Titkos Tamás

Lineáris funkcionálok integrál-reprezentációja

Szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Czách László

egyetemi docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2009

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Mindenekelőtt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Czách László tanár úrnak, akitől rengeteget tanulhattam az elmúlt évek során. Különösen hálás vagyok az általa ajánlott érdekes témáért, és a szakdolgozat megírása közben nyújtott nélkülözhetetlen segítségéért.

1.1. Történeti áttekintés

Figyelembe véve, hogy már 1903-ban is ismert volt olyan tétel, amely egy folytonos lineáris funkcionál hatását az integrál fogalmának segítségével írta le, mondhatjuk, hogy a címben megjelölt téma több, mint száz éves múlttal rendelkezik. Matematikatörténeti érdekességként megpróbáljuk bemutatni, hogy miként alakult ki a klasszikus Riesz integrál-reprezentációs tétel mai formája.

A fent említett, 1903-ban publikált eredmény Jacques Hadamard nevéhez fűződik, és a következőt mondja ki. Legyen $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor tetszőleges $\Phi \in C(I)^*$ folytonos lineáris funkcionálhoz van olyan $(g_n) \subseteq C(I)$ függvénysorozat, amelyre

$$\Phi(f) = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) g_n(x)\ dx \quad (\forall f \in C(I)).$$

Ezen reprezentáció lényeges hiányossága, hogy nem ad unicitást a $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$

függvénysorozatra. Ennél többet igazolt Maurice Fréchet, amikor 1904-ben megmutatta, hogy a g_n-ek választhatók polinomnak.

A Riesz Frigyes által 1909-ben bizonyított tétel már a Riemann-Stieltjes integrál fogalmát használja, és garantál egyfajta unicitást [11]. Tetszőleges $\Phi \in C(I)^*$ folytonos lineáris funkcionálhoz létezik olyan $g : I \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvény, amelyre

$$\Phi(f) = \int_I f \; dg \quad (f \in C(I)).$$

Egyértelműségről akkor beszélhetünk, ha a fenti formulában szereplő "reprezentáló függvénytől" megköveteljük, hogy ne csak korlátos változású, hanem jobbról folytonos is legyen. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a $C(I)$ tér duális tere azonosítható az I-n értelmezett, korlátos változású, jobbról folytonos függvények Banach terével, ahol a norma a függvény teljes változása. Ugyanezt igazolta Eduard Helly 1912-ben, a Hahn-Banach tétel segítségével.

1913-ban Johann Radon jóval általánosabb feltételek mellett bizonyította Riesz tételét. Az eddigi I intervallum helyett jelölje K az $\mathbb{R}^n$ tér egy kompakt részhalmazát. Ekkor minden $\Phi \in C(K)^*$ folytonos lineáris funkcionálhoz megadható egyetlen olyan K Borel halmazain értelmezett μ reguláris előjeles mérték, amelyre

$$\Phi(f) = \int_K f d\mu \quad (\forall f \in C(K)).$$

A következő általánosítás Stefan Banach nevéhez fűződik. Az 1937-ben publikált bizonyításban a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ feltétel helyett K egy tetszőleges kompakt metrikus tér. (Ugyanezt a tételt később belátta Stanislaw Saks is [13].)

Elsőként Markov próbálkozott azzal, hogy elhagyja a K-ra vonatkozó kompaktsági megkötést. (A reprezentálhatóságot normális tér korlátos folytonos függvényein értelmezett funkcionálokra igazolta.)

1940-ben jelent meg Shizuo Kakutani “Concrete representation of abstract (M)-spaces” című cikke [8], amelyben a következő tételt igazolta: legyen Ω kompakt T_2-tér, jelölje az Ω-n értelmezett valós értékű folytonos függvények vektorterét $C(\Omega)$. Ekkor tetszőleges $C(\Omega)$-n értelmezett $f(x)$ korlátos lineáris funkcionál, amely rendelkezik az

(1) $\|f\| = 1$ és

(2) $x \in C(\Omega), x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

tulajdonságokkal, előáll $f_\mu(x) = \int_\Omega x(t)\mu(dt)$ alakban, ahol $\mu(E)$ egy Ω Borel halmazain értelmezett teljesen additív nemnegatív halmazfüggvény. Fennáll továbbá, hogy $\mu(\Omega) = 1$.

