz, μ' végesen additív, $\mu'(\Omega') = 1$, így beszélhetünk a $P' = \mu'_L$ μ'-ből származatott Loeb-mértékről. Értelmezhető az α nemstandard véletlen folyamat:

$$\alpha\left(\frac{[xN]}{N}\right) = \frac{[hM]}{M},$$

$$\alpha\left(y + \frac{1}{N}\right) = \alpha(y) + \frac{1}{\sqrt{N}} \eta(y, \alpha(y)), \ y \geq \frac{[xN]}{N}, \ yN \in \left\{ -N^2, \ldots, N^2 \right\}.$$

A nulla időpont előtt $\left|\alpha(y) - \frac{1}{N}\right|$ μ' szerinti eloszlása megegyezik $\chi(y)$ μ szerinti eloszlásával, ugyanis a kezdőpontban értékük egyenlő, ezután mindkét folyamat $\frac{1}{N}$-nél nagyobb szintű pontokban $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel lép lefelé és felfelé, $\frac{1}{N}$ szint esetén biztosan felfelé, és a lépések ugyanakkorák. Ez elmondható a két folyamat $\chi^{(n)}$ illetve $\alpha^{(n)}$ koordinátafüggvényeire is.

Ebből következik, hogy ha véges sok $y_1, \ldots, y_k \geq x$ időpontban nézzük őket, $\beta(y) = {}^\circ\chi\left(\frac{[yN]}{N}\right)$ eloszlása P szerint és ${}^\circ\left|\alpha(y) - \frac{1}{N}\right|$ eloszlása P' szerint megegyezik, hiszen ahogy a Wiener-folyamatnál láttuk:

$$P(\beta(y_i) \leq a_i, \ i = 1, \ldots, s) = \lim_{m \to \infty} P\left(\chi(y_i) < a_i + \frac{1}{m}, \ i = 1, \ldots, s\right) =$$
$$= \lim_{m \to \infty} {}^\circ\mu\left(\chi(y_i) < a_i + \frac{1}{m}, \ i = 1, \ldots, s\right) =$$
$$= \lim_{m' \to \infty} {}^\circ\mu'\left(\left|\alpha(y_i) - \frac{1}{N}\right| < a_i + \frac{1}{m}, \ i = 1, \ldots, s\right) =$$
$$= P'\left({}^\circ\left|\alpha(y_i) - \frac{1}{N}\right| \leq a_i, \ i = 1, \ldots, s\right).$$

Másrészt $^\circ \left|\alpha(y) - \frac{1}{N}\right| = |\ ^\circ\alpha(y)|$, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\left|\left|\alpha(y) - \frac{1}{N}\right| - |\ ^\circ\alpha(y)|\right| \leq \left|\alpha(y) - \frac{1}{N} -\ ^\circ\alpha(y)\right| \approx 0.$$

Tehát mivel a véges eloszlások megegyeznek, β P szerinti eloszlása megegyezik $|^\circ\alpha|$ P' szerinti eloszlásával. $^\circ\alpha$ P' szerint Wiener-folyamat, hiszen ugyanúgy áll elő, mint ahogy a 2.4. szakaszban konstrukciót adtunk a Wiener-folyamatra, csak bővebb valószínűségi mezővel. Vagyis β eloszlása a nulla időpont előtt valóban visszaverődő Wiener-folyamat eloszlása.

Nézzük $y \geq 0$ esetét, először tegyük fel, hogy $x \geq 0$.

2. lemma. *$x \geq 0$ esetén 1 valószínűséggel*

$$\inf\left\{y \in \mathbb{R} : y \geq x, \exists k \in \left\{0, \ldots, N^2\right\} : x \leq \frac{k}{N} \leq y,\ ^\circ\chi\left(\frac{k}{N}\right) = 0\right\} =$$
$$= \inf\left\{y \in \mathbb{R} : y \geq x, \exists k \in \left\{0, \ldots, N^2\right\} : x \leq \frac{k}{N} \leq y,\ \chi\left(\frac{k}{N}\right) = 0\right\}.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $x = 0$. Világos, hogy a bal oldal nem lehet kisebb a jobb oldalnál, az ott szereplő halmaz szűkebb. Tegyük fel, hogy a bal oldal nagyobb a jobb oldalnál. Ekkor van olyan z racionális szám, mely a két oldal értéke közé esik. Ezért elég belátni, hogy egy rögzített z nulla valószínűséggel esik a két oldal értéke közé, azaz nulla valószínűséggel teljesül, hogy minden $k \in \{0, \ldots, N^2\}$-ra, melyre $0 \leq \frac{k}{N} \leq z$, $\chi\left(\frac{k}{N}\right) > 0$, de létezik ugyanilyen k, melyre $^\circ\chi\left(\frac{k}{N}\right) = 0$.

Ha ez teljesül, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, hogy minden $k \in \{0, \ldots, N^2\}$-ra, melyre $0 \leq \frac{k}{N} \leq z$, $\chi\left(\frac{k}{N}\right) > 0$, de létezik ugyanilyen k, melyre $^\circ\chi\left(\frac{k}{N}\right) < \varepsilon$. Jelöljük ezt az eseményt $A(\varepsilon)$-nal. Ezek ε szerint monoton fogyó események. A 4. állítás alapján $A(\varepsilon)$ belső halmaz, mégpedig $(A(\varepsilon))_n$ az alábbi módon adható meg:

$$\left\{k_n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{k_n}{N_n} \leq z \Rightarrow \chi^{(n)}\left(\frac{k_n}{N_n}\right) > 0, \text{ és } \exists \text{ ilyen } k_n : \chi^{(n)}\left(\frac{k_n}{N_n}\right) < \varepsilon\right\}.$$

Ha ugyanis n-ek $\mathcal{U}$-beli halmazára ez az esemény teljesül, akkor valóban mindig pozitív értékeket kapunk, ugyanakkor $k = (k_n)_{\mathcal{U}}$-ra χ ε-nál közelebb kerül a nullához, és ugyanígy fordítva. Tehát a Loeb-mérték definíciója szerint $P(A(\varepsilon)) =\ ^\circ\mu(A(\varepsilon)) =\ ^\circ(\mu_n(A_n(\varepsilon)))$.

ε rögzített, így elég olyan n-eket nézni, melyre $\varepsilon M_n > 1$. μ_n szerint $\chi^{(n)}$ az $x_n = 0$, $h_n = \frac{[hM_n]}{M_n}$ kezdőpontból indítva olyan bolyongás $\frac{1}{\sqrt{N_n}}$-szerese, amely 1-ből 0-ba, 0-ból 1-be megy, a többi pontból pedig 1/2-1/2 valószínűséggel megy egyet le vagy fel. A bolyongás addig megy, amíg $\frac{k_n}{N_n} \leq z$, azaz $L =$

$[N_n z]$ lépésből áll. Ha tehát a folyamat M_n-szeresét nézzük, akkor az $A(\varepsilon)_n$ esemény így fogalmazható: a folyamat $H = h_n M_n$-ből indulva eléri εM_n-t, de nem éri el 0-t úgy, hogy 1-ből mindenképpen lefelé lép, azaz az 1-t is legfeljebb az utolsó lépésben éri el. Ezért legyen S_t egyszerű szimmetrikus bolyongás valamely $\mathbb{P}$ mérték szerint, amely a 0-ból indul, és L lépést tesz. Ezzel

$$\mu_n\left(A(\varepsilon)_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\exists\, 0 \leq t \leq L:\ S_t + H \leq \varepsilon M_n,\ \nexists\, 0 \leq t \leq L:\ S_t + H = 1\right).$$

Számítsuk ki a jobb oldalt a tükrözési elv segítségével $H > \varepsilon M_n$ esetén:

$$\begin{gathered}\mathbb{P}\left(\exists\, 0 \leq t \leq L:\ S_t + H \leq \varepsilon M_n,\ \nexists\, 0 \leq t \leq L:\ S_t + H = 1\right) = \\ = \mathbb{P}\left(\exists\, 0 \leq t \leq L:\ S_t + H \leq \varepsilon M_n\right) - \mathbb{P}\left(\exists\, 0 \leq t \leq L:\ S_t + H = 1\right) \leq \\ \leq 2\mathbb{P}\left(S_L \leq -H + \varepsilon M_n\right) - 2\mathbb{P}\left(S_L < -H + 1\right) = \\ = 2\mathbb{P}\left(-H + 1 \leq S_L \leq -H + \varepsilon M_n\right) \leq 2\mathbb{P}\left(-\varepsilon M_n \leq S_L \leq \varepsilon M_n\right).\end{gathered}$$

Az utolsó becslés onnan kapható, hogy S_L nullából induló egyszerű szimmetrikus bolyongás, így S_L eloszlását binomiális együtthatók adják meg, melyek $[L/2]$-ig monoton növők, onnantól monoton csökkenők. Ezért egy $\varepsilon M_n - 1$ hosszúságú intervallum mértéke nem lehet nagyobb, mintha a nulla köré mérünk fel ugyanilyen hosszúságú intervallumot felfelé és lefelé.

