Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Péterfalvi Ferenc

Független fák gráfokban

Szakdolgozat

Témavezetők:

Bérczi Kristóf és Frank András

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2009.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Alapfogalmak

Legyen T_1 és T_2 két feszítő fa egy G egyszerű irányítatlan gráfban, és s a G egy csúcsa. T_1 és T_2 **s-függetlenek**, ha G minden s-től különböző x csúcsa esetén az x-ből s-be T_1-ben illetve T_2-ben vezető egyértelmű utak belsőleg diszjunktak, vagyis nincs sem közös élük, sem pedig közös belső csúcsuk. s-et a fák gyökerének fogjuk hívni. Kettőnél több feszítő fa s-független, ha páronként azok. Világos, hogy k s-független fa létezésének szükséges feltétele, hogy minden más csúcsból vezessen s-be k belsőleg diszjunkt út. Ha ezt megköveteljük G minden csúcsára, mint gyökérre, akkor a k-összefüggőség adódik. A független fákról szóló nevezetes sejtés, hogy ez elegendő is.

Sejtés (független fák) *Legyen G egy k-összefüggő gráf, és s a G egy tetszőleges csúcsa. Ekkor létezik G-ben k s-független feszítő fa.*

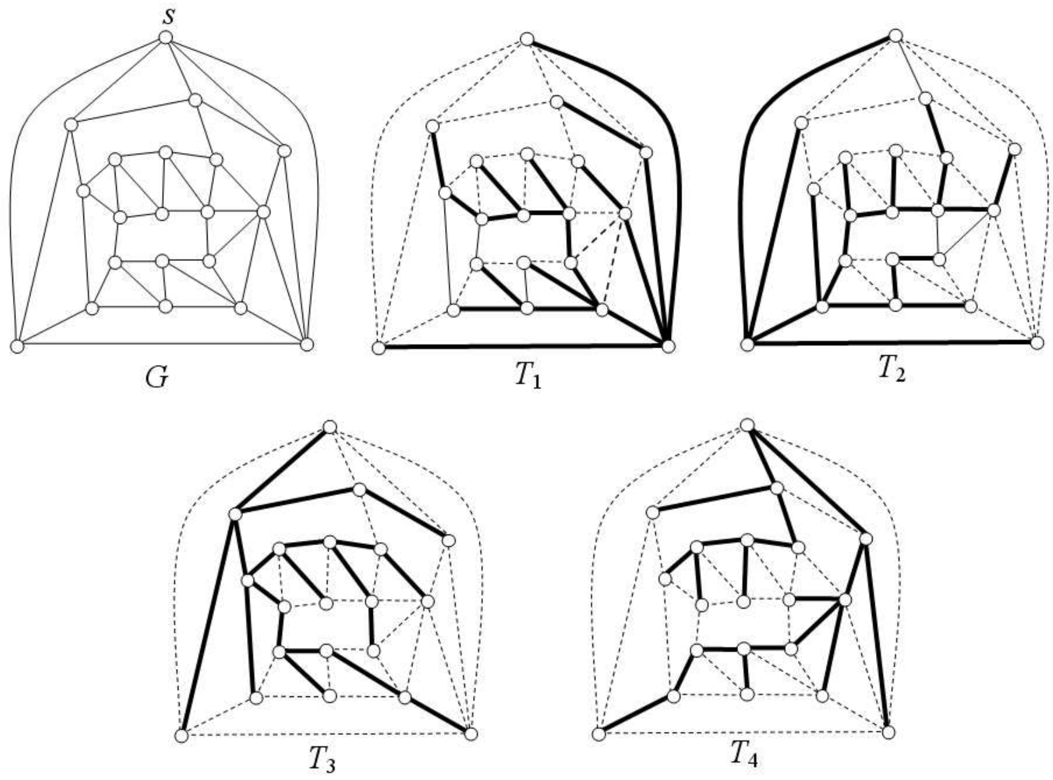
A független fák fogalma a fentiekhez hasonlóan definiálható irányított gráfok esetén is, csak ekkor feszítő fák helyett s-fenyőket kell tekintenünk (fenyő alatt a továbbiakban mindig be-fenyőt értünk). Mindkét esetben kézenfekvő bevezetni még az **élfüggetlen**ség fogalmát is. Két feszítő fa illetve s-fenyő s-élfüggetlen, ha a többi csúcsból a fákban illetve fenyőkben s-be vezető utak éldiszjunktak. Ennek megfelelően a sejtésnek is négy változatát fogalmazhatjuk meg. A fentit nevezzük az irányítatlan csúcs-változatnak. A irányítatlan él-változatot úgy kapjuk, hogy az összefüggőséget élösszefüggőségre, a függetlenséget élfüggetlenségre cseréljük, az irányított csúcs- és él-változat pedig formálisan ugyanúgy hangzik, mint az irányítatlan, csak irányított összefüggőséggel és élösszefüggőséggel.

Az előbbi sejtésben csak azt követeltük meg, hogy a gráf minden csúcsához lehessen találni ott gyökerező független fákat. A gyökér változtatásával azonban mindig újabb és újabb fákat kell konstruálnunk. A független fák fogalmának egy variánsát kapjuk, ha olyan fákat keresünk, amik minden s csúcsra egyszerre s-függetlenek. Az ilyen feszítő fákat **teljesen függetlén**nek hívjuk. Más megfogalmazásban ez azt jelenti, hogy minden x, y csúcspár esetén a fákban x és y között vezető utak belsőleg diszjunktak. Teljesen független fákról az alábbi sejtés fogalmazódott meg ([4]):

Sejtés (teljesen független fák) *Ha a G gráf $2k$-összefüggő, akkor létezik benne k teljesen független feszítő fa.*

A teljes függetlenség él-változata egyszerűen az éldiszjunkt feszítő fák kérdését adja vissza, irányított gráfokra pedig ez a fogalom nem értelmezhető (egy fenyő csak egyetlen s csúcsra s-fenyő).

A dolgozat témája a két sejtéssel kapcsolatos eredmények áttekintése, és különösen a vizsgálatuk során használt módszerek bemutatása.



1. ábra. Négy s-független feszítő fa (forrás: [14])

Egy gyakorlati probléma

A független fák fogalma kommunikációs hálózatokkal kapcsolatos gyakorlati kérdések vizsgálata során alakult ki. A kommunikációs hálózatok gráfokkal írhatók le, amelyek csúcsai olyan objektumoknak felelnek meg, amik az éleken keresztül küldött üzenetek által kommunikálni tudnak egymással. (Például a csúcsok lehetnek távíróhivatalok, számítógépek, processzorok, az élek pedig hírvivők, elektromos vezetékek, számítógépes buszok.) Feltesszük, hogy valamilyen korlát (például a hálózat nagysága, vagy a csúcsok kapacitása) miatt a csúcsok nem ismerik az egész hálózatot, csak a saját szomszédságukról van információjuk, illetve csak arra vonatkozó adatokat tudnak tárolni. Tegyük fel, hogy egy ilyen hálózatban egy u csúcs (a feladó) el akar juttatni egy üzenetet egy v csúcsnak (a címzettnek), méghozzá abban az esetben is, ha a hálózat megbízhatatlan, vagyis néhány csúcs vagy él elromolhat. Ennek megvalósítására az első, kézenfekvően adódó módszer az úgynevezett sugárzás: u elküldi az üzenetet minden szomszédjának, ha pedig egy x csúcs üzenetet kap egy y szomszédjától, akkor azt továbbküldi az y-tól különböző szomszédainak. Ezen a módon az üzenet előbb-utóbb biztosan célba ér, ha ez egyáltalán lehetséges, vagyis ha a gráf összefüggő, illetve a megbízhatatlan esetben $k-1$ csúcs hibája esetén is eljut a címzetthez, ha a gráf k-összefüggő, illetve $k-1$ él hibája esetén, ha k-élösszefüggő.

Sajnos ennek az eljárásnak megvannak a maga hátrányai. Nevezzük továbbításnak azt a folyamatot, amikor egy x csúcs elküldi az üzenetet egy y csúcsnak az őket összekötő élen. Világos, hogy a sugárzás során számtalan felesleges továbbítás történik, sőt, ha a gráf tartalmaz kört, akkor abban a végtelenségig keringeni fog az üzenet. Ezt persze ki lehetne küszöbölni azzal, hogy minden csúcs megjegyzi, hogy melyik üzeneteket továbbította már, mivel azonban egy ilyen hálózatban tipikusan sok üzenetet küldenek egymással párhuzamosan, ez rengeteg memóriát igényelne. Egy hatékonyabb módszer a továbbítások számának csökkentésére, ha a sugárzást az eredeti gráf helyett egy T feszítő fában hajtjuk végre. Ekkor már biztos, hogy minden csúcs legfeljebb egyszer kapja meg ugyanazt az üzenetet, bár felesleges továbbítások még mindig előfordulhatnak. Ha viszont minden üzenet címzettje ugyanaz az s csúcs, akkor ezt tovább javíthatjuk: irányítsuk meg a fa éleit úgy, hogy minden él s felé mutasson (ezáltal egy s-fenyőt kapunk), és minden csúcs csak az egyetlen belőle kimenő élen küldje tovább az üzenetet. Ekkor az egész folyamat csak a feladó csúcsot s-sel a fában összekötő egyértelmű út éleit használja. Világos, hogy ezzel a technikával két fázisban az általános esetet is megoldhatjuk: először küldjünk el minden üzenetet s-nek, majd a fában ellenkező irányban haladva s küldje el a címzettnek. (Ilyenkor minden csúcs számára egyértelmű, hogy melyik fázisban levő üzenetet kapott, hiszen az első fázisbeliek belépő éleken érkeznek, míg a másik alkalommal az eredeti irányítás szerinti kimenő él felől.)

Az eddig ismertetett eljárás azonban nagyon rosszul működik, ha a hálózat megbízhatatlan. Mivel a hálózatot tulajdonképpen egyetlen T feszítő fára szűkítettük le, már egyetlen él hibája megakadályozhatja az üzenet célba érkezését. Ezen úgy segíthetünk, hogy nem egy, hanem k megfelelő $T_1, \ldots, T_k$ feszítő fában továbbítjuk az üzeneteket. Ilyenkor tehát minden csúcs tudja, hogy melyik fában kik a be- illetve ki- szomszédai, és minden üzenetet minden fában továbbít. A feladatunk szempontjából elégséges feltétel, ha ezek a fák éldiszjunktak: ez már garantálja az üzenet megérkezését $k-1$ él hibája esetén is. Az így elérhető maximális megbízhatóság azonban messze elmarad attól, amit szeretnénk: noha egy k-élösszefüggő gráf $k-1$ él elhagyása után még összefüggő marad, vagyis ennyi él hibája esetén még biztosan elküldhető lenne az üzenet, egy k-élösszefüggő gráfnak esetleg csak $\lceil \frac{nk}{2} \rceil$ éle van (ahol n a gráf csúcsainak száma), és már ebből láthatólag legfeljebb csak $\frac{k}{2}$ nagyságrendű éldiszjunkt feszítő fát tartalmazhat. Az ismertetett üzenetküldési módszer megbízhatatlan hálózatokban való működéséhez azonban szerencsére ennél kevesebbre van csak szükségünk. Vegyük észre, hogy ahhoz, hogy k fát használva $k-1$ él hibája mellett is biztosan célba érjen az üzenet, már az is elég, ha minden x csúcs esetén a fákban x-ből s-be vezető utak éldiszjunktak, illetve ha $k-1$ csúcs hibásodhat meg, akkor hogy belsőleg diszjunktak. Ez pedig éppen az s-(él)független fák definícióját adja.

(Részletesebben ld. [12] és [8].)

Eddigi eredmények

A független fákról szóló sejtéssel kapcsolatban eddig a következő fontosabb eredmények ismertek. $k = 1$-re persze mindegyik változat teljesül.

Irányítatlan gráfokban $k = 2$-re Itai és Rodeh [12] belátta mind a csúcs-, mind az él-változatot. Khuller és Schieber [13] megmutatták, hogy az él-változat minden k esetén következik a csúcs-változatból. A további eredmények mind a csúcs-változatra vonatkoznak. A $k = 3$ esetet Cheriyan és Maheshwari [1] illetve Zehavi és Itai [17] bizonyította egymástól függetlenül. A sejtés síkgráfokra való megszorítását először Huck látta be $k = 4$ [6] majd $k = 5$ [9] esetre is (ezzel minden síkgráfra, mert egy síkgráf nem lehet 6-összefüggő), végül az állítást síkbeli multigráfokra is kiterjesztette [10] (itt már $k \geq 6$ is lehet). 4-összefüggő síkgráfokra Miura et al. [14] utóbb lineáris idejű algoritmust is adott, Nagai és Nakano [15] pedig 5-összefüggő maximális síkgráfokra tette meg ugyanezt. Huck [6] belátta a $k = 4$ eset egy gyengítését, ami szerint létezik olyan T feszítő fa, hogy minden x csúcsból található négy belsőleg diszjunkt út s-be úgy, hogy az egyikük a T-beli egyértelmű út. (Ugyanezt a gyengítést megmutatta az él-változat esetén is, ott tetszőleges k-ra.) Végül Curran et al. [2] bizonyította az eredeti sejtést $k = 4$-re. Így tehát $k \leq 4$ esetén a csúcs- és az él-változat is igazolást nyert, $k > 4$-re viszont a sejtés mindkét esetben nyitott.

Az irányított csúcs-verziót $k = 2$-re Whitty [16] igazolta, Huck [7] viszont megmutatta, hogy a sejtés semmilyen $k > 2$-re nem teljesül. Így ennek a változatnak az esetében a további kutatások olyan szűkebb gráfosztályok keresésére irányultak, amikben már igaz a sejtés. Huck [11] aciklikus multigráfokra, Hasunuma és Nagamochi [5] pedig élgráfokra látta be az állítást (tetszőleges k-ra).

A teljesen független fák él-megfelelői az éldiszjunkt feszítő fák, amikről ismert Nash-Williams klasszikus tétele: ha egy gráf $2k$-élösszefüggő, akkor tartalmaz k éldiszjunkt feszítő fát. Ez az analógia inspirálta a teljesen független fákra vonatkozó sejtést.

A teljesen független fákra vonatkozó eredmények Hasunuma nevéhez fűződnek. Ő belátta a róluk szóló sejtést irányított élgráfokból az irányítás elhagyásával keletkező gráfokra megszorítva minden k-ra [3], illetve a $k = 2$ esetet maximális síkgráfokra [4]. Jelen dolgozat ad egy egyszerű ellenpéldát arra, hogy a sejtés általánosan nem igaz, sőt minden k-ra van olyan k-összefüggő gráf, amiben már két teljesen független feszítő fa sincs. Azt is megmutatjuk, hogy a 4-összefüggő maximális síkgráfokra vonatkozó tétel másik feltétele sem gyengíthető: 3-összefüggőekre már nem igaz az állítás.

Áttekintés

A dolgozatot nyitó, Ekvivalens alakok című részben a független fákról szóló sejtés néhány ekvivalens megfogalmazását mutatjuk be. Ha csak egyetlen s csúcsra akarunk s-ben gyökerező független fákat kapni, annak csak az s-re vonatkozó gyökeres összefüggőség a magától értetődő szükséges feltétele. Többek között belátjuk, hogy az ebből adódó, első ránézésre erősebb sejtés következik az eredetiből.

Az 1. fejezet a független fa-sejtés irányítatlan változatával foglalkozik. Az első két szakasz bevezető állításokat és a $k = 2$ esetet tartalmazza, majd a harmadikban rátérünk a 3-összefüggő gráfokra. Itt található a dolgozat erre a fejezetre eső újdonsága, Zehavi és Itai bizonyításának nagymértékű egyszerűsítése. A negyedik szakaszban Cheriyan és Maheshwari ugyanerre adott másik bizonyításának fő öteletét mutatjuk be, végül az utolsó szakaszban az élfüggetlenségre vonatkozó sejtést visszavezetjük a csúcsfüggetlenségre.

A 2. fejezet a sejtés irányított csúcs-változatára vonatkozó alapvető eredményeket ismerteti: a $k = 2$ eset bizonyítását, az ellenpéldát $k \geq 3$-ra, és az aciklikus multigráfok speciális esetét.

A dolgozat legfontosabb része a teljesen független fákról szóló 3. fejezet, mely így egy külön erről a témáról szóló bevezetővel indul. Ezután a 2.,3.,4. és 6. szakasz Hasunuma teljesen független fákra vonatkozó tételeit mutatja be, az 5. szakasz pedig a dolgozat saját ereményeit tartalmazza. Ebben megmutatjuk, hogy minden k-ra van olyan k-összefüggő gráf, amiben már két teljesen független feszítő fa sem létezik, megcáfolva ezzel a teljesen független fákra vonatkozó sejtést, illetve hogy egy 3-összefüggő maximális síkgráf se feltétlenül tartalmaz két teljesen független feszítő fát.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Bérczi Kristófnak a dolgozat megírása során nyújtott sokrétű segítségét, a szakmai észrevételektől a gyakorlati kivitelezésig. Hálás vagyok azért is, hogy felhívta a figyelmemet az itt tárgyalt témára.

Sok hálával tartozom Frank Andrásnak az irántam tanúsított türelméért, és hogy megteremtette a körülményeket ahhoz, hogy ez a dolgozat létrejöhessen.

Szintén szeretnék köszönetet mondani Kaszanitzky Viktóriának, amiért végig kitartóan bátorított, és átsegített több nehéz ponton.

Ekvivalens alakok

Egy G irányított vagy irányítatlan gráf egy s gyökérpontra nézve **gyökeresen k-összefüggő**, ha minden $x \in V(G) - s$ csúcsból vezet s-be k belsőleg diszjunkt út. k s-független feszítő fa létezésének nyilvánvaló szükséges feltétele, hogy a gráf s-re nézve gyökeresen k-összefüggő legyen. A független fákra kimondott sejtés furcsasága, hogy annak ellenére, hogy az s-független fák létezése egy aszimmetrikus tulajdonság (a kitüntetett s csúccsal), G-ről mégis a k-összefüggőséget tesszük fel, ami minden csúcspár között megköveteli a k belsőleg diszjunkt út létezését (cserébe persze azt akarjuk, hogy minden csúcs jó legyen s-nek). Azonban felvetődik a kérdés, hogy ha tényleg csak egyetlen s gyökérből szeretnénk független fákat, akkor nem elegendő-e csak a gyökeres összefüggőséget feltenni (hasonlóan Edmonds fenyőtételéhez).

Sejtés (független fák, gyökeresen összefüggő verzió) *Ha a G gráf egy s csúcsára nézve gyökeresen k-összefüggő, akkor létezik G-ben k s-független feszítő fa.*

Ennek a sejtésnek is megfogalmazhatjuk irányított illetve irányítatlan, és csúcsfüggetlenségről illetve élfüggetlenségről szóló változatát. Világos, hogy ebből a sejtésből minden változat esetén következik az eredeti sejtés, mivel ha G k-(él)összefüggő, akkor minden s csúcsára nézve gyökeresen k-(él)összefüggő. Az irányított él-változatnál Edmonds fenyőtétele eleve gyökeres élösszefüggőségről szól, ott tehát a sejtésnek ez a verziója is igaz. Az irányítatlan él-változat esetén pedig nem is különbözik a kettő, mert irányítatlan gráfokban a k-élösszefüggőség és az egyetlen csúcsra vonatkozó gyökeres k-élösszefüggőség fogalma egybeesik. Az alábbiakban [8] nyomán megmutatjuk, hogy a két sejtés a csúcs-változatok esetén is ekvivalens, vagyis az eredeti sejtéssel való foglalkozás nem jelent megszorítást. Ehhez megfogalmazzuk a sejtés egy harmadik verzióját is, ami az ekvivalencia itteni belátásán túl még később is hasznos lesz.

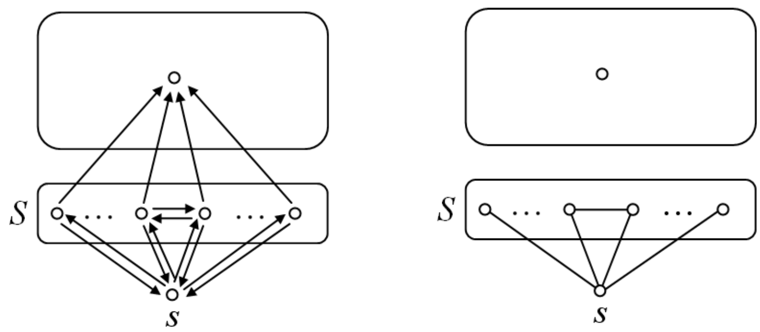
Legyen T egy fa és $x, y \in V(T)$. A továbbiakban $T[x, y]$ jelöli az x és y között a fában vezető egyértelmű utat. A jelölést hasonló értelemben használni fogjuk fenyők esetében is. Ha v egy irányított gráf egy csúcsa, akkor $\varrho(v)$ jelöli v befokát, $\delta(v)$ a kifokát, $\Gamma^-(v)$ azon csúcsokat, amelyekből vezet él v-be, $\Gamma^+(v)$ pedig azokat, amikbe v-ből vezet él. Írányítatlan gráfokban $deg(v)$ jelöli v fokszámát és $\Gamma(v)$ a v szomszédait. Ha szükséges megjelölni, hogy a fokszámokat illetve szomszédságot melyik gráfban vagy részgráfban tekintjük, azt az előbbiekhez fűzött alsó indexben tesszük meg.

