Tarcsay Zsigmond

Operátorkiterjesztések Hilbert-téren

Szakdolgozat

Témavezető:

Sebestyén Zoltán
egyetemi tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar
2008

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

1.1. Jelölések, definíciók 4

1.2. Felhasznált tételek 5

2. Korlátos operátorok kiterjesztése **7**

2.1. Pozitív operátorok kiterjesztése 7

2.2. Szimmetrikus operátorok kiterjesztése 11

2.3. Duális kiterjesztések 16

3. Nemkorlátos operátorok kiterjesztése **21**

3.1. Nemkorlátos operátorok 21

3.2. A Krein-von Neumann kiterjesztés 31

3.3. A Friedrichs-kiterjesztés 40

3.4. Pozitív operátor lehetséges kiterjesztései 43

Irodalomjegyzék **52**

1. fejezet

Bevezetés

Ez a dolgozat Hilbert-téren értelmezett korlátos illetve nemkorlátos lineáris operátorok kiterjesztéseivel foglalkozik. Az első fejezetben röviden összefoglaljuk a dolgozat megértéséhez szükséges alapvető jelöléseket, definíciókat illetve tételeket. Ez utóbbiakat bizonyítások nélkül, de hivatkozásokkal közöljük.

A második fejezetben korlátos operátorok kiterjesztéseinek kérdéseit tárgyaljuk. Elsőként arra adunk szükséges és elégséges feltételt, hogy egy zárt altéren értelmezett pozitív operátornak mikor létezik mindenütt definiált korlátos pozitív kiterjesztése. Bizonyítjuk, hogy ha létezik ilyen, akkor létezik legkisebb ilyen is, sőt meg is konstruáljuk ezt. Ez a Sebestyén Zoltántól származó konstrukció ([16], 1983) képezi az alapját ennek a fejezetnek. Segítségével bizonyítjuk M. G. Krein tételét ([6], [7], 1947), mely szerint korlátos szimmetrikus operátornak mindig létezik normatartó önadjungált kiterjesztése, majd jellemezzük is ezen kiterjesztéseket. Ugyancsak ennek a konstrukciónak a felhasználásával egyszerű feltételt adunk arra, hogy egy operátor mikor terjeszthető ki kompakt önadjungálttá, önadjungált unitérré valamint ortogonális projekcióvá. Végül úgynevezett duális kiterjesztésekkel foglalkozunk, majd alkalmazásként bizonyítjuk S. Parrott tételét ([9], 1978).

A harmadik fejezetben röviden összefoglalunk néhány alapvető tényt a nemkorlátos operátorok elméletéből. Ezek nagy része megtalálható a [2], [10] illetve [13] könyvekben, a nem közismert állításokat bizonyítással együtt közöljük. Bevezetünk egy rendezést a pozitív önadjungált operátorok halmazán, majd igazoljuk, hogy ha egy operátornak létezik pozitív önadjungált kiterjesztése, akkor létezik legkisebb ilyen is, az úgynevezett Krein-von Neumann kiterjesztés. Bizonyítjuk, hogy egy pozitív operátor legnagyobb, úgynevezett Friedrichs-kiterjesztése pontosan akkor létezik, ha az operátor sűrűn definiált.

A 3.4 alfejezet kizárólag saját eredményeket tartalmaz. Bevezetjük egy operátor zárt altérre történő lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztésének fogalmát. Megadjuk a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy ez létezzen, megmutatjuk, hogy ekkor létezik a legkisebb lehetséges kiterjesztés is, majd jellemezzük ennek értelmezési tartományát, mag- illetve képterét. Megmutatjuk, hogy ha $K \subseteq M$ olyan alterek, melyekre létezik lehetséges kiterjesztés, akkor az M-en értelmezett legkisebb kiterjesztés segítségével két újabb K-ra vett kiterjesztés adható, majd megvizsgáljuk ezek kapcsolatát. Végül visszatérünk a korlátos operátorok esetére: a lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztés fogalmának segítségével a második fejezet alapját képező 2.1.1 Tétellel ekvivalens állítást fogalmazunk meg.

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Sebestyén Zoltán tanár úrnak, aki a figyelmembe ajánlotta a témát, és akinek a dolgozat megírása során nyújtott segítsége nélkülözhetetlennek bizonyult.

1.1. Jelölések, definíciók

A következő jelölésekkel élünk: $\mathbb{N}$ jelöli a nemnegatív egész, $\mathbb{Q}$ a racionális, $\mathbb{R}$ a valós, $\mathbb{C}$ pedig a komplex számok halmazát. Ha H_0, H, K tetszőleges halmazok, ahol $H_0 \subseteq H$, $f : H \to K$ függvény, akkor $f|_{H_0}$ jelöli f H_0-ra vett megszorítását, továbbá $f(H_0) := \{f(x) : x \in H_0\}$. Ha $g : H_0 \to K$ függvényre $f|_{H_0} = g$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f kiterjeszti g-t, jelölésben $g \subset f$. Egy f függvény értelmezési tartományát $\operatorname{dom} f$, értékkészletét $\operatorname{ran} f$ jelöli. Ha $\mathscr{E}$ és $\mathscr{F}$ vektortér, $A : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ lineáris operátor (vagy röviden operátor), akkor mindig feltesszük, hogy $\operatorname{dom} A$ lineáris altér. Az A operátor magterét $\ker A$ jelöli. Legyen $M \subseteq \mathscr{E}$ tetszőleges halmaz, akkor az M által generált lineáris altérre a $\operatorname{span}(M)$ jelölést alkalmazzuk.

Ismertnek tekintjük a valós vagy komplex Banach- illetve Hilbert-tér illetve az ezek fölött értelmezett korlátos lineáris operátorok elméletének olyan alapvető elemeit, mint Riesz reprezentációs tétele, korlátos operátor adjungáltjának illetve spektrumának fogalma, kompakt, önadjungált, normális, unitér operátor, ortogonális projekció definíciója, stb.

Ebben a dolgozatban kizárólag komplex Hilbert-terekkel foglalkozunk. Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, akkor a $\mathscr{H}$-beli skalárszorzatot $(\cdot,\cdot)_{\mathscr{H}}$, vagy ha nem okoz félreértést $(\cdot,\cdot)$ jelöli. Ha $M \subseteq \mathscr{H}$ tetszőleges halmaz, akkor M ortogonális kiegészítőjére az $M^{\perp}$ jelölést, a $\mathscr{H}$-beli x középpontú r sugarú gömbre a $B_{\mathscr{H}}(x,r)$ jelölést használjuk. Ha $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ Hilbert-terek, akkor a $\mathscr{H} \to \mathscr{K}$ korlátos operátorok Banach-terét $B(\mathscr{H},\mathscr{K})$, a $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ korlátos operátorok Banach-terét $B(\mathscr{H})$ jelöli. Egy $A \in B(\mathscr{H},\mathscr{K})$ operátor esetén mindig feltesszük, hogy $\operatorname{dom} A = \mathscr{H}$. Ha $A \in B(\mathscr{H})$, akkor $\operatorname{Sp}(A)$ jelöli az A operátor spektrumát.

Azt mondjuk, hogy az $A : \mathscr{H} \supseteq \operatorname{dom} A \to \mathscr{H}$ operátor pozitív, ha minden $x \in \operatorname{dom} A$ esetén $(Ax, x) \geq 0$, illetve A szimmetrikus, ha minden $x \in \operatorname{dom} A$ esetén $(Ax, x) = (x, Ax)$. A $B(\mathscr{H})$-beli pozitív operátorok halmazát $B(\mathscr{H})_+$ jelöli. $A, B \in B(\mathscr{H})_+$ operátorok esetén azt mondjuk, hogy $A \leq B$, ha minden $x \in \mathscr{H}$ esetén $(Ax, x) \leq (Bx, x)$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy $A \in B(\mathscr{H})_+$ pontosan akkor, ha $A \geq 0$. Egy $A \in B(\mathscr{H})$ korlátos operátor numerikus sugarán a $w(A) := \sup\{|(Ax, x)| : (x, x) \leq 1\}$ számot értjük.

1.2. Felhasznált tételek

Ebben a fejezetben bizonyítás nélkül közlünk néhány alapvető tételt a Hilbert-tér operátorok elméletéből. Ezekre a későbbiek során hivatkozni fogunk ([1], [2], [13], illetve [14]).

1.2.1. Tétel (Schwarz-egyenlőtlenség). *Legyen $\mathscr{E}$ vektortér, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ fél-skalárszorzat $\mathscr{E}$ fölött, legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $T : \mathscr{H} \supseteq \operatorname{dom} T \to \mathscr{H}$ (nem feltétlenül korlátos) pozitív operátor, illetve $A \in B(\mathscr{H})_+$. Ekkor*

(*i*) *Tetszőleges $x, y \in \mathscr{E}$ esetén $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.*

(*ii*) *Tetszőleges $x, y \in \operatorname{dom} T$ esetén $|(Tx, y)|^2 \leq (Tx, x)(Ty, y)$.*

(*iii*) *Tetszőleges $x \in \mathscr{H}$ esetén $\|Ax\|^2 \leq \|A\|(Ax, x)$.*

1.2.2. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, legyenek $A, B \in B(\mathscr{H})_+$ pozitív operátorok, melyekre $A \leq B$ illetve $B \leq A$ teljesül. Ekkor $A = B$. (Azaz a "$\leq$" reláció rendezés a korlátos pozitív operátorok halmazán.)*

1.2.3. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $A \in B(\mathscr{H})$ normális operátor, ekkor $w(A) = \|A\|$.*

1.2.4. Tétel (Banach-Steinhaus). *Legyen X Banach-tér, Y normált tér, legyen $\mathscr{A} \subseteq B(X, Y)$ olyan operátorhalmaz, hogy tetszőleges $x \in X$ esetén $\sup\{\|Ax\| : A \in \mathscr{A}\} < \infty$. Ekkor*

$$\sup\{\|A\| : A \in \mathscr{A}\} < \infty\}.$$

1.2.5. Tétel. *Legyenek $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \mathscr{H}_3$ Hilbert-terek, ekkor $K \in B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ kompakt operátor, $A \in B(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_3)$, $B \in B(\mathscr{H}_3, \mathscr{H}_1)$, illetve $L \in B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_3)$. Ekkor*

(i) $AK \in B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_3)$ *és* $KB \in B(\mathscr{H}_3, \mathscr{H}_2)$ *kompakt.*

(ii) $K^* \in B(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ *kompakt.*

Ha pedig tetszőleges $x \in \mathscr{H}_1$ *esetén* $\|Lx\|_{\mathscr{H}_3} \leq c\|Kx\|_{\mathscr{H}_2}$ *teljesül valamely* $c > 0$ *konstansra, akkor* L *kompakt.*

1.2.6. Tétel (Riesz). *Legyen* X *végtelen dimenziós Banach-tér,* $A \in B(X)$ *kompakt operátor. Ekkor* A*-ra az alábbi állítások közül pontosan egy teljesül:*

(a) $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

(b) $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, *ahol minden* $k = 1, 2, \ldots, n$ *esetén* $\lambda_k \neq 0$ *sajátértéke* A*-nak, továbbá* $\dim \ker(A - \lambda_k)$ *véges.*

(c) $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, *ahol tetszőleges* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $\lambda_k \neq 0$ *sajátértéke* A*-nak,* $\dim \ker(A - \lambda_k)$ *véges, továbbá* $\lim \lambda_k = 0$.

1.2.7. Tétel. *Legyen* $A \in B(\mathscr{H})$ *pozitív kompakt operátor. Ekkor az* $A^{1/2} \in B(\mathscr{H})$ *operátor is kompakt.*

2. fejezet

Korlátos operátorok kiterjesztése

Ebben a fejezetben az alapprobléma a következő: Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $D \subseteq \mathscr{H}$ lineáris altér, $A : D \to \mathscr{H}$ korlátos lineáris operátor, amely valamilyen speciális tulajdonsággal bír (pl. pozitív, szimmetrikus, stb.). Kérdés, hogy kiterjeszthető-e ez az operátor $\mathscr{H}$-ra ennek a speciális tulajdonságnak a megtartásával. És ha igen, akkor a lehetséges kiterjesztések között - bizonyos szempontok szerint - extremális kiterjesztéseket keresünk.
Ha $A : D \to \mathscr{H}$ korlátos operátor, akkor ismeretes, hogy A-nak egyértelműen létezik folytonos kiterjesztése a $\overline{D}$ lineáris altérre. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy dom A zárt altere $\mathscr{H}$-nak.

2.1. Pozitív operátorok kiterjesztése

A következő tétel pozitív operátor kiterjeszthetőségéről és a tétel bizonyításában szereplő konstrukció (Sebestyén, [16]) alapvető szerepet játszik az egész fejezetben:

2.1.1. Tétel (Sebestyén). *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $A : D \to \mathscr{H}$ szimmetrikus korlátos lineáris operátor. Ekkor ekvivalens:*

(i) Létezik $\widetilde{A} \in B(\mathscr{H})$ pozitív operátor, melyre $\widetilde{A} \supset A$.

(ii) $M := \big\{Ax : x \in D, (Ax, x) \le 1\big\} \subseteq \mathscr{H}$ korlátos.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ha létezik $\widetilde{A}$ pozitív kiterjesztés, akkor a Schwarz-egyenlőtlenség szerint:

$$\|\widetilde{A}x\|^2 \le \|\widetilde{A}\|(\widetilde{A}x, x) \qquad (\forall x \in \mathscr{H}).$$

Ha tehát $x \in D$ akkor $Ax = \widetilde{A}x$, így

$$\|Ax\| \leq \|\widetilde{A}\|^{1/2}(Ax, x)^{1/2} \qquad (\forall x \in D).$$

Ezért ha $x \in D$ olyan, hogy $Ax \in M$, akkor $\|Ax\| \leq \|\widetilde{A}\|^{1/2}$, azaz M korlátos $\mathscr{H}$-ban.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Tekintsük ran A-n a következő fél-skalárszorzatot:

$$\langle Ax, Ay\rangle := (Ax, y) \qquad (x, y \in D).$$

Ez jól definiált, ugyanis $x, x', y, y' \in D$ illetve $Ax = Ax', Ay = Ay'$ esetén

$$\langle Ax, Ay\rangle = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, Ay') = \langle Ax', Ay'\rangle,$$

hiszen A szimmetrikus operátor. Tegyük fel, hogy $\langle Ax, Ax\rangle = 0$, ekkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}$-re

$$\langle A(tx), A(tx)\rangle = t^2(Ax, x) = 0,$$

vagyis ekkor $tAx \in M$. Azonban (ii) szerint M korlátos, így $Ax = 0$. Tehát $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzat ran A-n és (ran $A, \langle\cdot,\cdot\rangle$) pre-Hilbert-tér. Jelölje $\mathscr{H}_A$ ennek teljessé tételét. Legyen $J_A : \mathscr{H}_A \supseteq \operatorname{ran} A \to \mathscr{H}$ a következő operátor:

$$J_A(Ax) := Ax \in \mathscr{H}.$$

Jelölje $M_A := \{Ax \in \mathscr{H}_A : x \in D, \langle Ax, Ax\rangle \leq 1\} \subseteq \mathscr{H}_A$. Nyilvánvaló, hogy $J_A(M_A) = M$, továbbá hogy $M_A \subseteq B_{\mathscr{H}_A}(0, 1)$ sűrű, hiszen ran $A \subseteq \mathscr{H}_A$ sűrű. Emiatt

$$J_A\big(B_{\mathscr{H}_A}(0, 1)\big) = J_A\big(\overline{M_A}\big) \subseteq \overline{J_A(M_A)} = \overline{M} \subset \mathscr{H},$$

ami a feltételek szerint korlátos, így $J_A : \mathscr{H}_A \supseteq \operatorname{ran} A \to \mathscr{H}$ sűrűn definiált folytonos lineáris operátor, ami folytonosan kiterjed $\mathscr{H}_A$-ra. Jelölje az egyszerűség kedvéért ezt az egyértelmű kiterjesztést is J_A. Ekkor $J_A^* : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_A$ szintén korlátos operátor, és minden $y \in D$ esetén $J_A^* y = Ay$. Legyen ugyanis $x, y \in D$, ekkor:

$$\langle Ax, Ay\rangle = (Ax, y) = (J_A(Ax), y) = \langle Ax, J_A^* y\rangle.$$

Mivel ran $A \subseteq \mathscr{H}$ sűrű altér, így a fenti egyenlőségből valóban a kívánt összefüggés adódik. Nyilvánvaló, hogy $J_A J_A^*$ pozitív operátor, továbbá $x \in D$ esetén

$$J_A J_A^* x = J_A(Ax) = Ax,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $J_A J_A^* \supset A$. $\square$

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy a $J_A J_A^*$ operátor milyen "szép" tulajdonságokkal bír:

2.1.2. Lemma. *Legyen $B : \mathscr{H} \supseteq \mathrm{dom}\, B \to \mathscr{H}$ korlátos szimmetrikus operátor, melyre teljesül a 2.1.1 Tétel ekvivalens feltételeinek valamelyike. Ekkor tetszőleges $x \in \mathscr{H}$ esetén:*

$$(J_B J_B^* x, x) = \sup\{|(By, x)| : (By, y) \le 1, y \in \mathrm{dom}\, B\} \tag{2.1}$$

illetve

$$(J_B J_B^* x, x) = \sup\{(x, By) + (By, x) - (By, y) : y \in \mathrm{dom}\, B\}. \tag{2.2}$$

Bizonyítás. $(J_B J_B^* x, x) = \langle J_B^* x, J_B^* x\rangle =$

$$\begin{aligned} &= \sup\{|\langle By, J_B^* x\rangle| : \langle By, By\rangle \le 1, y \in \mathrm{dom}\, B\} = \\ &= \sup\{|(By, x)| : (By, y) \le 1, y \in \mathrm{dom}\, B\}, \end{aligned}$$

ugyanis $\mathrm{ran}\, B \subseteq \mathscr{H}_B$ sűrű, amivel (2.1) egyenlőséget bebizonyítottuk. A (2.2) formula az $\inf\{\|J_B^* x + By\|^2_{\mathscr{H}_B} : y \in \mathrm{dom}\, B\} = 0$ azonosságból következik, ugyanis ezt kibontva:

$$\begin{aligned} (J_B J_B^* x, x) &= -\inf_{y \in \mathrm{dom}\, B}\{(x, By) + (By, x) + (By, y)\} = \\ &= \sup_{y \in \mathrm{dom}\, B}\{(x, By) + (By, x) - (By, y)\}. \end{aligned}$$

□

2.1.3. Állítás. *A $J_A J_A^*$ operátor a legkisebb pozitív kiterjesztése A-nak, azaz ha $\widetilde{A} \in B(\mathscr{H})$ pozitív, $\widetilde{A} \supset A$, akkor $J_A J_A^* \le \widetilde{A}$.*

Bizonyítás. Legyen tehát $\widetilde{A}$ pozitív kiterjesztés. Ekkor nyilvánvalóan $\widetilde{A} = J_{\widetilde{A}} J_{\widetilde{A}}^*$, így a (2.1) formulát alkalmazva $\widetilde{A}$-ra és $\mathrm{dom}\, \widetilde{A} = \mathscr{H}$-ra, majd pedig A-ra és $\mathrm{dom}\, A = D$-re:

$$\begin{aligned} (\widetilde{A}x, x) = (J_{\widetilde{A}} J_{\widetilde{A}}^* x, x) &= \sup\left\{|(\widetilde{A}y, x)| : (\widetilde{A}y, y) \le 1, y \in \mathscr{H}\right\} \ge \\ &\ge \sup\left\{|(\widetilde{A}y, x)| : (\widetilde{A}y, y) \le 1, y \in D\right\} = \\ &= \sup\left\{|(Ay, x)| : (Ay, y) \le 1, y \in D\right\} = \\ &= (J_A J_A^* x, x), \end{aligned}$$

ami épp azt jelenti, hogy $J_A J_A^* \le \widetilde{A}$. □

2.1.4. Állítás. *Legyen $A : D \to \mathscr{H}$ olyan operátor, mely teljesíti a 2.1.1 Tétel valamelyik feltételét. Ekkor*

(a) $\|J_A J_A^*\| = \sup\big\{(Ah, Ah) : h \in D, (Ah, h) \leq 1\big\}$.