Nézzük a másik esetet, amikor $1 \leq H \leq \varepsilon M_n$. Ilyenkor szintén a tükrözési elvvel:

$$\begin{gathered}\mathbb{P}\left(\exists\, 0 \leq t \leq L:\ S_t + H \leq \varepsilon M_n,\ \nexists\, 0 \leq t \leq L:\ S_t + H = 1\right) = \\ = \mathbb{P}\left(\nexists\, 0 \leq t \leq L:\ S_t + H = 1\right) = 1 - 2\mathbb{P}\left(S_L < -H + 1\right) \leq \\ \leq 1 - 2\mathbb{P}\left(S_L < -\varepsilon M_n + 1\right) = 2\mathbb{P}\left(-\varepsilon M_n + 1 \leq S_L \leq 0\right) \leq \\ \leq 2\mathbb{P}\left(-\varepsilon M_n \leq S_L \leq \varepsilon M_n\right).\end{gathered}$$

A két esetre kapott közös felső becslést írjuk vissza az eredeti mértékekre, így kapjuk, hogy $\mathcal{U}$-beli sok n-re érvényes:

$$\mu_n\left(A_n(\varepsilon)\right) \leq 2\mathbb{P}\left(-\varepsilon M_n \leq S_L \leq \varepsilon M_n\right) = 2\mathbb{P}\left(\frac{-\varepsilon M_n}{\sqrt{L}} \leq \frac{S_L}{\sqrt{L}} \leq \frac{\varepsilon M_n}{\sqrt{L}}\right).$$

Mivel $L = [zN_n]$, $H = h_n M_n = [hM_n]$, $N_n = M_n^2$:

$$\mu_n\left(A_n(\varepsilon)\right) \leq 2\mathbb{P}\left(-\frac{\varepsilon M_n}{\sqrt{[zN_n]}} \leq \frac{S_{[zN_n]}}{\sqrt{[zN_n]}} \leq \frac{\varepsilon M_n}{\sqrt{[zN_n]}}\right).$$

A centrális határeloszlástételt alkalmazva, hasonlóan ahhoz, ahogy a 2.4. szakaszban láttuk, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}P\left(A(\varepsilon)\right) = {}& {}^{\circ}\left(\mu_n\left(A_n(\varepsilon)\right)\right)_{\mathcal{U}} \leq \\ & \leq 2\left(\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{z}}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{z}}\right)\right) \leq 4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varepsilon}{\sqrt{z}}.\end{aligned}$$

Vagyis megszámlálható metszetet képezve valamely nullához tartó ε_k sorozattal:

$$P\left(\bigcap_{\varepsilon>0} A(\varepsilon)\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(A\left(\varepsilon_k\right)\right) \leq \lim_{k\to\infty} 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{z}}\varepsilon_k = 0,$$

hiszen z rögzített. Láttuk, hogy ez elegendő, ebből következik, hogy a lemmában szereplő esemény komplementere nulla valószínűségű. $\square$

Visszatérve az állítás bizonyításához, $x \leq 0$-ra is szeretnénk hasonló egyenlőséget bizonyítani. Itt mindkét esetben csak az $y \geq 0$ időpontokat vesszük figyelembe, ennek megfelelően S most is L lépésből áll, de csak valamilyen rögzített T lépésszám utáni szintteléréseket vesszük figyelembe. Alkalmazzunk S_T értéke szerint a feltételes valószínűség tételét. Láttuk, hogy rögzített $H = S_T$ nullabeli szint mellett olyan felső becslést tudunk adni, mely H-tól nem függ, így a bizonyítás átvihető erre az esetre is.

Itt is a kibővített valószínűségi mezőt használjuk, elég azt belátni, hogy β eloszlása P szerint megegyezik ${}^{\circ}\alpha_\tau$ P' szerinti eloszlásával, ahol ${}^{\circ}\alpha$ Wiener-folyamat a τ időpontban éri el a 0 időpont után először a 0 szintet. A lemma kiegészítéséből következik, hogy 1 valószínűséggel minden $y \geq \tau$-ra van olyan $0 \leq \frac{k}{N} \leq y$, hogy $\chi\left(\frac{k}{N}\right) = 0$. A valószínűségi mező definíciója szerint 0-ból biztosan $1/M$-be, $1/M$-ből biztosan 0-ba lépünk, így $\chi\left(\frac{[yN]}{N}\right)$ értéke csak 0 vagy $1/M$ lehet, azaz $\beta(y) = {}^{\circ}\chi(y) = 0$. τ előtt $\beta = {}^{\circ}\chi$. Így $\beta = ({}^{\circ}\alpha)_\tau$, β valóban a nulla időpont után 0-ban elnyelődő Wiener-folyamat.

Ezzel beláttuk, hogy $\beta_{(x,h)}(y)$ valóban elnyelődő-visszaverődő Wiener-folyamat rögzített (x,h)-ra. $\square$

19. állítás. *Ha $(x_1, h_1) \in \mathbb{E}$, $(x_2, h_2) \in \mathbb{E}$ rögzített, akkor $\beta_1(y) = \beta_{(x_1,h_1)}(y)$ és $\beta_2(y) = \beta_{(x_2,h_2)}(y)$ független, összeolvadó, visszaverődő-elnyelődő Wiener-folyamatok, azaz ha $\tau = \inf\{y \geq \max(x_1, x_2) : \beta_1(y) = \beta_2(y)\}$, akkor 1 valószínűséggel minden $z \geq \tau$-ra $\beta_1(z) = \beta_2(z)$.*

Bizonyítás. $x_1 \geq x_2$ feltehető. Azt szeretnénk belátni, hogy 1 valószínűséggel

$$\inf\left\{y \in \mathbb{R} : \exists k \in {}^{*}\mathbb{N},\ x_2 \leq \frac{k}{N} \leq y,\ {}^{\circ}\chi_1\left(\frac{k}{N}\right) = {}^{\circ}\chi_2\left(\frac{k}{N}\right)\right\} =$$

$$= \inf\left\{y \in \mathbb{R} : \exists k \in {}^{*}\mathbb{N},\ x_2 \leq \frac{k}{N} \leq y,\ \chi_1\left(\frac{k}{N}\right) = \chi_2\left(\frac{k}{N}\right)\right\},$$

hiszen ebből ugyanúgy következik az állítás, mint az előző esetben.

Először szeretnénk áttérni Wiener-folyamatokra, ahol β_i helyett a korábban látott $\gamma_i(y) = {}^{\circ}\alpha_i\left(\frac{[yN]}{N}\right)$ folyamatok szerepelnek.

A nulla időpont előtt β helyett $|\gamma|$ használható a P' mérték szerint, így ha $\beta_1(y) = \beta_2(y)$, akkor $\beta_1(y) = \gamma_1(y)$ vagy $\beta_1(y) = -\gamma_1(y)$. Ugyanakkor ha $\beta_1(y) \neq \gamma_1(y)$, akkor egyik egyenlőség sem állhat fenn. Másrészt a nulla időpont után, ha $\beta_1(y) = \beta_2(y) > 0$, akkor a 2. lemma bizonyításában használt gondolatmenetben olyan racionális z is található a folytonosság miatt, hogy a folyamatok z-ig nem jártak nullában. Ha pedig $\beta_1(y) = \beta_2(y) = 0$, akkor a 2. lemma szerint megegyezik a két infimum.

Tehát elég a γ folyamatokat nézni, és azt belátni, hogy 1 valószínűséggel

$$\inf\left\{y \in \mathbb{R} :\ \exists k \in {}^*\mathbb{N},\ x_2 \leq \frac{k}{N} \leq y,\ {}^{\circ}\alpha_1\left(\frac{k}{N}\right) = {}^{\circ}\alpha_2\left(\frac{k}{N}\right)\right\} =$$

$$= \inf\left\{y \in \mathbb{R} :\ \exists k \in {}^*\mathbb{N},\ x_2 \leq \frac{k}{N} \leq y,\ \alpha_1\left(\frac{k}{N}\right) = \alpha_2\left(\frac{k}{N}\right)\right\}.$$

Ennek bizonyítása is a 2. lemmáéhoz hasonlóan megy. Legyen $z \in \mathbb{R}$, $z \geq x_2$, $\alpha_i(y) = \alpha_i\left(\frac{[yN]}{N}\right)$, $i = 1, 2$-re, ahol α_i az $\left(\frac{[xN]}{N}, \frac{[hM]}{M}\right)$ pontból indul. Legyen $A(\varepsilon)$ az alábbi esemény: ha $k \in {}^*\mathbb{N}$, $x \leq \frac{k}{N} \leq z$, akkor $\alpha_1\left(\frac{k}{N}\right) \neq \alpha_2\left(\frac{k}{N}\right)$ ugyanakkor létezik ilyen k, melyre $\left|\alpha_1\left(\frac{k}{N}\right) - \alpha_2\left(\frac{k}{N}\right)\right| < \varepsilon$. Most is $A(\varepsilon)$ belső halmaz, és elég belátni, hogy rögzített z-re $\lim_{\varepsilon\to 0} P'(A(\varepsilon)) = 0$.