A szakasz hátralevő részében egyszerre tárgyalunk irányított és irányítatlan gráfokat. Ennek során a rövidség kedvéért egységesen a fenyő kifejezést fogjuk használni, irányítatlan gráfokban ezalatt fát kell érteni.

Legyen G egy irányított vagy irányítatlan gráf, $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq V(G)$ és $x \in V(G) - S$. Egy $x-S$ **legyező** belsőleg diszjunkt $P_1, \ldots, P_k$ utak halmaza, ahol P_i x-ből s_i-be vezet ($i = 1, \ldots, k$). G S-**linkelt**, ha minden $x \in V(G) - S$ csúcsra létezik $x - S$ legyező. Legyen T_i s_i-fenyő ($i = 1, \ldots, k$), amire $V(T_i) = V(G) - S + s_i$. $(T_1, \ldots, T_k)$ egy **független S-rendszer**, ha minden $x \in V(G) - S$ esetén $(T_i[x, s_i])_{i=1}^k$ egy $x - S$ legyező.

Sejtés (független S-rendszer létezése) *Ha G S-linkelt, akkor létezik független S-rendszer G-ben.*

Legyen G egy irányított vagy irányítatlan gráf és $S \subseteq V(G)$. A G egy s, S-**bővítésén** a következő G' gráfot értjük. G-hez hozzáveszünk egy új s csúcsot. Ha G irányított, akkor minden $t \in S$ esetén behúzzuk az st és ts éleket és minden $t \in S$ és $x \in V(G) - t$ esetén a tx élt (ha az él nem szerepelt már eredetileg is G-ben). Ha G irányítatlan, akkor minden $t \in S$ esetén behúzzuk az st élt és minden $t_1, t_2 \in S$ esetén a t_1t_2 élt (ha még nem volt olyan).



Lemma 1 *Legyen G egy irányított vagy irányítatlan gráf, $S \subseteq V(G)$, $k = |S|$ és legyen G' a G egy s, S-bővítése.*

(i) Ha G S-linkelt, akkor G' k-összefüggő.

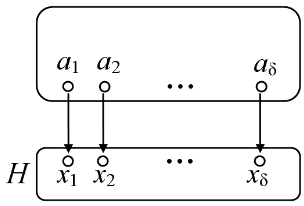
(ii) Ha G' tartalmaz k s-független feszítő fenyőt, akkor G tartalmaz egy független S-rendszert.

Biz. (i) Tegyük fel, hogy G' nem k-összefüggő. Ekkor, mivel $|V(G')| \geq k+1$, létezik egy U vágás, amire $|U| < k$. Legyen $V(G) = X_1 \cup^* X_2 \cup^* U$ ahol $X_1, X_2 \neq \emptyset$ és X_1-ből nem vezet él X_2-be. Ha G irányított, akkor G' konstrukciója miatt $S \subseteq U + X_2$, ha pedig irányítatlan, akkor $S \subseteq U + X_1$ vagy $S \subseteq U + X_2$, és feltehető, hogy itt is az utóbbi teljesül. Mivel $|U| < k$, ezért $S \cap X_2 \neq \emptyset$ és így $s \in U + X_2$. Legyen $x \in X_1$ tetszőleges. Ekkor $x \in V(G) - S$ és így létezik egy $x - S$ legyező G-ben. Ezt persze G' is tartalmazza, ami ellentmond annak, hogy $|U| < k$.

(ii) Legyenek $T'_1, \ldots, T'_k$ s-független feszítő s-fenyők G'-ben. Világos, hogy minden $t \in S$ esetén a ts él pontosan egy T'_i-höz tartozik, és így létezik S-nek egy olyan $\{s_1, \ldots, s_k\}$ indexezése, hogy

$s_i s$ a T_i' egyetlen s-sel szomszédos éle ($i = 1, \dots, k$). Legyen $T_i = T_i' - s - \{s_j : j \neq i\}$. Ekkor $V(T_i) = V(G) - S + s_i$ és ha T_i' irányított, akkor $\delta_{T_i}(s_i) = 0$. Mivel minden $x \in V(G) - S$ esetén $T_1'[x, s], \dots, T_k'[x, s]$ belsőleg diszjunktak, $V(T_i'[x, s]) \cap S = \{s_i\}$, és így $T_i'[x, s] - s$ egy $x - s_i$ út T_i-ben. Ebből könnyen látható, hogy T_i egy s_i-fenyő, és mivel a $T_i[x, s_i] = T_i[x, s] - s$ utak belsőleg diszjunktak, $(T_1, \dots, T_k)$ egy független S-rendszer G-ben. □

Legyen G egy irányított vagy irányítatlan gráf, $s \in V(G)$, $n \geq 1$, H pedig egy másik gráf úgy, hogy $|V(H)| \geq \varrho = \varrho_G(s)$. Legyen $\Gamma^-(s) = \{a_1, \dots, a_\varrho\}$ és $x_1, \dots, x_\varrho \in V(H)$ páronként diszjunkt csúcsok. Legyen G' az a gráf, amit úgy kapunk, hogy $G - s$-hez hozzávesszük H-t, és minden $i = 1, \dots, \varrho$-ra egy $a_i x_i$ élt. Ekkor azt mondjuk, hogy G' az s H**-val való helyettesítésével** kapott gráf. (Megjegyzés: $\delta_{G'}(V(H)) = 0$ ha G irányított.)



Lemma 2 *Legyen G egy irányított vagy irányítatlan gráf és legyen G' az $s \in V(G)$ egy H gráffal való helyettesítésével G-ből kapott gráf. Legyen $S \subseteq V(H)$ és $k = |S|$.*

(i) Ha G s-re nézve gyökeresen k-összefüggő és H k-összefüggő, akkor G' S-linkelt.

(ii) Ha G' tartalmaz egy független S-rendszert, akkor G tartalmaz k s-független feszítő s-fenyőt.

Biz. (i) Legyen $x \in V(G') - S$. Ha $x \in V(H)$, akkor, mivel H k-összefüggő, létezik $x - S$ legyező G'-ben (már H-ban is). Tegyük fel, hogy $x \in V(G') - V(H) = V(G) - s$. Mivel G s-re nézve gyökeresen k-összefüggő, létezik k belsőleg diszjunkt $P_1, \dots, P_k$ $x - s$ út G-ben. $i = 1, \dots, k$-ra legyen $a_i s$ a P_i utolsó éle és x_i az a_i szomszédja H-ban. Legyen $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Mivel H k-összefüggő, léteznek $Q_1, \dots, Q_k$ diszjunkt utak H-ban X és S között (ezek egy része triviális is lehet, ha $S \cap X \neq \emptyset$). A $P_1 - s, \dots, P_k - s$ és $Q_1, \dots, Q_k$ utak összekapcsolásával megkapjuk a kívánt $x - S$ legyezőt G'-ben.

(ii) Legyen $(T_1', \dots, T_n')$ egy független S-rendszer G'-ben. Ha G irányítatlan, akkor $i = 1, \dots, k$-ra legyen A_i azon $V(H)$ és $V(G) - s$ között vezető élek halmaza, amik T_i' s_i-fenyővé irányításakor $V(H)$-ból $V(G) - s$-be mutatnak. (Előfordulhat, hogy valamilyen $x \in V(H)$ esetén $T_i'[x, s_i]$ nem végig $V(H)$-ban vezet, ilyenkor vannak ilyen típusú élek.) Legyen T_i a $T_i' - A_i$-ból $V(H)$ s ponttá való összehúzásával kapott részgráf. Ha G irányított, akkor legyen T_i a T_i'-ből $V(H)$ s ponttá való összehúzásával kapott részgráf. Mindkét esetben könnyen ellenőrizhető, hogy $T_1, \dots, T_k$ s-független feszítő s-fenyők G-ben. □

Az 1. lemmából világos, hogy az eredeti sejtés csúcs-változatából következik az S-rendszeres sejtés csúcs-változata mind irányított, mint irányítatlan gráfok esetén, míg az 2. lemma szerint az S-rendszeres lemmából a sejtés gyökeresen összefüggő verziója következik. Mivel ez utóbbiból pedig triviálisan következik az eredeti, megkaptuk, hogy (irányított illetve irányítatlan csúcs-esetben) a három sejtés ekvivalens.

Az eddig sejtésekben szerepelt teljes illetve gyökeres összefüggőség és egyetlen gyökérpont illetve S „gyökérhalmaz". Így negyedikként még adódik, hogy S-rendszeres sejtésnek is megfogalmazzuk a szimmetrikus verzióját. Mivel az a feltétel, hogy minden $S \subseteq V(G)$, $|S| = k$ és $x \in V(G) - S$ esetén létezzen $x - S$ legyező, ekvivalens a k-összefüggőséggel, ez így hangzik:

Sejtés *Legyen G k összefüggő irányított vagy irányítatlan gráf. Ekkor minden $S \subseteq V(G)$, $|S| = k$ esetén létezik független S-rendszer G-ben.*

Állítás: Ez a sejtés is ekvivalens az eredetivel, és így a másik kettővel is.

Biz. $\Leftarrow$: Vegyünk hozzá G-hez egy új s csúcsot, és ezt kössük össze minden $t \in S$ csúccsal (ha G irányított, akkor mindkét irányban). Könnyen látható, hogy az így kapott G' gráf is k-összefüggő. Hasonlóan az 1. lemma (ii) részéhez, ha $T'_1, \dots, T'_k$ s-független fák G'-ben és $T_i = T'_i - s - \{s_j : j \neq i\}$ $(i = 1, \dots, k)$, akkor $T_1, \dots, T_k$ S-független rendszer G-ben.

$\Rightarrow$: Az 2. lemmához használt konstrukció működik, azzal a különbséggel, hogy az irányított esetben mindkét irányban be kell húzni az új éleket, és ezúttal ott is el kell hagyni a rossz irányba mutatókat az összehúzás előtt.

1. fejezet

Független fák irányítatlan gráfokban

1.1. Fülfelbontás, $s-t$ rendezés és a 2-(él)összefüggő eset

Ebben a szakaszban az s-t rendezés fogalmának felhasználásával belátjuk a 2-összefüggő esetet, majd a rendezés további tulajdonságait vizsgáljuk.

Definíció 1.1.1 *Egy G 2-összefüggő gráf fülfelbontása egy $G = P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_k$, ahol P_0 kör, $P_i, 1 \leq i$ pedig egy út, amire $V(P_i) \cap (V(P_0) \cup V(P_1) \cdots \cup V(P_{i-1}))$ a P_i két (egymástól különböző) végpontja.*

A fülfelbontás jelentőségét az alábbi közismert tétel adja:

Tétel 1.1.2 *Egy gráf akkor és csak akkor 2-összefüggő, ha van fülfelbontása. Sőt, a fülfelbontásban P_0 a G tetszőleges köre lehet, és általában, ha G egy részgráfját már előállítottuk, az kiegészíthető a G egy fülfelbontásává.* $\Box$

Definíció 1.1.3 *Legyen adott egy G 2-összefüggő gráf és egy $st \in E(G)$ él. A G csúcsainak egy $g: V(G) \to \{1, \ldots, N\}$, $N \geq |V|$ számozása $s-t$ számozás, ha*

(i) $g(s) = 1$ és $g(t) = N$

(ii) minden $v \in V(G) - \{s, t\}$ csúcsnak vannak olyan $u, w \in \Gamma(v)$ szomszédjai, amikre $g(u) < g(v) < g(w)$.

Ugyanezt a rendezések nyelvén is megfogalmazhatjuk, világos, hogy a két fogalom ekvivalens:

Definíció 1.1.4 *Adott G 2-összefüggő gráf és $st \in E(G)$ él esetén a G egy $s-t$ rendezése egy $\prec$ rendezés a G csúcsain, amire*

(i) s maximális és t minimális, vagyis $\forall v \neq s, t$ esetén $s \prec v \prec t$

(ii) minden $v \in V(G) - \{s, t\}$ csúcsnak vannak olyan $u, w \in \Gamma(v)$ szomszédjai, amikre $u \prec v \prec w$.

A fülfelbontás segítségével könnyen megkaphatjuk a gráf egy st-rendezését. Vegyünk ugyanis egy olyan $P_0 \cup \cdots \cup P_k$ fülfelbontást, ahol P_0 tartalmazza az st élt, vagyis $P_0 = (s = v_0, v_1, ..., v_{n-1} = t, s)$. Legyen $v_i \prec v_{i+1}, i = 1, \ldots n-2$. Ezzel P_0-on kaptunk egy $s-t$ rendezést, ha pedig már $P_0 \cup \cdots \cup P_{i-1}$-n már adott, $P_i = (u_0, \ldots, u_m)$ (feltehető $u_0 \prec u_m$) és w a korábbi rendezésben u_0-ra következő elem, akkor legyen $u_0 \prec u_1 \prec \cdots \prec u_m \prec w$. Ezzel könnyen láthatóan egy $s-t$ rendezést kapunk. Így adódott, hogy

Tétel 1.1.5 *Ha egy gráf 2-összefüggő, és st egy tetszőleges éle, akkor létezik a gráfnak $s-t$ rendezése.* □

Az $s-t$ rendezés megtalálására Even és Tarjan adott lineáris idejű algoritmust, mélységi keresés felhasználásával.

Az $s-t$ rendezés egy további tulajdonsága a következő. Soroljuk fel a gráf csúcsait a rendezés szerinti sorrendben, vagyis $V(G) = \{v_1 = s, v_2, \ldots, v_n = t\}$ ahol $v_1 \prec v_2 \prec \cdots \prec v_n$. Legyen $V_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$ és legyen $G_i = G[V_i]$ és $\overline{G_i} = G[V - V_i]$. Ekkor G_i összefüggő, hiszen minden csúcsnak van a rendezésben nála kisebb szomszédja, és hasonlóan $\overline{G_i}$ is összefüggő.

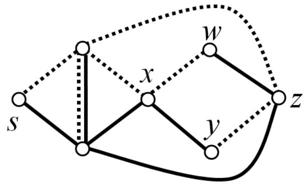
Pusztán az $s-t$ rendezés létezésből már könnyen adódik két független fa létezése.

Tétel 1.1.6 (Itai és Rodeh) *Legyen G egy 2-összefüggő gráf, és s a G egy tetszőleges csúcsa. Ekkor G-ben létezik két s-független feszítő fa.*

Biz. Legyen t az s egy szomszédja, z pedig a t egy s-től különböző szomszédja. Tekintsünk a gráfban egy $\prec$ $s-t$ rendezést. Konstruálunk egy T_1 és egy T_2 s gyökerű feszítő fát úgy, hogy a gráf minden s-től különböző csúcsára megmondjuk, hogy mi a szülője a megfelelő fában. T_1-ben legyen t szülője z, minden más $v \in V - \{s,t\}$ csúcs szülője pedig a v egy tetszőleges olyan u szomszédja, amire $u \prec v$. T_2-ben legyen t szülője s, a többi $v \in V - \{s,t\}$ csúcs szülője pedig a v egy tetszőleges olyan w szomszédja, amire $w \succ v$. Az így kapott feszítő fák s-függetlenek, hiszen a fenti jelölést használva egy v_i csúcs esetén $T_1[v_i, s]$ minden belső csúcsa G_i-ben, $T_2[v_i, s]$-é pedig $\overline{G_i}$-ban van. □

A bizonyítás során konstruált fáknak az s-függetlenségen kívül még más speciális tulajdonságai is vannak. Megkaptuk például, hogy a két fa közül az egyik - mondjuk T_2 - választható úgy, hogy $deg_{T_2}(s) = 1$. Egy másik tulajdonságot külön definíció formájában fogalmazunk meg. Legyen $\prec$ egy rendezés a G gráf csúcsain. Egy $\pi = (v_1, \ldots, v_p)$ út **$\prec$-növekvő** (ill. **$\prec$-csökkenő**, ha $v_1 \prec v_2 \prec \cdots \prec v_p$ (ill. $v_1 \succ v_2 \succ \cdots \succ v_p$). Legyen s a $\prec$ szerint minimális és t a maximális csúcs, és tegyük fel, hogy $st \in E(G)$. A (T_1, T_2) feszítő fa pár **$\prec$-rendezett**, ha $\Gamma_{T_2}(s) = \{t\}$, és minden v csúcsra a $T_1[v, s]$ út $\prec$-csökkenő, a $T_2[v, s] - s = T_2[v, t]$ út pedig $\prec$-növekvő. Világos, hogy ha (T_1, T_2) $\prec$-rendezett, akkor s-függetlenek, és a fentiek szerint egy 2-összefüggő gráfhoz található olyan $\prec$ rendezés és T_1, T_2 feszítő fák, hogy (T_1, T_2) $\prec$-rendezett.

Megjegyzés: T_1, T_2 s-független feszítő fákhoz nem feltétlenül létezik olyan $\prec$ rendezés a gráf csúcsain, amire (T_1, T_2) $\prec$-rendezett, még akkor se, ha s mindkét fában levél. Az 1.1 ábrán látható gráfban $x \prec y \prec z \prec w \prec x$ kellene hogy teljesüljön.



1.1. ábra.

A továbbiakban a $\prec$-rendezett feszítő fa párok tulajdonságait vizsgáljuk.

Lemma 1.1.7 *Ha a (T_1, T_2) feszítő fa pár $\prec$-rendezett, akkor $\prec$ egy $s-t$ rendezés.*

Biz. Legyen $v \in V(G)-\{s,t\}$ egy tetszőleges csúcs. Mivel $T_1[v,s]$ $\prec$-csökkenő, az út v-re következő u csúcsára $u \prec v$. Hasonlóan a $T_2[v,s]$ út v-re következő w csúcsa a v egy olyan szomszédja, amire $v \prec w$. □

Lemma 1.1.8 *Legyenek T_1 és T_2 a G gráf feszítő fái és $\prec$ a G egy $s-t$ rendezése. Ha (T_1, T_2) $\prec$-rendezett és $\Gamma(s, T_1) = \{v\}$ akkor létezik olyan $\prec'$ $s-v$ rendezés, amire (T_2, T_1) $\prec'$-rendezett.*

Biz. $\prec'$-t definiáljuk úgy, hogy s legyen a minimális, v a maximális eleme, bármely más u, w csúcsok esetén pedig ha $u \prec w$ akkor legyen $w \prec' u$. Mivel így minden $\prec$-növekvő út $\prec'$-csökkenő és fordítva, (T_2, T_1) $\prec'$-rendezett, és ekkor az előző lemma szerint $\prec'$ egy $s-v$ rendezés. □

Ezzel megkaptuk, hogy ha s mindkét fában levél, akkor a $\prec$-rendezettség egy szimmetrikus fogalom. Két ilyen tulajdonságú feszítő fát azonban már nem várhatunk egy 2-összefüggő gráfban: ha s egy v szomszédjának foka 2, akkor az sv él biztosan benne lesz valamelyik fában, különben $T_1[v,s]$ és $T_2[v,s]$ is átmenne a v másik szomszédján. Így ha s-nek kettőnél több 2-fokú szomszédja van, akkor már legalább az egyik fában s nem lesz levél. Látni fogjuk azonban, hogy 3-összefüggő gráfokban már megkövetelhetjük, hogy a három s-független feszítő fa között legyen két olyan, amikre ez teljesül.

A szakasz lezárásaként a 2-összefüggő eset felhasználásával levezetjük a 2-élösszefüggő esetet is.

Tétel 1.1.9 (Itai és Rodeh) *Legyen G egy 2-élösszefüggő gráf, és s a G egy tetszőleges csúcsa. Ekkor G-ben létezik két s-élfüggetlen feszítő fa.*

Biz. Ha G 2-összefüggő, akkor persze készen vagyunk, mert az s-független fák s-élfüggetlenek is. Ha nem, akkor legyenek $B_1, \ldots, B_m$ a G blokkjai (maximális 2-összefüggő részgráfjai) úgy, hogy $s \in B_1$. Mivel G 2-élösszefüggő, a blokk-felbontásban nincsenek elvágó élek, csak blokkok és elvágó csúcsok, és B_1-t a blokk-fa gyökerének tekintve minden B_i-nek $(i > 1)$ létezik egy egyértelmű B_j szülője, amihez egy s_i elvágó csúccsal csatlakozik. Legyen $s_1 := s$ és minden B_i $(i = 1, \ldots, m)$ blokkban legyen S_i és T_i két s_i-független feszítő fa (ilyenek léteznek a korábbi tétel szerint), végül legyen $S = \cup_{i=1}^m S_i$ és $T = \cup_{i=1}^m T_i$. Ekkor könnyen látható, hogy S és T s-élfüggetlen feszítő fák G-ben. □

1.2. Néhány tétel 3-összefüggőségről

Ebben a szakaszban belátjuk Tutte két tételét 3-összefüggő gráfokról és néhány további, összefüggőségről szóló lemmát. Mindezeket a 3-összefüggő eset bizonyításában fogjuk felhasználni.

Lemma 1.2.1 *Legyen G egy 3-összefüggő gráf, $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ a G egy elvágó halmaza és $e = (v_1, v_2)$. Ekkor bármely két $x, y \in V(G) - \{v_1, v_2\}$ csúcs között vezet három belsőleg diszjunkt út $G - e$-ben.*

Biz. Világos, hogy S minden csúcsából vezet él az S elhagyásával keletkező összes összefüggőségi komponensbe (különben lenne kételemű elvágó halmaz), így S bármely két csúcsa összeköthető olyan úttal, amelyik a végpontjait kivéve teljesen egy előre kijelölt komponensben fekszik.