(b) *Ha $\widetilde{A}$ pozitív kiterjesztése A-nak, akkor $x \in \mathscr{H}$ esetén*

$$(\widetilde{A}x, x) = (J_A J_A^* x, x) + \inf\big\{\big(\widetilde{A}(x+y), x+y\big) : y \in D\big\}. \tag{2.3}$$

Bizonyítás. Mivel ran $A \subseteq \mathscr{H}_A$ sűrű, így

$$\begin{aligned}\|J_A J_A^*\| = \|J_A\|^2 &= \sup\big\{\big(J_A(Ah), J_A(Ah)\big) : h \in D, \langle Ah, Ah\rangle \leq 1\big\} = \\ &= \sup\big\{(Ah, Ah) : h \in D, (Ah, h) \leq 1\big\},\end{aligned}$$

amivel az (a) állítást beláttuk.
Tegyük fel, hogy létezik $A \subset \widetilde{A} \in B(\mathscr{H})_+$. Egy ilyen $\widetilde{A}$ létezése az eddigiek értelmében tehát ekvivalens azzal, hogy létezik A-nak legkisebb pozitív kiterjesztése. Legyen $x \in \mathscr{H}, y \in D$. Ekkor:

$$\begin{aligned}0 \leq \|J_A^* x + Ay\|_A^2 &= (J_A J_A^* x, x) + (x, \widetilde{A}y) + (\widetilde{A}y, x) + (\widetilde{A}y, y) = \\ &= (J_A J_A^* x, x) + (\widetilde{A}(x+y), x+y) - (\widetilde{A}x, x).\end{aligned}$$

Mivel ran $A \subseteq \mathscr{H}_A$ sűrű, így $\inf\{\|J_A^* x + Ay\|_A^2 : y \in D\} = 0$, vagyis

$$0 = (J_A J_A^* x, x) - (\widetilde{A}x, x) + \inf_{y \in D}\big\{\big(\widetilde{A}(x+y), x+y\big)\big\},$$

amivel a (b) állítást is igazoltuk. □

Megjegyezzük, hogy a (2.3) formula egy újabb bizonyítását adja annak, hogy $J_A J_A^*$ a legkisebb pozitív kiterjesztése A-nak. Ebből és a korábbiakból az alábbi eredményt kapjuk:

2.1.5. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $A : D \to \mathscr{H}$ szimmetrikus korlátos lineáris operátor. Ha A-nak létezik pozitív kiterjesztése, akkor létezik legkisebb pozitív kiterjesztése is. Továbbá egy $\widetilde{A} \in B(\mathscr{H})_+$ operátorra ekvivalensek:*

(i) *$\widetilde{A}$ a legkisebb pozitív kiterjesztése A-nak.*

(ii) *$\widetilde{A} = J_A J_A^*$.*

(iii) *Minden $x \in \mathscr{H}$-ra* $\inf\big\{\big(\widetilde{A}(x+y), x+y\big) : y \in D\big\} = 0$. □

A 2.1.1 Tétel bizonyításából jól látható, hogy az M halmaz korlátossága a J_A operátor folytonosságával volt ekvivalens. A következő Tételben megmutatjuk, hogy M teljesen korlátossága ekvivalens a J_A operátor kompaktságával, és ennek következtében pozitív kompakt kiterjesztés létezésével:

2.1.6. Tétel. *Legyen $A : D \to \mathscr{H}$ szimmetrikus korlátos lineáris operátor. Ekkor ekvivalens:*

(i) *Létezik $\widetilde{A} \in B(\mathscr{H}), A \geq 0, \widetilde{A} \supset A$ kompakt.*

(ii) *$M := \big\{Ax : x \in D, (Ax, x) \leq 1\big\} \subseteq \mathscr{H}$ prekompakt.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ha $\widetilde{A}$ kompakt operátor, akkor

$$\begin{aligned} M &\subseteq \big\{\widetilde{A}x : x \in \mathscr{H}, (\widetilde{A}x, x) \leq 1\big\} = \\ &= \big\{\widetilde{A}^{1/2}(\widetilde{A}^{1/2}x) : x \in \mathscr{H}, \|\widetilde{A}^{1/2}x\|^2 \leq 1\big\} \subseteq \\ &\subseteq \{\widetilde{A}^{1/2}y : y \in \mathscr{H}, \|y\| \leq 1\} = \widetilde{A}^{1/2}\big(B_{\mathscr{H}}(0,1)\big), \end{aligned}$$

ami prekompakt, hiszen $\widetilde{A}$ kompakt, így $\widetilde{A}^{1/2}$ is az.
$(ii) \Rightarrow (i)$: A 2.1.1 Tétel bizonyításában láttuk, hogy

$$J_A\big(B_{\mathscr{H}_A}(0,1)\big) \subseteq \overline{M},$$

ami a feltételek szerint kompakt. Azaz J_A kompakt operátor, így $A \subset J_A J_A^*$ is kompakt. $\square$

Az eddigiek alkalmazásaként kapjuk a következő nevezetes Tételt:

2.1.7. Tétel (Krein). *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $K \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, legyen továbbá $A \in B(\mathscr{H})$ pozitív operátor. Ekkor létezik a legnagyobb olyan $B^* = B \in B(\mathscr{H})$, melyre*

$$B \leq A, \quad \operatorname{ran} B \subseteq K.$$

Bizonyítás. Ha $B^* = B$, akkor a $\operatorname{ran} B \subseteq K$ feltétel ekvivalens a $\ker B \supseteq K^\perp$ feltétellel, illetve $B \leq A$ a $0 \leq A - B$-vel. Tehát a $B \leq A$, $\operatorname{ran} B \subset K$ feltételek egyenértékűek az alábbival:

$$(A - B)|_{K^\perp} = A|_{K^\perp} \subseteq A - B \in B(\mathscr{H})_+.$$

Az pedig, hogy B a legnagyobb ilyen, azzal egyenértékű, hogy $A - B$ a legkisebb pozitív kiterjesztése az $A|_{K^\perp}$ operátornak. Ez pedig létezik a 2.1.5 Tétel szerint. $\square$

2.2. Szimmetrikus operátorok kiterjesztése

Ebben a fejezetben egy $S : D \to \mathscr{H}$ korlátos szimmetrikus operátorból indulunk ki, és olyan $\widetilde{S} \in B(\mathscr{H})$ operátort keresünk, mely önadjungált kiterjesztése S-nek.

2.2.1. Tétel. *Legyen $S : D \to \mathscr{H}$ korlátos szimmetrikus operátor. Ekkor léteznek olyan $S_m, S_M \in B(\mathscr{H})$ önadjungált operátorok, hogy $\|S_m\| = \|S_M\| = \|S\|$, továbbá egy $\widetilde{S} \in B(\mathscr{H})$ önadjungált operátorra ekvivalensek:*

(i) $S \subset \widetilde{S}$, $\|S\| = \|\widetilde{S}\|$.

(ii) $S_m \leq \widetilde{S} \leq S_M$.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Vezessük be a következő két operátort:

$$A_+ := \|S\| Id_D + S : D \to \mathscr{H},$$
$$A_- := \|S\| Id_D - S : D \to \mathscr{H}.$$

Ekkor felhasználva S szimmetrikusságát, tetszőleges $h \in D$ esetén

$$\begin{aligned}\|A_+h\|^2 = \big(\|S\|h + Sh, \|S\|h + Sh\big) = \|S\|^2\|h\|^2 + 2\|S\|(Sh, h) + \\ + (Sh, Sh) \leq 2\|S\|^2\|h\|^2 + 2\|S\|(Sh, h) = \\ = 2\|S\|\big((\|S\|Id_D + S)h, h\big) = 2\|S\|(A_+h, h).\end{aligned}$$

Ugyanez igaz A_--ra, így tehát minden $h \in D$-re

$$\|A_\pm h\|^2 \leq 2\|S\|(A_\pm h, h). \tag{2.4}$$

Ebből könnyen látható, hogy az $M_\pm := \{A_\pm h : h \in D, (A_\pm h, h) \leq 1\} \subseteq \mathscr{H}$ halmaz korlátos, így a 2.1.1 Tétel szerint léteznek a $J_\pm J_\pm^* \supset A_\pm$ legkisebb pozitív önadjungált kiterjesztések. Ha tehát $S \subset \widetilde{S}$, $\|S\| = \|\widetilde{S}\|$, akkor

$$A_\pm = \|S\| Id_D \pm S \subset \|\widetilde{S}\| Id_{\mathscr{H}} \pm \widetilde{S},$$

így mivel $J_\pm J_\pm^*$ a legkisebb kiterjesztés

$$J_+J_+^* \leq \|S\| Id_{\mathscr{H}} + \widetilde{S} \quad \text{illetve} \quad J_-J_-^* \leq \|S\| Id_{\mathscr{H}} - \widetilde{S},$$

amit átrendezve

$$S_m := J_+J_+^* - \|S\| Id_{\mathscr{H}} \leq \widetilde{S} \leq \|S\| Id_{\mathscr{H}} - J_-J_-^* =: S_M. \tag{2.5}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Jelölje S_m illetve S_M a (2.5)-ben definiált önadjungált operátorokat, legyen $\widetilde{S} = \widetilde{S}^*$, melyre

$$(S_m x, x) \leq (\widetilde{S}x, x) \leq (S_M x, x) \qquad (x \in \mathscr{H}). \tag{2.6}$$

Ekkor a Schwarz-egyenlőtlenséget használva minden $x \in \mathscr{H}$-re

$$\|(\widetilde{S} - S_m)x\|^2 \leq \|\widetilde{S} - S_m\|\big((\widetilde{S} - S_m)x, x\big) \leq \|\widetilde{S} - S_m\|\big((S_M - S_m)x, x\big),$$

így $h \in D$ esetén $S_m h = S_M h = Sh$ miatt

$$\|(\widetilde{S} - S)h\|^2 = \|(\widetilde{S} - S_m)h\|^2 \leq \|\widetilde{S} - S_m\| \big((S_M - S_m)h, h \big) = 0,$$

azaz $S \subset \widetilde{S}$. Be kellene még látnunk, hogy $\|S\| = \|\widetilde{S}\|$. Nyilvánvaló, hogy (2.6) illetve $S \subset \widetilde{S}$ miatt $\|S\| \leq \|S_m\| \leq \|\widetilde{S}\| \leq \|S_M\|$, így elegendő belátnunk, hogy $\|S_M\| \leq \|S\|$. Mivel S_M önadjungált, ezért $\|S_M\| = w(S_M)$, ahol $w(S_M)$ az S_M operátor numerikus sugara. Emiatt elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$-\|S\| \leq (S_M x, x) \leq \|S\| \qquad (x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1),$$

hiszen $w(S_M) = \sup\big\{ |(S_M x, x)| \,:\, x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1 \big\}$. Ez pedig a (2.5) formulából következik, ugyanis $J_+ J_+^*$ pozitív, ezért

$$S_M = \|S\| Id_{\mathscr{H}} - J_+ J_+^* \leq \|S\| Id_{\mathscr{H}},$$

másrészt $J_- J_-^*$ is pozitív, ezért

$$S_M \geq J_- J_-^* - \|S\| Id_{\mathscr{H}} \geq -\|S\| Id_{\mathscr{H}}.$$

Vagyis $-\|S\| Id_{\mathscr{H}} \leq S_M \leq \|S\| Id_{\mathscr{H}}$, amiből már a kívánt egyenlőtlenség adódik. □

A következő tétel azt vizsgálja, hogy egy $S : D \to \mathscr{H}$ korlátos szimmetrikus operátornak mikor létezik kompakt önadjungált kiterjesztése:

2.2.2. Tétel. *Legyen $S : D \to \mathscr{H}$ kompakt szimmetrikus operátor. Ekkor*

$$\widetilde{S} := \frac{S_m + S_M}{2} \in B(\mathscr{H}) \tag{2.7}$$

normatartó önadjungált kompakt kiterjesztése S-nek, ahol S_m illetve S_M a (2.5) *formula által definiált operátorok.*

Bizonyítás. A 2.2.1 Tétel szerint $S_m + S_M \supset S$ önadjungált kiterjesztés, továbbá minden $x \in \mathscr{H}$ esetén

$$(S_m x, x) = \left(\frac{S_m + S_m}{2} x, x \right) \leq (\widetilde{S} x, x) \leq \left(\frac{S_M + S_M}{2} x, x \right) = (S_M x, x),$$

így ugyanezen Tétel szerint $\|S\| = \|\widetilde{S}\|$. Vagyis csak $\widetilde{S}$ kompaktságát kell bizonyítanunk. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy S-nek $\pm\|S\|$ nem sajátértéke, vagyis

$$Sk = \pm\|S\| k \quad (k \in D) \quad \Rightarrow k = 0. \tag{2.8}$$

Megmutatjuk, hogy ekkor $A_\pm := \|S\| Id_D \pm S$ alulról korlátos operátorok, azaz létezik olyan $c > 0$ szám, melyre

$$c\|h\|^2 \leq \|A_\pm h\|^2 \qquad (h \in D).$$

Az egyszerűsűg kedvéért az állítást csak A_+-ra bizonyítjuk. Ugyanígy bizonyítható A_- alulról korlátossága. Legyen indirekte $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ olyan sorozat, melyre

$$\|h_n\| = 1, \quad \lim_{n\in\mathbb{N}} A_+ h_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} \big(\|S\| h_n + S h_n\big) = 0. \tag{2.9}$$

Mivel S kompakt, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ korlátos, így feltehető, hogy $Sh_n \to k \in \mathscr{H}$. Ezt, D zártságát valamint a (2.9) összefüggést felhasználva létezik

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \|S\| h_n = -\lim_{n\in\mathbb{N}} S h_n = -k \in D = \operatorname{dom} S. \tag{2.10}$$

Másrészt nyilván feltehető, hogy $\|S\| \neq 0$, így

$$\|k\| = \lim_{n\in\mathbb{N}} \|S\| \|h_n\| = \|S\| \neq 0. \tag{2.11}$$

A fentieket figyelembe véve tehát $0 \neq k \in \operatorname{dom} A_+$ olyan, melyre

$$0 = \lim_{n\in\mathbb{N}} A_+ h_n = A_+ \lim_{n\in\mathbb{N}} h_n = A_+ \left(-\frac{k}{\|S\|}\right) = -\|S\| \left(\frac{k}{\|S\|}\right) + S\left(\frac{k}{\|S\|}\right),$$

ami ellentmond a (2.8) összefüggésnek. Ezek szerint tehát $A_\pm$ alulról korlátos, így ezt a tulajdonságot illetve (2.4) egyenlőtlenséget felhasználva

$$c\|h\|^2 \leq \|A_\pm h\|^2 \leq 2\|S\|(A_\pm h, h) \qquad (h \in D),$$

vagyis

$$\|h\|^2 \leq 2\|S\| c^{-1} (A_\pm h, h) \qquad (h \in D). \tag{2.12}$$

A (2.5) formula szerint

$$\widetilde{S} := \frac{S_m + S_M}{2} = \frac{J_+ J_+^* - J_- J_-^*}{2}. \tag{2.13}$$

Ennek az operátornak a D-re vett leszűkítése kompakt a feltételek szerint, ezért elegendő megmutatnunk, hogy $J_\pm J_\pm^*|_{D^\perp}$ kompakt. Ennek igazolásához pedig elég $J_\pm^*$ kompaktságát belátnunk. Legyen tehát $k \in D^\perp$, ekkor

$$\begin{aligned}
\|J_\pm^* k\|^2 &= \sup\big\{|\langle J_\pm^* k, A_\pm h\rangle|^2 : h \in D, (A_\pm h, h) \leq 1\big\} \leq \\
&\leq \sup\big\{|\langle J_\pm^* k, A_\pm h\rangle|^2 : h \in D, \|h\|^2 \leq 2\|S\| c^{-1}\big\} = \\
&= \sup\big\{|(k, A_\pm h)|^2 : h \in D, \|h\|^2 \leq 2\|S\| c^{-1}\big\} = \\
&= \sup\big\{|(k, \|S\| h \pm S h)|^2 : h \in D, \|h\|^2 \leq 2\|S\| c^{-1}\big\}.
\end{aligned}$$

Itt pedig $(k, \|S\|h \pm Sh) = (k, Sh)$, hiszen $k \perp D$, így

$$\begin{aligned}\|J_\pm^* k\|^2 &= \sup\left\{|(k, \|S\|h \pm Sh)|^2 : h \in D, \|h\|^2 \leq 2\|S\|c^{-1}\right\}\\ &= \sup\left\{|(k, Sh)|^2 : h \in D, \|h\|^2 \leq 2\|S\|c^{-1}\right\} =\\ &= \sup\left\{|(S^*k, h)|^2 : h \in D, \|h\|^2 \leq 2\|S\|c^{-1}\right\} \leq\\ &\leq \sup\left\{\|S^*k\|^2\|h\|^2 : h \in D, \|h\|^2 \leq 2\|S\|c^{-1}\right\} \leq\\ &\leq 2\|S\|c^{-1}\|S^*k\|^2.\end{aligned}$$

Ebből pedig már $J_\pm^*$ kompaktsága következik, hiszen S kompaktsága miatt S^* is kompakt. □

A most következő Tétel szimmetrikus izometria kiterjesztéséről szól:

2.2.3. Tétel (Kapos). *Legyen $S : D \to \mathscr{H}$ szimmetrikus izomteria. Ekkor létezik $R \in B(\mathscr{H})$ önadjungált unitér kiterjesztése S-nek, azaz*

$$S \subset R = R^* = R^{-1},$$

méghozzá az $R := S_m$ illetve S_M operátorok ilyenek.

Bizonyítás. Mivel S izometria, így $\|S\| = 1$, emiatt a 2.2.1 Tételben definiált $A_\pm$ operátorokra $A_\pm = Id_\mathscr{H} \pm S$ egyenlőség áll fenn. Ugyancsak a 2.2.1 Tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan igazolható, hogy létezik a $J_\pm J_\pm^* \supset A_\pm$ legkisebb pozitív kiterjesztés. Jelölje $\mathscr{H}_\pm$ az $A_\pm$ operátorokhoz tartozó konstruált Hilbert-tereket. Legyen $x \in D$, ekkor az S operátor szimmetrikusságát illetve izometrikusságát felhasználva

$$\begin{aligned}(A_\pm x, A_\pm x) &= \big(x \pm Sx, x \pm Sx\big) =\\ &= 2\|x\|^2 \pm 2(Sx, x) = \big(2(S \pm Id_\mathscr{H})x, x\big) =\\ &= 2\langle A_\pm x, A_\pm x\rangle_{A_\pm} = 2\langle Id_{\mathscr{H}_\pm}(A_\pm x), A_\pm x\rangle_{A_\pm}.\end{aligned}$$

Másfelől ugyancsak tetszőleges $x \in D$-re

$$\begin{aligned}\langle 2Id_{\mathscr{H}_\pm}(A_\pm x), A_\pm x\rangle_{A_\pm} &= (A_\pm x, A_\pm x) =\\ &= \big(J_\pm(A_\pm x), J_\pm(A_\pm x)\big) = \big\langle J_\pm^* J_\pm(A_\pm x), A_\pm x\big\rangle_{A_\pm}.\end{aligned}$$

Vagyis $J_\pm^* J_\pm|_{\operatorname{ran} A_\pm} = 2Id_{\mathscr{H}_\pm}|_{\operatorname{ran} A_\pm}$, amelyből a $\overline{\operatorname{ran}}\, A_\pm = \mathscr{H}_\pm$ összefüggést felhasználva $J_\pm^* J_\pm = 2Id_{\mathscr{H}_\pm}$ következik. Jelölje S_m illetve S_M a (2.5)-ben jelölt operátorokat. Ekkor a 2.2.1 Tétel szerint S_m és S_M önadjungált kiterjesztései S-nek. Továbbá

$$\begin{aligned}S_m^2 &= (J_+J_+^* - Id_\mathscr{H})(J_+J_+^* - Id_\mathscr{H}) = J_+(J_+^*J_+)J_+^* - 2J_+J_+^* + Id_\mathscr{H} =\\ &= 2J_+Id_{\mathscr{H}_+}J_+^* - 2J_+J_+^* + Id_\mathscr{H} = Id_\mathscr{H},\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}S_M^2 &= (Id_{\mathscr{H}} - J_-J_-^*)(Id_{\mathscr{H}} - J_-J_-^*) = Id_{\mathscr{H}} - 2J_-J_-^* + J_-(J_-^*J_-)J_-^* = \\ &= Id_{\mathscr{H}} - 2J_-J_-^* + 2J_-Id_{\mathscr{H}_-}J_-^* = Id_{\mathscr{H}}.\end{aligned}$$

Tehát $S \subset S_m = S_m^* = S_m^{-1}$ illetve $S \subset S_M = S_M^* = S_M^{-1}$. □

2.2.4. Tétel (Projekció kiterjesztése). *Legyen $p : D \to \mathscr{H}$ pozitív lineáris operátor. Ekkor ekivalens:*

(i) Létezik $p \subset P = P^* = P^2$ ortogonális projekció.