Érdemes megjegyezni, hogy a bizonyítás Neumann János ötletein alapul [16]. 1953-ban Edwards a Čech-Stone kompaktifikáció segítségével igazolta, hogy az alaptér lokális kompaktsága helyett elegendő feltenni a teljes regularitást [3].

Természetesen rengetegen foglalkoztak még a témával (Halmos, Alexandrov, Kantorovics, Arens, és még sorolhatnánk), de ehelyütt már csak V.S. Varadarajan “On a theorem of F. Riesz concerning the form of linear functionals” című 1958-ban írt cikkét említjük meg [15]. Azon túl, hogy az eddigiektől teljesen eltérő bizonyítást adott, tett egy fontos megjegyzést is. Ahhoz, hogy egy mérhető függvény integrálját meg tudjuk határozni, elég az integráló mérték értékeit a nullát nem tartalmazó Borel halmazok ősképein ismerni. Természetes tehát, hogy a reprezentáló mértéket ezen fenti halmazok által generált σ-gyűrűn értelmezzük. Az, hogy ez a mérték kiterjed-e Borel mértékké, egy teljesen más kérdés. Megjegyezzük, hogy Varadarajan azt is megmutatta, hogy a tér T_2-ségére tett feltevés elhagyható.

1.2. Bevezető

Ezen szakdolgozat célja a jól ismert Riesz integrál-reprezentációs tétel egy absztrakt változatának bizonyítása. Ehhez a második fejezetben bevezetjük a vektorháló és a monoton σ-folytonos pozitív lineáris funkcionál fogalmát. Megvizsgáljuk ezek speciális típusait, majd igazolunk néhány felbontási tételt.

Kiderül majd, hogy a reprezentáló mérték létezése nagyban függ attól, hogy egy adott halmazrendszeren értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező halmazfüggvény kiterjeszthető-e mértékké. Kérdés továbbá, hogy mit lehet mondani a kiterjesztés egyértelműségéről. A harmadik fejezetben ezt a témát járjuk körül.

A következő két fejezet a diplomamunka legfontosabb része. Két lényegesen különböző módon igazoljuk a korábban már többször említett (és addigra már precízen ki is mondott) Riesz tételt. Fontos megjegyeznünk, hogy mindkét esetben bizonyítunk egyfajta unicitást is. Végül bemutatjuk a tétel néhány alkalmazását.

A felépítést indokló további megjegyzések, illetve (ahol szükséges) hivatkozások az adott fejezetek elején találhatóak.

1.3. Felhasznált fogalmak, tételek, jelölések

A következő jelölésekkel élünk: $\mathbb{N}$ jelöli a természetes, $\mathbb{R}$ a valós, $\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós, $\overline{\mathbb{R}}_+$ pedig a kiterjesztett értékű nemnegatív valós számok halmazát. Ha H_0, H, K tetszőleges halmazok, $H_0 \subseteq H$, $f : H \to K$ függvény, akkor $f|_{H_0}$ jelöli az f H_0-ra vett megszorítását. Valós értékű függvényvek monoton fogyó, pontonkénti konvergenciájára a $\downarrow$ egyszerűsített jelölést használjuk, azaz $f_n \downarrow g$, ha a közös értelmezési tartományuk minden x elemére $n \to +\infty$ esetén az $f_n(x)$ számsorozat monoton fogyólag tart $g(x)$-hez. Hasonlóan értelmezendő az $f_n \uparrow g$ jelölés. Adott X halmaz egy tetszőleges K részhalmazának karakterisztikus függvényét χ_K-val jelöljük. Azt mondjuk, hogy a $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat tartalmazásra nézve monoton fogyó (vagy röviden monoton fogyó), ha minden $n \in \mathbb{N}$-re $H_{n+1} \subseteq H_n$. Egy adott X halmaz hatványhalmazát, azaz az X összes részhalmazaiból álló halmazrendszert $\mathcal{P}(X)$-szel jelöljük. Funkcionál alatt mindig halmazrendszeren értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvényt értünk (linearitást tehát nem tételezünk fel).