1. eset: $v_3 \notin \{x, y\}$, vagyis $x, y \in V(G) - S$. Induljunk ki az x és y között G-ben található három belsőleg diszjunkt útból. Ha x és y a $G - S$ különböző komponenséhez tartozik, akkor ezek az utak $G - e$-ben is jók lesznek, mert egyik se tartalmazhat egynél több csúcsot S-ből. Így tegyük fel, hogy azonos komponensben vannak. Legfeljebb egy út használja e-t (és ilyenkor csak ez az út léphet át másik komponensbe). Ebben az útban e-t helyettesíthetjük egy olyan $v_1 - v_2$ úttal, ami a végpontjain kívül $G - S$ egy másik komponensében vezet. (Így esetleg egy sétát kapunk, de azt úttá egyszerűsíthetjük.)

2. eset: $v_3 \in \{x, y\}$, mondjuk $v_3 = y$. Tekintsük ismét a három G-beli $x - v_3$ utat, és tegyük fel, hogy egyikük használja az e élt. Jelöljük ezt az utat P_1-gyel. Ekkor a másik két út teljesen a $G - S$ azon komponensében fekszik, amelyik x-et tartalmazza. Legyen $P_1 = P_1[x, v_i] + (v_i, v_{3-i}) + P_1[v_{3-i}, v_3]$, ahol $i = 1$ vagy 2. Legyen Q egy $v_i - v_3$ út a $G - S$ egy olyan komponensében, ami nem tartalmazza x-et. Ekkor P_1-et a $P_1' = P_1[x, v_i] + Q$ útra cserélve megkapjuk a három kívánt utat $G - e$-ben. $\square$

Egy e **él felosztása** alatt azt értjük, hogy kitöröljük és helyettesítjük egy kettő hosszú úttal, ami az e két végpontját köti össze, a belső pontja pedig egy új csúcs. Egy G gráf egy H gráf felosztása, ha G-t megkaphatjuk H-ból él-felosztások egymásutánjával. Legyen $\mathbf{h(G)}$ a minimális olyan H gráf, aminek G a felosztása.

Itt fontos megjegyezni, hogy előfordulhat, hogy $h(G)$-nek is van 2 fokú csúcsa: ha a csúcs két szomszédja egymással is szomszédos, akkor a gráf ennél a csúcsnál már nem egyszerűsíthető, mert nem engedünk meg párhuzamos éleket. Emiatt általános G esetén H csak izomorfia erejéig egyértelmű, mert ha két csúcsot több különböző út is összeköt, aminek a belső csúcsai 2-fokúak, akkor nem egyértelmű, hogy melyikből lesz él, és melyikből 2 hosszú út, sőt ha az út hosszabb 2-nél és nem éllé egyszerűsödik, akkor a megmaradó belső csúcs is bármelyik lehet. A későbbiekben azonban ezt a műveletet mindig csak $G - e$ alakú gráfokra fogjuk alkalmazni, ahol G 3-összefüggő, ezek esetében pedig $h(G - e)$ egyértelmű: $G - e$-ben legfeljebb két 2-fokú csúcs lehet (e két végpontja), ezek nem szomszédosak, és ha két-két szomszédjuk egybeesne, akkor azok kételemű elvágó halmazt alkotnának.

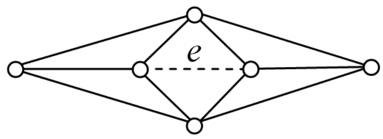
Lemma 1.2.2 *Legyen G egy 3-összefüggő gráf, $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ egy elvágó halmaz és $e = (v_1, v_2)$. Ekkor $H = h(G - e)$ 3-összefüggő.*

Biz. Tegyük fel, hogy nem az. Ekkor létezik $W = \{w_1, w_2\} \subseteq V(H)$ elvágó halmaz H-ban. Legyen x, y két W által szeparált csúcs. Ekkor az előző lemma miatt $\{x, y\} \cap \{v_1, v_2\} \neq \emptyset$, mondjuk $x = v_1$.

1. eset: $deg_G(v_1) = 3$: ekkor tehát $deg_{G-e}(v_1) = 2$. Az S G-ből való elhagyásakor legalább két komponens keletkezik, és v_1-ből ezek mindegyikébe vezet él. Így v_1 $G - e$-beli szomszédai közül egyik se v_3, és a két csúcs két különböző komponensbe esik, ezért nem lehetnek szomszédosak. Így v_1 nem is csúcsa H-nak, ami ellentmondás.

2. eset: $deg_G(v_1) > 3$: ha $deg_{G-e}(y) = 2$, akkor $y = v_2$ és x és y szerepét felcserélve az 1. esetet kapjuk. Így feltehető $deg_{G-e}(y) \geq 3$. Mivel v_1 és y nem szomszédosak (akkor nem lehetett volna elvágni őket) és $deg_H(v_1) \geq 3$, H-ban v_1-nek van egy $u_1 \notin W \cup \{y\}$ szomszédja. Ha $y \neq v_2$, akkor W szeparálja u_1-et és y-t, ellentmondásban az előző lemmával. Ha pedig $y = v_2$, akkor y-nak hasonlóan van egy $u_2 \notin W \cup \{v_1\}$ szomszédja, és W szeparálja u_1-et és u_2-t, ismét ellentmondva az előző lemmának. □

Megjegyzés: Az alábbi ábra mutatja, hogy az $e \in E(S)$ feltétel, vagyis hogy e két végpontja egy minimális elvágó halmazba tartozzon, szükséges.



Egy $e = (x, y) \in G$ él **összehúzásán** azt értjük, hogy x, y csúcsokat egyetlen $\overline{xy}$ csúccsal helyettesítjük, és ezt az új csúcsot $\Gamma_G(x) \cup \Gamma_G(y) - \{x, y\}$ elemeivel kötjük össze. Az így keletkező gráfot G/e-vel jelöljük. (Ha tehát x, y benne van egy x, y, z háromszögben, és így x és y azonosításakor többszörös él keletkezik, akkor ezek egyikét elhagyjuk.)

Tétel 1.2.3 *Legyen G egy 3-összefüggő gráf és $e = (v_1, v_2) \in E(G)$. Ekkor vagy G/e vagy $h(G-e)$ 3-összefüggő.*

Biz. Ha G/e csak 2-összefüggő, akkor v_1 és v_2 egy $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ minimális elvágó halmaz része G-ben, amire alkalmazható az előbbi lemma. □

Egy W_n **kerék gráf** egy $n - 1$ hosszú körből és egy további csúcsból (a kerék középpontjából) áll, ami a kör minden csúcsával össze van kötve.

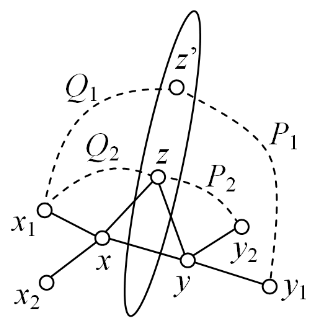
Tutte alábbi tétele közismert:

Tétel 1.2.4 *Ha G egy legalább öt csúcsú 3-összefüggő gráf, akkor létezik olyan e éle, amire G/e 3-összefüggő.*

Ebből most levezetjük egy másik tételét:

Tétel 1.2.5 *Ha egy* 3*-összefüggő* G *gráf nem kerék gráf, akkor vagy tartalmaz egy* e *élt, amire* $G - e$ *is* 3*-összefüggő, vagy egy olyan* f *élt, amire* G/f 3*-összefüggő és* f *nincs benne háromszögben (vagyis az összehúzásakor nem kell elhagyni élt).*

Biz. Tegyük fel, hogy egyik típusú él sincs G-ben. Ekkor az előző tétel szerint létezik egy T háromszög. Legyen $V(T) = \{x, y, z\}$. Megmutatjuk, hogy T legalább két csúcsának foka 3. Tegyük fel indirekt, hogy x-nek vannak nem T-beli x_1, x_2, y-nak nem T-beli y_1, y_2 szomszédai (ld. 1.2 ábra). Tudjuk, hogy $G - xy$ nem 3-összefüggő. Ez csak úgy lehetséges, ha van két olyan csúcs, amiket G-ből elhagyva a maradékban xy elvágó él. Ezek egyike nyilván z kell legyen, a másikat z'-vel jelölve x és y így a $G' = G - \{z, z'\} - xy$ különböző komponensébe esnek. Jelölje ezeket a komponenseket G_x ill. G_y. Mivel $G - y$ 2-összefüggő, létezik két diszjunkt P_1, P_2 út $\{y_1, y_2\}$ és $\{z', z\}$ között (feltehető, hogy P_1 y_1 és z', P_2 pedig y_2 és z között vezet). x_1 és x_2 valamelyike, mondjuk x_1 különbözik z'-től. $G - x$-ben létezik két belsőleg diszjunkt Q_1, Q_2 út x_1-ből $\{z', z\}$-be. Mivel P_1 és P_2 $G_y + \{z', z\}$-ben van, Q_1 és Q_2 pedig $G_x + \{z', z\}$-ben, $P_1' = (y, y_1) + P_1 + Q_1 + Q_2$ egy út y-ból z-be. Így P_1', $P_2' = (y, y_2) + P_2$ és $P_3 = (y, x, z)$ három belsőleg diszjunkt út y és z között, így $G - yz$ 3-összefüggő (ha nem lenne az, akkor egy kételemű halmaz elválasztaná benne y-t és z-t), ami ellentmondás.



1.2. ábra.

Tehát T legalább két csúcsa, mondjuk x és y, 3-fokú. Legyen $x' \neq y, z$ az x harmadik szomszédja. Ekkor G/xx' 3-összefüggő, mert ha nem lenne az, akkor x és x' benne lenne egy minimális elvágó halmazban G-ben és x-ből vezetne él minden így keletkező komponensbe. De x-nek x'-n kívül csak y és z szomszédja, amik egymással is szomszédosak, így nem szeparálhatók. Így xx' is benne van egy háromszögben. Mivel x összes szomszédja x', y, z, a háromszög harmadik csúcsa csak y vagy z lehet. Ha y, akkor $G = K_4$ (különben $\{x', z\}$ elvágó halmaz), ami kerék gráf, ha pedig z, akkor vagy $deg(z) = 3$ és ismét $G = K_4$, vagy $deg(x') = 3$. Ekkor tekinthetjük az x' $x'' \neq x, z$ szomszédját, és az előbbieket ismételve végül azt kapjuk, hogy G egy z középpontú kerék. □

A szakaszt néhány egyszerű lemmával zárjuk.

Lemma 1.2.6 *Legyen* G *egy* k*-összefüggő gráf. Vegyünk hozzá* G*-hez egy új* v *csúcsot, és kössük össze a* G *legalább* k *eredeti csúcsával. Ekkor az így keletkező* G' *gráf is* k*-összefüggő.*

Biz. Egy legfeljebb $k-1$ elemű S csúcshalmaz G-t nem tudja elvágni, és v-t se tudja szeparálni a maradéktól. $\square$

Lemma 1.2.7 *Legyen $v \in V(G)$ és $deg(v) \geq k$. Ha G minden $x, y \neq v$ csúcspára között létezik k belsőleg diszjunkt út, akkor G k-összefüggő.*

Biz. Ha nem az, akkor létezik egy S elvágó halmaz, amire $|S| \leq k-1$. S szeparálja v-t egy másik csúcstól, legyen ez x. Mivel $deg(v) \geq k$, v-nek van egy $y \notin S$ szomszédja. Ekkor S szeparálja y-t és x-et, ami ellentmondás. $\square$

Legyen $x \in V(G)$ és $B \subseteq V(G)$. Egy k **méretű** $x-B$ **részlegyező** belsőleg diszjunkt $P_1, \ldots, P_k$ utak egy halmaza, ahol P_i x-ből y_i-be vezet ($i = 1, \ldots, k$), ahol y_i-k a B különböző elemei (most tehát nem követeljük meg, hogy B minden csúcsába vezessen út, mint azt a legyező esetében tettük).

Lemma 1.2.8 *Legyen $B \subseteq V(G)$ egy olyan csúcshalmaz, aminek bármely két $x, y \in B$ eleme között létezik G-ben k belsőleg diszjunkt út. Ha G minden más v csúcsára létezik k méretű $v-B$ legyező, akkor G k-összefüggő.*

Biz. Legyen $S \subseteq V(G)$ egy legfeljebb $k-1$ elemű csúcshalmaz és $v, w \notin S$ két csúcs. A feltevések szerint S se v-t, se w-t nem vághatja el B-től, így $G-S$-ben létezik egy P $v-x$ és egy Q $y-w$ út, ahol $x, y \in B$ (ha v vagy w eleve B-beli volt, akkor az út egy csúcsból áll). x és y között létezik k belsőleg diszjunkt út G-ben, így S nem szeparálja őket. Legyen R egy $x-y$ út $G-S$-ben. Ekkor $P+R+Q$ egy $v-w$ séta $G-S$-ben. Mivel v és w $G-S$ két tetszőleges csúcsa volt, $G-S$ összefüggő, és így G k-összefüggő. $\square$

1.3. A 3-összefüggő eset: Zehavi és Itai bizonyítása

Ebben a szakaszban, főbb vonalaiban [17]-t követve, de jelentősen egyszerűsítve az ott szereplő eredeti bizonyításon, a 3-összefüggő esettel foglalkozunk. A három s-független fa létezésénél erősebb állítást fogunk belátni. Ennek megfogalmazásához először a következő definícióra van szükségünk ($\Gamma^E(s)$ az s-sel szomszédos élek halmazát jelöli):

Definíció 1.3.1 *Legyen $s \in V(G)$ és $e_1, e_2 \in \Gamma^E(s)$. Azt mondjuk, hogy a (G, s, e_1, e_2) négyes kielégíti a kiterjesztett három fa-út tulajdonságot (röviden: E3TP), ha léteznek T_1, T_2, T_3 fák, amikre*

(E1) T_i feszítő fa G-ben ($i = 1, 2, 3$)

(E2) minden $v \in G$ esetén a $T_3[v, s]$ út belsőleg diszjunkt $T_1[v, s]$-től és $T_2[v, s]$-től.

(E3) $i = 1, 2$ esetén $E(T_i) \cap \Gamma^E(s) = \{e_i\}$

(E4) ha $e_2 = st$ akkor létezik $\prec$ $s-t$ rendezés G-ben, amire (T_1, T_2) $\prec$-rendezett.

Az 1.1.7 lemma szerint (E4)-hez elég azt ellenőrizni, hogy (T_1, T_2) $\prec$-rendezett. Mivel a $\prec$-rendezett feszítő fák s-függetlenek, (E4) szerint T_1 és T_2 s-független, (E2) pedig éppen azt mondja, hogy T_3 és T_1, ill. T_3 és T_2 s-függetlenek, így ekkor T_1, T_2, T_3 valóban s-függetlenek. Másrészt az 1.1 ábrán szerepelt rá példa, hogy s-független fák nem feltétlenül teljesítik (E4)-et, még (E3) fennállása esetén se. Az is világos, hogy ha G minden s csúcsára létezik olyan $e_1, e_2 \in \Gamma^E(s)$, hogy (G, s, e_1, e_2) E3TP (és így létezik három s-független feszítő fa), akkor G 3-összefüggő.

A célunk az lesz, hogy belássuk, hogy ennek egy erősebb megfordítása is teljesül: ha G egy 3-összefüggő gráf, akkor minden $s \in V(G)$ és minden minden $e_1, e_2 \in \Gamma^E(s)$ esetén (G, s, e_1, e_2) kielégíti E3TP-t. Ehhez vezessük még be a következő fogalmakat. (G, s, e_1, e_2) egy **ellenpélda**, ha G egy 3-összefüggő gráf, $s \in V(G)$, $e_1, e_2 \in \Gamma^E(s)$ és (G, s, e_1, e_2) nem teljesíti E3TP-t. Egy **minimális ellenpélda** (a továbbiakban: **MCE**) egy olyan ellenpélda, amire $|V(G)| + |E(G)|$ minimális. Egy G gráf MCE, ha létezik olyan s, e_1 és e_2, hogy (G, s, e_1, e_2) MCE. A feladatunk az, hogy belássuk, hogy nem létezik MCE. Ehhez az MCE-k struktúráját fogjuk megvizsgálni.

Lemma 1.3.2 *Legyen $e = sp \neq e_1, e_2$. Ha G/e 3-összefüggő, akkor (G, s, e_1, e_2) nem MCE.*

Biz. Tegyük fel, hogy (G, s, e_1, e_2) MCE. Ha $e_i = sv_i$ akkor legyen $e'_i = (\overline{sp}, v_i)$, $i = 1, 2$. A feltevés szerint G/e 3-összefüggő, és így G minimalitása miatt $(G/e, \overline{sp}, e'_1, e'_2)$ kielégíti E3TP-t. Legyenek T'_1, T'_2, T'_3 a megfelelő fák G/e-ben és legyen $\prec'$ az $\overline{sp} - v_2$ rendezés. Mivel $deg_G(p) \geq 3$, p-nek van két $p_1, p_2 \neq s$ szomszédja. Feltehető $p_1 \prec' p_2$.

A következő módon konstruálunk G-beli fákat. Legyen $T_i = T'_i - e'_i + e_i + pp_i$ $(i = 1, 2)$. Világos, hogy ekkor $T_i[p, s] = (p, p_i) + T_i[p_i, s]$. T_3-at pedig úgy kapjuk T'_3-ből, hogy hozzáadjuk az sp élt és minden $v\overline{sp}$ alakú élt kicserélünk a G-ben neki megfelelő élre (vs-re ill. vp-re).

A G-beli $\prec$ $s - t$ rendezés legyen $\prec'$ kiterjesztése úgy, hogy $p_1 \prec p \prec p_2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így kapott $T_1, T_2, T_3, \prec$ kielégítik E3TP feltételeit. □

Lemma 1.3.3 *Legyen $s \in V(G)$, $deg(s) > 3$ és $e \in \Gamma^E(s) - \{e_1, e_2\}$. Ha $H = h(G-e)$ 3-összefüggő, akkor (G, s, e_1, e_2) nem MCE.*

Biz. Tegyük fel, hogy (G, s, e_1, e_2) egy MCE. Mivel |V(H)|+|E(H)| mindenképpen kisebb, mint |V(G)|+|E(G)|, ezért H nem MCE, sőt mivel a feltevés szerint 3-összefüggő, így minden csúcsra és rá illeszkedő élpárra kielégíti E3TP-t. Legyen $e = sp$. Ha $deg_G(p) > 3$, akkor $H = G - e$, vagyis G egy részgráfjában léteznek a kívánt fák, ellentmondás.

Így $deg_G(p) = 3$. Legyen $\Gamma(p) = \{p_1, p_2, s\}$. $p \notin V(H)$, mert ellenkező esetben (ez akkor fordulhatna elő, ha $p_1p_2 \in E(G)$ lenne) $deg_H(p) = 2$ lenne, és így H nem lenne 3-összefüggő (így tehát $p_1p_2 \notin E(G)$). A fentiek szerint (H, s, e_1, e_2) kielégíti E3TP-t. Legyenek T'_1, T'_2, T'_3 a megfelelő fák és $\prec'$ az $s - t$ rendezés. Ha a $p_1p_2 \in E(T'_3)$, akkor feltehetjük, hogy $T'_3[p_1, s] = (p_1, p_2) + T'_3[p_2, s]$, és legyen $T_3 = T'_3 - p_1p_2 + p_1p + ps$ (ezzel néhány utat lerövidíthettünk), egyébként legyen $T_3 = T'_3 + ps$. Feltehető $p_1 \prec' p_2$ (mivel az 1.1.8 lemma szerint T_1 és T_2 szerepe felcserélhető, és ekkor $\prec$ lényegében megfordul). A másik két fát így definiáljuk: Ha $p_2p_1 \in E(T'_1)$, akkor $T_1 = T'_1 - p_2p_1 + p_2p + pp_1$, egyébként $T_1 = T'_1 + pp_1$. Ha $p_1p_2 \in E(T'_2)$, akkor $T_2 = T'_2 - p_1p_2 + p_1p + pp_2$, egyébként $T_2 = T'_2 + pp_2$. $\prec$ pedig legyen $\prec'$ kiterjesztése úgy, hogy $p_1 \prec p \prec p_2$. Könnyű ellenőrizni, hogy az így kapott $T_1, T_2, T_3, \prec$ kielégítik E3TP feltételeit. □

Lemma 1.3.4 *Ha (G, s, e_1, e_2) egy MCE, akkor $deg(s) = 3$.*

Biz. Legyen $e \in \Gamma^E(s) - \{e_1, e_2\}$. Az 1.2.3 tétel szerint G/e vagy $h(G-e)$ 3-összefüggő. Ha G/e 3-összefüggő, akkor az 1.3.2 lemma szerint (G, s, e_1, e_2) nem MCE. Így $h(G-e)$ 3-összefüggő. Ha $deg(s) > 3$, akkor az előző lemma szerint (G, s, e_1, e_2) nem MCE, így marad $deg(s) = 3$. □

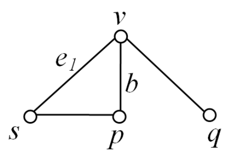
A továbbiakban tehát mindig feltehetjük, hogy $deg(s) = 3$.