(ii) $\|ph\|^2 = (ph, h) \qquad (h \in D)$.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: $\|ph\|^2 = (ph, ph) = (Ph, Ph) = (Ph, h) = (ph, h)$ tetszőleges $h \in D$-re.
$(ii) \Rightarrow (i)$: A feltételek szerint $p : D \to \mathscr{H}$ pozitív lineáris operátor, továbbá

$$M := \{ph : h \in D, (ph, h) \leq 1\} = \{ph : h \in D, (ph, ph) \leq 1\} \subseteq \mathscr{H}$$

korlátos, így vehető a $J_p : \mathscr{H}_p \to \mathscr{H}$ operátor, mely izometria. Legyen ugyanis $h \in D$, ekkor

$$\|J_p(ph)\|^2 = (ph, ph) = (ph, h) = \langle ph, ph \rangle_p.$$

Ekkor viszont $J_p^* J_p = Id_{\mathscr{H}_p}$, hiszen ran $p \subseteq \mathscr{H}_p$ sűrű, továbbá

$$\left\langle J_p^* J_p(ph), ph \right\rangle_p = \|J_p(ph)\|^2 = \langle ph, ph \rangle_p = \langle Id_{\mathscr{H}_p}(ph), ph \rangle_p.$$

Emiatt pedig a $J_p J_p^*$ önadjungált operátor idempotens is, ugyanis

$$(J_p J_p^*)(J_p J_p^*) = J_p(J_p^* J_p)J_p^* = J_p Id_{\mathscr{H}_p} J_p^* = J_p J_p^*.$$

Vagyis $P := J_p J_p^*$ jelöléssel $p \subset P = P^* = P^2$. □

2.3. Duális kiterjesztések

2.3.1. Tétel. *Legyenek $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ Hilbert terek, $H_0 \subseteq \mathscr{H}, K_0 \subseteq \mathscr{K}$ zárt lineáris alterek. Legyenek $T_0 : H_0 \to \mathscr{K}, T_{0*} : K_0 \to \mathscr{H}$ folytonos lineáris operátorok. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

(*i*) *Létezik* $T:\mathscr{H}\to\mathscr{K}$ *korlátos operátor, melyre* $T_0\subset T, T_{0*}\subset T^*$ *illetve* $\|T\|=\max\{\|T_0\|,\|T_{0*}\|\}$.

(*ii*) $(T_0h_0,k_0)_{\mathscr{K}}=(h_0,T_{0*}k_0)_{\mathscr{H}} \qquad (\forall h_0\in H_0, \forall k_0\in K_0)$.

Ha továbbá a fenti feltételek egyike teljesül, a T_0 *és* T_{0*} *operátorok pedig kompaktak, akkor* T *is választható kompaktnak.*

Bizonyítás. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Ha létezik ilyen $T\in B(\mathscr{H},\mathscr{K})$ operátor, akkor tetszőleges $h_0\in H_0, k_0\in K_0$ esetén

$$(T_0h_0,k_0)_{\mathscr{K}}=(Th_0,k_0)_{\mathscr{K}}=(h_0,T^*k_0)_{\mathscr{H}}=(h_0,T_{0*}k_0)_{\mathscr{H}}.$$

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*): Vezessük be a következő $S_0:H_0\oplus K_0\to\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ operátort

$$S_0(h_0\oplus k_0):=T_{0*}k_0\oplus T_0h_0. \tag{2.14}$$

Ekkor S_0 szimmetrikus, ugyanis $h_0\oplus k_0\in H_0\oplus K_0$ esetén a (*ii*) egyenlőséget felhasználva

$$\begin{aligned}\big(S_0(h_0\oplus k_0),h_0\oplus k_0\big)_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}&=\big(T_{0*}k_0\oplus T_0h_0,h_0\oplus k_0\big)_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}=\\&=(T_{0*}k_0,h_0)_{\mathscr{H}}+(T_0h_0,k_0)_{\mathscr{K}}=(k_0,T_0h_0)_{\mathscr{K}}+(h_0,T_{0*}k_0)_{\mathscr{H}}=\\&=\big(h_0\oplus k_0,T_{0*}k_0\oplus T_0h_0\big)_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}=\big(h_0\oplus k_0,S_0(h_0\oplus k_0)\big)_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}.\end{aligned}$$

Továbbá $\|S_0\|=\max\{\|T_0\|,\|T_{0*}\|\}$, ugyanis

$$\begin{aligned}\|S_0\|^2&=\sup\big\{\|S_0(h_0\oplus k_0)\|^2:h_0\oplus k_0\in H_0\oplus K_0,\|h_0\oplus k_0\|^2=1\big\}=\\&=\sup\big\{\|T_{0*}k_0\|^2+\|T_0h_0\|^2:h_0\in H_0,k_0\in K_0,\|h_0\|^2+\|k_0\|^2=1\big\}\geq\\&\geq\max\{\|T_0\|^2,\|T_{0*}\|^2\}.\end{aligned}$$

Másrészt ha $\|h_0\oplus k_0\|^2=\|h_0\|^2+\|k_0\|^2=1$, akkor

$$\begin{aligned}\|S_0(h_0\oplus k_0)\|^2&=\|T_{0*}k_0\|^2+\|T_0h_0\|^2\leq\|T_{0*}\|^2\|k_0\|^2+\|T_0\|^2\|h_0\|^2\\&\leq\big(\|h_0\|^2+\|k_0\|^2\big)\max\{\|T_0\|^2,\|T_{0*}\|^2\}=\\&=\max\{\|T_0\|^2,\|T_{0*}\|^2\}.\end{aligned}$$

Ezekből pedig már $\|S_0\|=\max\{\|T_0\|,\|T_{0*}\|\}$ következik. A fentiek miatt illetve a 2.2.1 Tétellel tehát létezik $B(\mathscr{H}\oplus\mathscr{K})\ni S\supset S_0$, $\|S\|=\|S_0\|$ önadjungált kiterjesztés. Legyenek $P:\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}\to\mathscr{H}$ illetve $Q:\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}\to\mathscr{K}$ a megfelelő kanonikus szürjekciók. Ekkor nyilván $P\in B(\mathscr{H}\oplus\mathscr{K},\mathscr{H})$ illetve $Q\in B(\mathscr{H}\oplus\mathscr{K},\mathscr{K})$. Továbbá $h\in\mathscr{H}$ esetén $P^*h=h\oplus 0$ illetve $k\in\mathscr{K}$ esetén $Q^*k=0\oplus k$. Ugyanis $h,h'\in\mathscr{H},k\in\mathscr{K}$ esetén

$$(P^*h',h\oplus k)_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}=\big(h',P(h\oplus k)\big)_{\mathscr{H}}=(h',h)_{\mathscr{H}}=(h'\oplus 0,h\oplus k)_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}.$$

Hasonlóan bizonyítható a Q^*-ra vonatkozó összefüggés. Jelölje $T := QSP^* \in B(\mathscr{H})$. Megmutatjuk, hogy ez a T teljesíti az (i) kijelentésben mondottakat. Legyen ugyanis $h_0 \in H_0$, ekkor

$$Th_0 = QSP^*h_0 = QS(h_0 \oplus 0) = QS_0(h_0 \oplus 0) = Q(0 \oplus T_0 h_0) = T_0 h_0.$$

Ugyanígy $k_0 \in K_0$ esetén

$$\begin{aligned} T^*h_0 = (QSP^*)^*k_0 = PSQk_0 = PS(0 \oplus k_0) = PS_0(0 \oplus k_0) = \\ = P(T_{0*}k_0 \oplus 0) = T_{0*}k_0. \end{aligned}$$

Azt kell még belátnunk, hogy $\|T\| = \max\{\|T_0\|, \|T_{0*}\|\}$. Könnyen látható, hogy $\|P^*\| = \|Q\| = 1$, ezért

$$\|T\| = \|QSP^*\| \leq \|Q\|\|S\|\|P^*\| = \|S\| = \max\{\|T_0\|, \|T_{0*}\|\}.$$

Mivel $T_0 \subset T$, így $\|T_0\| \leq \|T\|$, illetve $T_{0*} \subset T^*$ miatt $\|T_{0*}\| \leq \|T^*\| = \|T\|$, vagyis $\|T\| \leq \max\{\|T_0\|, \|T_{0*}\|\}$.
Tegyük fel végül, hogy a T_0 illetve T_{0*} operátorok kompaktak, ekkor nyilván a (2.14) formulával definiált S_0 is kompakt szimmetrikus, így a 2.2.2 Tétel szerint $S \supset S_0$ választható normatartó kompakt önadjungáltnak. Ezzel pedig a $T = QSP^*$ is kompakt. □

2.3.2. Tétel (Parrott). *Legyenek $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ Hilbert-terek, $H_0 \subseteq \mathscr{H}, K_0 \subseteq \mathscr{K}$ zárt alterek, továbbá legyen $T \in B(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ olyan, hogy a $T|_{H_0} : H_0 \to \mathscr{K}$ illetve a $T^*|_{K_0} : K_0 \to \mathscr{H}$ operátorok kompaktak. Ekkor létezik olyan $L \in B(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, melyre*

- (a) $H_0 \subseteq \ker L, K_0 \subseteq \ker L^*$,
- (b) *$T + L$ kompakt,*
- (c) $\|T + L\| = \max\left\{\|T|_{H_0}\|, \|T^*|_{K_0}\|\right\}$.

Bizonyítás. Jelölje $T_0 := T|_{H_0}, T_{0*} := T^*|_{K_0}$. Ekkor az előző Tétel szerint létezik $\widetilde{T} \in B(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ kompakt, melyre

$$\begin{gathered} \widetilde{T} \supset T_0 = T|_{H_0}, \quad \widetilde{T}^* \supset T_{0*} = T^*|_{K_0} \\ \|\widetilde{T}\| = \max\left\{\|T|_{H_0}\|, \|T^*|_{K_0}\|\right\}. \end{gathered}$$

Legyen ezután $L := \widetilde{T} - T$, ekkor a $T + L = \widetilde{T}$ operátorra az eddigiek alapján nyilvánvalóan teljesül (b) és (c). Továbbá $h_0 \in H_0$ és $k_0 \in K_0$ esetén:

$$\begin{aligned} Lh_0 &= \widetilde{T}h_0 - Th_0 = Th_0 - Th_0 = 0, \\ L^*k_0 &= \widetilde{T}^*k_0 - T^*k_0 = T^*k_0 - T^*k_0 = 0. \end{aligned}$$

Ezzel pedig (a)-t is igazoltuk. □

2.3.3. Tétel (Parrott - Foias - Tannenbaum). *Legyenek $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ Hilbert-terek, $H_0, H_1 \subseteq \mathscr{H}$, $K_0, K_1 \subseteq \mathscr{K}$ zárt alterek. Legyenek továbbá $T_0 : H_0 \to \mathscr{K}$, $T_{0*} : K_0 \to \mathscr{H}$ kontrakciók illetve $V : H_1 \to K_1$ unitér operátor. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

(*i*) *Létezik $T \in B(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, melyre $T|_{H_0} = T_0$, $T|_{H_1} = V$, $T^*|_{K_0} = T_{0*}$, $T^*|_{K_1} = V^*$.*

(*ii*) *A T_0, T_{0*} illetve V operátorokra teljesülnek a következők:*

$$\begin{aligned} (T_0h_0, k_0) &= (h_0, T_{0*}k_0) \qquad && (\forall h_0 \in H_0, \forall k_0 \in K_0), \\ (T_0h_0, k_1) &= (h_0, V^*k_1) && (\forall h_0 \in H_0, \forall k_1 \in K_1), \\ (Vh_1, k_0) &= (h_1, T_{0*}k_0) && (\forall h_1 \in H_1, \forall k_0 \in K_0). \end{aligned}$$

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ha létezik az (i) feltételnek eleget tevő T, akkor

$$(T_0h_0, k_0) = (Th_0, k_0) = (h_0, T^*k_0) = (h_0, T_{0*}k_0).$$

A többi azonosság ugyanilyen egyszerűen igazolható.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Jelölje $H_2 := \overline{\text{span}}\ (H_0 + H_1)$ illetve $K_2 := \overline{\text{span}}\ (K_0 + K_1)$. Vezessük be a következő H_2-ben illetve K_2-ben sűrűn definiált operátorokat:

$$\begin{aligned} T_2 &: H_2 \to \mathscr{K}, \qquad && T_2(h_0 + h_1) := T_0h_0 + Vh_1, \\ T_{2*} &: K_2 \to \mathscr{H}, && T_{2*}(k_0 + k_1) := T_{0*}k_0 + V^*k_1. \end{aligned}$$

Ekkor T_2, T_{2*} jóldefiniált korlátos operátorok (sőt kontrakciók), ugyanis $h_0 \in H_0$, $h_1 \in H_1$ esetén felhasználva, hogy V unitér illetve T kontrakció

$$\begin{aligned} \|T_0h_0 + Vh_1\|^2 &= \|T_0h_0\|^2 + \|Vh_1\|^2 + (T_0h_0, Vh_1) + (Vh_1, T_0h_0) = \\ &= \|T_0h_0\|^2 + \|h_1\|^2 + \big(h_0, V^*(Vh_1)\big) + \big(V^*(Vh_1), h_0\big) = \\ &= \|T_0h_0\|^2 + \|h_1\|^2 + (h_0, h_1) + (h_1, h_0) \le \\ &\le \|h_0\|^2 + \|h_1\|^2 + (h_0, h_1) + (h_1, h_0) = \|h_0 + h_1\|^2. \end{aligned}$$

Hasonlóan $\|T_{0*}k_0 + V^*k_1\|^2 \le \|k_0 + k_1\|^2$. Emiatt tehát a T_2 illetve T_{2*} sűrűn definiált korlátos operátorok egyértelműen kiterjednek a H_2 illetve K_2 alterekre a folytonosság megtartásával, jelölje ezeket is T_2 valamint T_{2*}. Megmutatjuk, hogy ezen operátorok teljesítik a 2.3.1 Tétel (ii) feltételét. Legyen ugyanis $h_0 \in H_0$, $h_1 \in H_1$, $k_0 \in K_0$, $k_1 \in K_1$, ekkor

$$\begin{aligned} \big(T_2(h_0 + h_1), k_0 + k_1\big) &= (T_0h_0 + Vh_1, k_0 + k_1) = \\ &= (T_0h_0, k_0) + (T_0h_0, k_1) + (Vh_1, k_0) + (Vh_1, k_1) = \\ &= (h_0, T_{0*}k_0) + (h_0, V^*k_1) + (h_1, T_{0*}k_0) + (h_1, V^*k_1) = \\ &= \big(h_0 + h_1, T_{2*}(k_0 + k_1)\big). \end{aligned}$$

Így tehát a 2.3.1 Tétel szerint létezik $T \in B(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, melyre $T \supset T_2$ illetve $T^* \supset T_{2*}$. Ez a T operátor pedig nyilvánvalóan eleget tesz a kívánt feltételeknek. $\square$

3. fejezet

Nemkorlátos operátorok kiterjesztése

3.1. Nemkorlátos operátorok

Mivel az egyetemi törzsanyagban nem szerepel a nemkorlátos operátorok elmélete, ezért ebben a fejezetben közlünk néhány alapvető definíciót illetve tételt e témakörből, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz. Az itt szereplő állítások bizonyítása megtalálható a [1], [2], [10] illetve [14] könyvekben. Felhasználjuk továbbá a [3], [8] illetve [15] cikkek eredményeit.

3.1.1. Definíció. *Legyenek $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ Hilbert-terek, $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ lineáris operátor, melyre* $\operatorname{dom} T \subseteq \mathscr{H}$ *lineáris altér. Ekkor a*

$$\operatorname{gra} T := \big\{ x \oplus Tx : x \in \operatorname{dom} T \big\} \subseteq \mathscr{H} \oplus \mathscr{K}$$

alteret T gráfjának nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy két operátor pontosan akkor egyenlő, ha a gráfjuk megegyezik. Továbbá T illetve $\widetilde{T}$ operátorok esetén $T \subset \widetilde{T}$ pontosan akkor teljesül, ha $\operatorname{gra} T \subseteq \operatorname{gra} \widetilde{T}$. Az alábbiakban nemkorlátos operátorok egy speciális típusát vezetjük be.

3.1.2. Definíció. *Egy $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ lineáris operátort zárt operátornak nevezünk, ha* $\operatorname{gra} T \subseteq \mathscr{H} \oplus \mathscr{K}$ *zárt. Továbbá T-t lezárhatónak hívjuk, ha létezik olyan $\overline{T}$ operátor, melyre*

$$\operatorname{gra} \overline{T} = \overline{\operatorname{gra}}\, T.$$

Ekkor a $\overline{T}$ operátort T lezárásának nevezzük.

3.1.3. Állítás. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ lineáris operátor. Ekkor ekvivalensek:*

(*i*) *T zárt.*

(*ii*) *$\big(\mathrm{dom}\, T, (\cdot,\cdot)_T\big)$ Hilbert-tér, ahol $x, y \in \mathrm{dom}\, T$ esetén*

$$(x, y)_T := (x, y)_{\mathscr{H}} + (Tx, Ty)_{\mathscr{K}}. \tag{3.1}$$

(*iii*) *Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{dom}\, T$, $x_n \to x$, $Tx_n \to y$, akkor $x \in \mathrm{dom}\, T$ és $Tx = y$.*

A fenti Állítás (*iii*) pontjából triviálisan adódik, hogy minden korlátos operátor zárt. Egy operátor zártságából a korlátosságára viszont csak nagyon speciális esetekben következtethetünk. Ezzel foglalkozik a következő Tétel.