Ismertnek tekintjük a klasszikus mértékelmélet fogalmainak, felépítési módjainak és nevezetes eredményeinek ismeretét (úgy mint Beppo-Levi tétel, Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel, Fatou lemma, Lebesgue felbontás tétel, Radon-Nikodym tétel). Ezek mindegyikét kimondás, vagy hivatkozás nélkül alkalmazzuk. ([5],[7])

A dolgozatban szintén hivatkozás nélkül alkalmazzuk a funkcionálanalízis ismert eredményeit, valamint az általános topológia elemi fogalmait. ([2],[12])

2. fejezet

Vektorhálón értelmezett lineáris funkcionálok

Ezen fejezetben megismerkedünk néhány speciális típusú vektorháló fogalmával. Megvizsgáljuk a rajtuk értelmezett, $\mathbb{R}$-be ható lineáris leképezéseket, különös tekintettel arra, hogy milyen esetben bonthatóak fel két pozitív lineáris funkcionál különbségére.

2.1. Definíciók, jelölések

Legyen X nemüres halmaz. Jelölje $u \wedge v$ és $u \vee v$ az X-en értelmezett valós értékű függvények alsó, illetve felső burkoló függvényét, u_+ és u_- az u függvény pozitív, illetve negatív részét, tehát

$$u_+ := u \vee 0, \qquad u_- := u \wedge 0.$$

Nyilvánvaló, hogy $u = u_+ - u_-$ és $|u| = u_+ + u_-$.

2.1.1. Definíció. *Az X halmazon értelmezett valós értékű függvények valamely $\mathscr{U}(X)$ részhalmazát (valós) vektorhálónak nevezzük, ha*

(1) $\mathscr{U}(X)$ $\mathbb{R}$*-feletti vektortér a szokásos műveletekkel*

(2) $\forall\, u \in \mathscr{U}(X):\ |u| \in \mathscr{U}(X)$.

Mivel bármely $u, v : X \to \mathbb{R}$ függvények esetén:

$$u \vee v = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}|u-v|, \qquad u \wedge v = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}|u-v|,$$

ezért ha $\mathscr{U}(X)$ vektorháló és $u, v \in \mathscr{U}(X)$, akkor egyúttal

$$u \wedge v,\ u \vee v, u_+, u_- \in \mathscr{U}(X).$$

Ezzel a következő ekvivalens definícióhoz jutottunk: Az X-en értelmezett valós értékű függvények valamely $\mathscr{U}(X)$ halmazát (valós) vektorhálónak nevezzük, ha

(1) $\mathscr{U}(X)$ $\mathbb{R}$-feletti vektortér a szokásos műveletekkel

(2) $\forall\, u, v \in \mathscr{U}(X):\ u \wedge v,\ u \vee v \in \mathscr{U}(X)$

Jelölje a továbbiakban $\mathscr{U}(X)_+$ a vektorháló nemnegatív elemeit, 1_X pedig az X-en értelmezett konstans 1 értékű függvényt. Megjegyzendő, hogy általában $1_X \notin \mathscr{U}(X)$. A későbbiekben fontos szerepet játszik az alábbi definíció.

2.1.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $\mathscr{U}(X)$ vektorháló Stone-féle vektorháló, ha teljesül rá az úgynevezett Stone-feltétel, azaz hogy tetszőleges $u \in \mathscr{U}(X)$ esetén $u \wedge 1_X \in \mathscr{U}(X)$.*

2.1.3. Példa. *Ha X lokálisan kompakt T_2-tér, akkor az X-en értelmezett valós értékű folytonos és kompakt tartójú függvények $C_0(X)$ halmaza Stone-féle vektorháló. Ha X kompakt T_2-tér, akkor $C_0(X) = C(X)$, így az X-en értelmezett valós értékű folytonos függvények halmaza Stone-féle vektorháló. Ha (X, Σ, μ) mértéktér, akkor tetszőleges $1 \le p \le +\infty$ esetén az $L^p(X, \Sigma, \mu)$ tér szintén rendelkezik a Stone-tulajdonsággal.*