Lemma 1.3.5 *Legyen $\Gamma(s) = \{s_1, s_2, s_3\}$ és tegyük fel, hogy (G, s, ss_1, ss_2) kielégíti E3TP-t. Legyenek T_1, T_2, T_3 a megfelelő fák. Ekkor minden $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ esetén s_i levél T_j-ben.*

Biz. Tegyük fel, hogy mondjuk s_1 nem levél T_2-ben. Ekkor létezik egy x csúcs, amire $T_2[x, s] = T_2[x, s_1] + T_2[s_1, s]$. Mivel $T_1[x, s] = T_1[x, s_1] + (s_1, s)$, mindkét út átmegy s_1-en, vagyis nem belsőleg diszjunktak, ami ellentmondás. □

Lemma 1.3.6 *Legyen $\Gamma(s) = \{s_1, s_2, s_3\}$, tegyük fel, hogy (G, s, ss_1, ss_2) kielégíti E3TP-t, és legyenek T_1, T_2, T_3 a megfelelő fák. Legyen $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, és tegyük fel, hogy $s_i s_j \in E(G)$. Ekkor léteznek olyan T'_1, T'_2, T'_3, a feltételeket kielégítő fák, amik esetén $T'_i[s_j, s] = (s_j, s_i, s)$ (akár egyszerre az összes i, j pár esetén is).*

Biz. Az előző lemma szerint s_j levél T_i-ben. Hagyjuk el az s_j-t T_i-hez kötő élt, és helyette vegyük hozzá T_i-hez $s_j s_i$-t. Ekkor persze feszítő fát kapunk, ami független is a többitől, mivel $T'_i[s_j, s]$ egyetlen belső csúcsa s_i, és ez a többi fában levél. Mivel s_1 a $\prec$ rendezés második legkisebb, s_2 pedig a legnagyobb eleme, a $\prec$-rendezettség sem sérülhet. □



1.3. ábra.

Lemma 1.3.7 *Legyen F az 1.3 ábrán látható gráf. Ha G-nek F részgráfja, $|V(G)| > 4$ és v-nek nincsenek további szomszédjai, akkor $e_2 \neq sp$ esetén (G, s, e_1, e_2) nem MCE.*

Megjegyzés: pq hozzátartozhat G-hez.
Biz. A $|V(G)| > 4$ feltétel miatt $\{s, p, q\}$ elvágó halmaz, az 1.3.4 lemma szerint pedig feltehető $deg(s) = 3$. Emiatt $sq \notin E(G)$, mivel s-ből, mint egy minimális elvágó halmaz eleméből, minden keletkező komponensbe kell hogy vezessen él, ami legalább két élt jelent, így $\{p, q\}$-ba csak egy marad, ami pedig sp.

Legyen $\Gamma^E_G(s) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Definíció szerint $e_1 = sv$, és mivel $e_2 \neq sp$, marad $e_3 = sp$. G minimalitása miatt $H = h(G - b)$ nem MCE. Először megmutatjuk, hogy H 3-összefüggő, majd a H-beli feszítő fákból G-belieket konstruálunk.

$\Gamma_G(s) = \{u, p, v\}$ egy elvágó halmaz G-ben. Az 1.2.1 lemma szerint $\{x, y\} \cap \{v, p\} = \emptyset$ esetén x és y között létezik 3 belsőleg diszjunkt út $G - b$-ben. Mivel $deg_{G-b}(v) = 2$ és s és q nem szomszédos, $v \notin V(H)$. Így már csak p-vel kell foglalkoznunk.

1.eset: $deg_G(p) = 3$. Ekkor p nincs H-ban, kivéve ha p harmadik szomszédja q vagy u (v elhagyása miatt H-ban s és q már szomszédos). De $pq \in E(G)$ nem lehet, mert akkor {s,q} elvágó halmaz G-ben, és $pu \in E(G)$ se, mert akkor {q,u} elvágó (mivel q-nak kell hogy legyen s, v, p, u-tól különböző szomszédja).

2.eset: $deg_H(p) \geq 3$. Ekkor az 1.2.7 lemma szerint H 3-összefüggő.

Mivel G MCE, (H, s, sq, e_2) kielégíti E3TP-t. Legyenek T_i^H $(i = 1, 2, 3)$ a megfelelő fák és $\prec^H$ az $s - u$ rendezés. Világos, hogy $s \prec^H q \prec^H w$ minden $w \in V(H) - \{s, q\}$-ra.

1.eset: $deg_G(p) = 3$. Ekkor definiáljuk úgy az $s - u$ rendezést G-n, hogy $s \prec v \prec p \prec q$, a többi csúcson pedig egyezzen meg $\prec^H$-val. Legyen $\Gamma(p) = \{s, v, p_1\}$. Ekkor $e_3^H = sp_1 \notin E(G)$. A következő fák jók lesznek G-ben:

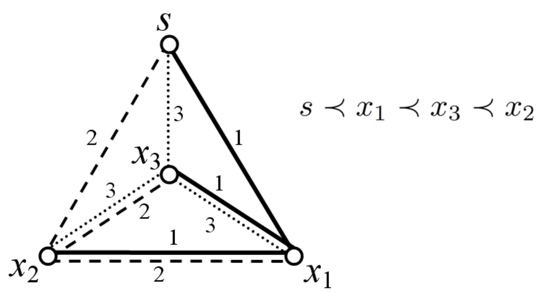
$$T_1 = T_1^H - sq + sv + vq + vp, \quad T_2 = T_2^H + qv + p_1p, \quad T_3 = T_3^H - sp_1 + sp + pp_1 + pv.$$

2.eset: $deg_G(p) > 3$. Ekkor $p \in H$, így $e_3^H = sp$. Az $s - u$ rendezés olyan legyen, hogy $s \prec v \prec q$, a többi csúcson pedig egyezzen meg $\prec^H$-val. A G-beli fák:

$$T_1 = T_1^H - sq + sv + vq, \quad T_2 = T_2^H + qv, \quad T_3 = T_3^H + pv.$$

A későbbiek kedvéért jegyezzük meg, hogy az 1.3.6 lemma szerint a T_1 fa ebben az esetben is átalakítható úgy, hogy $T_1[p, s] = (p, v, s)$ legyen. □

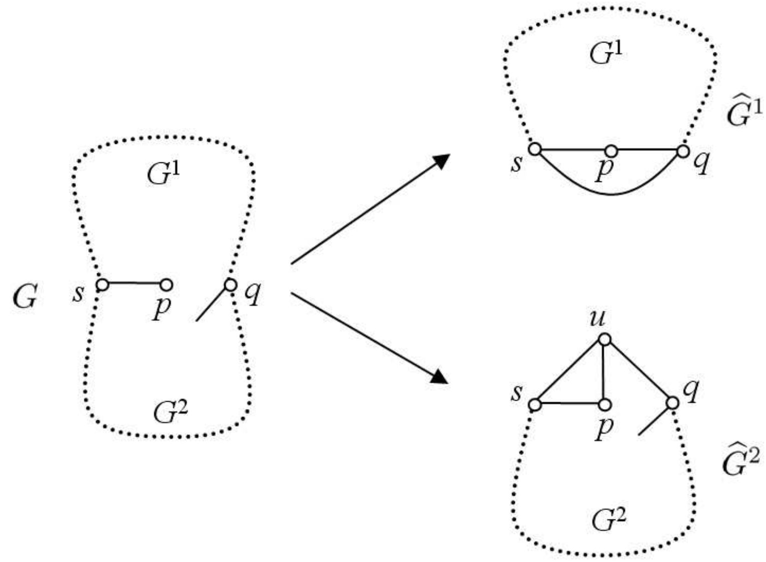
Tétel 1.3.8 (Zehavi és Itai) *Legyen G egy 3-összefüggő gráf, $s \in V(G)$ és $e_1, e_2 \in \Gamma^E(s)$. Ekkor (G, s, e_1, e_2) kielégíti E3TP-t.*



1.4. ábra.

Biz. Ahogy az 1.4 ábrán látható, ha $|V(G)| = 4$, akkor E3TP teljesül. Így feltehető $|V(G)| > 4$. Tegyük fel, hogy a tétel nem igaz, és legyen (G, s, e_1, e_2) egy MCE. Az 1.3.4 lemma szerint $deg(s) = 3$. Legyen $\Gamma^E(s) = \{e_1, e_2, e_3\}$, ahol $e_3 = sp$. Az 1.3.2 lemma szerint G/e_3 nem 3-összefüggő, így létezik egy q csúcs, amire $S = \{s, p, q\}$ elvágó halmaz G-ben. Mivel s-ből minden komponensbe vezet él, $G-S$ csak két komponensből áll. Legyenek ezek G^1 és G^2. Mivel $deg(s)=3$ és $sp \in E(G)$, $sq \notin E(G)$.

1.eset: $pq \notin E(G)$. Tekintsünk három belsőleg diszjunkt utat q és s között. Mivel $deg(s)=3$, ezek egyike használja sp-t, és így az egyik belseje teljesen G^1-ben, egy másik teljesen G^2-ben halad, és az sp kezdetű út [p,q] szakasza is valamelyik komponensbe esik, mondjuk G^2-be. Legyen $\widehat{G}^2 = G/G^1$ (G^1-et összehúzzuk egyetlen csúccsá) és $\widehat{G}^1 = G - G^2 + pq + sq$ (ld. 1.5 ábra).



1.5. ábra.

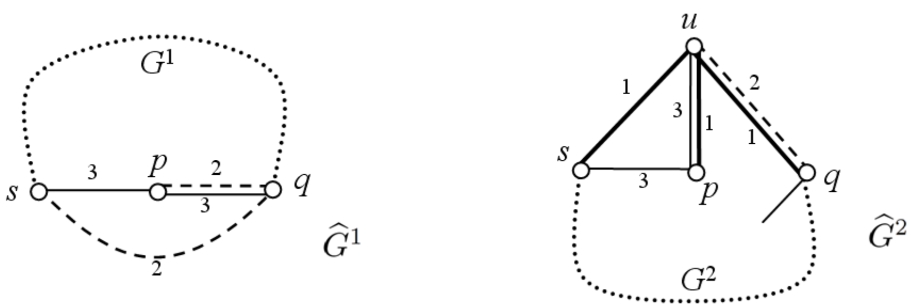
1.áll.: $\widehat{G}^1$ 3-összefüggő.

Mivel $x,y \in \{s,p,q\}$ között van legalább egy G^1-ben haladó út, $\widehat{G}^1$-ban létezik köztük három belsőleg diszjunkt út. Könnyű ellenőrizni, hogy minden $z \neq s,p,q$ esetén pedig létezik egy $x - \{s,p,q\}$ legyező. (Vegyünk G-ben három belsőleg diszjunkt utat z-ből G^2 egy pontjába, ezek S-ig tartó részei jók lesznek.) Így az 1.2.8 lemma szerint $\widehat{G}^1$ 3-összefüggő.

2.áll.: $\widehat{G}^2$ 3-összefüggő.

Ellenőrizhető, hogy minden $x,y \neq q$ csúcspár között létezik három belsőleg diszjunkt út, így az 1.2.7 lemma szerint $\widehat{G}^2$ 3-összefüggő.

Az 1.1.8 lemma szerint (G,s,e_1,e_2) pontosan akkor elégíti ki E3TP-t, ha (G,s,e_2,e_1), azaz e_1 és e_2 szerepe felcserélhető. Így feltehető, hogy $t \in G^2$ (ahol $e_2 = st$). Világos, hogy $\widehat{G}^1$ csúcsai és élei számának összege kisebb, mint $|V(G)|+|E(G)|$, így $(\widehat{G}^1, s, e_1, sq)$ kielégíti E3TP-t. $|V(G^1)|>1$, mert különben $\widehat{G}^2 = G$, ellentmondásban az 1.3.7 lemmával. Így viszont $\widehat{G}^2$ csúcsai és élei számának összege is kisebb, mint G-é, ezért $(\widehat{G}^2, s, su, e_2)$ is kielégíti E3TP-t. Legyenek T_1^1, T_2^1, T_3^1 a megfelelő fák és $\prec^1$ az $s-v$ rendezés $\widehat{G}^1$-ban, T_1^2, T_2^2, T_3^2 a fák és $\prec^2$ az $s-t$ rendezés $\widehat{G}^2$-ben. Ekkor az 1.3.6 lemma szerint feltehető, hogy a fák megfelelő részlete úgy néz ki, mint az 1.6 ábrán.

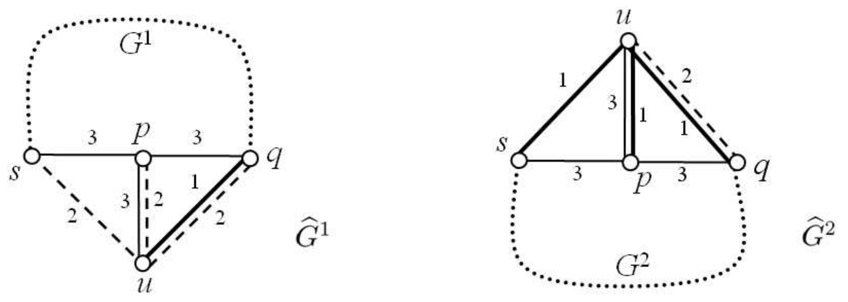


1.6. ábra.

G-ben definiáljuk úgy a T_1, T_2, T_3 fákat, hogy $T_i = T_i^1 \cup T_i^2 - u - pq - sq$ $(i = 1, 2, 3)$ (az sp élnek persze csak egy példányát vesszük T_3-ba), $\prec$ pedig $G^1 \cup S$-en egyezzen meg $\prec^1$-gyel, G^2-n $\prec^2$-vel, és ha $x \in G^1 \cup S$ és $y \in G^2$ akkor legyen $x \prec y$.

Könnyen látható, hogy T_1, T_2, T_3 valóban feszítő fák, és hogy $T_3[q, s] = T_3^2[q, s]$ és ha például $x \in G^1$, akkor $T_1[x, s] = T_1^1[x, s]$ és $T_2[x, s] = T_2^1[x, q] + T_2^2[q, s]$. Ezek alapján ellenőrizhető, hogy T_1, T_2, T_3 kielégíti E3TP-t.

2.eset: $pq \in E(G)$. Ekkor legyen $\widehat{G}^1 = G/G^2$ és $\widehat{G}^2 = G/G^1$. A bizonyítás ugyanúgy megy, mint az előző esetben. Most $i = 1, 2$ esetén q levél T_3^i-ben, mert ha nem így lenne, akkor létezne olyan $x \in G^i$, amire $T_3^i[x, s] \ni q$, de ez $q \in T_1^i[x, s]$ miatt nem lehetséges. Így a korábbihoz hasonló gondolatmenettel feltehető, hogy $qp \in E(T_3^i)$. Másrészt $q \notin \Gamma_{\widehat{G}^i}(s)$ miatt az 1.3.6 lemma szerint $pq \notin E(T_j^i)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ is feltehető. Így léteznek olyan fák, amiknek az ábrázolt részre eső élei az 1.7 ábra szerintiek. □



1.7. ábra.

1.4. Nemszeparáló fülfelbontások és a Cheriyan-Maheshwari-bizonyítás

Az alábbiakban megismerkedünk a nemszeparáló fülfelbontás fogalmával, bizonyítás nélkül kimondjuk Cheriyan és Maheshwari róluk szóló tételét, majd megnézzük, hogyan kapható ebből három független fa egy 3-összefüggő gráfban.

Legyen $G = P_0 \cup P_1 \cup \ldots P_k$ a G 2-összefüggő gráf egy fülfelbontása. Legyen $V_i = V(P_0) \cup V(P_1) \cup \cdots \cup V(P_i)$, $G_i = G[V_i]$ (a V_i által feszített részgráf) és $\overline{G}_i = G[V - V_i]$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra. Azt mondjuk, hogy $P_0 \cup P_1 \cup \ldots P_k$ egy **fülfelbontás a ts élen keresztül és az u csúcsot elkerülve**, ha a P_0 kör tartalmazza a ts élt és az utolsó egynél hosszabb fül, P_m, kettő hosszú és az egyetlen belső csúcsa u. A G gráf egy $P_0 \cup P_1 \cup \ldots P_k$ ts élen keresztüli és u-t elkerülő fülfelbontása **nemszeparáló fülfelbontás**, ha $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ esetén $\overline{G}_i$ összefüggő és P_i minden belső csúcsának van $\overline{G}_i$-beli szomszédja. Világos, hogy ekkor u-n kívül G minden csúcsának foka legalább 3. Egy út **indukált**, ha nincs él két az úton nem egymásra következő csúcs között, kivéve esetleg a két végpont között. Egy kör indukált, ha nincs húrja.

Állítás 1.4.1 *Legyen G egy 3-összefüggő gráf. Ekkor létezik G-nek egy $G = P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_k$ nemszeparáló fülfelbontása valamely ts élen keresztül és valamely u csúcsot elkerülve, amire az is teljesül, hogy minden kettőnél hosszabb fül vagy egy indukált út vagy egy indukált kör.*

Biz. Az indukált út illetve kör feltétellel nem kell foglalkoznunk: ha már adott egy nemszeparáló fülfelbontás, és egy e él húr egy $P_l = (v_1, \ldots, v_N)$ fül v_i és v_j csúcsa között, akkor P_l-t a $P_l^1 = (v_1, \ldots, v_i, v_j, \ldots, v_N)$ és $P_l^2 = v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ fülekre szétbontva a felbontás nemszeparáló marad és a húrok száma eggyel csökken.

$|E(G)|$ szerinti indukciót használunk. Az 1.2.5 tétel szerint egy 3-összefüggő gráf vagy kerék gráf, vagy tartalmaz egy élt, amit elhagyva 3-összefüggő marad, vagy tartalmaz egy élt, ami nincs benne háromszögben és az összehúzásával megmarad a 3-összefüggőség. Ha $G = W_n$ kerék gráf, és $V(G) = \{r, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ ahol r a középpont és $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1)$ a többi csúcsot összekötő kör, akkor $ts = v_1v_2$, $u = r$, $P_0 = C$, $P_1 = (v_1, r, v_2)$, $P_i = (v_{i+1}, r)$ $(i = 2, \ldots, n-2)$ jó lesz.

Ha G tartalmaz egy e elhagyható élt, akkor az indukciós feltevés szerint $G - e$-nek létezik egy $P_0 \cup \cdots \cup P_k$ nemszeparáló fülfelbontása. Ekkor $P_{k+1} = e$ jelöléssel $P_0 \cup \cdots \cup P_k \cup P_{k+1}$ jó lesz G-ben.

Ha G egy $e = xy$ összehúzható élt tartalmaz, akkor az indukciós feltevés szerint G/e-ben van egy $P_0 \cup \cdots \cup P_k$ nemszeparáló fülfelbontás. Jelölje $\overline{xy}$ az e él összehúzásakor keletkező új csúcsot. Először tegyük fel, hogy $\overline{xy} \neq u$. Legyen $P_l = (v_1, \ldots, v_i, \overline{xy}, v_{i+1}, \ldots, v_N)$ az a fül, aminek $\overline{xy}$ belső csúcsa. Ha x-ből és y-ból is vezet él $\overline{G}_l$-be, akkor $P_l' = (v_1, \ldots, v_i, x, y, v_{i+1}, \ldots, v_N)$ jó lesz G-ben. Ha az egyikből, mondjuk x-ből nem (ekkor y-ból igen, hiszen $\overline{xy}$-ból vezet), akkor, mivel $deg_G(x) \geq 3$, létezik egy $w \in G_{l-1}$, amire $xw \in E(G)$. Ekkor P_l-t $P_l^1 = (v_1, \ldots, v_i, x, w)$ és $P_l^2 = (x, y, v_{i+1}, \ldots, v_N)$ részekre bontva kapunk jó fülfelbontást G-ben. Ha $\overline{xy} = u$, akkor $V(G) - V(G_m) = \emptyset$ miatt x-ből ismét vezet él egy G_{m-1}-beli csúcsba, és az előbbi konstrukció működik: P_m^2 automatikusan 2 hosszú, és így a felbontás elkerüli y-t. $\square$

Valójában ennél sokkal több is igaz:

Tétel 1.4.2 (Cheriyan és Maheshwari, [1]) *Legyen G egy 3-összefüggő gráf, ts a G egy tetszőleges éle és u egy tetszőleges csúcsa ($u \neq t, s$). Ekkor létezik G-nek ts-en keresztüli és u-t elkerülő nemszeparáló fülfelbontása.*

A megfordítás persze nem igaz, hiszen u foka akár 2 is lehet. Az alábbi viszont már érvényes:

Tétel 1.4.3 ([1]) *Tegyük fel, hogy a G gráfnak létezik egy nemszeparáló fülfelbontása ts-en keresztül és u-t elkerülve. Ha $us \in E(G)$, $deg(u) \geq 3$ és $deg(s) = 3$, akkor G 3-összefüggő.*

A fenti tételek bizonyításán túl [1] egy $O(|V(G)| * |E(G)|)$ futásidejű algoritmust is adott tetszőleges élen átmenő és tetszőleges csúcsot elkerülő nemszeparáló fülfelbontás megkeresésére. Ezekkel itt nem foglalkozunk, helyette ugyanezen cikk nyomán rátérünk arra, hogy egy nemszeparáló fülfelbontásból hogyan kaphatók független fák.