Szintén a lemma bizonyításában használt gondolatmenettel kapjuk, hogy ha S_t, T_t a nulla időpontban a 0-ból induló, független, egyszerű szimmetrikus bolyongások valamely $\mathbb{P}$ mérték szerint, akkor $\mu_n'\left(A(\varepsilon)_n\right)$ legfeljebb

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{L} : S_t + H_1 \neq T_{t-L_1} + H_2, \exists t \in \mathcal{L} : |S_t + H_1 - T_{t-L_1} - H_2| \leq \varepsilon M_n\right),$$

ahol az alábbi jelöléseket használjuk:

$$L_1 = [x_2 N_n] - [x_1 N_n],\ L_2 = [z N_n] - [x_1 N_n],\ \mathcal{L} = \{t \in \mathbb{N} : L_1 \leq t \leq L_2\},$$

$$H_1 = [h_1 M_n],\ H_2 = [h_2 M_n].$$

Azaz S_t elindul H_1 magasságból, az első L_1 lépése után pedig elindul T_t is H_2 magasságból, és innen a rögzített z-nek megfelelő időpontig nézzük a két bolyongás különbségét. Két egyszerű szimmetrikus bolyongás különbsége $1/4$ valószínűséggel lép kettőt fel, ugyanígy kettőt le, $1/2$ valószínűséggel helyben marad. A szimmetria miatt ezekre a megfelelően súlyozott trajektóriákra is alkalmazhatjuk a tükrözési elvet, így itt is feltételes valószínűséget számítva S_{L_1} szerint:

$$\mu_n'\left(A(\varepsilon)_n\right) \leq 2\mathbb{P}\left(0 \leq S_{L_2-L_1} + H_1 - T_{L_2-L_1} - H_2 \leq \varepsilon M_n\right).$$

$T_{L_2-L_1}$ szerint számítsunk feltételes várható értéket, majd használjuk fel a binomiális együtthatók monotonitási tulajdonságait:

$$\mu_n'\left(A\left(\varepsilon\right)_n\right) \leq \mathbb{P}\left(-\varepsilon M_n \leq S_{L_2-L_1} \leq \varepsilon M_n\right).$$

Mivel $\sqrt{L_2-L_1}\ M_n$-nek véges konstansszorosa, a bizonyítás a centrális határeloszlástétel alapján ugyanúgy fejezhető be, mint a 2. lemmáé. $\square$

20. állítás. *Biztosan teljesül, hogy ha* (x_1,h_1), *és* (x_1,h_1) $\mathbb{E}$*-beliek,* $z \geq y \geq \max\{x_1,x_2\}$, *és* $\beta_{(x_1,h_1)}(y) < \beta_{(x_2,h_2)}(y)$, *akkor* $\beta_{(x_1,h_1)}(z) \leq \beta_{(x_2,h_2)}(z)$.

Bizonyítás. $\beta_{(x_1,h_1)}(y) < \beta_{(x_2,h_2)}(y)$-ből következik, hogy

$$\chi_{\left(\frac{[x_1N]}{N},\frac{[h_1M]}{M}\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right) < \chi_{\left(\frac{[x_2N]}{N},\frac{[h_2M]}{M}\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right),$$

és hogy ez a két érték nem végtelenül közeli. Vagyis $\mathcal{U}$-beli sok $n \in \mathbb{N}$-re teljesülnie kell, hogy

$$\chi^{(n)}_{\left(\frac{[x_1N_n]}{N_n},\frac{[h_1M_n]}{M_n}\right)}\left(\frac{[yN_n]}{N_n}\right) < \chi^{(n)}_{\left(\frac{[x_2N_n]}{N_n},\frac{[h_2M_n]}{M_n}\right)}\left(\frac{[yN_n]}{N_n}\right).$$

Rögzített $n \in \mathbb{N}$-re pedig világos, hogy a trajektóriák nem keresztezhetik egymást, hiszen csak olyan pontokat használunk, ahol a koordináták összege páratlan, és ha két trajektória találkozik egy pontban, akkor az ottani ξ érték jelöli ki mindkettő folytatását, azaz ugyanoda lépnek tovább. Ezért $\frac{[zN_n]}{N_n}$-ben fennáll az egyenlőtlenség ugyanazokra az $n \in \mathbb{N}$-ekre, ezek $\mathcal{U}$-beli halmazt alkotnak. Vagyis z-ben a megfelelő χ-kre teljesül az egyenlőtlenség. Standard részt véve kapjuk a β-ra vonatkozó állítást. $\square$

Eddigi állításaink alapján az látható, hogy β teljesíti a 17. tétel első három feltételét, a negyediket azonban nem feltétlenül. Ezért β helyett egy másik meghatározással adott folyamatot tekintünk. Az alábbi állítások mutatják, hogy ez balról folytonos, miközben az első három tulajdonság továbbra is érvényes rá.

15. definíció. *Definiáljuk véletlen folyamatok egy családját, legyen minden* $(x,h) \in \mathbb{E}$ *pontra és* $y \geq x$*-re* $\Lambda_{(x,h)}(y)$ *a következő:*

$$\inf\left\{ {}^{\circ}\chi_{\left(\frac{[xN]}{N},\overline{h}\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right) : \overline{h} \leq \frac{[hM]}{M},\ \overline{h} \approx \frac{[hM]}{M},\ \overline{h} \in \left\{0,\ldots,M^2\right\}\right\}.$$

Ez értelmes, hiszen valós számokból álló, nem üres halmaz infimumát számítjuk ki.

21. állítás. *1 valószínűséggel a $h \mapsto \Lambda_{(x,h)}(y)$ függvény balról folytonos.*

Bizonyítás. A bizonyításban x és y rögzített, így Λ és χ paramétereként csak a szintet tüntetjük fel. Világos, hogy $\overline{h} \mapsto \chi\left(\overline{h}\right)$ monoton növő függvény, ezért Λ is ilyen. Ezért elég belátni, hogy ha $\mathbb{R} \ni h_k \to h \in \mathbb{R}$ monoton növően, és valamilyen T valós számra $\Lambda(h_k) \le T$, akkor $\Lambda(h) \le T$.

A monotonitás miatt elég a $h_k = h - \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ esetet nézni. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített valós szám. Λ definíciója szerint $\Lambda(h_k) \le T$-ből az következik, hogy valamely $\overline{h}_k \le h_k$, $\overline{h}_k \approx \frac{[h_k M]}{M}$, $\overline{h}_k M \in \{0, \ldots, N\}$ nemstandard szintre $^\circ\chi\left(\overline{h}_k\right) \le T + \varepsilon$, és így $\chi\left(\overline{h}_k\right) \le T + \varepsilon$ is teljesül. Tehát van olyan $\overline{h}_k$ sorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\overline{h}_k M \in \{0, \ldots, N\}, \quad h_k - \frac{1}{k} = h - \frac{2}{k} \le \overline{h}_k \le \frac{[h_k M]}{M} \le \frac{[hM]}{M}, \quad \chi\left(\overline{h}_k\right) \le T + \varepsilon.$$

Az 1. lemma szerint a sorozat kiterjeszthető $\left(\overline{h}_k\right)_{k \in {}^*\mathbb{N}}$ belső sorozattá. Mivel χ belső függvény, a 4. állítás, a belső definíció elve szerint azok a $k \in {}^*\mathbb{N}$ indexek, melyekre a fenti tulajdonságok teljesülnek, belső halmazt alkotnak. h_k választása szerint ez a halmaz minden természetes számot tartalmaz, ezért a 3. állítás szerint van végtelen nagy eleme is, azaz van olyan $K \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, melyre

$$\overline{h}_K M \in \{0, \ldots, N\}, \quad h - \frac{2}{K} \le \overline{h}_K \le \frac{[h_K M]}{M} \le \frac{[hM]}{M}, \quad \chi\left(\overline{h}_K\right) \le T + \varepsilon.$$

Mivel $\frac{[hM]}{M} \approx h$, és $\frac{2}{K} \approx 0$, a második feltételből következik, hogy $\overline{h}_K \approx \frac{[hM]}{M}$, így $\overline{h}_K$-t figyelembe vesszük az infimum kiszámításakor. Vagyis

$$\Lambda(h) \le {}^\circ\chi\left(\overline{h}_K\right) \le {}^\circ(T + \varepsilon) = T + \varepsilon.$$

Tehát minden $\varepsilon > 0$ valós számra $\Lambda(h) \le T + \varepsilon$, amiből $\Lambda(h) \le T$ következik, és ez elegendő a balról folytonossághoz. □

22. állítás. *1 valószínűséggel, ha (x_1, h_1), $(x_2, h_2) \in \mathbb{E}$, továbbá $z > y \ge \max(x_1, x_2)$, és $\Lambda_{(x_1,h_1)}(y) < \Lambda_{(x_2,h_2)}(y)$, akkor $\Lambda_{(x_1,h_1)}(z) \le \Lambda_{(x_2,h_2)}(z)$.*

Bizonyítás. A feltételből következik, hogy létezik olyan $\overline{h}_1$, melyre $\overline{h}_1 M \in \{0, \ldots, N\}$, $\overline{h}_1 \le \frac{[h_1 M]}{M}$, $\overline{h}_1 \approx \frac{[h_1 M]}{M}$, és minden olyan $\overline{h}_2$-re, melyre $\overline{h}_2 M \in \{0, \ldots, N\}$, $\overline{h}_2 \le \frac{[h_2 M]}{M}$, $\overline{h}_2 \approx \frac{[h_2 M]}{M}$, teljesül, hogy

$$\chi_{\left(\frac{[x_1 N]}{N}, \overline{h}_1\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right) < \chi_{\left(\frac{[x_2 N]}{N}, \overline{h}_2\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right).$$

Már láttuk, hogy ez utóbbi feltételből biztosan következik

$$\chi_{\left(\frac{[x_1 N]}{N},\overline{h}_1\right)}\left(\frac{[zN]}{N}\right) \leq \chi_{\left(\frac{[x_2 N]}{N},\overline{h}_2\right)}\left(\frac{[zN]}{N}\right),$$

hiszen $z > y$, és a megfelelő $\chi^{(n)}$ folyamatok sem keresztezik egymást.