3.1.4. Tétel (Zárt gráf tétel). *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ zárt operátor, melyre $\mathrm{dom}\, T = \mathscr{H}$. Ekkor T korlátos.*

Az alábbiakban bevezetjük nemkorlátos operátor adjungáltjának fogalmát. Külön felhívjuk a figyelmet arra, hogy míg a fentiekben $\mathrm{dom}\, T \subseteq \mathscr{H}$ tetszőleges lineáris altér volt, a most következő definíció csak akkor értelmes, ha $\mathrm{dom}\, T$ sűrű.
Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor. Ekkor

$$\mathrm{dom}\, T^* := \big\{k \in \mathscr{K} : |(Th, k)_{\mathscr{K}}| \leq m_k \|h\| \quad (\forall h \in \mathrm{dom}\, T)\big\}, \tag{3.2}$$

ahol $m_k > 0$ k-tól függő konstans. A fenti definíció értelmében rögzített $k \in \mathrm{dom}\, T^*$ esetén a $\varphi : h \mapsto (Th, k)_{\mathscr{K}}$ $\mathrm{dom}\, T$-n értelmezett lineáris funkcionál folytonos. Mivel $\mathrm{dom}\, T$ sűrű, így φ egyértelműen kiterjed $\mathscr{H}$-ra a folytonosság megtartásával. Így viszont a Riesz reprezentációs tétele szerint létezik egyetlen $k_\varphi \in \mathscr{H}$, melyre $\varphi(h) = (h, k_\varphi)_{\mathscr{H}}$ tetszőleges $h \in \mathscr{H}$ esetén. Vagyis

$$(Th, k)_{\mathscr{K}} = (h, k_\varphi)_{\mathscr{H}} \qquad\qquad (\forall h \in \mathrm{dom}\, T).$$

3.1.5. Definíció. *Jelölje T^* azt a $\mathscr{K} \to \mathscr{H}$ lineáris operátort, melynek értelmezési tartománya a* (3.2) *pontban értelmezett* $\mathrm{dom}\, T^*$*, továbbá*

$$T^*k := k_\varphi \qquad\qquad (k \in \mathrm{dom}\, T^*).$$

Ekkor tehát $k \in \mathrm{dom}\, T^*$ esetén

$$(Th, k)_{\mathscr{K}} = (h, T^*k)_{\mathscr{H}} \qquad\qquad (\forall h \in \mathrm{dom}\, T).$$

A következő Tételben jellemezni fogjuk az adjungált operátor értelmezési tartományát.

3.1.6. Tétel. *Legyen* $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ *sűrűn definiált, legyen továbbá* $z \in \mathscr{K}$*. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(a) $z \in \operatorname{dom} T^*$.

(b) $\sup\big\{|(Tx, z)_{\mathscr{K}}|^2 : x \in \operatorname{dom} T, (x, x)_{\mathscr{H}} \le 1\big\} < \infty$.

(c) $\sup\big\{(z, Tx)_{\mathscr{K}} + (Tx, z)_{\mathscr{K}} - (x, x)_{\mathscr{H}} : x \in \operatorname{dom} T\big\} < \infty$.

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Legyen $z \in \operatorname{dom} T^*$, ekkor definíció szerint minden $x \in \operatorname{dom} T$ esetén $|(Tx, z)_{\mathscr{K}}|^2 \le m_z\|x\|^2$. Ebből pedig már a ($b$)-beli szuprémum végessége adódik.
(b) $\Rightarrow$ (a): Jelölje m_z a (b)-beli véges szuprémumot, illetve legyen $x \in \operatorname{dom} T$ tetszőleges nem nulla elem. Ekkor $y := \|x\|^{-1}x$ jelöléssel nyilván $\|y\|^2 = 1$ teljesül, így

$$|(Tx, z)_{\mathscr{K}}|^2 = |(Ty, z)_{\mathscr{K}}|^2\|x\|^2 \le m_z\|x\|^2,$$

vagyis definíció szerint $z \in \operatorname{dom} T^*$.
(a) $\Rightarrow$ (c): Ha $z \in \operatorname{dom} T^*$, akkor tetszőleges $x \in \operatorname{dom} T$-re

$$\begin{aligned}(z, Tx)_{\mathscr{K}} + (Tx, z)_{\mathscr{K}} - (x, x)_{\mathscr{H}} &= (T^*z, x)_{\mathscr{H}} + (x, T^*z)_{\mathscr{H}} - (x, x)_{\mathscr{H}} = \\ &= -(T^*z - x, T^*z - x)_{\mathscr{H}} + (T^*z, T^*z)_{\mathscr{H}} \le \|T^*z\|^2.\end{aligned}$$

Vagyis a (c)-beli szuprémumra $\|T^*z\|^2$ felsőkorlát.
(c) $\Rightarrow$ (b): Jelölje m a (c)-beli szuprémumot. Először megmutatjuk, hogy

$$m = \sup\big\{2|(Tx, z)_{\mathscr{K}}| - (x, x)_{\mathscr{H}} : x \in \operatorname{dom} T\big\}. \tag{3.3}$$

Jelölje ugyanis M a fenti formula jobboldalán álló szuprémumot. Nyilvánvaló, hogy $m \le M$. A fordított irányú egyenlőtlenség bizonyításához legyen $x \in \operatorname{dom} T$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $\varrho \in \mathbb{C}$, $|\varrho| = 1$, hogy

$$\varrho(Tx, z)_{\mathscr{H}} = \big(T(\varrho x), z\big)_{\mathscr{H}} = \big(z, T(\varrho x)\big)_{\mathscr{H}} = |(Tx, z)_{\mathscr{H}}|.$$

Jelölje $y := \varrho x \in \operatorname{dom} T$, ekkor

$$2|(Tx, z)_{\mathscr{K}}| - (x, x)_{\mathscr{H}} = (Ty, z)_{\mathscr{K}} + (z, Ty)_{\mathscr{K}} - (y, y)_{\mathscr{H}} \le m.$$

Ebből pedig már $M \le m$ következik. Legyen $x \in \operatorname{dom} T$ és $y = \varrho x \in \operatorname{dom} T$ olyan mint fent. Ekkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $ty \in \operatorname{dom} T$, így

$$m \ge 2\big(T(ty), z\big)_{\mathscr{K}} - (ty, ty)_{\mathscr{H}} = 2t(Ty, z)_{\mathscr{K}} - t^2(y, y)_{\mathscr{H}}.$$

Azaz a $p(t) = t^2(y,y) - 2(Ty,z)_{\mathscr{K}}t + m$ másodfokú kifejezés nemnegatív, így diszkriminánsára a

$$0 \geq 4(Ty,z)^2_{\mathscr{K}} - 4m(y,y)_{\mathscr{H}} = 4|(Tx,z)|^2_{\mathscr{K}} - 4m(x,x)_{\mathscr{H}}$$

összefüggést kapjuk. Ezt átrendezve pedig már a (b)-beli szuprémum végessége könnyen adódik, hisz az m szám egy felső korlátja. $\square$

3.1.7. Állítás. *Legyenek $\mathscr{H}, \mathscr{K}, \mathscr{L}$ Hilbert-terek, $A, B : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$, $C : \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ sűrűn definiált lineáris operátorok, $L \in B(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ korlátos operátor.*

(i) *Ha* $\operatorname{dom} A \cap \operatorname{dom} B \subseteq \mathscr{H}$ *sűrű, akkor létezik* $(A+B)^* = A^* + B^*$.

(ii) *Ha* $\operatorname{dom}(CA) := \{x \in \operatorname{dom} A : Ax \in \operatorname{dom} C\} \subseteq \mathscr{H}$ *sűrű, akkor létezik* $(CA)^* \supset A^*C^*$.

(iii) $(LA)^* = A^*L^*$.

3.1.8. Állítás. *Legyen $A : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ sűrűn definiált operátor, ekkor*

$$(\operatorname{ran} A)^\perp = \ker A^*.$$

Ha továbbá A még zárt is, akkor

$$(\operatorname{ran} A^*)^\perp = \ker A.$$

3.1.9. Állítás. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ sűrűn definiált operátor. Ekkor*

(i) $T^* : \operatorname{dom} T^* \to \mathscr{H}$ *zárt operátor.*

(ii) *T pontosan akkor lezárható, ha* $\operatorname{dom} T^*$ *sűrűn definiált.*

(iii) *Ha T lezárható, akkor* $T^{**} := (T^*)^* = \overline{T}$.

A következő állításban szükséges és elégséges feltételt adunk sűrűn definiált zárt operátor folytonosságára. Ehhez azonban szükségünk lesz az alábbi lemmára:

3.1.10. Lemma. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ sűrűn definiált zárt operátor. Ekkor*

(a) $\mathscr{H} = \operatorname{dom} T + \operatorname{ran} T^*$

(b) $\mathscr{K} = \operatorname{dom} T^* + \operatorname{ran} T$

Bizonyítás. Vezessük be a következő $W : \mathscr{K} \oplus \mathscr{H} \to \mathscr{H} \oplus \mathscr{K}$ operátort:

$$W(k \oplus h) := -h \oplus k \qquad\qquad (h \in \mathscr{H}, k \in \mathscr{K}).$$

Megmutatjuk, hogy erre az operátorra teljesül az alábbi azonosság:

$$\text{gra } T = \big(W(\text{gra } T^*)\big)^{\perp}. \tag{3.4}$$

Jelölje ugyanis $A := T^*$, ekkor a feltételek szerint $A : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ sűrűn definiált zárt operátor, melyre $A^* = T$. Ezzel a jelöléssel a következőt kell igazolnunk:

$$\text{gra } A^* = \big(W(\text{gra } A)\big)^{\perp}.$$

Legyen először $k \in \text{dom } A$ rögzített, ekkor minden $h \in \text{dom } A^*$ esetén

$$\begin{aligned}\big(h \oplus A^*h, &W(k \oplus Ak)\big)_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}} = (h \oplus A^*h, -Ak \oplus k)_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}} = \\ &= (h, -Ak)_{\mathscr{H}} + (A^*h, k)_{\mathscr{K}} = -(A^*h, k)_{\mathscr{K}} + (A^*h, k)_{\mathscr{K}} = 0,\end{aligned}$$

azaz $\text{gra } A^* \subseteq \big(W(\text{gra } A)\big)^{\perp}$. Legyen $h' \oplus k' \in \big(W(\text{gra } A)\big)^{\perp}$, ekkor minden $k \in \text{dom } A$-ra

$$\begin{aligned}0 &= \big(h' \oplus k', W(k \oplus Ak)\big)_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}} = (h' \oplus k', -Ak \oplus k)_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}} = \\ &= -(h', Ak)_{\mathscr{H}} + (k', k)_{\mathscr{K}}.\end{aligned}$$

Vagyis minden $k \in \text{dom } A$ esetén $(Ak, h')_{\mathscr{H}} = (k, k')_{\mathscr{K}}$, ami éppen azt jelenti, hogy $h' \in \text{dom } A^*$ és $A^*h' = k'$. Ezzel a másik irányú tartalmazást is beláttuk. A (3.4) formula egyszerű következménye, hogy

$$\mathscr{H} \oplus \mathscr{K} = \text{gra } T \oplus W(\text{gra } T^*). \tag{3.5}$$

Ha tehát $f \in \mathscr{H}$, $g \in \mathscr{K}$ tetszőleges, akkor létezik olyan $h \in \text{dom } T$ és $k \in \text{dom } T^*$, hogy

$$\begin{aligned}f \oplus g &= (h \oplus Th) \oplus W(k \oplus T^*k) = (h \oplus Th) \oplus (-T^*k \oplus k) = \\ &= (h - T^*k) \oplus (k + Th).\end{aligned}$$

Ebből pedig $f = h - T^*k \in \text{dom } T + \text{ran } T^*$ és $g = k + Th \in \text{dom } T^* + \text{ran } T$, amiből már a Lemma állítása adódik. □

3.1.11. Tétel (Ôta). *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ sűrűn definiált zárt operátor. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(*i*) $\text{ran } T \subseteq \text{dom } T^*$.

(*ii*) T^* *korlátos.*

(*iii*) T *korlátos.*

(*iv*) $\text{ran } T^* \subseteq \text{dom } T$.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ha $\text{ran } T \subseteq \text{dom } T^*$, akkor a fenti Lemma szerint

$$\mathscr{K} = \text{dom } T^* + \text{ran } T = \text{dom } T^* \subseteq \mathscr{K},$$

azaz T^* mindenütt definiált zárt operátor, így a zárt gráf tétel szerint folytonos.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: $T = (T^*)^*$ korlátos.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Ha T sűrűn definiált, zárt, korlátos operátor, akkor szükségképpen $\text{dom } T = \mathscr{H}$, vagyis $\text{ran } T^* \subseteq \mathscr{H} = \text{dom } T$.
$(iv) \Rightarrow (iii)$: Ha $\text{ran } T^* \subseteq \text{dom } T$, akkor az előző lemmával

$$\mathscr{H} = \text{dom } T + \text{ran } T^* = \text{dom } T \subseteq \mathscr{H}.$$

Vagyis $\text{dom } T = \mathscr{H}$, azaz T mindenütt definiált zárt operátor, így a zárt gráf tétel miatt korlátos.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Ha T sűrűn definiált, zárt, folytonos lineáris operátor, akkor szükségképpen mindenütt definiált. Így tehát T^* is mindenütt definiált korlátos operátor, vagyis $\text{dom } T^* = \mathscr{K}$. Ebből pedig már $\text{ran } T \subseteq \mathscr{K} = \text{dom } T^*$ következik. □

3.1.12. Tétel (Sebestyén). *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor. Ekkor egy $z \in \mathscr{H}$ esetén ekvivalens:*

(*i*) $z \in \text{ran } T^*$.

(*ii*) *Létezik $m_z \geq 0$, melyre*

$$|(x,z)_{\mathscr{H}}|^2 \leq m_z (Tx, Tx)_{\mathscr{K}} \qquad (\forall x \in \text{dom } T). \tag{3.6}$$

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ha $z = T^*y$ valamely $y \in \text{dom } T^*$ esetén, akkor

$$|(x,z)_{\mathscr{H}}|^2 = |(x, T^*y)_{\mathscr{H}}|^2 = |(Tx, y)_{\mathscr{K}}|^2 \leq \|y\|^2 \|Ax\|^2,$$

vagyis $m_z := \|y\|^2$ választás megfelel.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Tekintsük $\text{ran } T$-n a következő lineáris funkcionált:

$$\phi(Tx) := (x,z)_{\mathscr{H}} \qquad (x \in \text{dom } T).$$

Ez jóldefiniált folytonos lináris funkcionál ran T-n, ugyanis $x \in \operatorname{dom} T$ esetén

$$|\phi(Tx)|^2 = |(x,z)_{\mathscr{H}}|^2 \leq m_z \|Tx\|^2.$$

Ekkor tehát ϕ folytonosan kiterjed $\overline{\operatorname{ran}}\, T$-re, így Riesz reprezentációs tétele szerint létezik egyetlen $y \in \overline{\operatorname{ran}}\, T \subseteq \mathscr{K}$, melyre

$$\phi(Tx) = (Tx, y)_{\mathscr{K}} \qquad (x \in \operatorname{dom} T),$$

azaz minden $x \in \operatorname{dom} T$ esetén

$$(x,z)_{\mathscr{H}} = \phi(Tx) = (Tx,y)_{\mathscr{K}}.$$

Vagyis az $x \mapsto (Tx,y)_{\mathscr{K}} = (x,z)_{\mathscr{H}}$ leképezés folytonos lineáris funkcionál dom T-n, ami azt jelenti, hogy $y \in \operatorname{dom} T^*$ és $T^*y = z$. □

3.1.13. Következmény. *Legyenek $A : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$, $B : \mathscr{H} \to \mathscr{L}$ olyan sűrűn definiált operátorok, hogy $D := \operatorname{dom} A = \operatorname{dom} B$, illetve*

$$\|Ax\|^2 \leq \|Bx\|^2 \qquad (\forall x \in D)$$

Ekkor $\operatorname{ran} A^* \subseteq \operatorname{ran} B^*$.

Bizonyítás. Legyen $z \in \operatorname{ran} A^*$, ez ekvivalens azzal, hogy minden $x \in D$ esetén

$$|(x,z)|^2 \leq m_z \|Ax\|^2 \leq m_z \|Bx\|^2,$$

amiből $z \in \operatorname{ran} B^*$ következik, azaz $\operatorname{ran} A^* \subseteq \operatorname{ran} B^*$ □

3.1.14. Definíció. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $S : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ (nem feltétlenül sűrűn definiált) lineáris operátor. S-et szimmetrikusnak nevezzük, ha*

$$(Sx,y) = (y,Sx) \qquad (x,y \in \operatorname{dom} S).$$

3.1.15. Definíció. *Egy $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ operátort pozitívnak nevezünk, ha $(Ax,x) \geq 0$ minden $x \in \operatorname{dom} A$ esetén.*

3.1.16. Állítás. *Legyen $S : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ lineáris operátor. Ekkor ekvivalens:*

(*i*) *S szimmetrikus.*

(*ii*) *$(Sx,x) = (x,Sx)$ minden $x \in \operatorname{dom} S$ esetén.*

Ha továbbá S sűrűn definiált, akkor a fentiekkel ekvivalens a következő:

(iii) $S \subset S^*$.

3.1.17. Definíció. *Egy $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ sűrűn definiált operátort önadjungáltnak nevezünk, ha $A^* = A$.*

Nyilvánvaló, hogy minden önadjungált operátor egyben zárt és szimmetrikus is, továbbá minden sűrűn definiált szimmetrikus operátor lezárható.

3.1.18. Tétel. *Legyen $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív önadjungált operátor, ekkor létezik egyetlen olyan $A^{1/2} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív önadjungált, melyre*

$$(A^{1/2})^2 = A.$$

Az $A^{1/2}$ operátor definíciójából könnyen látható, hogy $\mathrm{dom}\, A \subseteq \mathrm{dom}\, A^{1/2}$ illetve $\mathrm{ran}\, A \subseteq \mathrm{ran}\, A^{1/2}$.

3.1.19. Lemma. *Legyen $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ sűrűn definiált szimmetrikus operátor, melyre* $\mathrm{ran}\, A = \mathscr{H}$. *Ekkor A önadjungált.*

Bizonyítás. Mivel A szimmetrikus, ezért $A \subset A^*$, így elegendő azt belátnunk, hogy $\mathrm{dom}\, A^* \subseteq \mathrm{dom}\, A$. Legyen tehát $f \in \mathrm{dom}\, A^*$, ekkor $\mathrm{ran}\, A = \mathscr{H}$ miatt létezik olyan $h_0 \in \mathrm{dom}\, A$, melyre $Ah_0 = A^* f$. Ekkor tetszőleges $h \in \mathrm{dom}\, A$ esetén

$$(Ah, f) = (h, A^* f) = (h, Ah_0) = (Ah, h_0),$$

azaz $(Ah, f - h_0) = 0$, vagyis $f - h_0 \in (\mathrm{ran}\, A)^\perp = \mathscr{H}^\perp = \{0\}$. ☐

3.1.20. Tétel (von Neumann). *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ sűrűn definiált zárt operátor. Ekkor $T^*T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív önadjungált, továbbá*

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\, (T^*T)^{1/2} &= \mathrm{dom}\, T, \\ \mathrm{ran}\, (T^*T)^{1/2} &= \mathrm{ran}\, T^*. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy T^*T pozitív operátor. Kevésbé nyilvánvaló azonban, hogy sűrűn definiált. Mivel T zárt, ezért $\big(\mathrm{gra}\, T, (\cdot,\cdot)\big)$ Hilberttér. Vegyük ezen a következő operátort:

$$\begin{aligned} &J : \mathrm{gra}\, T \to \mathscr{H}, \\ &J(x \oplus Tx) = x. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ekkor J nyilván folytonos lineáris leképezés (sőt kontrakció). Könnyen látható továbbá, hogy $\ker J = \{0\}$ illetve $\overline{\operatorname{ran}}\ J = \mathscr{H}$, ez utóbbi miatt $\ker J^* = \{0\}$. Ezekből pedig a $JJ^* \in B(\mathscr{H})$ operátorra

$$\ker JJ^* = \{0\},\ \overline{\operatorname{ran}}\ JJ^* = \mathscr{H}$$

összefüggések adódnak. Legyen ezután $x \in \mathscr{H}$ tetszőleges, $y \in \operatorname{dom} T = \operatorname{ran} J$, ekkor a $J^{-1}y = y \oplus Ty$ összefüggést felhasználva

$$\begin{aligned}(x,y)_{\mathscr{H}} &= (x, JJ^{-1}y)_{\mathscr{H}} = (J^*x, J^{-1}y)_T = \big(J^{-1}(JJ^*x), J^{-1}y\big)_T = \\ &= (JJ^*x, y)_{\mathscr{H}} + (TJJ^*x, Ty)_{\mathscr{K}}.\end{aligned}$$

Ezt pedig átrendezve a következő egyenlőséget kapjuk:

$$(TJJ^*x, Ty)_{\mathscr{K}} = (x - JJ^*x, y)_{\mathscr{H}} \qquad (x \in \mathscr{H}, y \in \operatorname{dom} T)$$