2.1.4. Definíció. *Normált vektorhálón egy olyan $(\mathscr{U}(X), \|.\|)$ rendezett párt értünk, ahol $\mathscr{U}(X)$ vektorháló, $\|.\|$ pedig olyan norma $\mathscr{U}(X)$-n, amelyik kielégíti az alábbi feltételeket:*

(1) $u, v \in \mathscr{U}(X)_+, u \leq v \Rightarrow \|u\| \leq \|v\|$

(2) $u \in \mathscr{U}(X) : \|u\| = \||u|\|$

Megjegyezzük, hogy a fent megemlített Stone-féle vektorhálók egyúttal normált vektorhálók is.

2.1.5. Definíció. *A $\Phi : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált pozitívnak nevezzük, ha $u \geq 0$ esetén $\Phi(u) \geq 0$.*

2.1.6. Definíció. *Az $\mathscr{U}(X)$ vektorhálón értelmezett $\Phi : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált monoton σ-folytonosnak nevezzük, ha $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X) :\ u_n \downarrow 0$ esetén $\lim_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = 0$.*

2.1.7. Megjegyzés. *Ha Φ monoton σ-folytonos pozitív lineáris funkcionál, akkor teljesülnek az alábbiak is:*

(1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X),\ u \in \mathscr{U}(X) :\ u_n \uparrow u \Rightarrow \Phi(u_n) \to \Phi(u)$

(2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X)_+,\ u \in \mathscr{U}(X)_+ : u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\ \Rightarrow \Phi(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi(u_n)$

2.1.8. Definíció. *A $\Phi : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált korlátos változásúnak nevezzük, ha tetszőleges $u \in \mathscr{U}(X)_+$ esetén:*

$$\sup\{\Phi(v) :\ v \in \mathscr{U}(X)_+, v \leq u\} < +\infty.$$

2.2. Lineáris funkcionálok felbontása

2.2.1. Tétel. *Egy $\Phi : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál pontosan akkor áll elő két pozitív lineáris funkcionál különbségeként, ha korlátos változású.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy Φ előáll $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ alakban, ahol Φ_1 és Φ_2 pozitív lineáris funkcionálok $\mathscr{U}(X)$-en. Legyen $u \in \mathscr{U}(X)_+$ tetszőleges függvény, ekkor bármely $v \in \mathscr{U}(X)_+,\ v \leq u$ mellett

$$\Phi(v) = \Phi_1(v) - \Phi_2(v) \leq \Phi_1(u),$$

amiből már következik, hogy Φ korlátos változású.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\Phi : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ korlátos változású lineáris funkcionál. Tetszőleges $u \in \mathscr{U}(X)_+$ mellett legyen

$$\Phi_+(u) := \sup\{\Phi(v) : \ v \in \mathscr{U}(X)_+, v \leq u\}.$$

Ekkor feltétel szerint $0 \leq \Phi_+(u) < +\infty$. Megmutatjuk, hogy a fenti egyenlőséggel értelmezett $\Phi_+ : \mathscr{U}(X)_+ \to \mathbb{R}_+$ funkcionál additív.
Legyenek $u_1, u_2 \in \mathscr{U}(X)_+$. Ekkor bármely $v_1, v_2 \in \mathscr{U}(X)_+ : v_1 \leq u_1, \ v_2 \leq u_2$ esetén $v_1+v_2 \in \mathscr{U}(X)_+, \ v_1+v_2 \leq u_1+u_2$, ezért $\Phi(v_1)+\Phi(v_2) = \Phi(v_1+v_2) \leq \Phi_+(u_1+u_2)$, amiből v_1, v_2-re szuprémumot véve következik, hogy