Ez minden szóban forgó $\overline{h}_2$-re érvényes, standard részt véve is, így valóban $\Lambda_{(x_1,h_1)}(z) \leq \Lambda_{(x_2,h_2)}(z)$. □

23. állítás. *1 valószínűséggel minden $(x,h) \in \mathbb{E}$-re $\Lambda_{(x,h)}(x) = h$.*

Bizonyítás. Λ definíciója alapján, felhasználva, hogy ha $\left(x,\overline{h}\right) \in \mathbb{H}^+$, akkor $\chi_{\left(x,\overline{h}\right)}(x) = \overline{h}$, kapjuk, hogy

$$\Lambda_{(x,h)}(x) = \inf\left\{ {}^\circ\overline{h} : \ \overline{h} \leq h, \ \overline{h} \approx h, \overline{h}M \in \{0,\ldots,N\}\right\} = h,$$

hiszen $\overline{h} \approx h$-ból ${}^\circ\overline{h} = h$ következik. □

24. állítás. *Legyen $(x,h) \in \mathbb{H}^+$ és y rögzített, úgy, hogy $y > x$, x és y nem végtelenül közeliek, $yN \in \{-N^2,\ldots,N^2\}$. Ekkor 1 valószínűséggel bármely $(x',h') \in \mathbb{H}^+$ pontra és $y' \leq x'$-ra, melyre $y'N \in \{-N^2,\ldots,N^2\}$, továbbá $x' \approx x$, $h \approx h'$, $y \approx y'$, teljesül, hogy $\chi_{(x,h)}(y) = \chi_{(x',h')}(y')$.*

Bizonyítás. Mivel x és y nem végtelenül közeliek, választhatunk $y - x > \varepsilon > 0$ rögzített valós számot. Ha $n \in \mathbb{N}$, nézzük $[x_n N_n] - [\varepsilon N_n] \leq Z \leq [x_n N_n] + [\varepsilon N_n]$ egész számokra a következő folyamatot: $Y\left(\frac{Z}{N_n}\right)$ legyen a maximuma a $\chi^{(n)}_{(x',h')}\left(\frac{Z}{N_n}\right)$ értékeknek, úgy, hogy $(x',h') \in \mathbb{H}^+_n$, továbbá

$$\frac{1}{N_n}\left([x_n N_n] - [\varepsilon N_n]\right) \leq x' \leq \frac{Z}{N_n},$$

$$\frac{1}{M_n}\left([h_n M_n] - [\varepsilon M_n]\right) \leq h' \leq \frac{1}{M_n}\left([h_n M_n] + [\varepsilon M_n]\right).$$

Tegyük fel, hogy $[x_n N_n] - [\varepsilon N_n]$ és $[h_n M_n] - [\varepsilon M_n]$ összege páratlan, azaz a pontpár $\mathbb{H}^+_n$-beli. A másik esetben mindenhol eggyel magasabb szinteket nézünk, így módosítható a bizonyítás. Világos, hogy $Z = [x_n N_n] - [\varepsilon N_n]$-re $Y\left(\frac{Z}{N_n}\right)$ értéke $[h_n M_n] + [\varepsilon M_n]$. Ezután ha $Y\left(\frac{Z}{N_n}\right) \geq [h_n M_n] + [\varepsilon M_n]$, akkor $Y\left(\frac{Z+1}{N_n}\right)$ értéke $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz $Y\left(\frac{Z}{M_n}\right) - \frac{1}{M_n}$, illetve $Y\left(\frac{Z}{M_n}\right) - \frac{1}{M_n}$, hiszen a $\frac{Z}{N_n}$ időpont előtt induló folyamatok maximuma $Y\left(\frac{Z}{N_n}\right)$-ben jelenik meg, az éppen ekkor induló folyamatok közül pedig szintén csak a legfeljebb $[h_nM_n]+[\varepsilon M_n]$ szintről indulókat vesszük figyelembe, ez alacsonyabb, nem változtathat a maximumon. Ha viszont $Y\left(\frac{Z}{N_n}\right)$ értéke $[h_nM_n]+[\varepsilon M_n]-\frac{1}{M_m}$, akkor a $\frac{Z}{N_n}$ időpontban $[h_nM_n]+[\varepsilon M_n]$ magasságból induló folyamat miatt biztosan $Y\left(\frac{Z+1}{M_n}\right) = [h_nM_n]+[\varepsilon M_n]$. Vagyis $Y\left(\frac{Z}{N_n}\right)$ soha nem léphet a $[h_nM_n]+[\varepsilon M_n]-\frac{1}{M_m}$ szint alá, ezen kívül pedig egyforma eséllyel lép fel vagy le. Azaz egy visszaverődő szimmetrikus bolyongásról van szó, ahol a lépések nagysága $\frac{1}{M_n}$, a visszaverő szint pedig $[h_nM_n]+[\varepsilon M_n]-\frac{1}{M_m}$.

Ezek alapján, ha $(S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 0-ból induló egyszerű szimmetrikus bolyongás valamely $\mathbb{P}$ mérték szerint, és $z_0=([x_nN_n]+[\varepsilon N_n])\cdot\frac{1}{N_n}$, $Z_0=z_0N_n$, $L_0 = 2\,[\varepsilon N_n]$, akkor, mivel z_0-ig éppen L_0 lépés szükséges:

$$P_n\left(Y\left(\frac{Z_0}{N_n}\right)\geq [h_nM_n]+[\varepsilon M_n]+\left[\varepsilon^{1/4}M_n\right]\right)= \\ =\mathbb{P}\left(|S_{L_0}-1|\geq \varepsilon^{1/4}M_n\right)\leq 2\mathbb{P}\left(S_{L_0}\geq\varepsilon^{1/4}M_n\right).$$

Ha ugyanazon feltételek mellett $\underline{Y}\left(\frac{Z}{M_n}\right)$ jelöli a folyamatok minimumát, akkor hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$P_n\left(\underline{Y}\left(\frac{Z_0}{N_n}\right)\leq [h_nM_n]-[\varepsilon M_n]-\left[\varepsilon^{1/4}M_n\right]\right)\leq 2\mathbb{P}\left(S_{L_0}\leq -\varepsilon^{1/4}M_n\right).$$

Most megbecsüljük annak valószínűségét, hogy $H_1=[H_nM_n]+[\varepsilon M_n]+\left[\varepsilon^{1/4}M_n\right]$-re és $H_2=[H_nM_n]-[\varepsilon M_n]-\left[\varepsilon^{1/4}M_n\right]$-re a z_0 időpontban $\frac{H_1}{N_n}$ és $\frac{H_2}{N_n}$ szintekről induló folyamatok értéke y-ban megegyezik. Itt is M_n-nel szorozva két egyszerű szimmetrikus bolyongás különbségéről van szó, melyek függetlenek, de ha találkoznak, együtt haladnak tovább. A kezdeti távolság $H_0=H_1-H_2=2\,[\varepsilon M_n]+2\left[\varepsilon^{1/4}M_n\right]$, a lépések száma $L_1=[yN_n]-[z_0N_n]$. Alkalmazhatjuk a tükrözési elvet. Legyen $(T_t)_{n\in\mathbb{N}}$ S_t-től független, 0-ból induló egyszerű szimmetrikus bolyongás szintén a $\mathbb{P}$ mérték szerint. Ekkor

$$P_n\left(\chi^{(n)}_{\left(\frac{Z_0}{N_n},\frac{H_1}{M_n}\right)}(y_n)=\chi^{(n)}_{\left(\frac{Z_0}{N_n},\frac{H_2}{M_n}\right)}(y_n)\right)\geq 2\mathbb{P}\left(S_{L_1}-T_{L_1}\leq -H_0\right)= \\ =1-\mathbb{P}\left(-H_0<S_{L_1}-T_{L_1}<H_0\right)\geq 1-\mathbb{P}\left(-H_0<S_{L_1}<H_0\right)\geq \\ \geq 1-2\mathbb{P}\left(0\leq S_{L_1}\leq H_0\right),$$

ahol az utolsó becsléseket úgy kapjuk, hogy T_{L_1} szerint feltételes valószínűséget számítunk, és felhasználjuk, hogy a binomiális együtthatók monotonitási tulajdonságai szerint az adott hosszúságú intervallumok közül a nullára szimmetrikusnak legnagyobb a mértéke S_{L_1} eloszlása szerint.