Legyen adott egy G 2-összefüggő gráf egy $P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_k$ fülfelbontása, és legyen st a P_0 kör egy éle. A G egy $s - t$ számozása **konzisztens a fülfelbontással**, ha minden $P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_i$, $i = 1, \ldots, k$ részgráfban az indukált számozás $s - t$ számozás a részgráfban (amikor az $s - t$ számozás létezését bizonyítottuk, eleve ilyet konstruáltunk). Legyen $P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_k$ a G gráf egy nemszeparáló fülfelbontása a ts élen keresztül és u-t elkerülve, ahol u az s szomszédja és $deg(u) \geq 3$. Feltehetjük, hogy az u-n átmenő P_m fülnek s nem végpontja (mivel u-nak legalább három szomszédja van, és ezek közül bármelyik kettőre kicserélhetjük P_m végpontjait). Legyen $g : V \to \{1, \ldots, N\}$ a G egy a fülfelbontással konzisztens $s - t$ számozása, és legyen $p(v)$ annak a fülnek az indexe, aminek v belső csúcsa. Ekkor a $(p(v), g(v))$ pár egyfajta kiterjesztett $s - t$ számozásnak tekinthető, ugyanis világos, hogy minden $v \in V(G) - \{s, t, u\}$ csúcsnak létezik három szomszédja, w, x és y, amikre a következők teljesülnek:

(i) $p(v) < p(w)$,

(ii) $p(v) \geq p(x)$ és $g(v) > g(x)$, és

(iii) $p(v) \geq p(y)$ és $g(v) < g(y)$.

Ennek segítségével a következő módon konstruálhatunk három s-független T_1, T_2, T_3 feszítő fát. A 2-összefüggő esethez hasonlóan most is azt adjuk meg, hogy egy tetszőleges $v \in V - s$ csúcsnak mi a szülője az egyes fákban. Legyen z a t másik szomszédja a P_0 körön. T_1-ben legyen u őse s, minden más $v \in V - \{s, u\}$ csúcs őse pedig a v egy olyan w szomszédja, amire $p(v) < p(w)$. T_2-ben legyen t őse z, a többi $v \in V - \{s, t\}$ csúcs őse pedig a v egy olyan x szomszédja, amire $p(v) \geq p(x)$ és $g(v) > g(x)$. T_3-ban t őse s, tetszőleges $v \in V - \{s, t\}$ csúcsé pedig a v egy olyan y szomszédja, amire $p(v) \geq p(y)$ és $g(v) < g(y)$. Tekintsünk egy tetszőleges v csúcsot, és legyen $p(v) = i$. A v-ből a gyökérbe vezető T_1-beli út minden belső pontja $\overline{G}_i$-beli, míg a T_2 és T_3-beli belső pontjai G_i-beliek, így T_1 független T_2-től és T_3-tól. T_2 és T_3 függetlensége pedig az $s - t$ számozásból adódik.

Világos, hogy a fenti módon algoritmikusan, lineáris időben megkapható a három független feszítő fa, ha adott egy nemszeparáló fülfelbontás. Mivel $n = |V(G)|$ és $m = |E(G)|$ jelöléssel a nemszeparáló fülfelbontásra $O(nm)$ idejű algoritmus ismert, ebből elsőre $O(nm)$ adódik a három független feszítő fára is. Mader egy tétele szerint azonban minden 3-összefüggő gráfnak létezik $O(n)$ élű 3-összefüggő feszítő részgráfja, és [1] megadott egy lineáris algoritmust is ennek megtalálására. Így ha először megkeresünk egy ilyen részgráfot, töröljük a felesleges éleket, és a maradékra alkalmazzuk a nemszeparáló fülfelbontást konstruáló algoritmust, akkor végeredményben $O(n^2)$ időben meg tudunk találni 3 független feszítő fát egy tetszőleges 3-összefüggő gráfban.

1.5. Élfüggetlenség visszavezetése függetlenségre

Tétel 1.5.1 (Khuller és Schieber) *Legyen $k \geq 1$ tetszőleges. Ha minden k-összefüggő gráfban létezik k s'-független feszítő fa a gráf tetszőleges s' csúcsára, akkor minden k-élösszefüggő gráfban létezik k s-élfüggetlen feszítő fa a gráf tetszőleges s csúcsára.*

Biz. A bizonyítás menete a következő lesz. Tetszőleges G gráfhoz konstruálunk egy G' gráfot, ami pontosan akkor k-összefüggő, ha az eredeti gráf k-élösszefüggő. Ezután pedig megmutatjuk, hogy G tetszőleges s csúcsa esetén hogyan kaphatunk k s-élfüggetlen feszítő fát G-ben, ha adott k s'-független feszítő fa G'-ben egy megfelelő s' csúcsra. A tétel állítása ezekből már adódik.

G' legyen a következő módon definiálva. A G minden v csúcsának a G' k csúcsa felel meg, ezeket $v^1, \ldots, v^k$-val jelöljük. A G' ilyen típusú csúcsait V-csúcsoknak fogjuk nevezni. Ezenkívül a G minden e élének is megfelel a G' egy csúcsa, amit $l(e)$ jelöl. Az ilyen csúcsokat a G' E-csúcsainak hívjuk. G'-ben él csak V-csúcsok és E-csúcsok között vezet, és egy v^i V-csúcsot pontosan akkor kötünk össze egy $l(e)$ E-csúccsal, ha G-ben v az e egyik végpontja. (Vagyis G'-ben teljes páros gráfot kapunk a G egy v csúcsának megfelelő k V-csúcs és a v-ből kiinduló éleknek megfelelő E-csúcsok között.)

Lemma 1.5.2 *G' akkor és csak akkor k-összefüggő, ha G k-élösszefüggő.*

Biz. $\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy G' nem k-összefüggő, vagyis van benne $k-1$ elemű S elvágó csúcshalmaz. Vegyük észre, hogy ekkor minden, az S elhagyásával keletkező komponens tartalmaz V-csúcsot. Ez azért igaz, mert G'-ben minden E-csúcsnak legalább k V-csúcs szomszédja, így ha egy komponens tartalmaz E-csúcsot, akkor V-csúcsot is, mert az E-csúcs legalább egy szomszédját nem hagytuk el. A G azonos v csúcsához tartozó v^i és v^j V-csúcsok mindenképpen azonos komponensben vannak, mivel G-ben minden csúcs foka legalább k, és így marad egy közös szomszédjuk S elhagyása után is. Tegyük fel, hogy u^i és v^j különböző komponensbe kerül. Tekintsük G-nek azt a H részgráfját, amit az S E-csúcsainak megfelelő élek elhagyásával kapunk. A feltevés szerint H összefüggő, így tartalmaz egy P utat u és v között. Mivel $|S| < k$, a P által érintett összes w csúcshoz találhatunk egy neki megfelelő $w^{f(w)}$ V-csúcsot G'-ben, ami nem S-beli, a P-ben szereplő élekről pedig tudjuk, hogy a nekik megfelelő E-csúcsok nem S-beliek. Így a P csúcsainak és éleinek megfeleltethetünk egy csúcssorozatot $G' - S$-ben, amik egy u^i-ből v^j-be vezető utat határoznak meg, ami ellentmondás.

$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy G nem k-élösszefüggő, vagyis van benne egy $k-1$ elemű S elvágó élhalmaz. Tegyük fel, hogy u és v különböző komponensben van S elhagyása után. Tekintsük G'-nek azt a részgráfját, ami az S-nek megfelelő E-csúcsok elhagyásával keletkezik. Ez a feltevés szerint összefüggő, és így tartalmaz egy P' utat u^1 és v^1 között. Mivel G' egy páros gráf, aminek egyik osztályát a V-csúcsok, a másikat az E-csúcsok adják, P' váltakozva tartalmaz V- ill. E-csúcsokat. A P'-ben szereplő E-csúcsoknak megfelelő G-beli élek nincsenek S-ben, így a P'-ben egymást követő V-csúcsoknak megfelelő G-beli csúcsok vagy megegyeznek vagy szomszédosak $G-S$-ben. Ez azt jelenti, hogy a P' V-csúcsainak megfelelő G-beli csúcsok sorozata egy u-ból v-be vezető sétát ad $G-S$-ben, ami ellentmondás.

Lemma 1.5.3 *Ha adott G'-ben k s^1-független feszítő fa, akkor meg tudunk adni G-ben k s-élfüggetlen feszítő fát.*

Biz. Legyenek $T'_1, T'_2, \ldots, T'_k$ s^1-független feszítő fák G'-ben. A $T_1, \ldots, T_k$ G-beli feszítő fákat úgy adjuk meg, hogy megmondjuk, tetszőleges s-től különböző V csúcsnak mi a szülője az egyes fákban. Tetszőleges $j = 1, \ldots, k$-ra legyen $v^{f(j)}$ az utolsó csúcs a $T'_j[v^1, s^1]$ úton, ami G'-ben v-nek felel meg. Legyen $(v^{f(j)}, l(e_j))$ az ezen az úton $v^{f(j)}$-ből kilépő él és legyen $e_j = (v, u)$ (G-ben). Ekkor v szülője T_j-ben legyen u.

G tetszőleges v csúcsa esetén az így meghatározott fákban kapott $T_1[v, s], \ldots, T_k[v, s]$ utak tulajdonképpen a $T'_1[v^1, s^1], \ldots, T'_k[v^1, s^1]$ utakból adódó G-beli séták úttá való rövidítései. Ezek az utak már nem feltétlenül lesznek pontdiszjunktak, mert az eredetiek átmehettek ugyanannak a G-beli csúcsnak megfelelő különböző V-csúcsokon, amiket G-ben azonosítunk. Az éldiszjunktság viszont fennmarad: ha két G-beli útnak lenne közös éle, az a G'-beli utakban egy közös E-csúcsot jelentene, ami ellentmondás. Így $T_1, \ldots, T_k$ valóban s-élfüggetlenek. $\square$

Mivel $k \leq 4$ esetén tudjuk, hogy teljesül a független feszítő fákra vonatkozó sejtés, ezért a fenti tétel szerint ugyanezen k-kra az élfüggetlen sejtés is teljesül. Bár a tétel azt mondja, hogy az élfüggetlen eset a „könnyebb", arra mégse ismert egyszerűbb bizonyítás: már Itai és Rodeh ismertetett másféle bizonyítása a $k = 2$ esetre is felhasználta a pontfüggetlen verziót. $k > 4$-re pedig ez a sejtés is nyitott.

2. fejezet

Független fák irányított gráfokban

2.1. A 2-összefüggő eset

A sejtés irányított gráfokra vonatkozó csúcs-változata helytállónak bizonyult, először Whitty igazolta. Az alábbiakban a Huck és Frank András nevéhez fűződő egyszerűbb bizonyítást ([6]) ismertetjük, ami a sejtés független S-rendszerekre vonatkozó verzióját látja be.

A következő lemma egyszerűen adódik a Menger-tételből:

Lemma 2.1.1 *Legyen G egy irányított vagy irányítatlan gráf, $x \in V(G)$ és $S \subseteq V(G)$. G akkor és csak akkor S-linkelt, ha minden olyan $V(G) = X_1 \cup^* U \cup^* X_2$, $\delta(X_1, X_2) = 0$ vágásra, amire $x \in X_1$ és $X_1 \cap S = \emptyset$ teljesül, $|U| \geq |S|$.* $\square$

($\delta(X_1, X_2)$ az X_1-ből X_2-be vezető élek számát jelöli.)

Lemma 2.1.2 *Legyen G egy irányított gráf, $S = \{s_1, s_2\} \subseteq V(G)$, $V - S \neq \emptyset$. Ha G S-linkelt, akkor létezik egy $u \in \Gamma^-(s_2) - S$, amire $G' = G/us_2$ S-linkelt (G'-ben az u és s_2 csúcsok összehúzásából kapott új csúcsot ismét s_2-vel jelölve).*

Biz. Mivel G S-linkelt, könnyen találhatunk egy T feszítő s_1-fenyőt $G - s_2$-ben. Minden $x \in V - S$ esetén jelölje $f(x)$ $T[x, s_1]$ éleinek számát. Mivel $V - S \neq \emptyset$ és G S-linkelt, $\Gamma^-_G(s_2) - S \neq \emptyset$. Legyen $u \in \Gamma^-_G(s_2) - S$ olyan, hogy $f(u)$ a lehető legnagyobb.

Tegyük fel, hogy G' nem S-linkelt. Ekkor az előző lemma szerint létezik egy $x \in V(G') - S$ csúcs és (X_1, U', X_2) vágás G'-ben, amire $x \in X_1$, $X_1 \cap S = \emptyset$ és $|U'| < 2$. Mivel G S-linkelt, U' G-beli U megfelelője legalább kételemű, ami csak úgy lehet, ha $U = \{s_2, u\}$. Ezek szerint $s_1 \in X_2$. Tekintsünk egy (P_1, P_2) $x - S$ legyezőt G-ben. Ekkor P_2 tartalmaz egy $v \in \Gamma^-_G(s_2) \cap X_1$ csúcsot ($u \notin P_2$ mert u-t P_1 kell hogy használja). Világos, hogy $u \in V(T[v, s_1]) - v$, és így $f(v) > f(u)$, ami ellentmondás. $\square$

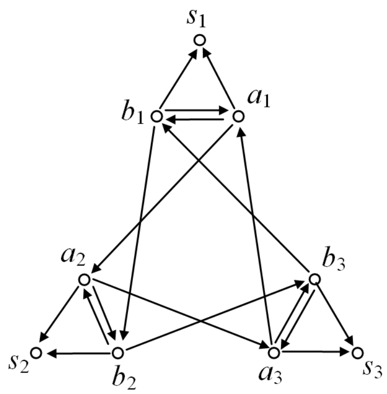
Tétel 2.1.3 (Whitty) *Legyen G egy irányított gráf és $S = \{s_1, s_2\} \subseteq V(G)$. Ha G S-linkelt, akkor létezik független S-rendszer G-ben.*

Biz. $|V(G)|$ szerinti indukciót használunk. Nyilván feltehető $V - S \neq \emptyset$. Az előbbi lemma szerint létezik $u \in \Gamma^-(s_2)$, amire $G' = G/us_2$ S-linkelt (most is s_2-nek tekintjük a G'-ben az összehúzásból kapott csúcsot). Az indukciós feltevés szerint létezik (T_1', T_2') független S-rendszer G'-ben. Mivel G S-linkelt, létezik $u - s_1$ út $G - s_2$-ben, és így létezik $x \in \Gamma^+(u, G) - s_2$. Legyen $T_1 = T_1' + ux$ és $T_2 = T_2' + us_2$. Könnyen látható, hogy (T_1, T_2) független S-rendszer G-ben. $\square$

2.2. Huck ellenpéldája a $k \geq 3$ esetre

Tétel 2.2.1 (Huck) *Minden $k \geq 3$ esetén létezik olyan k-összefüggő G irányított gráf és $s \in V(G)$, hogy nem létezik G-ben k s-független feszítő fa.*

Biz. A sejtés független S-rendszerekre vonatkozó verziójára fogunk ellenpéldát mutatni, először $k = 3$-ra. Legyen G a 2.2 ábrán látható gráf és $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy minden $x \in V(G) - S$ esetén létezik $x - S$ legyező G-ben, és $\delta(x) = 3$.

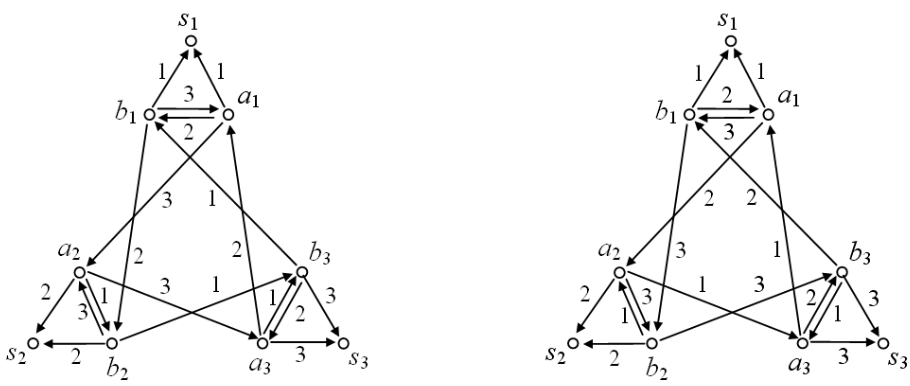


2.1. ábra.

Megmutatjuk, hogy G-ben nincs független S-rendszer. Tegyük fel, hogy (T_1, T_2, T_3) egy független $\{s_1, s_2, s_3\}$-rendszer G-ben. Ha $x \in V(G) - S$, akkor minden T_i tartalmaz egy x-ből kilépő élt. Mivel x kifoka 3 és T_i-k éldiszjunktak, ez azt jelenti, hogy G minden éle pontosan egy T_i-hez tartozik. Ezért nyilván $a_is_i, b_is_i \in E(T_i)$, $i = 1, 2, 3$.

1. eset: $a_1b_1 \in E(T_2)$. Ekkor persze $a_1a_2 \in E(T_3)$. b_1a_1 nem lehet T_1-ben, mert akkor $\delta_{T_1}(b_1) > 1$ lenne, és T_2-ben se, mert akkor ott kör keletkezne, így T_3-ban van. Ebből adódik $b_1b_2 \in E(T_2)$. $T_3[a_1, s_3]$ az a_1a_2 él után nem folytatódhat az a_2b_2 éllel, mert akkor b_2-ben keresztezné a $T_2[a_1, s_2]$ utat, így $a_2a_3 \in E(T_3)$ és $a_2b_2 \in E(T_1)$. Ebből persze $b_2a_2 \in E(T_3)$ és így $b_2b_3 \in E(T_1)$. Mivel $T_3[a_2s_3] \ni a_3$, $T_1[a_2s_1]$ b_3 után nem léphet a_3-ba, így $b_3b_1 \in E(T_1)$, $b_3a_3 \in E(T_2)$, $a_3b_3 \in E(T_1)$ és végül $a_3a_1 \in E(T_2)$. Ezzel a 2.2 ábrán látható eredményre jutottunk, amit ellentmondás, mert $b_1 \in V(T_1[b_3, s_1]) \cap V(T_2[b_3, s_2])$.

2. eset: $a_1b_1 \in E(T_3)$. Az előzőhöz hasonlóan, először az a_1-ből, aztán b_2-ből az egyes fákban a gyökérbe vezető utat vizsgálva, a 2.2 ábrán látható eredményre jutunk. Ez pedig ismét



1. eset 2. eset

2.2. ábra.

ellentmondás, mert $a_1 \in V(T_1[a_3, s_1]) \cap V(T_2[a_3, s_2])$.

Most rátérünk a $k > 3$ esetre. Ekkor vegyünk hozzá $k - 3$ új csúcsot az eddigi G gráfhoz. Legyenek ezek $s_4, \dots, s_k$ és legyen $S' = S \cup \{s_4, \dots, s_k\}$. Minden $x \in V(G) - S$ és $i \in \{4, \dots, k\}$ esetén húzzuk be az xs_i élt. Legyen az így kapott gráf G'. Világos, hogy minden $x \in V(G') - S' = V(G) - S$ csúcsra létezik $x - S'$ legyező G'-ben.

Tegyük fel, hogy G' tartalmaz egy $(T_1, \dots, T_k)$ független S'-rendszert. Ekkor (T_1, T_2, T_3) egy független S-rendszer G-ben, ami ellentmondás. □

2.3. Aciklikus multigráfok

Miután az előző szakaszban beláttuk, hogy a sejtés irányított csúcs-változata általános gráfokra nem teljesül, természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy milyen további feltételek garantálhatják a független feszítő fák létezését. Meg fogjuk mutatni, hogy az aciklikusság egy ilyen feltétel. Ahhoz azonban, hogy az így kapott tétel értelmes legyen, egyrészt csak a sejtés gyökeres összefüggőségről szóló verzióját használhatjuk, másrészt meg kell engednünk a többszörös éleket is, vagyis multigráfokat kell tekintenünk. Ha ugyanis egy G irányított gráf egyszerű és aciklikus, és s a G egy tetszőleges csúcsa, akkor $G - s$-ben egy t nyelőpontot véve, t-ből legfeljebb egy út (a ts él, ha az G-beli) vezethet s-be, és így csak $k = 1$ lehetne, amikor viszont az állítás triviális. Ha azonban többszörös éleket is megengedünk, akkor tetszőleges k-ra léteznek nemtriviális s-re nézve gyökeresen k-összefüggő aciklikus irányított multigráfok. A következő tételt fogjuk tehát bizonyítani:

Tétel 2.3.1 (Huck, [11]) *Legyen D egy aciklikus, s-re nézve gyökeresen k-összefüggő irányított multigráf ($s \in V(D)$). Ekkor létezik k s-független feszítő fenyő D-ben.*

Ehhez elegendő lesz belátnunk az alábbit:

Tétel 2.3.2 *Legyen D egy egyszerű aciklikus irányított gráf és $s_1, \dots, s_k \in V(D)$ páronként különböző csúcsok. Ha minden $x \in V(D) - \{s_1, \dots, s_k\}$ esetén $\delta(x) \geq n$, akkor létezik D-ben független*

$\{s_1,\ldots,s_k\}$-rendszer.