$$\Phi_+(u_1) + \Phi_+(u_2) \leq \Phi_+(u_1 + u_2).$$

A másik irányú egyenlőtlenség igazolásához legyen $v \in \mathscr{U}(X)_+$ tetszőleges olyan függvény, amelyre $v \leq u_1 + u_2$. Ekkor a $v_1 := v \wedge u_1, \ v_2 := v - v_1$ jelölések mellett könnyen látható, hogy: $v_1, \ v_2 \in \mathscr{U}(X)_+$, $v_1 \leq u_1, \ v_2 \leq u_2$, így $\Phi(v) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2) \leq \Phi_+(u_1) + \Phi_+(u_2)$, amiből következik, hogy

$$\Phi_+(u_1 + u_2) \leq \Phi_+(u_1) + \Phi_+(u_2).$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\Phi_+(u_1 + u_2) = \Phi_+(u_1) + \Phi_+(u_2)$, azaz a Φ_+ funkcionál additív $\mathscr{U}(X)_+$-on.

Egyszerűen igazolható, hogy tetszőleges $u \in \mathscr{U}(X)_+$ és $c \in \mathbb{R}_+$ esetén $\Phi_+(cu) = c\Phi_+(u)$, vagyis Φ_+ pozitív-homogén. Terjesszük ki az $\mathscr{U}(X)_+$-on értelmezett Φ_+ funkcionált az egész $\mathscr{U}(X)$-re a

$$\Phi_+(u) := \Phi_+(u_+) - \Phi_+(u_-) \quad (u \in \mathscr{U}(X))$$

egyenlőséggel, ahol u_+, illetve u_- az u függvény pozitív, illetve negatív része. Egyszerűen igazolható, hogy Φ_+ mint $\mathscr{U}(X)$-en értelmezett funkcionál, lineáris. Mivel Φ_+ pozitív értékeket vesz fel $\mathscr{U}(X)_+$-on, ezért Φ_+ pozitív lineáris funkcionál.

Ezek után a $\Phi_- := \Phi_+ - \Phi$ jelölés mellett nyilvánvaló, hogy a $\Phi_- : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ funkcionál lineáris, és ha $u \in \mathscr{U}(X)_+$, akkor $\Phi(u) \leq \Phi_+(u)$ miatt $\Phi_-(u) \geq 0$, azaz Φ_- is pozitív lineáris funkcionál. Ezzel a tételt igazoltuk. $\square$

2.2.2. Tétel. *Ha $(\mathscr{U}(X), \|.\|)$ normált vektorháló, akkor minden $\Phi \in \mathscr{U}(X)^*$ folytonos lineáris funkcionál előáll két folytonos, pozitív lineáris funkcionál különbségeként.*

Bizonyítás. Legyen $u \in \mathscr{U}(X)_+$, ekkor minden $v \in \mathscr{U}(X)_+,\ v \leq u$ mellett $\Phi(v) \leq |\Phi(v)| \leq \|\Phi\|\|v\| \leq \|\Phi\|\|u\|$, amiből nyilván következik, hogy Φ korlátos változású, így a 2.2.1. Tétel szerint előáll két pozitív lineáris funkcionál különbségeként. A fenti egyenlőtlenségből az is következik, hogy

$$\Phi_+(u) = \sup\{\Phi(v) :\ v \in \mathscr{U}(X)_+,\ v \leq u\} \leq \|\Phi\|\|u\|.$$

Legyen most $u \in \mathscr{U}(X)$, ekkor $\Phi_+(u) = \Phi_+(u_+) - \Phi_+(u_-)$, így $|\Phi_+(u)| \leq \Phi_+(u_+) + \Phi_+(u_-) \leq \|\Phi\|(\|u_+\| + \|u_-\|)$, és mivel $u_+ \leq |u|,\ u_- \leq |u|$, továbbá $\||u|\| = \|u\|$, ezért

$$|\Phi_+(u)| \leq 2\|\Phi\|\|u\|,$$

amiből következik, hogy a $\Phi_+ : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál folytonos is. Mivel $\Phi_- = \Phi_+ - \Phi$, ezért Φ_- is folytonos. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

A fenti tétel alkalmazására az 5. Fejezetben látunk konkrét példát, amikoris leírju bizonyos normált vektorhálók folytonos duálisát.