Tehát az $y \mapsto (Ty, TJJ^*x)_{\mathscr{K}} = (y, x - JJ^*x)_{\mathscr{H}}$ leképezés tetszőleges $x \in \mathscr{H}$ esetén folytonos lineáris funkcionál $\operatorname{dom} T$-n, ami éppen azt jelenti, hogy $TJJ^*x \in \operatorname{dom} T^*$ és

$$T^*T(JJ^*x) = (Id_{\mathscr{H}} - JJ^*)x \qquad (x \in \mathscr{H}).$$

Ebből pedig $(Id_{\mathscr{H}} + T^*T)JJ^* = Id_{\mathscr{H}}$ illetve $\operatorname{ran} JJ^* \subseteq \operatorname{dom} T^*T$ összefüggések adódnak. Vagyis $Id_{\mathscr{H}} + T^*T$ sűrűn definiált, szimmetrikus, szürjektív operátor, így a 3.1.19 Lemma szerint önadjungált. Emiatt

$$T^*T = (Id_{\mathscr{H}} + T^*T) - Id_{\mathscr{H}}$$

is önadjungált. Ezzel beláttuk, hogy T^*T pozitív önadjungált, így a 3.1.18 Tétel szerint létezik $(T^*T)^{1/2}$. Jelölje ezt az egyszerűség kedvéért A. Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{gra}}\ (T|_{\operatorname{dom} T^*T}) &= \operatorname{gra} T,\\ \overline{\operatorname{gra}}\ (A|_{\operatorname{dom} T^*T}) &= \operatorname{gra} A.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Legyen ugyanis $x \in \operatorname{dom} T$ olyan, hogy $x \oplus Tx \in \operatorname{gra}(T|_{\operatorname{dom} T^*T})^{\perp}$. Ekkor tehát minden $y \in \operatorname{dom} T^*T$-re

$$\begin{aligned}0 &= (x \oplus Tx, y \oplus Ty)_T = (x,y)_{\mathscr{H}} + (Tx, Ty)_{\mathscr{K}} = (x,y)_{\mathscr{H}} + (x, T^*Ty)_{\mathscr{H}} = \\ &= (x, y + T^*Ty)_{\mathscr{H}} = \big(x, (Id_{\mathscr{H}} + T^*T)y\big)_{\mathscr{H}}.\end{aligned}$$

Emiatt $x \perp \operatorname{ran}\ (Id_{\mathscr{H}} + T^*T) = \mathscr{H}$, vagyis $x = 0$. Az A gráfjára vonatkozó összefüggés pedig ebből már triviális, hiszen T helyett A-t írva az $A^*A = T^*T$ azonosságot használva

$$\overline{\operatorname{gra}}\ (A|_{\operatorname{dom} T^*T}) = \overline{\operatorname{gra}}\ (A|_{\operatorname{dom} A^*A}) = \operatorname{gra} A.$$

Térjünk rá végül a $\operatorname{dom}(T^*T)^{1/2} = \operatorname{dom} T$ illetve $\operatorname{ran}(T^*T)^{1/2} = \operatorname{ran} T^*$ összefüggések bizonyítására. Ha $x \in \operatorname{dom} T^*T$, akkor

$$\begin{aligned}\|x \oplus Ax\|_A^2 &= (x,x)_{\mathscr{H}} + \left((T^*T)^{1/2}x, (T^*T)^{1/2}x\right)_{\mathscr{H}} = \\ &= (x,x)_{\mathscr{H}} + (T^*Tx, x)_{\mathscr{H}} = (x,x)_{\mathscr{H}} + (Tx,Tx)_{\mathscr{K}} = \\ &= \|x \oplus Tx\|_T^2.\end{aligned}$$

Legyen $x \in \operatorname{dom} T$, ekkor (3.8) szerint létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hogy

$$\|x \oplus Tx - x_n \oplus Tx_n\|_T^2 \to 0.$$

Emiatt $\|x_n - x\|_{\mathscr{H}} \to 0$ is teljesül. A fentiek szerint $(x_n \oplus Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{gra} A$ is Cauchy-sorozat, így létezik $y \in \operatorname{dom} A$, hogy

$$\|y \oplus Ay - x_n \oplus Ax_n\|_A^2 \to 0.$$

Ebből $\|x_n - y\|_{\mathscr{H}} \to 0$ következik, vagyis $x = y$, azaz $\operatorname{dom} T \subseteq \operatorname{dom} A$. A másik irányú tartalmazás ugyanígy bizonyítható. A képterekre vonatkozó egyenlőség a 3.1.13 Következményből adódik, ha megmutatjuk, hogy minden $x \in D := \operatorname{dom} T = \operatorname{dom} A$ esetén $\|Tx\|^2 = \|Ax\|^2$. Legyen tehát $x \in D$, ekkor (3.8) szerint létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hogy

$$\|x \oplus Tx - x_n \oplus Tx_n\|_T^2 \to 0.$$

Az előzőek szerint ekkor $\|x \oplus Ax - x_n \oplus Ax_n\|_A^2 \to 0$ is teljesül, így

$$\begin{aligned}\|x \oplus Tx\|_T^2 &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \|x_n \oplus Tx_n\|_T^2 = \lim_{n\in\mathbb{N}} \|x_n \oplus Ax_n\|_A^2 = \\ &= \|x \oplus Ax\|_A^2,\end{aligned}$$

ebből pedig könnyen adódik, hogy $\|Tx\|^2 = \|Ax\|^2$. □

3.1.21. Következmény. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ sűrűn definiált zárt operátor. Ekkor*

$$(Id + T^*T)^{-1} = JJ^* \in B(\mathscr{H}), \tag{3.9}$$

ahol J a (3.7) pontban definiált kontrakció.

□

3.2. A Krein-von Neumann kiterjesztés

Az alábbi fejezetben azt vizsgáljuk, hogy egy adott $T : \operatorname{dom} T \to \mathscr{H}$ operátornak milyen feltételek mellett létezik pozitív önadjungált kiterjesztése. Először bevezetünk egy rendezést a pozitív önadjungált operátorok halmazán, majd megmutatjuk, hogy ha egy operátornak létezik pozitív önadjungált kiterjesztése, akkor létezik legkisebb ilyen is, az úgynevezett Krein-von Neumann kiterjesztés.
Megjegyezzük, hogy a Neumann- illetve Krein-féle elmélet csak sűrűn definiált operátorok esetében alkalmazható. Ebben a dolgozatban azonban igazoljuk, hogy a Krein-von Neumann kiterjesztés (és egyáltalán pozitív önadjungált kiterjesztés) létezése ekvivalens azzal, hogy a 3.10 Definívióban bevezetett $D_*[T]$ lineáris altér sűrű. (Ebből triviális módon adódik a sűrűn definiált operátorok esetére vonatkozó tétel.)

3.2.1. Definíció. *Legyenek $A, B : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív önadjungált operátorok. Azt mondjuk, hogy A kisebb mint B, jelölésben $A \preceq B$, ha*

(a) $\operatorname{dom} B^{1/2} \subseteq \operatorname{dom} A^{1/2}$,

(b) $\|A^{1/2}x\|^2 \leq \|B^{1/2}x\|^2 \quad (\forall x \in \operatorname{dom} B^{1/2})$.

Könnyen látható, hogy ha A és B pozitív korlátos operátor, akkor $A \preceq B$ pontosan akkor teljesül, ha $A \leq B$. Nem teljesen nyilvánvaló azonban, hogy a $\preceq$ reláció rendezés a pozitív önadjungált operátorok halmazán, azaz hogy ha $A \preceq B$ és $B \preceq A$, akkor $A = B$. Az alábbiakban ezt fogjuk megmutatni.

3.2.2. Lemma (Douglas). *Legyenek $\mathscr{H}, \mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ Hilbert-terek, legyenek továbbá $L \in B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H})$, $K \in B(\mathscr{H}_2, \mathscr{H})$ korlátos operátorok. Ekkor ekvivalensek:*

(a) *Létezik $C \in B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$, melyre $L = KC$.*

(b) *$LL^* \leq m^2 KK^*$ valamely $m \geq 0$ számra.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Ha $L = KC$, akkor $L^* = C^*K^*$, ezzel tetszőleges $x \in \mathscr{H}$ esetén

$$\begin{aligned}(LL^*x, x) = (L^*x, L^*x) = (C^*K^*x, C^*K^*x) \leq \\ \leq \|C^*\|^2 \|K^*x\|^2 = m^2(KK^*x, x).\end{aligned}$$

Vagyis $LL^* \leq m^2 KK^*$.
(a) $\Rightarrow$ (b): Vezessük be a következő $A : \operatorname{ran} K^* \to \mathscr{H}_2$ operátort:

$$A(K^*x) := L^*x \qquad (x \in \mathscr{H}).$$

Ekkor A jóldefiniált korlátos operátor, ugyanis a (b) feltétel szerint teszőleges $x \in \mathscr{H}$ esetén

$$\|A(K^*x)\|^2 = \|L^*x\|^2 \leq m^2\|K^*x\|^2,$$

azaz $\|A\| \leq m$. Emiatt létezik A-nak egyértelmű, normatartó kiterjesztése $\overline{\text{ran}}\ K^*$-ra. Jelölje ezt is A. Mivel $\mathscr{H}_2 = \overline{\text{ran}}\ K^* \oplus (\text{ran}\ K^*)^\perp$, így vehetjük a

$$B = A \oplus 0 : \overline{\text{ran}}\ K^* \oplus (\text{ran}\ K^*)^\perp \to \mathscr{H}_1$$

operátort. Ekkor tetszőleges $x \in \mathscr{H}$ esetén tehát $L^*x = BK^*x$, vagyis $L^* = BK^*$. Ebből pedig $C := B^*$ választással $L = KC$ következik. $\square$

3.2.3. Állítás. *Legyenek $\mathscr{H}, \mathscr{H}', \mathscr{H}''$ Hilbert-terek, $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ illetve $S : \mathscr{H} \to \mathscr{H}''$ sűrűn definiált zárt operátorok. Ekkor ekvivalensek:*

(i) $\text{dom}\ T \subseteq \text{dom}\ S$ *és minden* $x \in \text{dom}\ T$*-re* $\|Sx\|^2 \leq \|Tx\|^2$.

(ii) $(Id_{\mathscr{H}} + T^*T)^{-1} \leq (Id_{\mathscr{H}} + S^*S)^{-1}$.

Bizonyítás. Mivel T és S zárt operátorok, így $\mathscr{H}_1 := \text{gra}\ T$ és $\mathscr{H}_2 := \text{gra}\ S$ Hilbert terek. Vegyük ezeken a következő kontrakciókat:

$$K : \text{gra}\ S \to \mathscr{H}, \quad K(x \oplus Sx) := x$$
$$L : \text{gra}\ T \to \mathscr{H}, \quad L(x \oplus Tx) := x$$

A (3.9) formula szerint $KK^* = (Id_{\mathscr{H}} + S^*S)^{-1}$ és $LL^* = (Id_{\mathscr{H}} + T^*T)^{-1}$. Ezek után rátérhetünk az ekvivalencia bizonyítására.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Definiáljuk a következő $C : \text{gra}\ T \to \text{gra}\ S$ operátort:

$$C(x \oplus Tx) := x \oplus Sx \qquad (x \in \text{dom}\ T).$$

Ekkor C a (ii) feltétel szerint jóldefiniált kontraktív operátor, továbbá $L = KC$. Legyen ugyanis $x \in \text{dom}\ T$, ekkor

$$KC(x \oplus Tx) = K(x \oplus Sx) = x = L(x \oplus Tx).$$

Azaz $KC = L$. A 3.2.2 Lemma $(a) \Rightarrow (b)$ implikációja szerint illetve $\|C\| \leq 1$ miatt minden $x \in \mathscr{H}$ esetén

$$\big((Id_{\mathscr{H}} + T^*T)^{-1}x, x\big) = (LL^*x, x) \leq (KK^*x, x) = \big((Id_{\mathscr{H}} + S^*S)^{-1}x, x\big),$$

azaz $(Id_{\mathscr{H}} + T^*T)^{-1} \leq (Id_{\mathscr{H}} + S^*S)^{-1}$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy (ii) teljesül, azaz hogy $LL^* \leq KK^*$. Ekkor a 3.2.2 Lemma szerint létezik olyan $C \in B(\text{gra}\ T, \text{gra}\ S)$, melyre $\|C\| \leq 1$ és

$L = KC$. Emiatt tetszőleges $x \in \operatorname{dom} T$ esetén $C(x \oplus Tx) = y \oplus Sy$ alakú valamely $y \in \operatorname{dom} S$-re. Így

$$x = L(x \oplus Tx) = KC(x \oplus Tx) = K(y \oplus Sy) = y.$$

Ezzel pedig $x \in \operatorname{dom} S$ illetve $C(x \oplus Tx) = x \oplus Sx$. Továbbá

$$\begin{aligned}\|x\|^2 + \|Sx\|^2 = \|x \oplus Sx\|^2 = \|C(x \oplus Tx)\|^2 \leq \\ \leq \|C\|^2 \|x \oplus Tx\|^2 \leq \|x \oplus Tx\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2.\end{aligned}$$

Vagyis $\|Sx\|^2 \leq \|Tx\|^2$. □

3.2.4. Következmény. *Legyenek $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_1$, $S : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_2$ sűrűn definiált zárt operátorok. Tegyük fel, hogy*

(a) $\operatorname{dom} S = \operatorname{dom} T$,

(b) $\|Sx\|^2 = \|Tx\|^2$ *minden* $x \in \operatorname{dom} S$.

Ekkor $S^*S = T^*T$. Speciálisan ha A és B pozitív önadjungált operátorok, $A \preceq B$, $B \preceq A$, akkor $A = B$.

Bizonyítás. Az előző Állítást alkalmazva minden $x \in \mathscr{H}$ esetén

$$\big((Id_{\mathscr{H}} + S^*S)^{-1}x, x\big) = \big((Id_{\mathscr{H}} + T^*T)^{-1}x, x\big),$$

vagyis $(Id_{\mathscr{H}} + S^*S)^{-1} = (Id_{\mathscr{H}} + T^*T)^{-1}$. Ebből pedig triviálisan következik a $S^*S = T^*T$ egyenlőség. Ha pedig A és B pozitív önadjungáltak, akkor az $S := A^{1/2}$ illetve $T := B^{1/2}$ operátorok kielégítik az (a) és (b) feltételeket. Így tehát $A = (S^{1/2})^*S^{1/2} = (T^{1/2})^*T^{1/2} = B$. □

3.2.5. Definíció. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ nem feltétlenül sűrűn definiált pozitív operátor. Ekkor*

$$D_*[T] := \big\{z \in \mathscr{H} : |(Tx, z)|^2 \leq m_z(Tx, x) \ (\forall x \in \operatorname{dom} T)\big\}. \tag{3.10}$$

Megjegyezzük, hogy $D_*[T]$ olyan lineáris altere $\mathscr{H}$-nak, amely tartalmazza $\operatorname{dom} T$-t. Legyen ugyanis $z \in \operatorname{dom} T$, ekkor felhasználva a Schwarz-egyenlőtlenséget

$$|(Tx, z)|^2 \leq (Tx, x)(Tz, z) = m_z(Tx, x) \qquad (\forall x \in \operatorname{dom} T).$$

3.2.6. Tétel (Sebestyén-Stochel). *Legyen* $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ *pozitív operátor. Ekkor az alábbiak ekivivalensek*

(*i*) $D_*[T] \subseteq \mathscr{H}$ *sűrű.*

(*ii*) *Létezik* T_N *pozitív önadjungált kiterjesztése* T*-nek, melyre tetszőleges* $\widetilde{T} \supset T$ *pozitív önadjungált esetén* $T_N \preceq \widetilde{T}$ *teljesül.*

(*iii*) *Létezik* $\widetilde{T}$ *pozitív önadjungált kiterjesztése* T*-nek.*

Bizonyítás. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Vegyük ran T-n a következő fél-skaláris szorzatot:

$$\langle Tx, Ty\rangle := (Tx, y) \qquad\qquad (x, y \in \mathrm{dom}\ T)$$

Megmutatjuk, hogy ekkor $\big(\mathrm{ran}\ T, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ pre-Hilbert-tér. Tegyük fel ugyanis, hogy $\langle Tx, Tx\rangle = (Tx, x) = 0$ teljesül valamely $x \in \mathrm{dom}\ T$-re. Ekkor minden $z \in D_*[T]$ esetén

$$|(Tx, z)|^2 \le m_z(Tx, x),$$

azaz $Tx \in D_*[T]^\perp = \{0\}$, hiszen $D_*[T] \subseteq \mathscr{H}$ sűrű. Jelölje ezek után $\mathscr{H}_T$ a fenti $\big(\mathrm{ran}\ T, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ pre-Hilbert-tér teljes burkát. Definiáljuk ezen a következő $J_T : \mathscr{H}_T \supseteq \mathrm{ran}\ T \to \mathscr{H}$ operátort:

$$J_T(Tx) := Tx \qquad\qquad (x \in \mathrm{dom}\ T). \tag{3.11}$$

Ekkor J_T lezárható, ugyanis ez azzal ekvivalens, hogy dom J_T^* sűrű $\mathscr{H}$-ban, ez pedig

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\ J_T^* &= \Big\{z \in \mathscr{H} : \big|\big(J_T(Tx), z\big)\big|^2 \le m_z\langle Tx, Tx\rangle \quad (\forall x \in \mathrm{dom}\ T)\Big\} = \\ &= \Big\{z \in \mathscr{H} : |(Tx, z)|^2 \le m_z(Tx, x) \quad (\forall x \in \mathrm{dom}\ T)\Big\} = D_*[T].\end{aligned}$$

Vagyis dom $J_T^* = D_*[T]$, ami a feltétel szerint sűrű. Így tehát létezik a $J_T^{**} : \mathscr{H}_T \to \mathscr{H}$ sűrűn definiált zárt operátor, melyre $J_T^{**}|_{\mathrm{ran}\ T} = J_T$. Másrészt $x \in \mathrm{dom}\ T \subseteq D_*[T]$ esetén tetszőleges $Ty \in \mathrm{ran}\ T$-re

$$\langle Ty, J_T^* x\rangle = \big(J_T^{**}(Ty), x\big) = \big(J_T(Ty), x\big) = (Ty, x) = \langle Ty, Tx\rangle.$$

Mivel ran $T \subseteq \mathscr{H}_T$ sűrű, így

$$J_T^* x = Tx \in \mathscr{H}_T \qquad\qquad (x \in \mathrm{dom}\ T). \tag{3.12}$$

Vegyük ezek után a $J_T^{**} J_T^* : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ operátort, mely a 3.1.20 Tétel szerint pozitív önadjungált. Legyen $x \in \mathrm{dom}\ T$, ekkor felhasználva a (3.11) illetve (3.12) formulákat

$$J_T^{**} J_T^* x = J_T^{**}(Tx) = J_T(Tx) = Tx.$$

Vagyis $T_N := J_T^{**}J_T^*$ pozitív önadjungált kiterjesztése T-nek. Be kell még látnunk, hogy T_N a legkisebb kiterjesztés. Legyen tehát $\widetilde{T}$ szintén pozitív önadjungált kiterjesztése T-nek. Mivel $\operatorname{dom} \widetilde{T} \subseteq D_*[\widetilde{T}]$, így $D_*[\widetilde{T}]$ sűrű. Vagyis a fentiekhez hasonlóan T helyett $\widetilde{T}$-ot véve elkészíthetjük a megfelelő $\mathscr{H}_{\widetilde{T}}$ konstruált Hilbert-teret illetve a $J_{\widetilde{T}}^{**}J_{\widetilde{T}}^*$ operátort, mely pozitív önadjungált kiterjesztése $\widetilde{T}$-nak. Emiatt $J_{\widetilde{T}}^{**}J_{\widetilde{T}}^* = \widetilde{T}$. Szintén a 3.1.20 Tétel szerint

$$\operatorname{dom} T_N^{1/2} = \operatorname{dom} (J_T^{**}J_T^*)^{1/2} = \operatorname{dom} J_T^* = D_*[T]$$

illeteve

$$\operatorname{dom} \widetilde{T}^{1/2} = \operatorname{dom} (J_{\widetilde{T}}^{**}J_{\widetilde{T}}^*)^{1/2} = \operatorname{dom} J_{\widetilde{T}}^* = D_*[\widetilde{T}].$$