Lemma 2.3.3 *A 2.3.2 tételből következik a 2.3.1 tétel.*

Biz. Legyen D egy aciklikus, s-re nézve gyökeresen k-összefüggő irányított multigráf. Vegyük észre, hogy független fák csak akkor használhatnak egymással párhuzamos éleket, ha ezek az élek s-ben végződnek (az élek töve még ekkor is csak legfeljebb egy fában nem levél), így feltehető, hogy $G-s$ egyszerű. Legyen D' az az irányított gráf, amit úgy kapunk, hogy $D-s$-hez hozzávesszük az új $s_1,\ldots,s_k$ csúcsokat és egy xs_i élt minden $x\in V(D)-s$ és $i\in\{1,2,\ldots,\min(k,\delta_D(x,s))\}$ esetén. Világos, hogy D' egyszerű és aciklikus, továbbá, mivel D s-re nézve gyökeresen k-összefüggő, $\delta_{D'}(x)\geq k$ minden $x\in V(D)-s$-re. Így a 2.3.2 tétel szerint létezik D'-ben egy független $\{s_1,\ldots,s_k\}$-rendszer. $\{s_1,\ldots,s_k\}$-t egyetlen s ponttá összehúzva ebből k s-független feszítő fenyőt kapunk D-ben. □

A D aciklikus irányított gráf csúcsainak egy **topologikus sorrend**je a $V(D)$ egy olyan $x_1,\ldots,x_n$ számozása, hogy ha $\delta(x_i,x_j)>0$, akkor $i>j$ (azaz minden él „visszafelé” vezet). Ismert és könnyen látható, hogy ilyen számozás mindig létezik (legyen x_1 egy nyelő D-ben, x_2 nyelő $D-x_1$-ben, stb.). Legyen D egy irányított gráf és $s_1,\ldots,s_k$ a D különböző csúcsai. A továbbiakban azt mondjuk, hogy D **$\{s_1,\ldots,s_k\}$-megengedhető**, ha kielégíti a 2.3.2 tétel feltételeit, vagyis egyszerű, aciklikus és minden $x\in V(D)-\{s_1,\ldots,s_k\}$ esetén $\delta(x)\geq k$.

Lemma 2.3.4 *Legyen D egy $\{s_1,\ldots,s_k\}$-megengedhető irányított gráf. Ekkor létezik egy B feszítő s_k-fenyő $D-\{s_1,\ldots,s_{k-1}\}$-ben és a $B-s_k$ egy $\{x_1,\ldots,x_l\}$ topologikus sorrendje úgy, hogy $D-E(B)-s_k$ $\{s_1,\ldots,s_{k-1}\}$-megengedhető és $\{x_l,x_{l-1},\ldots,x_1\}$ a $D-E(B)-\{s_1,\ldots,s_k\}$ egy topologikus sorrendje.*

Biz. $|V(D)|$ szerinti indukció használunk. Feltehetjük, hogy $V(D)-\{s_1,\ldots,s_k\}\neq\emptyset$. Legyen y egy forrás $D-\{s_1,\ldots,s_k\}$-ban. Ekkor világos, hogy $D^*=D-y$ is $\{s_1,\ldots,s_k\}$-megengedhető. Így az indukciós feltevés szerint létezik egy B^* feszítő s_k-fenyő $D^*-\{s_1,\ldots,s_{k-1}\}$-ben és egy $\{x_1,\ldots,x_{l-1}\}$ topologikus sorrend B^*-s_k-ban úgy, hogy $D^*-E(B^*)-s_k$ $\{s_1,\ldots,s_{k-1}\}$-megengedhető és $\{x_{l-1},\ldots,x_1\}$ a $D^*-E(B^*)-\{s_1,\ldots,s_k\}$ egy topologikus sorrendje. Legyen $x_0:=s_k$ és $j\in\{0,\ldots,l-1\}$ a legkisebb olyan index, amire $\delta_D(y,x_j)>0$ (ilyen létezik, mert $\delta_D(y)\geq k$). Legyen $B:=B^*+yx_j$. Ekkor B egy feszítő s_k-fenyő $D-\{s_1,\ldots,s_{k-1}\}$-ben. Továbbá, a konstrukció szerint, $\{x_1,\ldots,x_j,y,x_{j+1},\ldots,x_{l-1}\}$ a $B-s_k$ egy topologikus sorrendje, és $\{x_{l-1},\ldots,x_{j+1},y,x_j,\ldots,x_1\}$ pedig a $D-E(B)-\{s_1,\ldots,s_k\}$ egy topologikus sorrendje. Így már csak azt kell belátnunk, hogy $D-E(B)-s_k$ $\{s_1,\ldots,s_{k-1}\}$-megengedhető. Ehhez csak az kell, hogy $\delta_{D-E(B)-s_k}(y)\geq k-1$. Ez pedig teljesül, mert $\delta_D(y)\geq k$, $\delta_B(y)=1$, és ha $\delta_D(y,s_k)>0$ (vagyis 1, mert D most egyszerű), akkor az y-t B-hez kötő él ys_k. □

A 2.3.2 tétel bizonyítása: Legyen D egy $\{s_1,\ldots,s_k\}$-megengedhető irányított gráf. k szerinti indukcióval bizonyítunk. Feltehető $k\geq 1$. Az előző lemma szerint létezik egy B_k feszítő s_k-fenyő

$D - \{s_1, \ldots, s_{k-1}\}$-ben és $B_k - s_k$ egy $\{x_1, \ldots, x_l\}$ topologikus sorrendje, amikre teljesülnek az ott előírt tulajdonságok. Az indukciós feltevés szerint pedig létezik egy $\{B_1, \ldots, B_{k-1}\}$ független $\{s_1, \ldots, s_{k-1}\}$-rendszer $D - E(B_k) - s_k$-ban. Legyen $j \in \{1, \ldots, l\}$. Ekkor a konstrukció szerint $V(B_k[x_j, s_k]) \subseteq \{s_k, x_1, \ldots, x_j\}$ és $V(B_i[x_j, s_i]) \subseteq \{s_i, x_l, \ldots, x_j\}$ minden $i = 1, \ldots, k-1$ esetén. Így $\{B_i[x_j, s_i]\}_{i=1}^n$ egy $\{s_1, \ldots, s_k\}$-legyező, azaz $B_1, \ldots, B_k$ egy független $\{s_1, \ldots, s_k\}$-rendszer D-ben. $\square$

Befejezésül bizonyítás nélkül megemlítünk még két másik tételt, amik szintén elégséges feltételt adnak független fenyők létezésére irányított gráfokban.

Tétel 2.3.5 (Huck, [10]) *Legyen D egy s-re nézve gyökeresen k-összefüggő írányított síkmultigráf, ahol $s \in V(G)$ és $k \in \{1,2\} \cup \{6,7,8,\ldots\}$. Ekkor D-ben létezik k s-független feszítő fenyő.*

Ez a tétel tehát azt a többletet adja, hogy $k \geq 6$ esetén síkmultigráfokra megszorítva igaz a sejtés. A $k = 3,4,5$ eset még egyszerű síkgráfokra is nyitott.

Ha D egy irányított gráf, akkor jelöljük $L(D)$-vel a D élgráfját, ami a következő módon van definiálva: $V(L(D)) = A(D)$ és $A(L(D)) = \{(uv, vw) : uv, vw \in A(D)\}$.

Tétel 2.3.6 (Hasunuma és Nagamochi, [5]) *Legyen $L(D)$ egy irányított élgráf és s az $L(D)$ egy csúcsa. Ha $L(D)$ s-re nézve gyökeresen k-összefüggő, akkor $L(D)$ tartalmaz k s-független feszítő fenyőt.*

3. fejezet

Teljesen független fák

3.1. Bevezetés

A teljesen független feszítő fák eddigiekkel rokon fogalmát Toru Hasunuma vezette be [3]. Olyan feszítő fákat értünk ezalatt, amik minden s csúcsra nézve s-függetlenek, vagyis a gyökér megváltoztatásakor nem kell új fákat konstruálnunk a gráfban. Másképp megfogalmazva:

Definíció 3.1.1 *Legyenek $T_1, \ldots, T_k$ feszítő fák a G gráfban. $T_1, \ldots, T_k$ teljesen függetlenek, ha minden $u, v \in V(G)$ esetén az u és v között $T_1, \ldots, T_k$-ban adódó utak belsőleg diszjunktak.*

Így már világos, hogy a korábbiak analógiájára megfogalmazható „teljes élfüggetlenség” egyszerűen éldiszjunktságot jelent. Másrészt ebből az is látható, hogy - ellentétben a független fákkal - a teljesen független fák mindig éldiszjunktak. Éldiszjunkt fákról a következő klasszikus tétel ismert:

Tétel 3.1.2 (Tutte) *Egy G irányítatlan gráfban akkor és csak akkor létezik k éldiszjunkt feszítő fa, ha $V(G)$ minden $\mathcal{F} := \{V_1, \ldots V_t\}$ partíciójára fennáll, hogy*

$$e(\mathcal{F}) \geq k(t-1),$$

ahol $e(\mathcal{F})$ a részek között vezető élek számát jelöli (azaz $e(\mathcal{F}) = \sum_i deg(V_i)/2$).

Ebből könnyen ellenőrizhető, hogy minden $2k$-élösszefüggő gráf tartalmaz k éldiszjunkt feszítő fát. Pontosabban számolva az alábbi szorosabb kapcsolatot kapjuk élösszefüggőség és éldiszjunkt feszítő fák létezése között:

Tétel 3.1.3 *Egy G gráf akkor és csak akkor $2k$-élösszefüggő, ha tetszőleges k élét elhagyva a maradékban létezik k éldiszjunkt feszítő fa.*

Biz. ($\Rightarrow$) Legyen $e(\mathcal{F}) = \{V_1, \ldots V_t\}$ $V(G)$ egy tetszőleges partíciója. Mivel G $2k$-élösszefüggő, ezért $d(V_i) \geq 2k$ $\forall i$, amiből $e(\mathcal{F}) \geq kt$. G-ből tetszőleges k élt elhagyva, a jobb oldalon még mindig marad $k(t-1)$, így Tutte tétele szerint létezik k éldiszjunkt feszítő fa.

(⇐) Tegyük fel, hogy a gráfban létezik olyan vágás, ami legfeljebb $2k-1$ élt tartalmaz. Ekkor k élt elhagyva a vágás éleiből (vagy ha ott nincs annyi, akkor a többit tetszőlegesen), legfeljebb $k-1$ él marad, és így a kapott gráfban nem létezhet k éldiszjunkt feszítő fa, ami ellentmondás. (A vágás egy kétrészes partíció, amiben így legalább k él kellene vezessen.) □

Ez a párhuzam sugallta a következő sejtést:

Sejtés 3.1.4 ([4]) *Minden $2k$-összefüggő gráfban létezik k teljesen független feszítő fa.*

Speciális esetként ellenőrizhetjük az állítást teljes páros gráfokra: $K_{2k-1,2k-1}$ nem tartalmazhat k teljesen független fát ($k>1$ esetén), sőt még k éldiszjunkt fát se, mert csak $(2k-1)^2 = 4k^2-4k+1$ éle van, míg k éldiszjunkt fának $k(4k-3) = 4k^2-3k$.

Ezzel szemben $G \cong K_{2k,2k}$-ban már tudunk konstruálni k teljesen független feszítő fát: Legyen $V(G) = U \cup^* V$ a két színosztály és $U = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k\}$ és $V = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k\}$. Ekkor a következő módon definiált $T_1, \ldots, T_k$ teljesen függetlenek: az $\{a_i, b_i, x_i, y_i\}$ halmazon belül vezető négy él közül pontosan három tartozzon $E(T_i)$-hez, $j \neq l$ esetén pedig az $\{a_j, b_j\}$ és $\{x_l, y_l\}$ között G-ben levő két teljes párosítás közül az egyik $E(T_j)$-ben, a másik $E(T_l)$-ben legyen. (A konstrukció helyessége legkönnyebben a 3.2.1 lemmából látszik majd.)

(Hasonlóan látható, hogy K_{2k} is tartalmaz k teljesen független feszítő fát: most a csúcshalmazt $\{a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k\}$-val jelölve $E(T_i)$ álljon az $a_i b_i$ élből és minden $j \neq i$ esetén az $\{a_i, b_i\}$ és $\{a_j, b_j\}$ között levő két teljes párosítás egyike tartozzon hozzá.)

Ebből tehát megkaptuk, hogy teljes páros gráfok esetén a sejtés éles, teljes gráfokra pedig legalábbis igaz. $k=2$ esetén Hasunuma igazolta a sejtést két speciális gráfosztályra megszorítva: irányított élgráfokból az irányítás elhagyásával kapott gráfokra [3], illetve maximális síkgráfokra [4]. Ezt a két eredményt Hasunuma bizonyítását követve ismertetni fogjuk a következő szakaszokban.

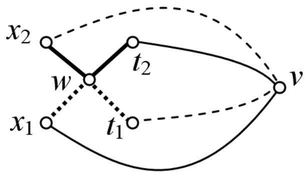
A dolgozat új eredményeként viszont utána megmutatjuk, hogy a sejtés általános gráfokra már $k=2$-re se igaz, sőt semmilyen k-ra nem következik a k-összefüggőségből még két teljesen független feszítő fa létezése sem. Ez tehát azt jelenti, hogy mégsincs szoros kapcsolat a teljesen független feszítő fák létezése és az összefüggőség között, így felértékelődik a pusztán kettő teljesen független fát garantáló egyéb feltételek vizsgálata. Másik új eredményként belátjuk, hogy Hasunuma maximális síkgráfokra vonatkozó tételében nem gyengíthető a 4-összefüggőségre vonatkozó feltétel: 3-összefüggő maximális síkgráfokban már nem feltétlenül létezik két teljesen független feszítő fa. A fejezet végén még bemutatjuk Hasunuma egy további eredményét, amely szerint annak a problémának az eldöntése, hogy egy általános gráfban van-e két teljesen független feszítő fa, NP-teljes, tehát nem várhatunk ilyen értelemben jó karakterizációt.

3.2. Egy hasznos karakterizáció

A teljesen független fák vizsgálatában nagy segítségünkre lesz a következő karakterizáció:

Lemma 3.2.1 (teljesen független fák karakterizációja, [3]) *Legyenek $T_1, T_2, \dots T_k$ feszítő fák a H gráfban. Ekkor $T_1, T_2, \dots T_k$ akkor és csak akkor teljesen függetlenek, ha éldiszjunktak és a H minden v csúcsa esetén legfeljebb egy T_i feszítő fa van, amire $deg_{T_i} v > 1$.*

Biz. $\Leftarrow$: Legyenek $T_1, T_2, \dots T_k$ feszítő fák, és tegyük fel, hogy nem teljesen függetlenek. Ekkor léteznek u, v csúcsok és két feszítő fa úgy, hogy $T_i[u, v]$ és $T_j[u, v]$ nem belsőleg diszjunktak. Mivel T_i és T_j éldiszjunktak, ez csak úgy lehet, hogy az utaknak van egy közös w belső pontja. Ez azt jelenti, hogy $deg_{T_i} w > 1$ és $deg_{T_j} w > 1$, ami ellentmondás.



$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy $T_1, T_2, \dots, T_k$ teljesen függetlenek. Ha egy uv él T_i-hez és T_j-hez is hozzátartozna, akkor $T_i[u, v]$ és $T_j[u, v]$ nem lennének belsőleg diszjunktak, így $T_1, T_2, \dots, T_k$ éldiszjunktak. Most tegyük fel, hogy w csúcs olyan, hogy $deg_{T_i} w > 1$ és $deg_{T_j} w > 1$. Feltehető $i = 1$ és $j = 2$. Legyen v egy másik csúcs, és legyen wt_l az első él a $T_l[w, v]$ úton ($l = 1, 2$). Mivel $deg_{T_l} w > 1$, létezik x_l csúcs, ami T_l-ben szomszédos w-vel és $x_l \neq t_l$ ($l = 1, 2$). Mivel az x_1-ből v-be vezető utak a két fában belsőleg diszjunktak, és $w \in T_1[x_1, v]$, ezért $w \notin T_2[x_1, v]$. Ez azt jelenti, hogy ha T_2-re mint w gyökerű fára tekintünk, akkor x_1 és v ugyanabban a részfában van. Másrészt x_2 és v különböző részfában található, így x_1 és x_2 is. Hasonlóan kapjuk, hogy ha T_1-et tekintjük w gyökerű fának, akkor x_1 és x_2 T_1-ben is különböző részfába esik. Így $w \in T_1[x_1, x_2] \cap T_2[x_1, x_2]$, ami ellentmondás. $\square$

Ebből a lemmából következik, hogy ha adott teljesen független feszítő fák egy halmaza, akkor a gráf egy csúcsának elhagyása legfeljebb egyet vág szét közülük. Sőt, ha k fa van és $k-1$ csúcsot hagyunk el, akkor is még legalább egyikük összefüggő és így feszítő fa marad a kapott gráfban, miközben a független feszítő fák esetén csak annyit tudtunk, hogy ilyenkor minden csúcshoz van olyan fa, amiben a csúcsot a gyökérrel összekötő út nem sérül. A kommunikációs hálózatok esetében ez azt jelenti, hogy ilyenkor $k-1$ csúcs hibája esetén is egy teljes hálózat sértetlen marad.

A továbbiakban egy fa **belső pont**jainak hívjuk azokat a csúcsait, amelyek nem levelek. A karakterizáció tehát azt mondja, hogy a gráf minden csúcsa legfeljebb egy fának belső pontja, vagyis a gráf csúcsai kiszínezhetők k színnel úgy, hogy ha egy csúcs a T_i fa belső pontja, akkor i színű. (Azokat a csúcsokat, amik mindegyik fában levelek, tetszőlegesen színezhetjük.) Vegyük észre azt is, hogy egy T_i fa két belső pontja között vezető él csak T_i-hez tartozhat, másrészt a T_i belső csúcsai által feszített részgráfban T_i egy feszítő fa (ha elhagyjuk egy fa leveleit, ismét fát kapunk). Ez tehát azt jelenti, hogy egy T_i belső pontjaira úgy tekinthetünk, mint egy olyan csúcshalmazra, ami az eredeti gráfban egy összefüggő részgráfot feszít. A köztük T_i-ben vezető élek nem fontosak: ha kicseréljük őket a feszített részgráf egy másik feszítő fájára, akkor a kapott T_i' ugyanúgy feszítő fa lesz, és pontosan akkor lesz teljesen független a többi fától, ha T_i az volt.

3.3. Írányított élgráfokból kapott gráfok

Legyen $G = (V(G), A(G))$ egy irányított gráf. G **élgráf**ja a következő módon definiált $L(G)$ irányított gráf: $V(L(G)) = A(G)$ és $A(L(G)) = \{(uv, vw)|uv, vw \in A(G)\}$.

Egy G irányított gráfból az **irányítás elhagyásával kapott gráf** az az $U(G)$ irányítatlan gráf, amit G-ből az élek irányításának elhagyásával kapunk. Megjegyzendő, hogy attól, hogy G egyszerű, még $U(G)$-ben lehetnek kétszeres élek, amennyiben G tartalmazott azonos csúcspár közötti ellentétes irányítású élpárt. Ilyen esetben most nem töröljük ki a többszörös éleket.

Ebben a szakaszban [3] alapján a következő tételt fogjuk belátni:

Tétel 3.3.1 *Legyen $L(G)$ egy k-összefüggő irányított élgráf. Ekkor $U(L(G))$ tartalmaz k teljesen független feszítő fát.*

A bizonyításhoz vezessük be a következő fogalmat: egy **kör-gyökerű fenyő** (a továbbiakban **KGYF**) egy olyan irányított gráf, amiben minden csúcs befoka 1. Könnyen látható, hogy egy ilyen gráf pontosan egy kört tartalmaz, ez a kör húrmentes és ha összehúzzuk egy s csúccsá, akkor egy s gyökerű ki-fenyőt kapunk. Egy F KGYF egyértelmű körét $C(F)$-fel jelöljük.

Lemma 3.3.2 *Legyen F egy KGYF. Ekkor $L(F) \cong F$.*

Biz. Legyen $\varphi : V(L(F)) \to V(F)$, $\varphi(uv) = v$. Világos, hogy φ egy bijekció. Továbbá, ha $(uv, vw) \in A(L(F))$, akkor $(\varphi(uv), \varphi(vw)) = vw \in A(F)$. Másrészt, ha $(uv, xy) \notin A(L(F))$, vagyis $v \neq x$, akkor $(\varphi(uv), \varphi(xy)) = vy$. Mivel y befoka F-ben 1, $\Gamma_F^-(y) = \{x\}$, és így $vy \notin A(F)$. Így φ egy izomorfizmus $L(F)$ és F között. $\square$

Lemma 3.3.3 *Legyen G egy irányított gráf, és tegyük fel, hogy $G_1, \ldots, G_k$ éldiszjunkt KGYF-ek G-ben. Ekkor léteznek olyan $F_1, \ldots, F_k$ éldiszjunkt KGYF-ek $L(G)$-ben, hogy minden F_i és $v \in L(G)$ esetén $\delta_{F_i}(v) = \delta_{L(G)}(v)$ vagy $\delta_{F_i}(v) = 0$.*

Biz. Minden G_i esetén tekintsük a következő $L(G)$-beli élhalmazt:

$$A_i = \{(uv, vw)|uv \in A(G_i), vw \in A(G)\}.$$

Ekkor $A_i \cap A_j = \emptyset$, mivel $A(G_i) \cap A(G_j) = \emptyset$ $(1 \leq i < j \leq k)$. Minden A_i a következő két A_i' és A_i'' részhalmaz uniója:

$$A_i' = \{(uv, vw)|uv, vw \in A(G_i)\},$$

$A_i'' = \{(uv, vw) | uv \in A(G_i), vw \notin A(G_i)\}.$

Az előző lemma szerint $\langle A_i' \rangle_{L(G)} \cong G_i$. Az is világos, hogy $\langle A_i'' \rangle_{L(G)}$ pedig olyan csillagok uniója, amiknek a gyökere $\langle A_i' \rangle_{L(G)}$-beli, a levelei pedig nem $\langle A_i' \rangle_{L(G)}$-beliek. Így $\langle A_i \rangle_{L(G)} = \langle A_i' \cup A_i'' \rangle_{L(G)}$ is egy KGYF. Mivel G_i feszíti G-t, könnyen ellenőrizhetően $\langle A_i \rangle_{L(G)}$ is feszíti $L(G)$-t. Legyen $F_i = \langle A_i \rangle_{L(G)}$, $i = 1, \ldots, k$.