3. fejezet

Halmazfüggvények kiterjesztése

Az előző fejezetben bevezettük a szükséges fogalmakat, amelyek segítségével megfogalmazhatjuk a Riesz-féle integrál-reprezentációs tétel egy absztrakt változatát. Később ennél többet fogunk állítani, egyelőre azonban elégedjünk meg az alábbi megfogalmazással:
Legyen $\mathscr{U}(X)$ Stone-féle vektorháló. Ekkor minden $\Phi : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ pozitív, monoton σ-folytonos lineáris funkcionálhoz létezik olyan μ mérték, hogy a $\Phi(u) = \int_X u \; d\mu$ egyenlőség teljesül minden $u \in \mathscr{U}(X)$ függvény esetén.

Nyilván ahhoz, hogy a fenti formula értelmes legyen, szükséges, hogy a vektorháló minden eleme mérhető legyen, azaz az $\{x : u(x) \geq 1\}$ alakú halmazoknak μ-mérhetőnek kell lenniük. Másfelől meg van kötve a kezünk atekintetben is, hogy ha valamely $E \subseteq X$ halmaz μ-mérhető és létezik $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X)$ monoton fogyó függvénysorozat, hogy

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \chi_E(x) \quad (\forall x \in X),$$

akkor a $\mu(E) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi(u_n)$ egyenlőségnek teljesülnie kell. (Hiszen

$$\mu(E) = \int_X \chi_E \; d\mu = \int_X \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n \; d\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X u_n \; d\mu \right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi(u_n),$$

ahol a harmadik egyenlőség a Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel miatt teljesül.)

Kézenfekvő tehát, hogy a Φ funkcionálhoz tartozó μ mértéket a fentiek szerint konstruáljuk. Csakhogy azon $E \subseteq X$ halmazok, amelyek karakterisztikus függvénye előáll, mint $\mathscr{U}(X)$-beli függvények monoton csökkenő sorozatának pontonkénti limesze, nem feltétlenül alkotnak σ-algebrát, és így a fenti $\mu(E) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi(u_n)$ egyenlőséggel értelmezett halmazfüggvény nem mérték.

A következő fejezetben elégséges feltételt adunk a mértékké való kiterjeszthetőségre bizonyos $\mathscr{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazrendszeren értelmezett Φ funkcionálok esetén. Elsőként bevezetjük a belső mérték fogalmát, amelynek segítségével (a külső mértékek elméletéből ismert Caratheodory kiterjesztéshez hasonlóan) könnyedén konstruálhatunk újabb mértékeket, és amely igen hatékony fegyver lesz a kiterjesztés létezésének bizonyításánál.

A 3.1., illetve 3.2. szakaszok felépítése (sőt maga a belső mérték definíciója és a funkcionálokra tett két speciális feltétel is) D.H. Fremlintől származik [6].

3.1. Belső mértékek

3.1.1. Definíció. *Legyen X tetszőleges halmaz. A $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ halmazfüggvényt X-en értelmezett belső mértéknek nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

(*i*) $\Phi(\emptyset) = 0$

(*ii*) $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Phi(A \cup B) \geq \Phi(A) + \Phi(B)$

(*iii*) *Ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az X részhalmazainak egy tartalmazásra nézve monoton fogyó sorozata, és $\Phi(A_0) < +\infty$, akkor:* $\Phi(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi(A_n)$

(*iv*) $\Phi(A) = \sup\{\Phi(B) : B \subseteq A, \Phi(B) < +\infty\}$ $(\forall A \in \mathcal{P}(X))$

3.1.2. Lemma. *Legyen X tetszőleges halmaz, $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges halmazfüggvény, amely az üres halmazon nullát vesz fel. Ekkor a*

$$\Sigma = \{E : E \subseteq X,\ \Phi(A) = \Phi(A \cap E) + \Phi(A \setminus E)\ (\forall A \subseteq X)\}$$

halmazrendszer algebra X-en. Fennáll továbbá, hogy $\Phi(E \cup F) = \Phi(E) + \Phi(F)$, ha $E, F \subseteq X$ és $E \cap F = \emptyset$.