Ha egyszerre teljesül, hogy az $Y\left(\frac{Z_0}{N_n}\right) \leq H_1$, $Y\left(\frac{Z_0}{N_n}\right) \geq H_2$, továbbá $\chi^{(n)}_{\left(\frac{Z_0}{N_n},\frac{H_1}{M_n}\right)}(y_n) = \chi^{(n)}_{\left(\frac{Z_0}{N_n},\frac{H_2}{M_n}\right)}(y_n)$, akkor biztos, hogy az (x,h) középpontú, 2ε oldalú négyzetből induló összes $\chi^{(n)}$ folyamat értéke y_n-ben megegyezik, hiszen a Z_0-beli legnagyobb és legkisebb értékekből induló folyamatok is találkoznak y_n-ig. A fenti becsléseket összevetve, H_0 értékét beírva kapjuk, hogy ennek valószínűsége legalább

$$1 - \mathbb{P}\left(0 \leq S_{L_1} \leq 2\left[\varepsilon M_n\right] + 2\left[\varepsilon^{1/4} M_n\right]\right) - 4\mathbb{P}\left(S_{L_0} \geq \varepsilon^{1/4} M_n\right).$$

A definíciók szerint $L_0 = 2\left[\varepsilon N_n\right]$ és $L_1 = \left[y N_n\right] - \left[\varepsilon N_n\right] - \left[x_n N_n\right]$, így ezt átírhatjuk:

$$1 - \mathbb{P}\left(0 \leq \frac{S_{L_1}}{\sqrt{L_1}} \leq \frac{2\left[\varepsilon M_n\right] + 2\left[\varepsilon^{1/4} M_n\right]}{\sqrt{L_1}}\right) - 4\mathbb{P}\left(\frac{S_{L_0}}{\sqrt{L_0}} \geq \frac{\varepsilon^{1/4} M_n}{\sqrt{2\left[\varepsilon N_n\right]}}\right).$$

A centrális határeloszlástétel alalpján ebből a becslésből azt kapjuk, hogy ha $A(\varepsilon)$ az az esemény, hogy az (x,h) középpontú, 2ε oldalú négyzetből induló χ folyamatok értéke y-ban megegyezik, és $A(\varepsilon) = \left(A(\varepsilon)_n\right)_{\mathcal{U}}$, ahol $A(\varepsilon)_n$ az az esemény, hogy az (x_n,h_n) középpontú, 2ε oldalú négyzetből induló $\chi^{(n)}$ folyamatok értéke y_n-ben megegyezik, akkor $P(A(\varepsilon)) =$

$$= {}^{\circ}\left(P_n\left(A(\varepsilon)_n\right)\right) \geq 1 - \left(1 - 2\Phi\left(\frac{\varepsilon + \varepsilon^{1/4}}{\sqrt{y - \varepsilon - x}}\right)\right) - 2\Phi\left(-\frac{1}{2\varepsilon^{1/4}}\right).$$

Látható, hogy ennek limesze $\varepsilon \to 0$ esetén 1. Ha ε csökken, akkor a $A(\varepsilon)$ ε halmazok bővülnek. Ezek alapján annak valószínűsége, hogy valamely $A(\varepsilon)$ bekövetkezik, 1. Ekkor pedig bármely, az állításban szereplő $x' \approx x$-re, $h' \approx h$-ra $\chi_{(x,h)}(y) = \chi_{(x',h')}(y)$, ellenkező esetben ugyanis minden ε-ra a 2ε oldalú négyzetből indulva nem találkozhat minden folyamat, egyik $A(\varepsilon)$ sem következhet be.

A fenti gondolatmenet érvényes úgy is, hogy y helyett egy olyan y_0 időpontot tekintünk, mely x és y közé esik, de egyikhez sincs végtelenül közel. y_0-nál bármilyen $y' \approx y$ időpont nagyobb, így ha a χ folyamatok értéke y_0-ban megegyezik, akkor minden későbbi időpontban is, ez világos a valószínűségi mező definíciójából. Ezért 1 valószínűséggel bármely, az állításban szereplő $x' \approx x$-re, $h' \approx h$-ra és $y' \approx y$-ra $\chi_{(x,h)}(y) = \chi_{(x',h')}(y')$. $\square$

25. állítás. *Λ FICRAB-folyamat, amely teljesíti a 17. tétel feltételeit.*

Bizonyítás. Az előző állítások alapján már csak azt kell belátni, hogy Λ FICRAB-folyamat. Az állítás bizonyításához véges sok $(x_1, h_1), \ldots, (x_k, h_k)$ $\mathbb{E}$-beli pontot kell rögzíteni, és az ezekből induló folyamatokat vizsgálni. A 24. állítást alkalmazva látható, hogy ha $y > x$ rögzített, akkor 1 valószínűséggel teljesül, hogy bármilyen $\overline{h}_1$-re, melyre $\overline{h}_1 M \in \{0, \ldots, N\}$ és $\overline{h}_1 \approx \frac{[h_1 M]}{M}$-re, fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\chi_{\left(\frac{[x_1 N]}{N}, \overline{h}_1\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right) = \chi_{\left(\frac{[x_1 N]}{N}, \frac{[h_1 M]}{M}\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right).$$

Szintén a $\chi^{(n)}$ folyamatokat tekintve ebből következik, hogy az y időpont után végig biztosan fennáll az egyenlőség. Ezt $y = x_1+1, x_1+1/2, x_1+1/3\ldots$-ra alkalmazva kapjuk, hogy 1 valószínűséggel minden $y > x_1$-re megegyezik a két folyamat. $y = x_1$-ben a standard részek között kapunk egyenlőséget. Tehát 1 valószínűséggel minden $y \leq x_1$-re és $\overline{h}_1 \approx h_1$, $\overline{h}_1 M \in \{0, \ldots, N\}$-ra

$${}^{\circ}\chi_{\left(\frac{[x_1 N]}{N}, \overline{h}_1\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right) = {}^{\circ}\chi_{\left(\frac{[x_1 N]}{N}, \frac{[h_1 M]}{M}\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right) = \beta_{(x_1, h_1)}(y_1),$$

visszatérve a korábbi jelöléshez. Infimumot véve kapjuk, hogy minden $y \geq x_1$-re $\Lambda_{(x_1, h_1)}(y) = \beta_{(x_1, h_1)}(y)$.

Mivel véges sok pontot rögzítettünk, 1 valószínűséggel minden $i = 1, \ldots, k$ esetén hasonló egyenlőség áll fenn. Így a $\Lambda_{(x_1, h_1)}(y), \ldots, \Lambda_{(x_k, h_k)}(y)$ folyamatok együttes eloszlása megegyezik a $\beta_{(x_1, h_1)}(y), \ldots, \beta_{(x_k, h_k)}(y)$ folyamatok együttes eloszlásával. A 19. állítás szerint pedig ez független, összeolvadó RAB-folyamatok családja, azaz FICRAB-rendszer. $\square$

3.4. A visszafelé haladó rendszer és az öntaszító folyamatok

Az előző szakaszban szereplő β folyamatok duálisát fogjuk definiálni az [5]-beli diszkrét esetnek megfelelően. Legyen

$$\mathbb{F}^- = \{(x, h, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R} : \; y \leq x\},$$

$$\mathbb{H}^- = \left\{\left(\frac{k}{N}, \frac{l}{M}\right) : k \in \left\{-N^2, \ldots, N^2\right\}, \; l \in \left\{0, \ldots, M^2\right\}, \; k + l \text{ páros}\right\}$$

Minden $(x,h) \in \mathbb{H}^-$ pontra $\gamma_{(x,h)}(\cdot)$ az x időpontban h magasságból visszafelé indított véletlen folyamat lesz. Pontosabban, legyen minden $(x,h) \in \mathbb{H}^-$ esetén

$$\gamma_{(x,h)}(x) = x,$$

majd rekurzióval minden $y \leq x$, $yN \in \{-N^2, \ldots, N^2\}$ időpont esetén

$$\gamma_{(x,h)}\left(y - \frac{1}{N}\right) = \gamma_{(x,h)}(y) - \frac{1}{\sqrt{N}}\xi\left(y - \frac{1}{N}, \gamma_{(x,h)}(y)\right).$$

γ is belső függvény, és hasonló rekurziós összefüggés áll fenn a $\gamma^{(n)}$ koordinátafüggvényekre. $n \in \mathbb{N}$-t rögzítve azt látjuk, hogy $\beta^{(n)}$ és $\gamma^{(n)}$ trajektóriái nem metszhetik egymást. Ugyanis a rácspontok paritásának választása miatt ez kétféleképpen lehetne lehetséges, valamely (x_n, h_n) és (x'_n, h'_n) kezdőpontokkal:

$$\begin{aligned}
\beta^{(n)}_{(x_n,h_n)}(y_n) &= \gamma^{(n)}_{(x'_n,h'_n)}(y_n) - \frac{1}{\sqrt{N_n}}, \\
\beta^{(n)}_{(x_n,h_n)}\left(y_n + \frac{1}{N_n}\right) &= \beta^{(n)}_{(x_n,h_n)}(y_n) + \frac{1}{\sqrt{N_n}}, \\
\gamma^{(n)}_{(x'_n,h'_n)}\left(y_n + \frac{1}{N_n}\right) &= \gamma^{(n)}_{(x'_n,h'_n)}(y) - \frac{1}{\sqrt{N_n}},
\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}
\beta^{(n)}_{(x_n,h_n)}(y_n) &= \gamma^{(n)}_{(x'_n,h'_n)}(y_n) + \frac{1}{\sqrt{N_n}}, \\
\beta^{(n)}_{(x_n,h_n)}\left(y_n + \frac{1}{N_n}\right) &= \beta^{(n)}_{(x_n,h_n)}(y_n) - \frac{1}{\sqrt{N_n}}, \\
\gamma^{(n)}_{(x'_n,h'_n)}\left(y_n + \frac{1}{N_n}\right) &= \gamma^{(n)}_{(x'_n,h'_n)}(y) + \frac{1}{\sqrt{N_n}}.
\end{aligned}$$

Nézzük az első lehetőséget, a második esetben ugyanúgy járhatunk el. A második egyenletből következik, hogy

$$\xi^{(n)}\left(y_n, \beta^{(n)}_{(x_n,h_n)}(y_n)\right) = 1,$$

azonban ezt az első és a harmadik egyenlettel, illetve $\gamma^{(n)}$ definíciójával összevetve ellentmondásra jutunk.