Azaz a $\operatorname{dom} \widetilde{T}^{1/2} \subseteq \operatorname{dom} T_N^{1/2}$ tartalmazás igazolásához azt kellene megmutatnunk, hogy $D_*[\widetilde{T}] \subseteq D_*[T]$. Felhasználva, hogy $T \subset \widetilde{T}$

$$\begin{aligned} D_*[\widetilde{T}] &= \big\{z \in \mathscr{H} : |(\widetilde{T}x, z)|^2 \leq m_z(\widetilde{T}x, x) \ (\forall x \in \operatorname{dom} \widetilde{T})\big\} \subseteq \\ &\subseteq \big\{z \in \mathscr{H} : |(\widetilde{T}x, z)|^2 \leq m_z(\widetilde{T}x, x) \ (\forall x \in \operatorname{dom} T)\big\} = \\ &= \big\{z \in \mathscr{H} : |(Tx, z)|^2 \leq m_z(Tx, x) \ (\forall x \in \operatorname{dom} T)\big\} = D_*[T]. \end{aligned}$$

Azt kellene még megmutatnunk, hogy

$$\|T_N^{1/2}x\|^2 \leq \|\widetilde{T}^{1/2}x\|^2 \qquad (x \in \operatorname{dom} \widetilde{T}^{1/2}).$$

A 3.1.20 Tétel bizonyításában láttuk, hogy tetszőleges $x \in \operatorname{dom} T_N^{1/2} = \operatorname{dom} J_T^* = D_*[T]$ esetén $\|T_N^{1/2}x\|^2 = \|J_T^*x\|^2_{\mathscr{H}_T}$. Mivel $\operatorname{ran} T \subseteq \mathscr{H}_T$ sűrű, így $x \in D_*[T]$-re

$$\begin{aligned} 0 &= \inf \big\{\|J_T^*x - Ty\|^2_{\mathscr{H}_T} : y \in \operatorname{dom} T\big\} = \\ &= \inf \big\{\|J_T^*x\|^2_{\mathscr{H}_T} - \langle J_T^*x, Ty\rangle - \langle Ty, J_T^*x\rangle + \|Ty\|^2_{\mathscr{H}_T} : y \in \operatorname{dom} T\big\} = \\ &= \|J_T^*x\|^2_{\mathscr{H}_T} + \inf \big\{ - (x, Ty) - (Ty, x) + (Ty, y) : y \in \operatorname{dom} T\big\} = \\ &= \|J_T^*x\|^2_{\mathscr{H}_T} + \inf \big\{(x, Ty) + (Ty, x) + (Ty, y) : y \in \operatorname{dom} T\big\}. \end{aligned}$$

Vagyis ezt átrendezve

$$\begin{aligned} \|T_N^{1/2}x\|^2 = \|J_T^*x\|^2_{\mathscr{H}_T} &= -\inf \big\{(x, Ty) + (Ty, x) + (Ty, y) : y \in \operatorname{dom} T\big\} = \\ &= \sup \big\{(x, Ty) + (Ty, x) - (Ty, y) : y \in \operatorname{dom} T\big\} \end{aligned}$$

Innen pedig T-t $\widetilde{T}$-ra cserélve illetve $T \subset \widetilde{T}$ összefüggést használva tetszőleges $x \in \operatorname{dom} \widetilde{T}^{1/2}$ esetén

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}^{1/2}x\|^2 = \|J_{\widetilde{T}}^*x\|^2_{\mathscr{H}_{\widetilde{T}}} &= \sup \big\{(x, \widetilde{T}y) + (\widetilde{T}y, x) - (\widetilde{T}y, y) : y \in \operatorname{dom} \widetilde{T}\big\} \geq \\ &\geq \sup \big\{(x, \widetilde{T}y) + (\widetilde{T}y, x) - (\widetilde{T}y, y) : y \in \operatorname{dom} T\big\} = \\ &= \sup \big\{(x, Ty) + (Ty, x) - (Ty, y) : y \in \operatorname{dom} T\big\} = \|T_N^{1/2}x\|^2. \end{aligned}$$

A fentiek pedig definíció szerint azt jelentik, hogy $T_N \preceq \widetilde{T}$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: A $\widetilde{T} := T_N$ választás nyilván megfelel.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Ha létezik $\widetilde{T}$ pozitív önadjungált kiterjesztése T-nek, akkor dom $\widetilde{T} \subseteq D_*[T]$. Legyen ugyanis $z \in$ dom $\widetilde{T}$, ekkor a Schwarz-egyenlőtlenség szerint minden $x \in$ dom T-re

$$|(Tx, z)|^2 = |(\widetilde{T}x, z)|^2 \leq (\widetilde{T}x, x)(\widetilde{T}z, z) = m_z(Tx, x).$$

Vagyis dom $\widetilde{T} \subseteq D_*[T]$, így $D_*[T]$ valóban sűrű. $\square$

3.2.7. Definíció. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív operátor, mely teljesíti a 3.2.6 Tétel $(i) - (iii)$ feltételeinek valamelyikét. Ekkor a T_N pozitív önadjungált operátort a T Krein-von Neumann kiterjesztésének nevezzük.*

A következő Állításban összefoglaljuk a T_N Krein-von Neumann kiterjesztés néhány tulajdonságát. Ezek nagy részét már a 3.2.6 Tétel bizonyításában részeredményként megkaptuk, azonban érdemes őket külön is megfogalmazni.

3.2.8. Állítás. *Legyen T olyan pozitív operátor, melynek létezik a T_N Krein-von Neumann kiterjesztése. Ekkor* dom $T_N^{1/2} = D_*[T]$*, továbbá tetszőleges $x \in$* dom $T_N^{1/2}$ *esetén*

(a) $(T_N^{1/2}x, T_N^{1/2}x) = \sup\big\{(x, Ty) + (Ty, x) - (Ty, y) : y \in \text{dom } T\big\}.$

(b) $(T_N^{1/2}x, T_N^{1/2}x) = \sup\big\{|(Ty, x)|^2 : y \in \text{dom } T, (Ty, y) \leq 1)\big\}.$

Bizonyítás. A dom $T_N^{1/2} = D_*[T]$ illetve az (a) egyenlőséget már igazoltuk, úgyhogy csak a (b) állítást kell belátnunk. Legyen tehát $x \in$ dom $T_N^{1/2}$, ekkor

$$\begin{aligned}(T_N^{1/2}x, T_N^{1/2}x) &= \langle J_T^*x, J_T^*x\rangle = \\ &= \sup\big\{|\langle J_T^*x, Ty\rangle|^2 : y \in \text{dom } T, \langle Ty, Ty\rangle \leq 1\big\} = \\ &= \sup\big\{|(x, Ty)|^2 : y \in \text{dom } T, (Ty, y) \leq 1\big\}.\end{aligned}$$

$\square$

A következő Tételben megvizsgáljuk a T_N operátor értelmezési tartományát valamint képterét. Ehhez azonban szükségünk lesz az alábbi definícióra:

3.2.9. Definíció. *Legyen T pozitív operátor, ekkor*

$$\begin{aligned}R[T] :=& \big\{g \in \mathscr{H} : \ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \text{dom } T, Tf_n \to g, \\ & (Tf_n - Tf_m, f_n - f_m) \to 0\big\} \\ R^*[T] :=& \big\{g \in \mathscr{H} : \forall f \in \text{dom } T, |(g, f)|^2 \leq m_g(Tf, Tf)\big\}.\end{aligned}$$

3.2.10. Tétel. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív operátor, melynek létezik a T_N Krein-von Neumann kiterjesztése. Ekkor*

(*i*) $\operatorname{dom} T_N^{1/2} = D_*[T]$.

(*ii*) $\operatorname{ran} T_N^{1/2} = R[T]$.

(*iii*) $\ker T_N = (\operatorname{ran} T)^\perp$.

(*iv*) $\operatorname{dom} T_N = \big\{g \in D_*[T] : \ \exists h \in R[T], \forall f \in \operatorname{dom} T, (Tf, g) = (f, h)\big\}$.

(*v*) $\operatorname{ran} T_N = R[T] \cap R^*[T]$.

Bizonyítás. (*i*): Az előző Állításban már bizonyítottuk.
(*ii*): Mivel $T_N = J_T^{**} J_T^*$, így a 3.1.20 Tétel szerint

$$\begin{aligned}
\operatorname{ran} T_N^{1/2} &= \operatorname{ran} (J_T^{**} J_T^*)^{1/2} = \operatorname{ran} J_T^{**} = \operatorname{ran} \overline{J}_T = \\
&= \big\{g \in \mathscr{H} : \ \exists (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} J_T, \langle h_n - h_m, h_n - h_m\rangle \to 0, \\
&\quad (J_T h_n - g, J_T h_n - g) \to 0\big\} = \\
&= \big\{g \in \mathscr{H} : \ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T, \langle Tf_n - Tf_m, Tf_n - Tf_m\rangle \to 0, \\
&\quad \big(J_T(Tf_n) - g, J_T(Tf_n) - g\big) \to 0\big\} = \\
&= \big\{g \in \mathscr{H} : \ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T, (Tf_n - g, Tf_n - g) \to 0, \\
&\quad (Tf_n - Tf_m, f_n - f_m) \to 0\big\} = R[T].
\end{aligned}$$

(*iii*): Tudjuk, hogy $\ker T_N = \ker J_T^{**} J_T^*$. Itt pedig $\ker J_T^{**} = (\operatorname{ran} J_T^*)^\perp = \{0\}$, ugyanis $\operatorname{ran} J_T^*$ sűrű $\mathscr{H}_T$-ben. Ezért

$$\ker T_N = \ker J_T^{**} J_T^* = \ker J_T^* = (\operatorname{ran} J_T)^\perp = (\operatorname{ran} T)^\perp.$$

(*iv*): Ismét felhasználva, hogy $T_N = J_T^{**} J_T^*$ és $J_T^{**} = \overline{J}_T$

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom} T_N &= \operatorname{dom} J_T^{**} J_T^* = \big\{x \in \operatorname{dom} J_T^* : J_T^* x \in \operatorname{dom} \overline{J}_T\big\} = \\
&= \big\{x \in \operatorname{dom} D_*[T] : \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T, \\
&\quad \|J_T^* x - Tf_n\|^2_{\mathscr{H}_T} \to 0, \|J_T(Tf_n - Tf_m)\|^2 \to 0\big\} = \\
&= \big\{x \in \operatorname{dom} D_*[T] : \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T, \\
&\quad \|J_T^* x - Tf_n\|^2_{\mathscr{H}_T} \to 0, \|T(f_n - f_m)\| \to 0\big\}.
\end{aligned}$$

A fenti formulában a $\|J_T^* x - Tf_n\|^2_{\mathscr{H}_T} \to 0$ feltétel ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $g \in \mathscr{H}_T$ esetén $\langle g, J_T^* x - Tf_n\rangle \to 0$ és $\langle Tf_n - Tf_m, Tf_n - Tf_m\rangle \to 0$.

Továbbá felhasználva, hogy ran $T \subseteq \mathscr{H}_T$ sűrű, az előző két feltétel ekvivalens azzal, hogy minden $f \in$ dom T-re $\langle Tf, J_T^* x - Tf_n\rangle \to 0$ illetve $(Tf_n - Tf_m, f_n - f_m) \to 0$. Másrészt $\langle Tf, J_T^* x - Tf_n\rangle \to 0$ szerint

$$(Tf, x) = \langle Tf, J_T^* x\rangle = \lim_{n\in\mathbb{N}} \langle Tf, Tf_n\rangle = \lim_{n\in\mathbb{N}} (Tf, f_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (f, Tf_n).$$

Emiatt

$$\begin{aligned}\text{dom } T_N = \big\{x \in \text{dom } D_*[T] : \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \text{dom } T, (Tf_n - Tf_m, f_n - f_m) \to 0,\\ (Tf_n - Tf_m, Tf_n - Tf_m) \to 0, (Tf, x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} (f, Tf_n)\big\}.\end{aligned}$$

A fentiben a $(Tf_n - Tf_m, Tf_n - Tf_m) \to 0$ feltétel miatt létezik $h \in \mathscr{H}$, hogy $Tf_n \to h$. Másrészt definíció szerint a $Tf_n \to h, (Tf_n - Tf_m, f_n - f_m) \to 0$ feltétel azzal egyenértékű, hogy $h \in R[T]$. Vagyis a fentieket figyelebe véve

$$\text{dom } T_N = \big\{g \in D_*[T] :\ \exists h \in R[T], \forall f \in \text{dom } T, (Tf, g) = (f, h)\big\}$$

(v): ran $T_N =$ ran $J_T^{**} J_T^* = \{J_T^{**}\eta : \eta \in \text{ran } J_T^* \cap \text{dom } J_T^{**}\} =$

$$\begin{aligned}&= \{\overline{J}_T \eta : \eta \in \text{ran } J_T^* \cap \text{dom } \overline{J}_T\} =\\ &= \big\{g \in \mathscr{H} : \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \text{dom } T, \exists g \in \mathscr{H}, \exists g_T \in \text{ran } J^*,\\ &\quad \|Tf_n - g\|^2 \to 0, \langle Tf_n - g_T, Tf_n - g_T\rangle \to 0\big\}.\end{aligned}$$

A 3.1.12 Tétel szerint a $g_T \in$ ran J_T^* azt jelenti, hogy minden $Tx \in$ dom $J_T =$ ran T esetén

$$|\langle g_T, Tx\rangle|^2 \leq m(Tx, Tx).$$

Másrészt ha $(Tf_n - g, Tf_n - g) \to 0$ illetve $\langle Tf_n - g_T, Tf_n - g_T\rangle \to 0$, akkor

$$|\langle g_T, Tx\rangle|^2 = \lim_{n\in\mathbb{N}} |\langle Tf_n, Tx\rangle|^2 = \lim_{n\in\mathbb{N}} |(Tf_n, x)|^2 = |(g, x)|^2.$$

Ezeket figyelembe véve

$$\begin{aligned}\text{ran } T_N = \big\{g \in \mathscr{H} : \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \text{dom } T, (Tf_n - g, Tf_n - g) \to 0,\\ (Tf_n - g, Tf_n - g) \to 0, (Tf_n - Tf_m, f_n - f_m) \to 0\big\} \cap\\ \cap \big\{g \in \mathscr{H} : \forall f \in \text{dom } T, |(g, f)|^2 \leq m(Tf, Tf)\big\} =\\ = R[T] \cap R^*[T].\end{aligned}$$

□

3.2.11. Tétel (Sebestyén). *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív $S : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív önadjungált operátor. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(*i*) $S \supset T$.

(*ii*) (*a*) *Létezik $R \supset T$ pozitív önadjungált, melyre $R \preceq S$.*

(*b*) $\mathrm{dom}\, T \subseteq \mathrm{dom}\, S^{1/2}$ *illetve*

$$\|S^{1/2}x\|^2 \le (Tx, x) \qquad (x \in \mathrm{dom}\, T).$$

Bizonyítás. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Az $R = S$ választás megfelel, hisz ekkor (*a*) nyilvánvalóan teljesül, illetve $\mathrm{dom}\, T \subseteq \mathrm{dom}\, S \subseteq \mathrm{dom}\, S^{1/2}$, valamint $x \in \mathrm{dom}\, T$ esetén

$$(Tx, x) = (Sx, x) = (S^{1/2}x, S^{1/2}x).$$

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*): Legyen S illetve R olyan pozitív önadjungált operátor, amely eleget tesz a (*ii*)-ben megfogalmazott feltételeknek. Vegyük a következő formát $\mathrm{dom}\, S^{1/2}$-en:

$$\gamma(f, g) := (S^{1/2}f, S^{1/2}g) - (R^{1/2}f, R^{1/2}g).$$

Ekkor γ az $S \preceq R$ feltétel szerint fél-skalárszorzat, továbbá tetszőleges $g \in \mathrm{dom}\, T$ esetén

$$\begin{aligned}\gamma(g, g) &= (S^{1/2}g, S^{1/2}g) - (R^{1/2}g, R^{1/2}g) \le (Tg, g) - (Rg, g) = \\ &= (Tg, g) - (Tg, g) = 0.\end{aligned}$$

Alkalmazzuk most γ-ra a Schwarz egyenlőtlenséget $f \in \mathrm{dom}\, S^{1/2}$ illetve $g \in \mathrm{dom}\, T$ esetén. Ekkor a fenti egyenlőség szerint

$$|\gamma(f, g)|^2 \le \gamma(f, f)\gamma(g, g) = 0.$$

Azaz $g \in \mathrm{dom}\, T$ és tetszőleges $f \in \mathrm{dom}\, S^{1/2}$ esetén

$$(S^{1/2}f, S^{1/2}g) = (R^{1/2}f, R^{1/2}g) = (f, Rg) = (f, Tg).$$

Vagyis rögzített $g \in \mathrm{dom}\, T$ mellett az $f \mapsto (S^{1/2}f, S^{1/2}g) = (f, Tg)$ leképezés folytonos lineáris funkcionál $\mathrm{dom}\, S^{1/2}$-en, ami azt jelenti, hogy $S^{1/2}g \in \mathrm{dom}\, (S^{1/2})^* = \mathrm{dom}\, S^{1/2}$ és $S^{1/2}(S^{1/2}g) = Tg$. Ekkor pedig $S^{1/2}$ definíciója szerint $g \in \mathrm{dom}\, S$ illetve $Sg = Tg$, azaz $T \subset S$. $\square$

3.2.12. Következmény. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív operátor, S pedig pozitív önadjungált. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

(i) $T \subset S$.