Tekintsük az $L(G)$ egy uv csúcsát. Tegyük fel, hogy uv-t tartalmazza G_j. Ekkor minden $vw \in A(G)$ esetén $(uv, vw) \in A(F_j)$, és így $\delta_{F_j}(uv) = \delta_{L(G)}(uv)$ és $\delta_{F_i}(uv) = 0$ ha $i \neq j$. Ha pedig uv-t egyetlen G_i sem tartalmazza, akkor $\delta_{F_i}(uv) = 0$ minden F_i-re. $\square$

Lemma 3.3.4 *Legyen G egy irányított gráf. Ha G-ben létezik k éldiszjunkt feszítő KGYF, akkor $U(L(G))$-ben létezik k teljesen független feszítő fa.*

Biz. Legyenek $G_1, \ldots, G_k$ éldiszjunkt KGYF-ek G-ben, és legyen F_i az az $L(G)$-beli irányított részgráf, amit az előző lemmában $\langle A_i \rangle_{L(G)}$-ként definiáltunk ($i = 1, \ldots, k$). $U(F_i)$-ből kitörölve $U(C(F_i))$ egy tetszőleges élév, egy feszítő fát kapunk $U(L(G))$-ben ($i = 1, \ldots, k$). Legyen ez T_i. Ekkor persze T_i-k éldiszjunktak, továbbá minden $v \in U(L(G))$ csúcsra

$$deg_{T_i}(v) \leq \delta_{F_i}(v) + \varrho_{F_i}(v) = \delta_{F_i}(v) + 1.$$

Az előző lemma szerint legfeljebb egy olyan F_j van, amire $\delta_{F_j}(v) \geq 1$, így a 3.2.1 lemma szerint $T_1, \ldots, T_k$ teljesen független feszítő fák $U(L(G))$-ben. $\square$

A 3.3.1 tétel bizonyítása:

Könnyen ellenőrizhető, hogy $L(G)$ akkor és csak akkor k-összefüggő, ha G k-élösszefüggő. Így G-ben Edmonds fenyőtétele szerint létezik minden $r \in V(G)$ esetén létezik k éldiszjunkt r gyökerű fenyő G-ben. Mivel G k-élösszefüggő, $\varrho(r) \geq k$. Mindegyik fenyőhöz hozzávéve egy-egy különböző r-be mutató élt, k éldiszjunkt KGYF-et kapunk. Így az előző lemma szerint létezik k teljesen független feszítő fa $U(L(G))$-ben. $\square$

3.4. 4-összefüggő maximális síkgráfok

Tétel 3.4.1 (Hasunuma) *Minden 4-összefüggő maximális síkgráfban található két teljesen független feszítő fa.*

Ebben a szakaszban ennek a tételnek a bizonyítása kerül bemutatásra, Hasunuma [4] alapján. A bizonyítás algoritmikus, a szereplő konstrukcióval a fák lineáris időben megtalálhatók.

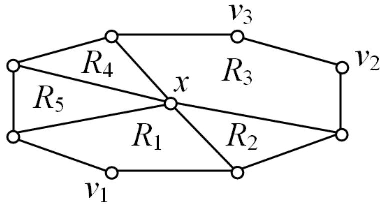
A bizonyítás induktív, alapötlete a következő. A gráf egyes csúcsait és éleit akarjuk kiszínezni két színnel (mondjuk pirossal és kékkel) úgy, hogy az egyforma színű élek egy-egy feszítő fát határozzanak meg, amelyek minden belső pontja olyan színű, mint az élei. A karakterizáció szerint akkor a két fa teljesen független. Tegyük fel, hogy ezt a színezést már megtettük egy körön kívül, úgy értve, hogy a kör csúcsai és élei is színezve vannak, és a kör belsejében levő pontok elhagyásával keletkező gráfban a színezés két teljesen független feszítő fát ad. A következő lépésben ezt szeretnénk kiterjeszteni a kör belsejébe, úgy, hogy a kör csúcsait és éleit még esetleg átszínezhetjük, de azon kívül már nem változtatunk. A bizonyítás során olyan körökkel foglalkozunk, amikben $V(C)$ minden csúcsa azonos színű (mondjuk kék), egyet kivéve (ami piros) (ezt a csúcsot **belépő csúcs**nak hívjuk), és minden éle kék, kivéve a belépő csúcs egyik szomszédját (ami vagy piros, vagy nincs színezve). Ilyenkor, ha egy kék csúcsba nem vezet a körön kívülről kék él, akkor azt a kiterjesztés során átszínezhetjük pirosra, csak arra kell vigyáznunk, hogy a csúcs továbbra is elérhető legyen a kék fában, illetve hogy a kék szomszédai között fennmaradjon az összefüggőség. Ha viszont vezet(het) bele kívülről kék él, akkor már semmiképpen nem változtathatjuk. Ennek a helyzetnek a kezelésére vezetjük be a **tiltott csúcs** fogalmát: az ilyennek jelölt csúcsok színe később már nem változhat. A feladatunk annak megmutatása, hogy ha egy körön a belépő csúcs és a tiltott csúcsok konfigurációja bizonyos típusok valamelyikébe tartozik, akkor meg tudunk tenni egy kiterjesztési lépést úgy, hogy szintén ezen típusokba tartozó, kevesebb belső pontot tartalmazó körök belseje maradjon színezetlen (és persze, hogy megmutassuk, hogy el lehet kezdeni a színezést).

A részletekhez először néhány új jelölésre és fogalomra lesz szükségünk.

Régiónak nevezünk a síkbarajzolt gráf egy köre által határolt (korlátos) tartományt. Az R régiót határoló kört $C(R)$-rel jelöljük. Egy R régió határpontjai $C(R)$ csúcsai. $\Gamma_G(v)$ jelöli a v csúcs szomszédainak halmazát G-ben, és legyen $\overline{\Gamma}_G(v) := \Gamma_G(v) \cup \{v\}$.

Legyen C egy maximális síkgráf egy köre. Egy $w \in V(C)$ csúcs esetén $\Gamma_C^{in}(v)$ jelöli azon C belsejében levő pontok halmazát, amik szomszédosak v-vel. Legyen $x \in V(G)$ egy tetszőleges csúcs és $y_1, \ldots, y_d$ az x szomszédai a síkbeli beágyazás szerint pozitív körüljárási irányban felsorolva. Ekkor a maximális síkgráf tulajdonság miatt az $y_{d+j} := y_j$ jelöléssel $y_i y_{i+1} \in E(G)$, $i = 1, \ldots, d$. Legyen az ezek által alkotott kör $C_G(x) = (y_1, \ldots, y_d, y_1)$. Figyeljük meg, hogy ha G 4-összfüggő, akkor $y_i y_j \notin E(G)$, ha $|i-j| \neq 1$. Ha ugyanis lenne ilyen él, akkor feltehető $j = i+2$, mert különben az általa és $C_G(x)$ y_i és y_j közti íve által alkotott kör egy 2 hosszú húrját vehetjük. Ekkor viszont $\{x, y_i, y_{i+2}\}$ elvágja y_{i+1}-et a gráf többi részétől. Így tehát a $\overline{\Gamma}(v)$ által generált részgráfot a $C_G(v)$ kör határolja.

A G egy **ciklikus blokk**ja egy tovább nem bővíthető 2-összefüggő részgráf (aminek tehát legalább három csúcsa van). Világos, hogy egy síkbarajzolt gráf egy ciklikus blokkját kívülről mindig egy kör határolja.



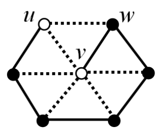
3.1. ábra. $R_1, \ldots, R_5$ a kör x-szeletei. v_1 az R_1 valódi határcsúcsa, R_3 valódi határcsúcsai v_2 és v_3.

Legyen x egy csúcs egy C húrmentes kör belsejében. Ha $|\Gamma_G(x) \cap V(C)| \geq 2$, akkor x-et C-t **szeletelő csúcs**nak nevezzük. Egy C-t szeletelő x csúcs esetén $\Gamma_G(x, C) := \Gamma_G(x) \cap V(C)$. Egy szeletelő csúcs és az őt $\Gamma_G(x, C)$-vel összekötő élek a C-t régiókra bontják, amiket x-**szelet**eknek nevezünk. Egy R x-szelet x-től különböző és $\Gamma_G(x, C)$-be se tartozó határpontjait R **valódi határcsúcs**ainak hívjuk. Ha v egy R x-szelet valódi határcsúcsa, akkor x egy v-**szeletelő pont**, R pedig egy v-**szeletelő régió**. A v-t szeletelő pontok halmazát jelölje $V_{sz}(v, C)$, a v-t szeletelő régiókét pedig $R_{sz}(v, C)$. Az x v-szeletelő ponthoz tartozó v-szeletelő régiót jelölje $R_v(x)$.

A következő lemma biztosítja, hogy az indukció elkezdhető:

Lemma 3.4.2 *Legyen G egy 4-összefüggő maximális síkgráf, és legyen $v \in V(G)$. Ekkor az $\overline{\Gamma}_G(v)$ által generált részgráfban kiválasztható két teljesen független feszítő fa.*

Biz. Legyenek $u, w \in \Gamma_G(v)$ olyanok, hogy $(u, w) \in E(G)$. Színezzük pirosra v-t és u-t, a többi csúcsot pedig kékre. Az élek közül (u, w) és a $\{(v, x) : x \in \Gamma_G(v) - \{w\}\}$-beliek legyenek pirosak, (v, w) és $E(C_G(v)) - \{(u, w)\}$ elemei pedig kékek. Világos, hogy így két teljesen független feszítő fát kapunk. □



3.2. ábra.

Az algoritmus során tehát tetszőleges v csúcsból elindulhatunk, és az első kör, amire a kiterjesztési lépést alkalmazzuk, $C_G(v)$ lesz. (Úgy értve, hogy most a v-t nem tartalmazó tartományt tekintjük $C_G(v)$ belsejének.) Ebben a körben u a belépő csúcs, w pedig egy tiltott csúcs. Általános esetben a következő konfigurációkat engedjük meg (az, hogy u és v "szomszédosak", itt most azt jelenti, hogy C-ben azok):

- 1. típus: Pontosan egy tiltott csúcs van. A belépő csúcs szomszédos a tiltott csúccsal.
- 2. típus: Két tiltott csúcs van. A két tiltott csúcs szomszédos egymással, és a belépő csúcs szomszédos az egyikükkel.
- 3. típus: Két tiltott csúcs van. A tiltott csúcsok nem szomszédosak, viszont az egyikük szomszédos a belépő csúccsal.
- 4. típus: C-ben nincs húr, és három tiltott csúcs van. A tiltott csúcsok egymásra következőek, és a belépő csúcs szomszédos az egyikkel.
- 5. típus: C-ben nincs húr, és három tiltott csúcs van. Ezeket v_1,v_2,v_3-mal jelölve v_1 és v_2 szomszédos, v_3 nem szomszédos v_1-gyel és v_2-vel, a belépő csúcs viszont szomszédos v_3-mal.

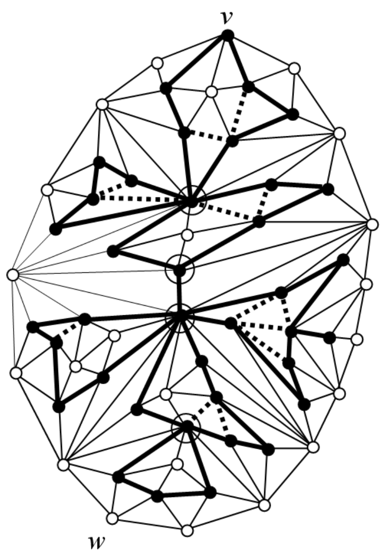
Az indukciós lépés legfontosabb segédeszköze a következő részgráf lesz (ld. 3.3 ábra):

Definíció 3.4.3 *Legyen G egy maximális síkgráf. Legyen C egy húrmentes kör G-ben és $v \in V(C)$. A v-hez és C-hez tartozó $H_G(v, C)$ részgráf legyen a következő:*

$$H_G(v, C) = \langle \cup_{w \in V(C)-v} \Gamma_C^{in}(w) \rangle_G.$$

$H_G(v, C)$ határéleinek halmaza pedig legyen

$$E(H_G(v, C)) \cap (\cup_{w \in V(C)-v} E(C_G(w))).$$



3.3. ábra. A $H_G(v, C)$ gráf: vastag vonallal a határélei, szaggatottal a többi éle. Bekarikázva a w-szeletelő csúcsok.

Most már kimondhatjuk az alábbi lemmát, amiből már következik a tétel:

Lemma 3.4.4 *Legyen G egy 4-összefüggő maximális síkgráf, és C a G egy köre. Tegyük fel, hogy C-n kívül található két teljesen független fa, amik tartalmazzák C összes csúcsát úgy, hogy $V(C)$ minden eleme azonos színű, kivéve egy belépő csúcsot, továbbá hogy a belépő csúcs és a tiltott csúcsok konfigurációja a korábban felsorolt öt típus valamelyike. Ekkor a két fa kiterjeszthető úgy, hogy a C belsejében lévő összes csúcsot tartalmazzák, és teljesen függetlenek maradnak.*

Biz. A lemmát a C belsejében lévő csúcsok száma szerinti indukcióval látjuk be. A bizonyítás során feltesszük, hogy a belépő csúcs piros, C többi csúcsa pedig kék. Legyen v_b a belépő csúcs. Ha C belsejében nincs csúcs, akkor persze az állítás igaz, így feltehetjük, hogy van.

1. eset: C húrmentes.

Konstruáljuk meg a fent leírt $H = H_G(v_b, C)$ gráfot. Színezzük pirosra $V(H) - \{v_b\}$ csúcsokat és H határéleit. H definíciójából adódóan minden $w \in V(H) - \{v_b\}$ csúcshoz található legalább egy él, ami w-t egy $V(C) - \{v_b\}$-beli csúccsal köti össze. Minden w-hez válasszunk ki egy ilyen élt, és színezzük kékre. Az így kapott színezésben a kék élek által meghatározott gráf egy fa, a piros élek által meghatározott pedig ha nem is fa, összefüggő, vagyis részgráfként tartalmaz fát. A $V(H) - \{v_b\}$ csúcsok pirosak és a kék fának levelei, így valóban ki tudtuk terjeszteni a két eredeti fát H csúcsaira úgy, hogy megőrződött a teljes függetlenség. Ha H egy fa, akkor tartalmazza a C belsejében lévő összes csúcsot, és ezzel készen vagyunk.

Most tegyük fel, hogy H nem fa. Ekkor tekintsük a H $\mathcal{T}$ blokk-fáját. Ennek a csúcshalmaza H ciklikus blokkjaiból, elvágó csúcsaiból és leveleiből áll, és $X, Y \in V(\mathcal{T})$ akkor van összekötve, ha X egy ciklikus blokk és Y egy X által tartalmazott elvágó csúcs, vagy pedig ha egyikük se ciklikus blokk, és X és Y szomszédos csúcsok H-ban. (Ez könnyen láthatóan tényleg egy fa.) Ha v_b levél H-ban, akkor legyen $Z = v_b$, ha pedig nem az, akkor legyen Z a v_b-t tartalmazó ciklikus blokk. Z-t a $\mathcal{T}$ gyökerének fogjuk tekinteni.

A ciklikus blokkokra szeretnénk alkalmazni az indukciós hipotézist. Hogy ezt megtehessük, szükségünk van a kötekező módosításra. Minden C-beli v_t tiltott csúcs és minden $x \in V_{sz}(v_t, C)$ esetén, ha v_b nincs a v_t-hez tartozó x-szelet határán, akkor x legyen tiltott csúcs. A eredeti tiltott csúcsok elhelyezkedése szerint a következő három eset lehetséges:

(i) A tiltott csúcsok konfigurációja 1. típusú. Ekkor, mivel a v_t tiltott csúcs szomszédos v_b-vel C-ben, nincs olyan $R_{sz}(v_t, C)$-beli régió, ami ne tartalmazná a határán v_b-t. Így ebben az esetben nem csinálunk semmit.

(ii) A konfiguráció 2. vagy 3. típusú. Ekkor, az előző esethez hasonlóan a v_b-vel szomszédos tiltott csúccsal nem kell foglalkoznunk. Vagyis, elég arra a tiltott csúcsra vonatkozóan elvégezni a módosítást, amelyik nem szomszédos v_b-vel.

(iii) A konfiguráció 4. vagy 5. típusú. Ekkor két szomszédos tiltott csúcs van, ami nem szomszédos v_b-vel. Vegyük észre, hogy ha w_1 és w_2 két szomszédos csúcs C-ben, akkor $R_{sz}(w_1, C) \subseteq R_{sz}(w_2, C)$ vagy $R_{sz}(w_2, C) \subseteq R_{sz}(w_1, C)$. Így most is elég csak egy tiltott csúcsra vonatkozóan elvégeznünk a módosítást.

Vagyis az új tiltott csúcsok mindig megkaphatók a módosítás egyetlen tiltott csúcsból való elvégzésével. Könnyen látható, hogy $x_1, x_2 \in V(r, C)$ esetén $R_v(x_1) \subseteq R_v(x_2)$ vagy $R_v(x_2) \subseteq R_v(x_1)$. Az is világos, hogy az új tiltott csúcsok elvágó csúcsok H-ban, és mivel egyetlen eredeti tiltott csúcsból származtathatók, $\mathcal{T}$-ben egy út mentén helyezkednek el (ami az eredeti tiltott csúcshoz „legközelebbit" köti össze a gyökérrel). Így minden H-beli ciklikus blokkban legfeljebb kettő új tiltott csúcsot jelölünk ki (vagyis marad a határán nem tiltott csúcs), és ha kettőt, akkor ezek egyike a ciklikus blokk szülője $\mathcal{T}$-ben.

Ezután még a következő módosítást végezzük el H ciklikus blokkjaiban $\mathcal{T}$ gyökeréből indulva mélységi vagy szélességi keresés szerinti sorrendben. Legyen X a ciklikus blokk és $C(X)$ az X-et körülvevő kör. Ha X a gyökér, akkor legyen v_b tiltott csúcs $C(X)$-ben. Ha nem, akkor X $\mathcal{T}$-beli szülője legyen tiltott csúcs (ez persze lehet, hogy már eddig is tiltott csúcs volt a korábbi módosítás eredményeként). Ezután válasszunk ki $C(X)$-ben egy tiltott csúccsal szomszédos csúcsot, ezt színezzük kékre és legyen ez a belépő csúcs, az egyik $C(X)$-ben vele szomszédos él színezését pedig távolítsuk el. Mivel eredetileg $C(X)$ minden éle piros volt, a piros élek által alkotott részgráf összefüggő marad. Mivel $C(X)$-ben legfeljebb két tiltott csúcs van, és a belépő csúcs szomszédos az egyikkel, $C(X)$ konfigurációja 1., 2. vagy 3. típusú. Így alkalmazható az indukciós feltevés, a két fát ki tudjuk terjeszteni $C(X)$ belsejébe.

Ahogy azonban egy X-ben elvégzünk egy ilyen módosítást és kiterjesztést, előfordulhat, hogy átszínezünk egy Y elvágó csúcsot, ami X gyereke $\mathcal{T}$-ben. Ha végig tudunk menni az összes ciklikus blokkon úgy, hogy ez nem történik meg, akkor készen vagyunk. Ha viszont az Y elvágó csúcsnál elakadunk, akkor másféle módon tudjuk használni az indukciót. Tekintsük az $R_1, R_2, \ldots, R_l$ Y-szeleteket, amik nem tartalmazzák a határukon v_b-t. Legyen Y és Y összes C-beli szomszédja (v_b-t kivéve, ha az is köztük van) tiltott csúcs. (Az átszínezés miatt most Y ugyanúgy kék, mint a $C(R_i)$-k többi csúcsa!) Ekkor minden $C(R_i)$-ben pontosan három tiltott csúcs van, és ezek egymásra következőek, ugyanis ha R_i valódi határcsúcsai között lenne tiltott csúcs, akkor az első módosítás során Y is tiltott csúccsá vált volna, és így nem színezhettük volna át. Másrészt R_i húrmentes is. Így ha $|V(C(R_i))| > 3$, akkor ki tudunk jelölni egy valódi határcsúcsot belépő csúcsnak, és így $C(R_i)$ 4. típusúvá válik. Ekkor az indukciós feltevés szerint készen vagyunk. Ha pedig $|V(C(R_i))| = 3$, akkor, mivel G 4-összefüggő, $C(R_i)$ belsejében nincsen csúcs, és így semmi se kell tennünk. Miután $C(R_1), C(R_2), \ldots, C(R_l)$-re elvégeztük a fák kiterjesztését, töröljük $\mathcal{T}$-ből az Y-ban gyökerező részfát, és haladhatunk tovább a maradék $\mathcal{T}$-ben. (A fennmaradó, egy vagy két Y-szelet uniójából álló, v_b-t tartalmazó régióra önmagában nem lehetne alkalmazni az indukciót, mert túl sok tiltott csúcs lehet benne, de erre nincs is szükségünk.)