Tehát $\gamma^{(n)}$ és $\beta^{(n)}$ soha nem találkoznak. Ebből következik, hogy

$$h' > \beta_{(x,h)}(y) \Rightarrow \gamma_{(y,h')}(x) \geq h.$$

γ-ból a korábbihoz hasonló módon származtatjuk standard véletlen folyamatok egy családját. Ha $(x,h,y)\in\mathbb{F}^-$, akkor legyen $\Lambda^-_{(x,h)}(y)$ az alábbi:

$$\inf\left\{\gamma_{\left(\frac{[xN]}{N},\bar{h}\right)}\left(\frac{[yN]}{N}\right):\ \bar{h}M\in\{0,\dots,N\},\ \bar{h}\le\frac{[hM]}{M},\ \bar{h}\approx\frac{[hM]}{M}\right\}.$$

Felhasználva, hogy $\xi(z,h)$ és $-\xi(z-1,h)$ eloszlása megegyezik, azt láthatnánk be a korábbihoz hasonlóan, hogy a $y\mapsto\Lambda^-_{(x,h)}(y)$ véletlen folyamatra igazak *a* 17. tétel feltételei, azaz FICRAB-rendszer, teljesül a kezdőpontra vonatkozó feltétel, nem keresztezik egymást az egyes trajektóriák, és érvényes a h-beli balról folytonosság is. A Λ^- rendszer a Λ duális rendszere, és együttesükből származtathatók további folyamatok, a következőképpen.

[5]-nek megfelelően ha $(x,h)\in\mathbb{E}$, $y\in\mathbb{R}$ tetszőleges, akkor legyen

$$\overline{\Lambda}_{(x,h)}(y)=\begin{cases}\Lambda_{(x,h)}(y) & \text{ha } x\le y,\\ \Lambda^-_{(x,h)}(y) & \text{ha } y<x.\end{cases}$$

Ezután

$$D(x,h)=\left\{(x',h')\in\mathbb{E}:h'\le\overline{\Lambda}_{(x,h)}(x')\right\},$$

ez 1 valószínűséggel korlátos halmaz. Így értelmes

$$T(x,h)=|D(x,h)|=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Lambda}_{(x,h)}(y)\,dy,$$

$$P_t=\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\{(x,h)\in\mathbb{E}:T(x,h)\in(t-\varepsilon,t+\varepsilon)\}}.$$

[5] szerint ha az ott szereplő konstrukcióval állítjuk elő a Λ és Λ^- folyamatokat, akkor 1 valószínűséggel minden $t\in[0,\infty)$-re P_t egyelemű. $P_t=\{(X_t,H_t)\}$, és az $\mathbb{R}_+\ni t\mapsto X_t\in\mathbb{R}$ sztochasztikus folyamat valódi öntaszító folyamat (true self-repelling motion).

Ennek nyomán folytathatjuk a nemstandard konstrukciót, visszatérve a γ és β családokhoz. Módosítsuk ezeket úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$-re $\beta^{(n)}$-t megállítjuk a nulla szint nulla utána első elérésénél, $\gamma^{(n)}$-t pedig ugyanígy, amennyiben hátrafelé haladó folyamatként paraméterezzük. A megállított folyamatokat jelölje $\tilde{\beta}^{(n)}$, illetve $\tilde{\gamma}^{(n)}$, majd legyenek $\tilde{\beta}=\left(\tilde{\beta}^{(n)}\right)_{\mathcal{U}}$ és $\tilde{\gamma}=\left(\tilde{\gamma}^{(n)}\right)_{\mathcal{U}}$ az ezekből kapható belső folyamatok.

$(x,h)\in\mathbb{H}^+$ esetén legyen

$$T(x,h)=\frac{1}{N}\sum_{k=xN}^{N^2}\tilde{\beta}_{(x,h)}\left(\frac{k}{N}\right)+\frac{1}{N}\sum_{k=-N^2}^{xN-1}\tilde{\gamma}_{\left(x-\frac{1}{N},h\right)}\left(\frac{k}{N}\right).$$

$(x,h) \in \mathbb{H}^-$ esetén pedig legyen

$$T(x,h) = \frac{1}{N} \sum_{k=xN}^{N^2} \tilde{\gamma}_{(x,h)}\left(\frac{k}{N}\right) + \frac{1}{N} \sum_{k=-N^2}^{xN-1} \tilde{\beta}_{\left(x-\frac{1}{N},h\right)}\left(\frac{k}{N}\right).$$

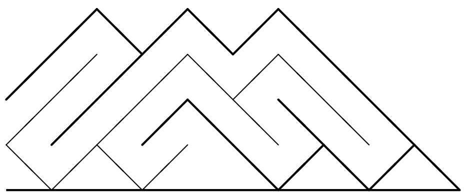
A nemstandard megközelítésben ezek az összegek felelnek meg az integrálnak.

Legyen még

$$P_t = \left\{(x,h) \in \mathbb{E} : \ {}^{\circ}T\left(\frac{[xN]}{N}, \frac{[hM]}{M}\right) = t\right\}.$$

Ha belátnánk, hogy 1 valószínűséggel minden t-re P_t egyelemű, akkor ezen az úton is tudnánk egy véletlen, valós értékű folyamatot definiálni.

Rögzített $n \in N$ és $\xi_n \in \Omega_n$ esetén $\beta^{(n)}$ és $\gamma^{(n)}$ folyamatok [5] alapján egy labirintust alkotnak, ahogy az ábrán is látható. Esetvizsgálattal könnyen ellenőrizhető, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{N_n}, \frac{1}{M_n}\right)$ pontból indulva ebben a labirintusban mindig egyértelműen léphetünk tovább anélkül, hogy $\beta^{(n)}$ vagy $\gamma^{(n)}$ trajektóriáját kereszteznénk. A lépések sorozatát jelölje $\left(\tilde{S}_t^{(n)}, H_t^{(n)}\right)_{t\in\mathbb{N}}$. A vízszintes koordináta minden lépésben egy lépéssel csökken vagy nő, a függőleges eggyel csökken, nő, vagy nem változik. A skálázás miatt a lépések nagysága vízszintes koordináta esetében $\frac{1}{N_n}$, a függőleges koordinátánál pedig $\frac{1}{M_n}$. Az is könnyen látható, hogy egy pontba csak úgy léphetünk, ha az összes alatta levőben jártunk, sőt, azokban a pontokban is, melyeknek első koordinátája legfeljebb egy lépésnyivel tér el, második koordinátája pedig kisebb a vizsgált pont megfelelő koordinátáinál.



Ha ebben a megközelítésben azt vizsgáljuk, hogy egy adott $\left(x_n - \frac{1}{2}, h_n\right)$ rácspont eléréséig hányat léptünk a labirintusban, és ezt megszorozzuk az egy lépéshez tartozó bejárt terület nagyságával, $\frac{1}{N_n^{3/2}}$-nel, akkor éppen a $T^{(n)}(x_n, h_n)$ mennyiséget kapjuk vissza. Azaz $\tilde{S}^{(n)}_{T^{(n)}(x_n,h_n)} + \frac{1}{2} = x_n$, és $H^{(n)}_{T^{(n)}(x_n,h_n)} = h_n$.

Azt szeretnénk belátni, hogy ha tekintjük az $\tilde{S}_t = \left(\frac{1}{N_n^{3/2}}\tilde{S}^{(n)}_{\left(\frac{[tN_n]}{N_n}\right)}\right)_{\mathcal{U}}$ véletlen folyamatot, akkor értelmes $\tilde{S}_t$ standard részéről beszélni. Ehhez azt kell megmutatni, hogy 1 valószínűséggel, ha $t \approx t'$, akkor $\tilde{S}_t \approx \tilde{S}_{t'}$.

[5] nyomán haladunk, és először az $(x, x+\varepsilon)$ átmetszéseit vizsgáljuk.

Legyen $(x_n, h_n) \in \mathbb{H}_n^+$ tetszőleges. Tudjuk, hogy ekkor $x_n = \frac{k}{N_n}$, $h_n = \frac{l}{M_n}$ alakú, ahol $k \in \{-N_n^2, \ldots, N_n^2\}$, $l \in \{0, \ldots, N_n\}$. Legyen még $\varepsilon > 0$ rögzített, és legyen $\varepsilon_n = \frac{[\varepsilon N_n]}{N_n}$.

Definiáljuk az alábbi megállási időket:

$$\tau_0\left(x_n, \varepsilon_n\right) = 0,$$
$$\sigma_a\left(x_n, \varepsilon_n\right) = \inf\left\{t \geq \tau_{a-1}\left(x_n, \varepsilon_n\right) : \tilde{S}_t^{(n)} = x_n\right\}, \quad a \geq 1,$$
$$\tau_a\left(x_n, \varepsilon_n\right) = \inf\left\{t \geq \sigma_a\left(x_n, \varepsilon_n\right) : \tilde{S}_t^{(n)} = x_n + \varepsilon_n\right\}, \quad a \geq 1.$$

Tekintsük az x_n és $x_n + \varepsilon_n$ közötti intervallum átmetszéseinek számát a t időpontig:

$$U_t^{x_n \uparrow x_n+\varepsilon_n} = \sup\left\{a \geq 0 : \tau_a\left(x_n, \varepsilon_n\right) \leq t\right\}.$$

Végül legyen

$$U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)} = U^{x_n \uparrow x_n+\varepsilon_n}_{T(x_n,h_n)}.$$

$U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}$ tehát azt jelenti, hogy amíg a labirintusban a folyamat elér az (x_n, h_n) ponthoz, $\tilde{S}^{(n)}$ hányszor metszi át balról jobbra az $(x_n, x_n + \varepsilon_n)$ intervallumot. A skálázás miatt ennek az intervallumnak a szélessége $[\varepsilon N_n]$ lépés.