Bizonyítás. Mivel a definíció szimmetrikus, nyilvánvaló, hogy $E \in \Sigma$ esetén $E^c \in \Sigma$ is teljesül, azaz Σ komplementumzárt. Így elegendő azt igazolni, hogy $\emptyset \in \Sigma$ és hogy Σ véges uniózárt.
Legyen $E, F \in \Sigma$, $A \subseteq X$ tetszőleges. Ekkor:
$\Phi(A \cap (E \cup F)) + \Phi(A \setminus (E \cup F)) =$
$= \Phi((A \cap (E \cup F)) \cap E) + \Phi((A \cap (E \cup F)) \setminus E) + \Phi(A \setminus (E \cup F)) =$
$= \Phi(A \cap E) + \Phi((A \setminus E) \cap F) + \Phi(A \setminus (E \cup F)) =$
$= \Phi(A \cap E) + \Phi((A \setminus E) \cap F) + \Phi((A \setminus E) \setminus F) =$
$= \Phi(A \cap E) + \Phi(A \setminus E) = \Phi(A)$, azaz: $E \cup F \in \Sigma$.

Másrészt mivel $\Phi(\emptyset) = 0$, ezért tetszőleges $A \subseteq X$-re: $\Phi(A \cap \emptyset) + \Phi(A \setminus \emptyset) = \Phi(\emptyset) + \Phi(A) = \Phi(A)$, így $\emptyset \in \Sigma$.
Végezetül ha $E, F \subseteq X$, $E \cap F = \emptyset$, akkor: $\Phi(E \cup F) = \Phi((E \cup F) \cap E) + \Phi((E \cup F) \setminus E) = \Phi(E) + \Phi(F)$. $\square$

Ennél azonban jóval többet állíthatunk, ha Φ nem tetszőleges halmazfüggvény, hanem egy belső mérték X-en. Igaz ugyanis a következő tétel:

3.1.3. Tétel. *Legyen X tetszőleges halmaz, $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ belső mérték. Ekkor a*

$$\Sigma = \{E : E \subseteq X,\ \Phi(A) = \Phi(A \cap E) + \Phi(A \cap E^c)\quad (\forall A \subseteq X)\}$$

halmazrendszer σ-algebra, $(X, \Sigma, \Phi|_\Sigma)$ pedig teljes mértéktér.

Bizonyítás. (1. lépés) Mivel Φ belső mérték, ezért $\Phi(\emptyset) = 0$ és így a fenti lemma szerint a Σ halmazrendszer algebra. Vegyük észre, hogy tetszőleges $E \subseteq X$-re

$$E \in \Sigma \;\Leftrightarrow\; \Phi(A) \leq \Phi(A \cap E) + \Phi(A \setminus E) \quad (\forall A \subseteq X : \Phi(A) < +\infty).$$

Az nyilvánvaló, hogy $E \in \Sigma$ esetén az egyenlőtlenség fennáll. Megfordítva legyen $A \subseteq X$ tetszőleges. A belső mértékek (iv) tulajdonsága miatt $\Phi(A) = \sup\{\Phi(B) : B \subseteq A, \Phi(B) < +\infty\}$ és $\Phi(B) \leq \Phi(B \cap E) + \Phi(B \setminus E)$ feltétel szerint, így:

$$\begin{aligned}
\Phi(A) &= \sup\{\Phi(B) : B \subseteq A, \Phi(B) < +\infty\} \leq \\
&\leq \sup\{\Phi(B \cap E) + \Phi(B \setminus E) : B \subseteq A, \Phi(B) < +\infty\} \leq \\
&\leq \sup\{\Phi(B \cap E) : B \subseteq A, \Phi(B) < +\infty\} + \\
&+ \sup\{\Phi(B \setminus E) : B \subseteq A, \Phi(B) < +\infty\} = \Phi(A \cap E) + \Phi(A \setminus E).
\end{aligned}$$

Kihasználva, hogy Φ szuperadditív, $\Phi(A \cap E) + \Phi(A \setminus E) \leq \Phi(A)$ és így belül végig egyenlőség teljesül. Mivel $A \subseteq X$ tetszőleges volt, azt kaptuk, hogy $E \in \Sigma$.