(ii) *Léteznek olyan R illetve Q pozitív önadjungált operátorok, amelyek T-nek kiterjesztései, és amelyekre $R \preceq S \preceq Q$ teljesül.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: A $R := Q := S$ választás nyilvánvalóan megfelel.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Megmutatjuk, hogy S teljesíti az előző Tétel (ii) pontját. Az (a) feltétel nyilván teljesül. Mivel $T \subset Q$ illetve $S \preceq Q$, így $\operatorname{dom} T \subseteq \operatorname{dom} Q \subseteq \operatorname{dom} Q^{1/2} \subseteq \operatorname{dom} S^{1/2}$, továbbá tetszőleges $h \in \operatorname{dom} T$-re

$$\|S^{1/2}h\|^2 \leq \|Q^{1/2}h\|^2 = (Qh, h) = (Th, h).$$

Vagyis S a (b) feltételnek is eleget tesz, így $T \subset S$. $\square$

3.3. A Friedrichs-kiterjesztés

3.3.1. Tétel. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív operátor. Ekkor ekvivalens:*

(i) *T sűrűn definiált.*

(ii) *Létezik T_F pozitív önadjungált kiterjesztése T-nek, mely a 3.2.1 Definícióban bevezetett rendezés szerint legnagyobb a T kiterjesztései között.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Mivel $\operatorname{dom} T \subseteq D_*[T]$ sűrű, így vehetjük a 3.2.6 Tétel bizonyításában definiált $\mathscr{H}_T$ konstruált Hilbert-teret valamint a J_T lezárható operátort. Láttuk, hogy $\operatorname{dom} J_T^* = D_*[T]$. Vegyük a

$$Q_T := J_T^*|_{\operatorname{dom} T} : \operatorname{dom} T \to \mathscr{H}_T \tag{3.13}$$

operátort. Megmutatjuk, hogy Q_T lezárható, azaz hogy $\operatorname{ran} T \subseteq \operatorname{dom} Q_T^* \subseteq \mathscr{H}_T$, ami sűrű. Legyen ugyanis $f \in \operatorname{dom} T$, ekkor minden $x \in \operatorname{dom} Q_T = \operatorname{dom} T$-re

$$|\langle Q_T x, Tf\rangle|^2 = |\langle J_T^* x, Tf\rangle|^2 = \big|\big(x, J_T^{**}(Tf)\big)\big|^2 = |(x, Tf)|^2 \leq m\|x\|^2.$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $Tf \in \operatorname{dom} Q_T^*$, illetve

$$Q_T^*(Tf) = Tf \in \mathscr{H} \qquad (\forall f \in \operatorname{dom} T). \tag{3.14}$$

Vagyis létezik a $Q_T^* Q_T^{**} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív önadjungált operátor, melyre a 3.1.20 Tétel szerint

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}\,&(Q_T^* Q_T^{**})^{1/2} = \operatorname{dom} Q_T^{**} = \operatorname{dom} \overline{Q}_T = \\
&= \big\{g \in \mathscr{H} :\ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} Q_T, f_n \to g, \|Q_T(f_n - f_m)\|^2_{\mathscr{H}_T} \to 0\big\} = \\
&= \big\{g \in \mathscr{H} :\ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T, f_n \to g, \|J_T^*(f_n - f_m)\|^2_{\mathscr{H}_T} \to 0\big\} = \\
&= \big\{g \in \mathscr{H} :\ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T, f_n \to g, (T(f_n - f_m), f_n - f_m) \to 0\big\} = \\
&=: D[T].
\end{aligned}$$

Jelölje tehát $T_F := Q_T^* Q_T^{**}$, ekkor T_F kiterjeszti T-t, ugyanis felhasználva a (3.13) illetve (3.14) formulákat, tetszőleges $x \in \operatorname{dom} T$-re

$$T_F x = Q_T^* Q_T^{**} x = Q_T^* J_T * x = Q_T^*(Tx) = Tx.$$

Legyen most S pozitív önadjungált kiterjesztése T-nek. Megmutatjuk, hogy $S \preceq T_F$. Ugyanis a fentiekhez hasonlóan erre az S-re is elkészíthetjük a $Q_S^* Q_S^{**}$ operátor, mely pozitív önadjungált kiterjesztése S-nek, emiatt pedig $Q_S^* Q_S^{**} = S$. Másrészt a fentieket figyelembe véve

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom} S^{1/2} = {} & \operatorname{dom} (Q_S^* Q_S^{**}) = D[S] = \\
= & \big\{ g \in \mathscr{H} :\ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} S, f_n \to g, (S(f_n - f_m), f_n - f_m) \to 0 \big\} \supseteq \\
\supseteq & \big\{ g \in \mathscr{H} :\ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T, f_n \to g, (S(f_n - f_m), f_n - f_m) \to 0 \big\} = \\
= & \big\{ g \in \mathscr{H} :\ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T, f_n \to g, (T(f_n - f_m), f_n - f_m) \to 0 \big\} = \\
= & D[T] = \operatorname{dom} T_F^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ha pedig $x \in \operatorname{dom} T_F^{1/2} = D[T]$, akkor definíció szerint létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T \subseteq \operatorname{dom} S$ sorozat, melyre $f_n \to x$ és $(T(f_n - f_m), f_n - f_m) \to 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|S^{1/2}(f_n - f_m)\|^2 &= \big(S(f_n - f_m), f_n - f_m\big) = \big(T(f_n - f_m), f_n - f_m\big) = \\
&= \big(T_F(f_n - f_m), f_n - f_m\big) = \|T_F^{1/2}(f_n - f_m)\|^2 \to 0.
\end{aligned}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $(S^{1/2} f_n)$ és $(T_F^{1/2} f_n)$ Cauchy-sorozat, így ezen operátorok zártsága miatt $S^{1/2} f_n \to S^{1/2} x$ valamint $T_F^{1/2} f_n \to T_F^{1/2} x$. Ezzel pedig

$$\begin{aligned}
\|S^{1/2} x\|^2 = \lim_{n\in\mathbb{N}} \|S^{1/2} f_n\|^2 &= \lim_{n\in\mathbb{N}} (T f_n, f_n) = \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \|T_F^{1/2} f_n\|^2 = \|T_F^{1/2} x\|^2,
\end{aligned}$$

vagyis $S \preceq T_F$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy létezik T_F, de $\operatorname{dom} T$ nem sűrű. Ekkor tehát $(\operatorname{dom} T)^\perp \cap \operatorname{dom} T_F \neq \{0\}$. Vegyünk tehát innen egy x_0 nem nulla elemet, jelölje M az általa generált egydimenziós alteret. Legyen $P : \mathscr{H} \to M$ ortogonális projekció. Vegyük a $T_F + P : \operatorname{dom} T_F \to \mathscr{H}$ operátort. Ez nyilvánvalóan pozitív és önadjungált, hiszen $(T_F + P)^* = T_F^* + P^* = T_F + P$. Továbbá $T \subset T_F + P$ is teljesül, így a (ii) állítás miatt $T_F + P \preceq T_F$. Azaz $\operatorname{dom} T_F^{1/2} \subseteq \operatorname{dom} (T_F + P)^{1/2}$, illetve tetszőleges $x \in \operatorname{dom} T_F^{1/2}$ esetén

$$\|(T_F + P)^{1/2} x\|^2 \leq \|T_F^{1/2} x\|^2.$$

Azonban definíció szerint $x_0 \in \mathrm{dom}\, T_F \subseteq \mathrm{dom}\, T_F^{1/2}$ illetve $Px_0 = x_0 \neq 0$, így

$$\|T_F^{1/2} x_0\|^2 \geq \big((T_F + P)^{1/2} x_0, (T_F + P)^{1/2} x_0\big) = (T_F x_0, x_0) + (Px_0, x_0) =$$
$$= (T_F x_0, x_0) + (x_0, x_0) > (T_F x_0, x_0) = \|T_F^{1/2} x_0\|^2,$$

ami ellentmondás. □

A következő Tételben jellemezni fogjuk a Friedrichs-kiterjesztés értelmezési tartományát és képterét:

3.3.2. Tétel. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ sűrűn definiált pozitív operátor. Ekkor a 3.3.1 Tétel szerint létezik T-nek a T_F Friedrichs kiterjesztése, továbbá*

(i) $\mathrm{dom}\, T_F^{1/2} = D[T]$.

(ii) $\mathrm{ran}\, T_F^{1/2} = \{g \in \mathscr{H} : |(f,g)|^2 \leq m(Tf, f) \quad \forall f \in \mathrm{dom}\, T\}$.

(iii) $\mathrm{dom}\, T_F = D[T] \cap \mathrm{dom}\, T^*$.

(iv) $\mathrm{ran}\, T_F = \{T^* f : f \in D[T] \cap \mathrm{dom}\, T^*\}$.

Bizonyítás. (i): Az előző Tétel bizonyítása során beláttuk.
(ii): Felhasználva a $T_F = Q_T^* Q_T^{**}$ azonosságot, a 3.1.20 illetve 3.1.12 Tételeket

$$\begin{aligned}\mathrm{ran}\, T_F^{1/2} &= \mathrm{ran}\, Q_T^* = \{g \in \mathscr{H} : |(f,g)|^2 \leq m\langle Q_T f, Q_T f\rangle \quad \forall f \in \mathrm{dom}\, Q_T\} = \\ &= \{g \in \mathscr{H} : |(f,g)|^2 \leq m\langle J_T^* f, J_T^* f\rangle \quad \forall f \in \mathrm{dom}\, T\} = \\ &= \{g \in \mathscr{H} : |(f,g)|^2 \leq m\langle Tf, Tf\rangle \quad \forall f \in \mathrm{dom}\, T\} = \\ &= \{g \in \mathscr{H} : |(f,g)|^2 \leq m(Tf, f) \quad \forall f \in \mathrm{dom}\, T\}.\end{aligned}$$

(iii): $\mathrm{dom}\, T_F = \mathrm{dom}\, Q_T^* Q_T^{**} = \{g \in \mathrm{dom}\, Q_T^{**} : Q_T^{**} g \in \mathrm{dom}\, Q_T^*\}$. A 3.3.1 Tétel bizonyításában láttuk, hogy $\mathrm{dom}\, Q_T^{**} = D[T]$, továbbá $z \in \mathrm{dom}\, Q_T^*$ pontosan akkor teljesül, ha minden $f \in \mathrm{dom}\, Q_T$ esetén $|\langle Q_T f, z\rangle|^2 \leq m\|f\|^2$ valamely m konstansra. Ekkor tehát

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\, T_F &= \{g \in D[T] : |\langle Q_T f, Q_T^{**} g\rangle|^2 \leq m\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathrm{dom}\, Q_T\} = \\ &= \{g \in D[T] : |\langle Tf, Q_T^{**} g\rangle|^2 \leq m\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathrm{dom}\, T\} = \\ &= \{g \in D[T] : |(Q_T^*(Tf), g)|^2 \leq m\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathrm{dom}\, T\} = \\ &= \{g \in D[T] : |(Tf, g)|^2 \leq m\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathrm{dom}\, T\} = \\ &= \{g \in D[T] : g \in \mathrm{dom}\, T^*\} = D[T] \cap \mathrm{dom}\, T^*.\end{aligned}$$

(iv): Mivel T sűrűn definiált, $T \subset T_F$, így $T_F = T_F^* \subset T^*$. Ezt és (iii)-t felhasználva

$$\mathrm{ran}\, T_F = \{T_F f : f \in \mathrm{dom}\, T_F\} = \{T^* f : f \in D[T] \cap \mathrm{dom}\, T^*\}.$$

□

3.3.3. Következmény. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ sűrűn definiált pozitív operátor. Ekkor egy S pozitív önadjungált operátorra ekvivalensek az alábbiak:*

(*i*) $T \subset S$.

(*ii*) $T_N \preceq S \preceq T_F$.

Bizonyítás. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Ha $T \subset S$, akkor a 3.2.6 Tétel szerint $T_N \preceq S$ és a 3.3.1 Tétel szerint $S \preceq T_F$.
(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*): $R = T_N$ illetve $Q = T_F$ választással teljesülnek a 3.2.12 Tétel (*ii*) pontjának feltételei. Emiatt tehát $T \subset S$. $\square$

3.4. Pozitív operátor lehetséges kiterjesztései

Az alábbi fejezetben definiálni fogjuk pozitív operátor egy zárt altérre vett úgynevezett lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztését. A 3.2.6 Tételben láttuk, hogy egy T operátor pozitív önadjungált kiterjesztése pontosan akkor létezik, ha a 3.10 Definícióban bevezetett $D_*[T]$ altér sűrű. Ebben a fejezetben azt az esetet fogjuk vizsgálni, amikor a $\overline{D_*[T]} = \mathscr{H}$ feltétel nem teljesül.
Nyilvánvaló, hogy ha $\operatorname{dom} T \subseteq K$ zárt lineáris altér, $P : \mathscr{H} \to K$ ortogonális projekció, akkor a $PT : K \supseteq \operatorname{dom} T \to \mathscr{H}$ leképezés pozitív operátor, ugyanis $x \in \operatorname{dom} PT = \operatorname{dom} T \subseteq K$ esetén

$$(PTx, x) = (Tx, Px) = (Tx, x) \geq 0.$$

Emiatt értelmes az alábbi definíció:

3.4.1. Definíció. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $T : \operatorname{dom} T \to \mathscr{H}$ (nem feltétlenül sűrűn definiált) pozitív operátor, $\operatorname{dom} T \subseteq K \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, $P : \mathscr{H} \to K$ ortogonális projekció. Azt mondjuk, hogy a $\widetilde{T} : K \supset \operatorname{dom} \widetilde{T} \to K$ operátor egy lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztése T-nek a K altérre, ha*

(*i*) $\overline{\operatorname{dom}} \, \widetilde{T} = K$,

(*ii*) $\widetilde{T} \supset PT$ *pozitív önadjungált.*

3.4.2. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $T : \operatorname{dom} T \to \mathscr{H}$ pozitív operátor. Legyen $\operatorname{dom} T \subseteq K \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér, $Q : \mathscr{H} \to K$ ortogonális projekció. Ekkor ekvivalens:*

(*i*) *T-nek létezik lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztése K-ra.*

(*ii*) *Létezik a $(QT)_N$ Krein-von Neumann kiterjesztés.*

(*iii*) $\overline{K \cap D_*[T]} = K$.

(*iv*) *Létezik olyan $M \subseteq D_*[T]$ lineáris altér, hogy $K = \overline{M}$.*

Továbbá $D_*[QT] = D_*[T] \cap K$.

Bizonyítás. (*i*) $\Leftrightarrow$ (*ii*): Alkalmazzuk a 3.2.6 Tételt a K Hilbert-térre és a $QT : K \to K$ pozitív operátorra.
(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*): Tegyük fel, hogy QT-nek létezik a legkisebb pozitív önadjungált kiterjesztése K-ra, azaz létezik $(QT)_N : K \to K$ pozitív önadjungált. Ez az 3.2.6 Tétel értelmében azzal ekvivalens, hogy $\overline{D_*[QT]} = K$. Azonban itt:

$$\begin{aligned} D_*[QT] &= \left\{ z \in K : |(QTx, z)|^2 \leq m_z(QTx, x) \ (\forall x \in \mathrm{dom} T) \right\} = \\ &= \left\{ z \in K : |(Tx, Qz)|^2 \leq m_z(Tx, Qx) \ (\forall x \in \mathrm{dom}\ T) \right\} = \\ &= \left\{ z \in K : |(Tx, z)|^2 \leq m_z(Tx, x) \ (\forall x \in \mathrm{dom}\ T) \right\} = D_*[T] \cap K, \end{aligned}$$

amivel $\overline{K \cap D_*[T]} = K$.
(*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*): Az 3.2.6 Tétel szerint elegendő azt belátnunk, hogy $\overline{D_*[QT]} = K$. Ez pedig következik abból, hogy $D_*[QT] = D_*[T] \cap K$.
(*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*): $M := D_*[T] \cap K$
(*iv*) $\Rightarrow$ (*iii*): $K \supseteq \overline{D_*[T] \cap K} \supseteq \overline{M} = K$ □

Megjegyezzük, hogy a fenti Tétel (*iii*) feltétele miatt $M = \mathrm{dom}\ T$ illetve $M = D_*[T]$ tetszőleges T esetén olyan alterek, hogy létezik $\overline{M}$-re lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztés.

A fenti tétel következményeként kapjuk az alábbi eredményt:

3.4.3. Következmény. *A 3.4.2 Tétel (i)-(iv) feltételei bármelyikének teljesülése mellett létezik a $(QT)_N : K \to K$ Krein-von Neumann-kiterjesztés, melyre*

(*a*) $\mathrm{dom}\ (QT)_N \subseteq D_*[T] \cap K$.

(*b*) $\mathrm{dom}\ (QT)_N^{1/2} = D_*[QT] = D_*[T] \cap K$.

Továbbá $\overline{D_*[T]}$ a legnagyobb olyan zárt lineáris altér, melyre T-nek létezik lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztése. □

Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív operátor, K pedig olyan zárt altér, melyre létezik T-nek lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztése. Az alábbiakban megvizsgáljuk $(QT)_N$ értelmezési tartományát, mag- illetve képterét. Ehhez emlékeztetünk a következő definíciókra:

$$(a)\ \ R[T] := \big\{g \in \mathscr{H} : \exists (f_n) \subset \operatorname{dom} T, (T(f_n - f_m), f_n - f_m) \to 0,$$
$$(Tf_n - g, Tf_n - g) \to 0\big\}.$$

$$(b)\ \ R^*[T] := \big\{g \in \mathscr{H} : \forall f \in \operatorname{dom} T, |(g, f)|^2 \le m_g(Tf, Tf)\big\}.$$

Láttuk a 3.2.10 Tételben, hogy ha létezik a T_N Krein-von Neumann kiterjesztése T-nek, akkor $R[T] = \operatorname{ran} (T_N)^{1/2}$. Ha pedig T sűrűn definiált, akkor a 3.1.12 Tétel szerint $R^*[T] = \operatorname{ran} T^*$.

3.4.4. Következmény. *Ha $K \supseteq \operatorname{dom} T$ zárt lineáris altér, $Q : \mathscr{H} \to K$ ortogonális projekció, akkor*

$$(a')\ \ R[QT] = \big\{g \in K : \exists (f_n) \subset \operatorname{dom} T, (T(f_n - f_m), f_n - f_m) \to 0,$$
$$(QTf_n - g, QTf_n - g) \to 0\big\}.$$

$$(b')\ \ R^*[QT] = \big\{g \in K : \forall f \in \operatorname{dom} T, |(g, f)|^2 \le m_g(QTf, QTf)\big\}.$$

Továbbá $R[QT] \supseteq QR[T]$ illetve $R^*[QT] \subseteq R^*[T]$.

Bizonyítás. Az (a') illetve (b') egyenlőség triviálisan következik abból, hogy $\operatorname{dom} T \subseteq K$. Ha $g \in R[T]$, akkor definíció szerint létezik $(f_n) \subset \operatorname{dom} T$, hogy

$$\big(T(f_n - f_m), f_n - f_m\big) \to 0, \quad Tf_n \to g.$$

Ekkor pedig $Qg \in K$-ra pedig $(QTf_n - Qg, QTf_n - Qg) \to 0$, vagyis $Qg \in R[QT]$. Ha $g \in R^*[QT]$, akkor minden $f \in \operatorname{dom} T$-re

$$|(g, f)|^2 \le m_g(QTf, QTf) \le m_g(Tf, Tf),$$

azaz $g \in R^*[T]$. □

A fenti Következményből illetve a 3.2.10 Tételből kapjuk a következő eredményt:

3.4.5. Állítás. *Tegyük fel, hogy T-nek létezik K-ra lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztése. Ekkor létezik a Krein-von Neumann kiterjesztés is, melyre* (*i*) $\ker (QT)_N = (\operatorname{ran} QT)^\perp \cap K = (Q(\operatorname{ran} T))^\perp \cap K.$

(*ii*) $\operatorname{dom} (QT)_N =$

$$= \big\{g \in D_*[T] \cap K : \exists h \in R[QT], \forall f \in \operatorname{dom} T, (Tf, g) = (f, h)\big\}.$$

(*iii*) $\operatorname{ran} (QT)_N = R[QT] \cap R^*[QT].$

(*iv*) $\operatorname{dom} (QT)_N^{1/2} = D_*[T] \cap K.$

(*v*) $\operatorname{ran} (QT)_N^{1/2} = R[QT].$ □

Legyenek $\operatorname{dom} T \subseteq K \subseteq M \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris alterek, $Q : \mathscr{H} \to K, P : \mathscr{H} \to M$ ortogonális projekciók. Tegyük fel, hogy létezik $(QT)_N$ illetve $(PT)_N$ (ez a fentiek értelmében ekvivalens azzal, hogy $\overline{D_*[T] \cap M} = M$ illetve $\overline{D_*[T] \cap K} = K$). Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy mi a kapcsolat e kettő között.
Láttuk, hogy létezik $(PT)_N^{1/2} : M \to M$, melyre $\operatorname{dom} (PT)_N^{1/2} = D_*[T] \cap M$ illetve $\operatorname{ran} (PT)_N^{1/2} = R[PT]$. Vegyük a $Q(PT)_N^{1/2} : M \to K$ operátort. Ez sűrűn definiált, ugyanis $\operatorname{dom} Q(PT)_N^{1/2} = \operatorname{dom} (PT)_N^{1/2} \subseteq M$ sűrű. Másrészt lezárható, ugyanis

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} (Q(PT)_N^{1/2})^* = \operatorname{dom} (PT)_N^{1/2}Q = \operatorname{dom} (PT)_N^{1/2} \cap \operatorname{ran} Q = \\ = (D_*[T] \cap M) \cap K = D_*[T] \cap K.\end{aligned}$$

Ekkor a 3.1.20 Tétel szerint létezik $(Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^* : K \to K$ pozitív önadjungált operátor.