Először azt látjuk be, hogy

$$U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)} = \left|\left\{\Lambda^{(n)}_{(x_n,h_n')}\left(x_n + \varepsilon_n\right) : h_n' \in (0, h_n]\right\}\right| - 1,$$

azaz $U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}$-t úgy is megkaphatjuk, hogy megnézzük, hogy az x_n időpontban legfeljebb h_n magasságból induló folyamatok az $x_n + \frac{[\varepsilon N_n]}{N_n}$ időpontban hány különböző értéket vesznek fel, hány folyamattá olvadtak össze $[\varepsilon N_n]$ lépés alatt.

Ehhez legyen $\overline{h} \in \left\{\Lambda^{(n)}_{(x_n,h_n')}\left(x_n + \varepsilon_n\right) : h_n' \in (0, h_n]\right\}$, és $\underline{h}$ a legnagyobb olyan szint, melyre $\Lambda^{(n)}_{(x_n,\underline{h})}\left(x_n + \varepsilon_n\right) = \overline{h}$. Tegyük fel, hogy $\underline{h} < h$. Ebben az esetben biztos, hogy az $\left(x_n + \frac{1}{2N_n}, h_n\right)$ pontot még a $T^{(n)}\left(x_n, h_n\right)$ időpont előtt elérjük a labirintusban, és innen a $\underline{h}$-ból induló trajektória mentén haladunk tovább. $\underline{h}$ definíciója szerint $x_n + \varepsilon_n$ eléréséig a $\Lambda^{(n)}_{(x_n,\underline{h})}$-ba becsatlakozó Λ trajektóriák x_n-nél később indulnak, hiszen ezek is $\overline{h}$-ba érkeznek az $x_n + \varepsilon_n$ időpontban. Ezért amikor ezen becsatlakozó trajektóriák mentén visszafelé haladunk, nem juthatunk vissza x_n-ig, amíg el nem értük $x_n + \varepsilon_n$-t. Vagyis valóban egy átmetszést kaptunk. Másrészt, ha van egy átmetszés, világos, hogy az x_n-ben nála magasabbról induló trajektóriák $x_n + \varepsilon_n$-ig ezt nem keresztezhetik, ezért ebben az időpontban magasabban kell lenniük, mint az átmetszést alulról határoló $\Lambda^{(n)}$ trajektória. Ez így valóban egy adott $\overline{h}$-hoz tartozó legnagyobb magasságból induló trajektória lesz. Mivel $\underline{h} < h$ kell ahhoz, hogy az átmetszés $T^{(n)}(x_n, h_n)$-ig befejeződjön, a legnagyobb szintet már nem vehetjük figyelembe, ezért a fenti halmaz elemszámából egyet levonva kapjuk az átmetszések számát, és ezt akartuk belátni.

$1 \le j \le l = hM_n$-re, ha $j + x_n$ páratlan, jelölje A_j a következő eseményt:

$$A_j = \left\{ \Lambda^{(n)}_{(x_n, j/M_n)}(x_n + \varepsilon_n) < \Lambda^{(n)}_{(x_n,(j+2)/M_n)}(x_n + \varepsilon_n) \right\},$$

azaz a j. és $j+1$. szintről induló Λ trajektóriák $x_n + \varepsilon_n$-ben különböznek. Az előállításból világos, hogy $U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}$ az A_j események indikátorainak összegeként írható, ahol csak az előbbi feltételt teljesítő j-ket vesszük figyelembe:

$$U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)} = \sum_{0 \le j \le l-1} \chi(A_j).$$

Ezért $E_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right) = \sum_{0 \le j \le l-1} P_n(A_j)$, ahol P_n a korábbi, egyenletes eloszlásból származó mérték, E_n pedig az erre vonatkozó várható érték.

Ha nem lenne a nulla szinten elnyelődés és visszaverődés, a következőképpen számolhatnánk rögzített j-re. A j/M_n és $(j+2)/M_n$ magasságból induló folyamatok független, egyszerű szimmetrikus bolyongások, addig, amíg nem találkoznak. Ezért a korábban látott módszerrel, ha X és Y 0-ból induló, független, egyszerű szimmetrikus bolyongások valamely $\mathbb{P}$ mérték szerint, akkor $P_n(A_j) = \mathbb{P}(X_t - Y_t \ne 2, 1 \le k \le [\varepsilon N_n])$. A két bolyongás különbségére is alkalmazható a tükrözési elv, így

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t - Y_t \ne 2, 1 \le k \le [\varepsilon N_n]) &= 1 - 2\mathbb{P}\left(X_{[\varepsilon N_n]} - Y_{[\varepsilon N_n]} \ge 2\right) = \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_{[\varepsilon N_n]} - Y_{[\varepsilon N_n]} \ge 2\right) - \mathbb{P}\left(X_{[\varepsilon N_n]} - Y_{[\varepsilon N_n]} \le -2\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(X_{[\varepsilon N_n]} - Y_{[\varepsilon N_n]} = 0\right) = \mathbb{P}\left(X_{2[\varepsilon N_n]} = 0\right) = \binom{2[\varepsilon N_n]}{[\varepsilon N_n]}
\end{aligned}$$

a függetlenség miatt.

Mivel csak a megfelelő paritású szinteket nézzük, az összegnek $\frac{1}{2}[hM_n]$ tagja van, tehát ha nincs elnyelődés és visszaverődés, a várható értékre

$$\frac{1}{2}[hM_n]\binom{2[\varepsilon N_n]}{[\varepsilon N_n]}$$

adódik. A Stirling-formula következménye, hogy a $\binom{2b}{b}$ binomiális együttható aszimptotikusan $\frac{1}{\sqrt{\pi b}}$-val egyezik meg, azaz $\lim_{b\to\infty} \binom{2b}{b}\sqrt{b} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Ezért ha most áttérünk a nemstandard konstrukcióra és ott a Loeb-mértékre, $(x,h) \in \mathbb{H}^+$, akkor $U^{\varepsilon}_{(x,h)}$ várható értéke

$$\frac{1}{2}^{\circ}[hM]\binom{2[\varepsilon N]}{[\varepsilon N]} = \frac{1}{2}^{\circ}\left[h\sqrt{N}\right]\binom{2[\varepsilon N]}{[\varepsilon N]} = \frac{h}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}.$$

[5] függeléke alapján belátható, hogy ez az összefüggés megmarad az elnyelődő-visszaverődő esetben is.

Most rögzített n-re megbecsüljük $U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}$ szórásnégyzetét. Ezt a valószínűségi változót indikátorok összegére bontottuk, ez alapján

$$\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right)^2 = U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)} + 2\sum_{0\le j\le l-1}\ \sum_{j+1\le j'\le l-1}\chi\left(A_j\cap A_{j'}\right).$$

Szintén az indikátorok összegére bontásból adódik, hogy

$$\left(E_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right)\right)^2 \ge 2\sum_{0\le j\le l-1}\ \sum_{j+1\le j'\le l-1} P_n\left(A_j\right)P_n\left(A_{j'}\right).$$

Vagyis

$$\begin{aligned}D^2\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right) \le E_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right) + 2\sum_{0\le j\le l-1}\ \sum_{j+1\le j'\le l-1} P_n\left(A_j\cap A_{j'}\right) - \\ - 2\sum_{0\le j\le l-1}\ \sum_{j+1\le j'\le l-1} P_n\left(A_j\right)P_n\left(A_{j'}\right).\end{aligned}$$

Az összeget tagonként becsüljük, legyen $j < j'$ rögzített. Jelölje $A_{j+2,j'}$ azt az eseményt, hogy a $j+2$. és j'. szintről induló folyamatok $x_n+\varepsilon_n$-ben különböznek, azaz $\Lambda^{(n)}_{(x_n,(j+2)/N_n)}(x_n+\varepsilon_n) < \Lambda^{(n)}_{(x_n,j'/N_n)}(x_n+\varepsilon_n)$. A különböző szintekről induló folyamatok függetlenek, amíg nem találkoznak, így világos, hogy

$$\begin{aligned}P_n\left(A_j\cap A_{j'}\right) - P_n\left(A_j\cap A^c_{j+2,j'}\cap A_{j'}\right) = \\ = P_n\left(A_j\cap A_{j+2,j'}\cap A_{j'}\right) \le P_n\left(A_j\right)P_n\left(A_{j'}\right),\end{aligned}$$

átrendezve:

$$P_n\left(A_j\cap A_{j'}\right) - P_n\left(A_j\right)P_n\left(A_{j'}\right) \le P_n\left(A_j\cap A_{j+2,j'}\cap A_{j'}\right).$$

Rögzített j-re a különböző j' értékekre az egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő események diszjunktak, és egyesítésük szűkebb A_j-nél, hiszen pontosan egy olyan j' szint van, hogy az onnan induló folyamat találkozik a $j+2$. szintről indulóval, de $j'+2$. szintről induló folyamat már magasabbra érkezik. Ezért

$$\sum_{j+2\leq j'\leq l-1} P_n\left(A_j\cap A_{j+2,j'}\cap A_{j'}\right)\leq P_n\left(A_j\right).$$