2. eset: C-ben van húr.

Ebben az esetben tekintsük az $\mathcal{S}$ részkör-húr fát. $\mathcal{S}$ csúcsai a C kör húrjai és a $V(C)$ által feszített gráf húrmentes részkörei. $X, Y \in V(\mathcal{S})$ akkor van összekötve, ha X egy húrmentes részkör, Y pedig a C egy húrja, amit X tartalmaz.

Legyen Z egy húrmentes részkör, ami tartalmazza a belépő csúcsot és legalább egy tiltott csúcsot. (Ilyen részkör létezik, mert a belépő csúcs legalább egyik szomszédja mindig tiltott csúcs.) A továbbiakban Z-t tekintjük az $\mathcal{S}$ gyökerének. Járjuk be $\mathcal{S}$-et a gyökérből indulva mélységi vagy szélességi keresés szerinti sorrendben, és az X húrmentes részkörökön hajtsuk végre a következő módosítást. Ha X a gyökér, akkor $C(X)$ konfigurációja 1., 2. vagy 3. típusú, így alkalmazhatjuk rá azt az eljárást, amit az 1. esetben leírtunk. (Vegyük észre, hogy ennek során egyes X határán levő csúcsok színe megváltozhat.) Tegyük fel, hogy X nem a gyökér, és legyen Y az X szülője $\mathcal{S}$-ben. Ekkor Y a C egy X által tartalmazott húrja. Mivel C konfigurációja 1.,2. vagy 3. típusú, C legfeljebb két tiltott csúcsot tartalmaz. Mivel pedig Z tartalmaz legalább egy tiltott csúcsot, X-ben legfeljebb egy olyan tiltott csúcs van, ami nem Y valamelyik végpontja.

2.1. eset: Y egyik végpontja kék, a másik piros. (A korábbi megjegyzés szerint ez nem csak akkor fordulhat elő, ha az egyik csúcs az eredeti belépő csúcs.) Ebben az esetben a piros színű végpont legyen X belépő csúcsa, a kék pedig legyen tiltott csúcs. Ekkor $C(X)$ konfigurációja az 1.,2. és 3. típus valamelyikébe tartozik, így ismét alkalmazhatjuk rá a korábbit.

2.2. eset: Y mindkét végpontja kék. Ebben az esetben legyen mindkét csúcs tiltott. Ha $V(X) > 3$, akkor tudunk választani egy belépő csúcsot úgy, hogy $C(X)$ konfigurációja a 2., 4. és 5. típusok valamelyike legyen, ha pedig $V(X) = 3$, akkor X belsejében nincs csúcs, így ekkor semmit se kell tennünk.

Több eset nincs, mert az nem fordulhat elő, hogy Y mindkét csúcsa piros. Az 1. esetben leírt módosítások során ugyanis a külső kör egy pontjának színe csak akkor változott, amikor szeletelő régiókat használtunk, és ott is minden régió esetén egy valódi határcsúcsot színeztünk át pirosra. Így amikor végrehajtjuk ez a műveletet egy húrmentes körön, sose keletkezik két szomszédos piros csúcs.

Ezzel minden esetben ki tudtuk terjeszteni a két fát C belsejébe. □

3.5. Ellenpéldák

Az ebben a szakaszban olvasható két állítás önálló eredmény, melyek azt mutatják meg, hogy bizonyos feltételek teljesülése még nem elegendő két teljesen független feszítő fa létezéséhez. Az első megcáfolja a 3.1.4 sejtést.

Állítás 3.5.1 *Tetszőleges k-ra van olyan k-összefüggő gráf, ami nem tartalmaz két teljesen független feszítő fát.*

Biz.

1. észrevétel: ha T_1, T_2 teljesen független feszítő fák, akkor T_1 nem csillag, vagyis egynél több belső csúcsa van.

biz.: Ha indirekt csak egyetlen v belső csúcsa lenne, akkor az ebből induló összes él T_1-hez kellene tartozzon, és így v nem lenne elérhető T_2-ben, ellentmondás.

2. észrevétel: ha T_1 és T_2 teljesen független feszítő fák G-ben, és $v \in V(G)$ tetszőleges csúcs, akkor v-nek van olyan szomszédja, ami belső csúcsa T_1-nek.

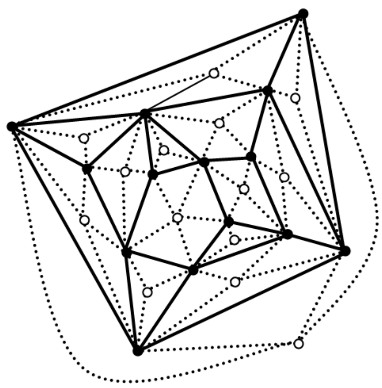
biz.: Ha v belső csúcsa T_1-nek, akkor van olyan szomszédja, ami szintén belső csúcs, mivel T_1 nem csillag. Ha v nem belső csúcsa T_1-nek, akkor levele, és így van olyan szomszédja, ami belső csúcs ($|V(T_1)| \geq 3$ feltehető.)

Most már rátérhetünk a kívánt gráfok konstruálására. Legyen k rögzített. Induljunk ki egy $2k-1$ csúcsú H teljes gráfból. H minden csúcs-k-asához vegyünk fel egy új csúcsot, és ezt kössük össze azzal a k csúccsal, amelyikhez tartozik. A kapott gráfot jelöljük G_k-val. (G_k-nak tehát $2k-1+\binom{2k-1}{k}$ csúcsa van). Világos, hogy G_k k-összefüggő.

Megmutatjuk, hogy G_k-ban nincs két teljesen független feszítő fa. Tegyük fel, hogy T_1 és T_2 két teljesen független feszítő fa. A 2. észrevételt a H-n kívüli csúcsokra alkalmazva kapjuk, hogy bárhogy kiválaszva k csúcsot H-ból, mindig van köztük olyan, ami belső csúcsa T_1-nek. Ez azt jelenti, hogy H csúcsai közül legfeljebb $k-1$ lehet levél T_1-ben. Hasonlóan T_2-ben is, és így legalább egy csúcs mindkét fának belső csúcsa kellene legyen, ami ellentmondás. □

Állítás 3.5.2 *Létezik olyan 3-összefüggő maximális síkgráf, ami nem tartalmaz két teljesen független feszítő fát.*

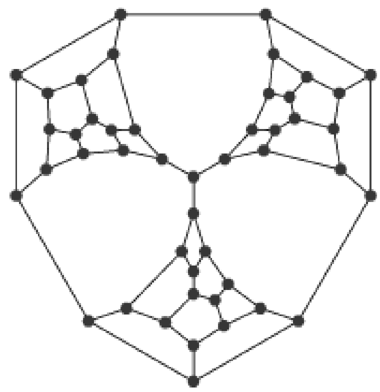
Biz. A gráf egy köre elvágó, ha a belsejében és külsejében is van a gráfnak további csúcsa. Tegyük fel, hogy létezik két teljesen független feszítő fa, és színezzük ki a belső csúcsaikat kékre, illetve pirosra (a karakterizáció szerint minden csúcsot legfeljebb egy színnel színezünk). Mivel mindkét fában vezet út egy elvágó körön kívülről a kör belsejébe, ezzel minden elvágó körnek legalább egy piros, és legalább egy kék csúcsa lesz. Az ellenpélda alapötlete az, hogy belátjuk, hogy van olyan gráf, aminek az elvágó körei nem színezhetők ki ilyen módon.



3.4. ábra.

Először is vegyük észre, hogy ha adott egy tetszőleges G 3-összefüggő síkgráf, akkor tudunk belőle konstruálni egy olyan G' maximális 3-összefüggő síkgráfot, aminek G részgráfja, és G'-ben G minden köre elvágó kör. Valóban, vegyünk fel G minden lapján (a külsőt is beleértve) egy új csúcsot, és kössük ezt össze a megfelelő lap összes csúcsával (ld. 3.4 ábra). Az így kapott gráf 3-összefüggő lesz, mert könnyen ellenőrizhetően ha egy k-összefüggő gráfhoz hozzáveszünk egy új csúcsot, és összekötjük legalább k korábbi csúccsal, akkor a kapott gráf is k-összefüggő lesz, a többi feltétel pedig nyilvánvalóan teljesül. Így elég megmutatnunk, hogy létezik olyan 3-összefüggő síkgráf, aminek a csúcsait nem lehet úgy kiszínezni, hogy ne keletkezzen egyszínű kör.

Legyen G egy 3-összefüggő maximális síkgráf, és tegyük fel, hogy ki tudtuk színezni ilyen módon (most színezzük be az összes csúcsot valamelyik színnel). Ekkor a feltételek szerint a lapokat határoló 3 hosszú körök se egyszínűek, vagyis az egyik szín kétszer, a másik egyszer fordul elő rajtuk. Legyen F azoknak az éleknek a halmaza, amik azonos színű csúcsokat kötnek össze. Ekkor tehát minden lap pontosan egy F-beli éllel határos, ami azt jelenti, hogy G^*-ban (G duálisában) az F-beli élek duálisai (jelöljük ezeket F^*-gal) egy teljes párosítást alkotnak. Ezenfelül G-ben nincs egyszínű kör, vagyis G^*-ban nincs csupa F^*-élből álló vágás, azaz $G^* - F^*$ összefüggő. Mivel G^* 3-reguláris, így $G^* - F^*$ 2-reguláris, vagyis az összefüggőség miatt egy Hamilton-kör G^*-ban. Összefoglalva azt kaptuk, hogy ha G-ben létezik a kívánt színezés, akkor G^*-ban van Hamilton-kör.



3.5. ábra. A Tutte-gráf

Mivel egy 3-összefüggő síkgráf duálisa is 3-összefüggő, elég egy 3-összefüggő 3-reguláris gráfot mutatnunk, amiben nincs Hamilton-kör. Tait 1880-ban felállított sejtése volt, hogy ilyen gráfokban mindig van Hamilton-kör, azonban ezt Tutte 1946-ban megcáfolta. Tutte erre konstruált ellenpéldája a Tutte-gráf (3.5 ábra). Ennek a duálisát véve, és a kapott gráfot a leírt módon kiegészítve tehát egy olyan 3-összefüggő maximális síkgráfot kapunk, amiben nincs két teljesen független feszítő fa. □

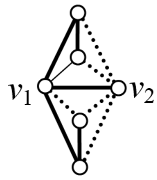
3.6. NP-teljesség

Befejezésül ismét egy Hasunumától származó tételt ismertetünk.

Tétel 3.6.1 ([4]) *Annak eldöntése, hogy egy G gráfban létezik-e két teljesen független feszítő fa, NP-teljes.*

Biz. A feladatot a NAE-3SAT (Not-All-Equal) problémára vezetjük vissza, amiről ismert, hogy NP-teljes. Ez a következőképpen fogalmazható meg: Legyen $\mathcal{V}$ egy változóhalmaz, $\mathcal{C}$ pedig $\mathcal{V}$ feletti klózok egy halmaza, ahol minden $C \in \mathcal{C}$ három literált tartalmaz. Döntsük el, hogy van-e olyan helyettesítése $\mathcal{V}$ elemeinek, hogy minden $\mathcal{C}$-beli klózban legalább egy literál igaz, és legalább egy hamis.

Legyen F a 3.6 ábrán látható gráf, és hívjuk v_1-t az F *bal oldali csúcs*ának, v_2-t pedig a *jobb oldali csúcs*ának, a kettőt közösen pedig *oldalsó csúcsok*nak. Legyen továbbá $E_1(F)$ az ábrán vastag vonallal jelölt élhalmaz F élei közül, $E_2(F)$ pedig a szaggatott vonallal jelölt. (F-en belül ezek láthatóan két teljesen független feszítő fát alkotnak.)



3.6. ábra.

Egy adott $(\mathcal{V}, \mathcal{C})$ NAE-3SAT problémához konstruáljuk meg a következő H segédgráfot. Minden $x \in \mathcal{V}$ változóhoz vegyünk fel egy $G_x \cong F$ gráfot, minden $C \in \mathcal{C}$ klózhoz pedig egy $G_C \cong K_4$ gráfot. G_x bal illetve jobb oldali csúcsát v_1^x-szel illetve v_2^x-szel jelöljük, G_C négy csúcsa közül pedig az egyiket központi csúcsnak hívjuk, a másik hármat pedig a C-t alkotó három literálnak feleltetjük meg. Ezek jelölése legyen $v_*^C, v_a^C, v_b^C, v_c^C$, ahol $C = \{a, b, c\}$. Ezeken kívül vegyünk hozzá a gráfhoz még két további csúcsot, ezek legyenek v_K és v_P (kék illetve piros).

H élhalmaza a G_x-ek és G_C-k élein túl a következő élekből áll:

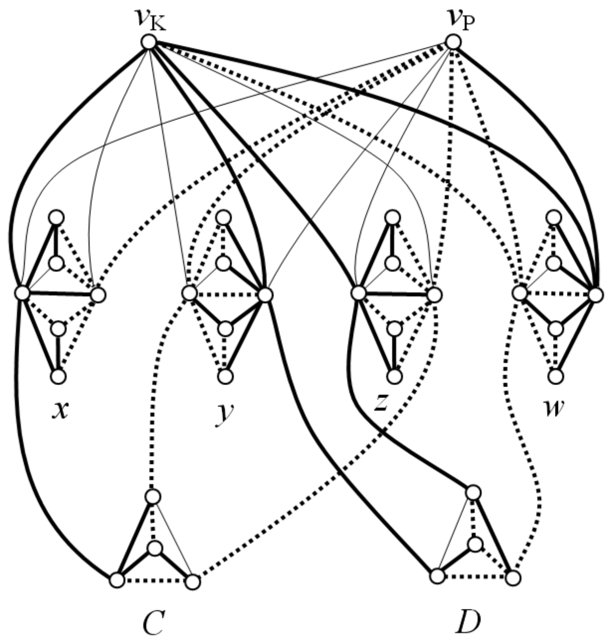
- minden $C \in \mathcal{C}$ és $a \in C$ esetén ha $a = x$ (ahol $x \in \mathcal{V}$), akkor kössük össze v_a^C-t v_1^x-szel, míg ha $a = \overline{x}$, akkor v_2^x-szel
- minden $x \in \mathcal{V}$ esetén kössük össze v_1^x-et és v_2^x-et v_K-val és v_P-vel

Megmutatjuk, hogy $(\mathcal{V}, \mathcal{C})$ pontosan akkor NAE-kielégíthető, ha H-ban létezik két teljesen független feszítő fa.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{V}$ elemeinek van egy olyan t helyettesítése, aminél minden $\mathcal{C}$-beli klóznak legalább egy igaz, és legalább egy hamis literálja van. Színezzük be H éleinek egy részét kékre illetve pirosra a következő módon:

- Ha $t(x) = 1$, akkor legyen $E_1(G_x)$ kék, $E_2(G_x)$ piros, $v_1^x v_K$ kék, $v_2^x v_P$ piros, és minden $a \in C \in \mathcal{C}$ esetén ha $a = x$, akkor a G_x-et G_C-vel összekötő él (vagyis $v_1^x v_a^C$) legyen kék, $a = \overline{x}$ esetén pedig a G_x-et G_C-vel összekötő él (vagyis $v_2^x v_a^C$) legyen piros.
- Ha $t(x) = 0$, akkor legyen $E_1(G_x)$ piros, $E_2(G_x)$ kék, $v_1^x v_P$ piros, $v_2^x v_K$ kék, és minden $a \in C \in \mathcal{C}$ esetén ha $a = x$, akkor a G_x-et G_C-vel összekötő él $(v_1^x v_a^C)$ legyen piros, $a = \overline{x}$ esetén pedig a G_x-et G_C-vel összekötő él $(v_2^x v_a^C)$ legyen kék.
- Legyen x^* egy tetszőleges rögzített változó. Ha $t(x^*) = 1$, akkor legyen $v_1^{x^*} v_P$ kék és $v_2^{x^*} v_K$ piros, míg ha $t(x^*) = 0$, akkor legyen $v_1^{x^*} v_K$ piros és $v_2^{x^*} v_P$ kék.

Könnyen látható, hogy az eddig definiált kék és piros élhalmazok a $V(H) - \{G_C : C \in \mathcal{C}\}$ csúcshalmazon két teljesen független fát határoznak meg. Az is világos, hogy minden G_C-t három él köt össze H többi részével, és ezen élek valamelyike pontosan akkor kék, ha az él G_C-beli végpontjának megfelelő literál a t helyettesítésben igaz, és pontosan akkor piros, ha a literál hamis. Így a három



3.7. ábra. A H segédgráf a $\mathcal{V} = \{x, y, z, w\}$, $\mathcal{C} = \{C, D\}$, $C = \{x, y, \overline{z}\}$, $D = \{\overline{y}, z, w\}$ feladat esetén, a $t(x) = t(z) = 1$, $t(y) = t(w) = 0$ NAE-helyettesítéssel és $x^* = w$ szereposztással. (Vastag vonal: kék; szaggatott: piros.)

él nem egyszínű, és ezért a 3.7 ábrán látható módon ki tudjuk terjeszteni a fákat a G_C részgráfokra is.

A másik irány belátásához tegyük fel, hogy T_K és T_P két teljesen független feszítő fa H-ban. Ekkor színezzük kékre a T_K éleit és belső csúcsait, és pirosra a T_P éleit és belső csúcsait. Tekintsünk egy tetszőleges G_x-et. Ekkor G_x oldalsó csúcsai ki vannak színezve, és pontosan az egyik piros, és pontosan az egyik kék, mert ha nem lenne köztük mondjuk piros, akkor G_x egy nem oldalsó csúcsa és H egy nem G_x-beli csúcsa között nem vezethetne út T_P-ben.

Minden G_C, $C = \{a, b, c\}$ esetén létezik egy kék út v_*^C és v_K között, és egy piros út v_*^C és v_P között. Ez azt jelenti, hogy létezik egy $v_i^C \in \{v_a^C, v_b^C, v_c^C\}$ csúcs, ami kék és szomszédos egy változóhoz tartozó részgráf kék oldalsó csúcsával, és létezik egy $v_h^C \in \{v_a^C, v_b^C, v_c^C\}$ csúcs, ami piros és szomszédos egy változóhoz tartozó részgráf piros csúcsával.

Legyen t' a következő helyettesítés. Ha v_1^x kék, akkor legyen $t'(x) = 1$, ha piros, akkor $t'(x) = 0$. Ekkor v_i^C egy igaz, v_h^C egy hamis literálhoz tartozik, így t' valóban egy NAE-helyettesítés. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] J. Cheriyan and S.N. Maheshwari: Finding nonseparating induced cycles and independent spanning trees in 3-connected graphs, *J. Algorithms* 9 (1988) 507-537.

[2] S. Curran, O. Lee and X. Yu: Finding four independent trees *SIAM J. Comput.* 35 (2006) 1023-1058.

[3] T. Hasunuma: Completely independent spanning trees in the underlying graph of a line digraph, *Discrete Math.* 234 (2001) 149-157.

[4] T. Hasunuma: Completely independent spanning trees in maximal planar graphs, Proc. 28th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG2002), Lecture Notes in Comput. Sci. 2573, pp. 235-245, 2002, Springer

[5] T. Hasunuma and H. Nagamochi: Independent spanning trees with small depths in iterated line digraphs, *Discrete Applied Math.* 110 (2001) 189-211.

[6] A. Huck: Independent trees in graphs, *Graphs and Combin.* 10 (1994) 29-45.

[7] A. Huck: Disproof of a conjecture about independent spanning trees in k-connected directed graphs, *J. Graph Theory* 20 (1995) 235-239.

[8] A. Huck: Independent trees and branchings in graphs, habilitációs értekezés, Hannoveri Egyetem, 1995

[9] A. Huck: Independent trees in planar graphs, *Graphs and Combin.* 15 (1999) 29-77.

[10] A. Huck: Independent trees and branchings in planar multigraphs, *Graphs and Combin.* 15 (1999) 211-220.

[11] A. Huck: Independent branchings in acyclic digraphs, *Discrete Math.* 199 (1999) 245-249.

[12] A. Itai and R. Rodeh: The multi-tree approach to reliability in distributed networks, in: Proc. 25th Annu. IEEE Symp. on Foundations of Computer Sciences, 1984, pp. 137-147.

[13] S. Khuller and B. Schieber: On independent spanning trees, *Inform. Process. Lett.* 42,(6) (1992) 321-323.

[14] K. Miura, D. Takahashi, S. Nakano and T. Nishizeki: A linear-time algorithm to find four independent spanning trees in four-connected planar graphs, Proc. Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG'98, LNCS 1517, pp. 310-323 (1998)

[15] S. Nagai and S. Nakano: A linear-time algorithm to find four independent spanning trees in four-connected planar graphs, Proc. Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG00, LNCS 1928, pp. 290-301 (2000)

[16] R.W. Whitty: Vertex-disjoint paths and edge-disjoint branchings in directed graphs, *J. Graph Theory* 11 (1987) 349-358.

[17] A. Zehavi and A. Itai: Three tree-paths, *J. Graph Theory* 13 (1989) 175-188.