3.4.6. Állítás. *A* $(Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*$ *operátorra igazak az alábbiak*

(*i*) $QT \subset (Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*.$

(*ii*) $\operatorname{dom} \big((Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*\big)^{1/2} = \operatorname{dom} (QT)_N^{1/2} = D_*[T] \cap K.$

Bizonyítás. Mivel $(PT)_N^{1/2}Q = (Q(PT)_N^{1/2})^*$, így

$$\begin{aligned}(Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^* = (Q(PT)_N^{1/2})^{**}(PT)_N^{1/2}Q \supset Q(PT)_N Q = \\ = Q(PT)_N\big|_K \supset QPT = QT,\end{aligned}$$

amivel (*i*)-t beláttuk.
Jelölje $A := (Q(PT)_N^{1/2})^*$, ekkor $A^*A = (Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*$ az (*i*) állítás szerint pozitív önadjungált kiterjesztése QT-nek, így a Krein-von Neumann kiterjesztés definíciója szerint

$$\operatorname{dom} (A^*A)^{1/2} \subseteq \operatorname{dom} (QT)_N^{1/2} = D_*[QT] = D_*[T] \cap K.$$

Másrészt szintén a 3.1.20 Tétel szerint dom $(A^*A)^{1/2} = $ dom A, amivel

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\ (A^*A)^{1/2} &= \mathrm{dom}\ (Q(PT)_N^{1/2})^* = \mathrm{dom}\ (PT)_N^{1/2}Q = \\ &= \mathrm{dom}\ (PT)_N^{1/2} \cap \mathrm{ran}\ Q = D_*[T] \cap K,\end{aligned}$$

amelyből már a (ii) egyenlőség adódik. □

Legyenek továbbra is K, M, Q, P olyanok, mint az előző tételben. Vegyük a $Q(PT)_NQ : K \to K$ pozitív operátort. Nyilvánvaló, hogy ez kiterjeszti QT-t. A 3.4.2 Tételben megmutattuk, hogy $Q(PT)_NQ$-nak pontosan akkor létezik lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztése K-ra, ha $D_*[Q(PT)_NQ]$ sűrű K-ban. A fentiekben megmutattuk, hogy

$$Q(PT)_NQ \subset (Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*,$$

vagyis $Q(PT)_NQ$-nak van pozitív önadjungált kiterjesztése. Emiatt tehát létezik a $\big(Q(PT)_NQ\big)_N$ operátor is. Megmutatjuk, hogy $D_*[QT] = D_*[PT] \cap K \subseteq D_*[Q(PT)_NQ]$. Legyen ugyanis $z \in D_*[PT] \cap K$. Ekkor tetszőleges $x \in$ dom $Q(PT)_NQ =$ dom $(PT)_N \cap K$ vektorra

$$\begin{aligned}|(Q(PT)_NQx, z)|^2 &= |((PT)_Nx, z)|^2 = |((PT)_N^{1/2}x, (PT)_N^{1/2}z)|^2 \leq \\ &\leq \|(PT)_N^{1/2}x\|^2\|(PT)_N^{1/2}z\|^2 = m_z((PT)_Nx, x) = \\ &= m_z(Q(PT)_NQx, x).\end{aligned}$$

Vagyis dom $(QT)_N^{1/2} = D_*[QT] \subseteq D_*[Q(PT)_NQ] =$ dom $\big((Q(PT_N)Q)_N\big)^{1/2}$, amiből a Krein-von Neumann kiterjesztés definíciója szerint

$$\mathrm{dom}\ \big((Q(PT_N)Q)_N\big)^{1/2} = D_*[T] \cap K = \mathrm{dom}\ (QT)_N^{1/2}$$

következik.

Vizsgáljuk most meg a fent definiált operátorok képtereinek viszonyát. Láttuk, hogy $QT \subset (Q(PT)_NQ)_N$, ezért a $(QT)_N$ Krein-von Neumann kiterjesztés definíciója szerint:

$$\|(QT)_N^{1/2}x\|^2 \leq \|(Q(PT)_NQ)_N^{1/2}x\|^2 \qquad (\forall x \in D_*[T] \cap K),$$

így a 3.1.13 Következményből illetve az operátorok önadjungáltságából

$$\mathrm{ran}\ (QT)_N^{1/2} \subseteq \mathrm{ran}\ (Q(PT)_NQ)_N^{1/2}$$

következik. Másfelől $Q(PT)_NQ \subset (Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*$, emiatt pedig a $(Q(PT)_NQ)_N$ Krein-von Neumann kiterjesztés definíciója szerint minden $x \in D_*[T] \cap K$ esetén

$$\|(Q(PT)_NQ)_N^{1/2}x\|^2 \leq \|\big((Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*\big)^{1/2}x\|^2,$$

és ebből pedig szintén a 3.1.13 Következménnyel

$$\text{ran } (Q(PT)_N Q)_N^{1/2} \subseteq \text{ran } \left((Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*\right)^{1/2}$$

összefüggés adódik. Végül foglaljuk össze az eddigi eredményeinket az alábbi Tételben:

3.4.7. Tétel. *Legyenek* dom $T \subseteq K \subseteq M \subseteq \mathscr{H}$ *zárt lineáris alterek,* $Q : \mathscr{H} \to K, P : \mathscr{H} \to M$ *ortogonális projekciók. Tegyük fel, hogy léteznek a* $(QT)_N$ *illetve* $(PT)_N$ *operátorok.*
Ekkor léteznek a $(QT)_N$, $(Q(PT)_N Q)_N$ *illetve* $(Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*$ *operátorok is, melyek lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztései* T*-nek, továbbá*

$$(i)\ \text{dom } (QT)_N^{1/2} = \text{dom } \left((Q(PT)_N Q)_N\right)^{1/2} = \\ = \text{dom } \left((Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*\right)^{1/2} = D_*[T] \cap K.$$

$$(ii)\ \text{ran } (QT)_N^{1/2} \subseteq \text{ran } \left((Q(PT)_N Q)_N\right)^{1/2} \subseteq \\ \subseteq \text{ran } \left((Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*\right)^{1/2}.$$

□

Felmerül a kérdés, hogy a fenti Tétel (ii) pontjában a megfelelő képterek közé mikor írható egyenlőség. A következő Állítás ezzel foglakozik:

3.4.8. Állítás. *Az előző Tétel feltételeinek teljesülése mellett tegyük még fel, hogy a* $Q(PT)_N^{1/2} : M \to K$ *operátor zárt. Ekkor*

$$Q(PT)_N Q = (Q(PT)_N Q)_N = (Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*,$$

továbbá ran $(QT)_N^{1/2} =$ ran $(Q(PT)_N Q)^{1/2} = Q(R[PT])$.

Bizonyítás. Az előző Tétel feltételei teljesülnek, így léteznek a $(Q(PT)_N Q)_N$ illetve a $(Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^*$ pozitív önadjungált operátorok. Másrészt $(Q(PT)_N^{1/2})^{**} = Q(PT)_N^{1/2}$, így

$$(Q(PT)_N^{1/2})^{**}(Q(PT)_N^{1/2})^* = Q(PT)_N^{1/2}(PT)_N^{1/2}Q = Q(PT)_N Q.$$

Tehát $Q(PT)_N Q$ pozitív önadjungált, így $Q(PT)_N Q = (Q(PT)_N Q)_N$, amivel a Tétel első felét beláttuk.
Vezessük be az $A := Q(PT)_N^{1/2}$ jelölést, ezzel $Q(PT)_N Q = AA^*$. Felhasználva a 3.4.5 Állítást

$$\text{ran } (AA^*)^{1/2} = \text{ran } A = \text{ran } Q(PT)_N^{1/2} = \\ = Q\ (\text{ran } (PT)_N^{1/2}) = Q\,(R[PT])\,.$$

Itt pedig a 3.4.4 Következmény szerint

$$R[PT] = \big\{g \in M : \exists (f_n) \subset \text{dom}\, T, (T(f_n - f_m), f_n - f_m) \to 0, PTf_n \to g\big\}.$$

Ha $g \in R[PT]$, akkor $Qg \in K$, illetve $QTf_n = Q(PTf_n) \to Qg$, vagyis $Qg \in R[QT]$, azaz

$$\text{ran}\,(AA^*)^{1/2} = Q(R[PT]) \subseteq R[QT] = \text{ran}\,(QT)_N^{1/2}.$$

A másik irányú tartalmazás az előző Tétel (ii) pontjából következik. □

A következőkben megvizsgáljuk, hogy mi a helyzet, ha egy $A : \text{dom}\, A \to \mathscr{H}$ korlátos operátorból indulunk ki. Ismeretes, hogy ekkor A egyértelműen kiterjed a $D := \overline{\text{dom}}\, A$ zárt altérre folytonos lineáris operátorként. Emiatt a továbbiakban feltesszük, hogy $D := \text{dom}\, A$ zárt.
A 3.4.2 Tételben bizonyítottak szerint egy $K \subseteq \mathscr{H}$ zárt altérre pontosan akkor létezik A-nak lehetséges pozitív önadjungált (nem feltétlenül korlátos) kiterjesztése, ha $D_*[A] \cap K$ sűrű K-ban. A következő Tételben a $D_*[A] = \mathscr{H}$ esetet vizsgáljuk meg.

3.4.9. Tétel. *Legyen $A : D \to \mathscr{H}$ korlátos operátor. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

- (i) $D_*[A] = \mathscr{H}$.
- (ii) *Létezik $\widetilde{A} \in B(\mathscr{H})$ pozitív operátor, hogy $A \subset \widetilde{A}$.*
- (iii) *Létezik $m_A \geq 0$ konstans, melyre $\|Ax\|^2 \leq m_A(Ax, x) \qquad (\forall x \in D)$.*
- (iv) *Tetszőleges $D \subseteq K \subseteq \mathscr{H}$. zárt lineáris altérre létezik A-nak lehetséges korlátos pozitív (önadjungált) kiterjesztése.*

Továbbá ha a fenti (i)-(iv) feltételek bármelyike teljesül, $D \subseteq K \subseteq M \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris alterek, $P : \mathscr{H} \to M$, $Q : \mathscr{H} \to K$ ortogonális projekciók, akkor létezik a $(QA)_N$ korlátos pozitív operátor, továbbá

$$(QA)_N = Q(PA)_N Q = (Q(PA)_N^{1/2})^{**}(Q(PA)_N^{1/2})^*.$$

Speciálisan a 2.1.1 Tétel bizonyításának jelöléseivel

$$(QA)_N = J_{QA}J_{QA}^* = QJ_AJ_A^*Q.$$

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ha $D_*[A] = \mathscr{H}$, akkor a korábbiak szerint A-nak létezik $\overline{D_*[A]} = \mathscr{H}$-ra lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztése. Azaz $I := Id_{\mathscr{H}}$ jelöléssel létezik $A = IA \subset (IA)_N =: A_N : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ pozitív önadjungált operátor. Láttuk, hogy $\operatorname{dom} A_N^{1/2} = D_*[A] = \mathscr{H}$, azaz $A_N^{1/2}$ mindenütt definiált zárt operátor (hiszen önadjungált), ezért a zárt gráf tétel szerint folytonos. Emiatt $A \subset A_N = A_N^{1/2} A_N^{1/2} \in B(\mathscr{H})$, vagyis $\widetilde{A} := A_N$ választás megfelel.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy létezik A-nak $\widetilde{A} \in B(\mathscr{H})$ korlátos pozitív kiterjesztése. Definíció szerint

$$D_*[A] := \left\{ z \in \mathscr{H} : |(Ax, z)|^2 \leq m_z(Ax, x) \ (\forall x \in D) \right\}.$$

Legyen $z \in \mathscr{H}$ tetszőleges, ekkor a Schwarz-egyenlőtlenség szerint tetszőleges $x \in D$ esetén

$$|(Ax, z)|^2 = |(\widetilde{A}x, z)|^2 \leq (\widetilde{A}x, x)(\widetilde{A}z, z) = m_z(Ax, x),$$

ahol tehát $m_z = (\widetilde{A}z, z)$. Ezzel $z \in D_*[A]$, azaz $D_*[A] = \mathscr{H}$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: A 2.1.1 Tételben beláttuk.

$(i) \Rightarrow (iv)$: Tegyük fel, hogy $D_*[A] = \mathscr{H}$. Legyen $D \subseteq K \subseteq \mathscr{H}$ tetszőleges zárt altér. A 3.4.2 Tétel szerint A-nak pontosan akkor létezik K-ra lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztése, ha $D_*[A] \cap K = \mathscr{H} \cap K = K$ sűrű K-ban, ez pedig triviálisan teljesül. Legyen $Q : \mathscr{H} \to K$ ortogonális projekció, ekkor az előzőek szerint létezik a $(QA)_N : K \to K$ pozitív önadjungált operátor. Az 3.4.5 Állításban láttuk, hogy $\operatorname{dom} (QA)_N^{1/2} = D_*[A] \cap K = K$, azaz $(QA)_N^{1/2}$ mindenütt definiált zárt operátor, így a zárt gráf tétel szerint folytonos. Emiatt pedig $(QA)_N$ is az.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy (iv) teljesül, ekkor speciálisan $K := \mathscr{H}$-ra is létezik A-nak lehetséges korlátos pozitív önadjungált kiterjesztése. Vagyis létezik $A_N := (IA)_N : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$. Ekkor létezik az $A_N^{1/2}$ sűrűn definiált önadjungált, így zárt operátor is. Ez tehát korlátos, sűrűn értelmezett, zárt operátor, így szükségképpen mindenütt definiált. Ezért $\mathscr{H} = \operatorname{dom} A_N^{1/2} = D_*[A] \cap \mathscr{H}$, vagyis $D_*[A] = \mathscr{H}$.

Tegyük fel végül, hogy a fenti (i)-(iv) feltételek bármelyike teljesül. Legyenek $D \subseteq K \subseteq M \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris alterek, $P : \mathscr{H} \to M$, $Q : \mathscr{H} \to K$ ortogonális projekciók. Ekkor tehát (iv) szerint léteznek a $(QA)_N$, $Q(PA)_N Q$ illetve $(Q(PA)_N^{1/2})^{**}(Q(PA)_N^{1/2})^*$ operátorok. Másrészt $Q(PA)_N^{1/2} \in B(M, K)$

korlátos, speciálisan zárt operátor, emiatt teljesülnek a 3.4.8 Állítás feltételei, ezért $(Q(PA)_N^{1/2})^{**}(Q(PA)_N^{1/2})^* = Q(PA)_N Q$. Mivel a QA operátornak létezik K-ra korlátos pozitív kiterjesztése (hisz $(QA)_N$ ilyen), így a 2.1.1 Tétel szerint létezik a $J_{QA}J_{QA}^* \leq (QA)_N$ operátor. Másrészt definíció szerint $(QA)_N \preceq J_{QA}J_{QA}^*$ is teljesül. Itt mindkét operátor korlátos, így könnyen látható, hogy $(QA)_N = J_{QA}J_{QA}^*$. Legyen továbbá $x \in K$ tetszőleges, ekkor a 2.1.2 Lemma (2.2) formulája szerint

$$\begin{aligned}((QA)_N x, x) = (J_{QA}J_{QA}^* x, x) =& \\ &= \sup\big\{(x, QAy) + (QAy, x) - (QAy, y) : y \in \operatorname{dom} QA\big\} = \\ &= \sup\big\{(x, Ay) + (Ay, x) - (Ay, y) : y \in D\big\} = \\ &= (J_A J_A^* x, x) = (QJ_A J_A^* Qx, x),\end{aligned}$$

vagyis $(QA)_N = QJ_AJ_A^*Q$. Ha most $P : \mathscr{H} \to M$ ortogonális projekció, akkor a fentiek szerint $(PA)_N = PJ_AJ_A^*P$, emiatt tehát

$$Q(PA)_N Q = Q(PJ_AJ_A^*P)Q = QJ_AJ_A^*Q = (QA)_N.$$

$\square$

Általános esetben egy korlátos pozitív A operátorra még az sem teljesül, hogy $D_*[A]$ sűrű altere $\mathscr{H}$-nak. A következő állításban arra a kérdésre adunk választ, hogy ilyenkor melyek azok az alterek, amelyekre létezik A-nak lehetséges korlátos pozitív kiterjesztése.

3.4.10. Állítás. *Legyen $A : D \to \mathscr{H}$ korlátos pozitív operátor, $D \subseteq K$ zárt altér. Ekkor ekvivalens:*

(i) Létezik A-nak K-ra lehetséges korlátos pozitív önadjungált kiterjesztése.

(ii) $K \subseteq D_*[A]$.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Legyen $Q : \mathscr{H} \to K$ ortogonális projekció, ekkor (i) szerint létezik $(QA)_N \in B(K)$ mindenütt definiált pozitív önadjungált. Emiatt $K = \operatorname{dom} (QA)_N^{1/2} = D_*[A] \cap K$, azaz $\underline{K \subseteq D_*[A]}$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy $K \subseteq D_*[A]$, ekkor $\overline{D_*[A] \cap K} = K$, vagyis létezik a $(QA)_N$ Krein-von Neumann kiterjesztés. Másrészt létezik a $(QA)_N^{1/2}$ önadjungált operátor is, melyre $\operatorname{dom} (QA)_N^{1/2} = D_*[A] \cap K = K$. Azaz $(QA)_N^{1/2}$ mindenütt definiált zárt operátor, így a zárt gráf tétel szerint folytonos. Másrészt $B(K) \ni (QA)_N^{1/2}(QA)_N^{1/2} = (QA)_N$, vagyis A-nak létezik K-ra lehetséges korlátos pozitív (önadjungált) kiterjesztése. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] N. I. Achieser and I. M. Glasmann. *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum.* Verlag Harri Deutsch, Thun, eighth edition, 1981. Translated from the Russian by Hellmuth Baumgärtel, With a foreword by G. Köthe.

[2] J. B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[3] R. G. Douglas. On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17:413–415, 1966.

[4] P. R. Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 19 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1982. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17.

[5] S. Hassi, Z. Sebestyén, H. S. V. de Snoo, and F. H. Szafraniec. A canonical decomposition for linear operators and linear relations. *Acta Math. Hungar.*, 115(4):281–307, 2007.

[6] M. Krein. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications. I. *Math. Sbornik N.S.*, 20(62):431–495, 1947.

[7] M. Krein. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications. II. *Math. Sbornik N.S.*, 21(63):365–404, 1947.

[8] S. Ôta. Closed linear operators with domain containing their range. *Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser.*, 27:229–233, 1984.

[9] S. Parrott. On a quotient norm and the Sz.-Nagy-Foias lifting theorem. *J. Funct. Anal.*, 30:311–325, 1978.

[10] G. K. Pedersen. *Analysis now*, volume 118 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1989.

[11] V. Prokaj and Z. Sebestyén. On Friedrichs extensions of operators. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 62(1-2):243–246, 1996.

[12] V. Prokaj and Z. Sebestyén. On extremal positive operator extensions. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 62(3-4):485–491, 1996.

[13] F. Riesz and B. Sz.-Nagy. *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Académie des Sciences de Hongrie, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[14] W. Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[15] Z. Sebestyén. On ranges of adjoint operators in Hilbert space. *Acta Sci. Math.*, 46:295–298, 1983.

[16] Z. Sebestyén. Restrictions of positive operators. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 46(1-4):299–301, 1983.

[17] Z. Sebestyén. Operator extensions on Hilbert space. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 57(1-4):233–248, 1993.

[18] Z. Sebestyén. Short proof to a strong Parrott theorem. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 36:129–131, 1993.

[19] Z. Sebestyén and L. Kapos. On range characterization of adjoint operators on Hilbert space. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 30(3-4):261–263, 1995.

[20] Z. Sebestyén and Á. Magyar. Restrictions of partial isometries. *Period. Math. Hungar.*, 23(2):159–162, 1991.

[21] Z. Sebestyén and Á. Magyar. Restrictions of partial isometries. II. *Period. Math. Hungar.*, 25(2):191–193, 1992.

[22] Z. Sebestyén and E. Sikolya. On Krein-von Neumann and Friedrichs extensions. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 69(1-2):323–336, 2003.

[23] Z. Sebestyén and J. Stochel. Characterizations of positive selfadjoint extensions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(5):1389–1397 (electronic), 2007.