Mindezeket egybevetve

$$D^2\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right)\leq E_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right)+2\sum_{0\leq j\leq l-1}P_n\left(A_j\right)=3E_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right).$$

Így a Csebisev-egyenlőtlenség alapján, ha $h_n<\frac{1}{4}\sqrt{\pi\varepsilon}$, akkor

$$\begin{aligned}P_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}=0\right)&=1-P_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\geq 1\right)=\\&=1-P_n\left(\left|U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}-E_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right)\right|\geq 1-\frac{h_n}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\right)\geq\\&\geq 1-\frac{D^2\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right)}{\left(1-\frac{h_n}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\right)^2}\geq 1-\frac{3E_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right)}{\left(1-\frac{h_n}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\right)^2}.\end{aligned}$$

Legyen $x>0$, $\varepsilon>0$. Rögzített n-re $U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}=0$ azt jelenti, hogy az x_n időpontban h_n magasságból induló $\Lambda^{(n)}_{(x_n,h_n)}$ folyamat értéke $x_n+\varepsilon_n$-ben nulla. Ugyanis láttuk, hogy a legnagyobb nullába érkező szint felett kialakul egy átmetszés, és a feltételünk szerint most ilyen nincs. Tehát $U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}=0$ esetén a h_n magasságból induló folyamat $x_n+\varepsilon_n$ időpontig eléri a nullát.

Másrészt, ha $x_n+\varepsilon_n$ első elérését nézzük az $\tilde{S}^{(n)}$ folyamatnál, ez éppen az $[x_n,x_n+\varepsilon_n]$ első átmetszésének végénél következik be. Láttuk, hogy az $\tilde{S}^{(n)}$ folyamat csak olyan pontba léphet, amelynél alacsonyabb szintű pontokan már járt, ezért az $x_n+\varepsilon_n$ első eléréséig bejárt terület legalább akkora, mint az első átmetszés alatti terület. Ha az első átmetszés h_n-nél magasabbról indul, akkor, mivel a trajektóriák nem keresztezik egymást, ez legalább akkora, mint a $\Lambda^{(n)}_{(x_n,h_n)}$ alatti terület.

Ha ez $\mathcal{U}$-beli sok n-re teljesül, akkor az ultraszorzatban is igaz, hogy amíg $\tilde{S}$ eléri x-t, legalább akkora területet bejár, mint a $\Lambda_{(x,h)}$ alatti terület. Ha $h>0$, és h nincs infinitezimálisan közel a nullához, akkor, mivel ${}^{\circ}\Lambda_{(x,h)}$ 1 valószínűséggel folytonos, 1 valószínűséggel a $\Lambda_{(x,h)}$ trajektória alatti terület standard része is pozitív.

Azaz standard rész nélkül N vízszintes lépésnyi távolság eléréséig legalább $N^{3/2}$-nel arányos a lépések száma, hiszen egy lépés $\frac{1}{N^{3/2}}$ területnek felel meg. Ez pedig éppen azt mutatja, hogy ha $t\approx 0$, akkor $\tilde{S}$ nem érheti el $x+\varepsilon$-t a t időpontig.

Ezek alapján, ha valamely $h > 0$-ra, melyre h nincs infinitezimálisan közel a nullához, teljesül az $U_{(x,h)} = 0$ esemény, ebből már következik, hogy $x + \varepsilon$ eléréséig a bejárt terület pozitív. h-val nullához tartva az előbbi események monoton bővülők, ezért annak valószínűsége, hogy az $x + \varepsilon$ eléréséig bejárt terület pozitív, $\lim_{h \to 0+} P\left(U^{\varepsilon}_{(x,h)} = 0\right)$.

Fenti becslésünk szerint

$$P_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)} = 0\right) \geq 1 - \frac{3E_n\left(U^{\varepsilon}_{(x_n,h_n)}\right)}{\left(1 - \frac{h_n}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\right)^2},$$

így a Loeb-mértékre

$$P\left(U^{\varepsilon}_{(x,h)} = 0\right) \geq 1 - \frac{3E\left(U^{\varepsilon}_{(x,h)}\right)}{\left(1 - \frac{h}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\right)^2}.$$

Azt is láttuk korábban, hogy a Loeb-mérték szerint $U^{\varepsilon}_{(x,h)}$ várható értéke $\frac{h}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}$, így a h-val jobbról nullához tartva a limesz 1. Tehát 1 valószínűséggel teljesül, hogy az $x + \varepsilon$ eléréséig bejárt terület pozitív.

Ez minden $x > 0$, $\varepsilon > 0$ esetén érvényes, és elmondható $x < 0$-ra $x - \varepsilon$-nal is a duális folyamatokkal. Vagyis ebből következik, hogy ha $t \approx 0$, akkor 1 valószínűséggel $\tilde{S}_t \approx 0$.

Hasonlóképpen, az átmetszések számának és a bejárt területeknek különbségét vizsgálva kapjuk, hogy ha $t \approx t'$, akkor $\tilde{S}_t \approx \tilde{S}_{t'}$, és így értelmes definiálni a $^\circ\tilde{S}_t$ folyamatot.

Másképpen is eljuthatunk hasonló eredményhez: az átmetszések számára vonatkozó becslésekből következik, hogy 1 valószínűséggel minden $x < y$-ra $M(x, y)$ lokálisan véges, ahol

$$M(x, y) = \left\{\Lambda_{(z,h)}(y) = (z, h) \in \mathbb{E}, z < x\right\}.$$

Ebből és Λ, Λ^- eddigi tulajdonságaiból [5] szerint következik az alábbi állítás.

26. állítás. *1 valószínűséggel minden $(x_1, h_1) \neq (x_2, h_2)$ $\mathbb{E}$-beli pontra a következő események közül pontosan az egyik teljesül:*

- $(x_1, h_1) \in D(x_1, h_1) \subset D(x_2, h_2)$, $(x_2, h_2) \notin D(x_1, h_1)$ *és* $D(x_2, h_2) \setminus D(x_1, h_1)$ *tartalmaz nem üres nyílt halmazt;*
- $(x_2, h_2) \in D(x_2, h_2) \subset D(x_1, h_1)$, $(x_1, h_1) \notin D(x_2, h_2)$ *és* $D(x_1, h_1) \setminus D(x_2, h_2)$ *tartalmaz nem üres nyílt halmazt.*

A nem üres nyílt halmaz pozitív területe biztosítja, hogy vehetjük $\tilde{S}$ standard részét.

3.5. Összefoglalás

[5] alapján először a félsíkon megadott visszaverődő-elnyelődő, összeolvadó Wiener-folyamatok, illetve bolyongások rendszere közötti kapcsolatot vizsgáltuk, beláttuk, hogy ahogyan a bolyongásokból nemstandard konstrukció segítségével kapható Wiener-folyamat, itt a bolyongások rendszeréből képeztünk egy, a korábbitól eltérő konstrukciót a Wiener-folyamatok rendszerére. [5] szerint ez a rendszer a megadott tulajdonságokkal, melyeket a nemstandard konstrukció is teljesít, eloszlásban egyértelmű, így valóban megfelelő eloszlású folyamathoz jutottunk.

[5] szerint a visszaverődő-elnyelődő, összeolvadó bolyongások rendszere egy labirintust alakít ki. Az ebben a labirintusban bolyongó sztochasztikus folyamat vízszintes koordinátáját tekintve pedig olyan diszkrét, öntaszító folyamathoz jutunk, mely egy adott pontból annak a szomszédos élnek irányába lép, amelyiken kevesebbszer járt, egyenlőség esetén pedig egyenlő valószínűséggel lép a két irányba.

A folytonos idejű öntaszító folyamat konstrukciójának alapja [5]-ben a visszaverődő-elnyelődő, összeolvadó Wiener-folyamatok rendszere, X_t értéke lényegében az a pont, amelyre az (X_t, h_t)- ből induló trajektória alatti terület éppen t.

Itt pedig azt láttuk, hogy úgy is értelmes valós sztochasztikus folyamathoz juthatunk, ha a nemstandard koordinátákkal leírt labirintusban bolyongó nemstandard értékű folyamat standard részét képezzük.

További kérdés, hogy ennek eloszlása megegyezik-e a [5]-ben definiált folytonos idejű öntaszító folyamat eloszlásával, illetve, hogy ez alapján belátható-e eloszlásbeli konvergencia erre az öntaszító folyamatra és diszkrét változataira.

Irodalomjegyzék

[1] Robert M. Anderson. A non-standard representation for Brownian motion and Itô integration. *Israel J. Math.*, 25(1-2):15–46, 1976.

[2] Nigel Cutland. Loeb measure theory. In *Developments in nonstandard mathematics (Aveiro, 1994)*, volume 336 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 151–177. Longman, Harlow, 1995.

[3] Nigel J. Cutland. *Loeb measures in practice: recent advances*, volume 1751 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[4] C. Ward Henson. Foundations of nonstandard analysis: a gentle introduction to nonstandard extensions. In *Nonstandard analysis (Edinburgh, 1996)*, volume 493 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 1–49. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[5] Bálint Tóth and Wendelin Werner. The true self-repelling motion. *Probab. Theory Related Fields*, 111(3):375–452, 1998.

Tartalomjegyzék