(2. lépés) Megmutatjuk, hogy Σ zárt a megszámlálható unióra, azaz σ-algebra. Legyen $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$. Feltehető, hogy $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy monoton növő halmazsorozat, $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Az előző pont szerint elegendő, hogy minden $A \subseteq X$, $\Phi(A) < +\infty$ részhalmaz esetén $\Phi(A) \leq \Phi(A \cap E) + \Phi(A \setminus E)$ teljesüljön. Használva a belső mértékek (iv) tulajdonságát:

$$\Phi(A \setminus E) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \Phi(A \setminus E_n) = \lim_{n \to +\infty} \Phi(A \setminus E_n).$$

Másfelől $A \cap E \supseteq A \cap E_n$, így $\Phi(A \cap E) + \Phi(A \setminus E) \geq \lim_{n \to +\infty}(\Phi(A \cap E_n) + \Phi(A \setminus E_n) = \Phi(A)$.

(3. lépés) Vezessük be a $\mu := \Phi|_\Sigma$ jelölést. Igazolni fogjuk, hogy μ σ-additív Σ-n, azaz mérték. Legyen $E_n \subseteq \Sigma$ diszjunkt halmazsorozat, $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Az nyilvánvaló, hogy $\mu(E) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$.

Tegyük fel indirekt, hogy $\mu(E) > \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$ szigorú egyenlőtlenség teljesül. Ekkor létezik $A \subseteq E : \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) < \Phi(A) < \mu(E) < +\infty$, hiszen $\mu(E) = \Phi(E) = \sup\{\Phi(A) : A \subseteq E, \Phi(A) < +\infty\}$.
Az $F_n := \bigcup_{i\leq n} E_i$ jelölés mellett $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton növő, és így $(A \setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, üres metszettel. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$-re: $\Phi(A) = \Phi(A \cap F_n) + \Phi(A \setminus F_n)$, így $\Phi(A) = \lim_{n\to+\infty}(\Phi(A \cap F_n) + \Phi(A \setminus F_n)) =$
$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi(A \cap E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) < \Phi(A)$, ami ellentmondás. (Közben felhasználtuk Φ véges additivitását és a belső mértékek (iii) tulajdonságát.) Ezzel megmutattuk, hogy μ mérték.

(4. lépés) Igazoljuk, hogy a μ mérték teljes. Legyen $E \in \Sigma$, $\mu(E) = 0$ és $B \subseteq E$. Ekkor tetszőleges $A \subseteq X$-re ($\Phi(A) < +\infty$): $\Phi(A \cup B) + \Phi(A \setminus B) \geq \Phi(A \setminus B) \geq \Phi(A \setminus E) = \Phi(A \cap E) + \Phi(A \setminus E) = \Phi(A)$.
Az (1. lépés)-ben leírtak szerint ez ekvivalens azzal, hogy $B \in \Sigma$. Világos továbbá, hogy $\Phi(B) \leq \Phi(E) = 0$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

Az eddigiek segítségével igazolhatjuk első kiterjesztési tételünket:

3.1.4. Tétel. *Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathscr{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ X-beli halmazrendszer, amelyre teljesülnek az alábbi $(i) - (iii)$ feltételek:*

(i) $\emptyset \in \mathscr{K}$

(ii) $K_1, K_2 \in \mathscr{K},\ K_1 \cap K_2 = \emptyset\ \Rightarrow K_1 \cup K_2 \in \mathscr{K}$

(iii) $K_1, K_2 \in \mathscr{K}\ \Rightarrow\ K_1 \cap K_2 \in \mathscr{K}$.

Ha emellett a $\Phi_0 : \mathscr{K} \to \mathbb{R}_+$ funkcionál rendelkezik a következő :

$$\Phi_0(K) = \Phi_0(L) + \sup\{\Phi_0(K') : K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq K \setminus L\}$$
$$(\forall K, L \in \mathscr{K} : L \subseteq K) \qquad (3.1)$$

tulajdonsággal, akkor létezik Φ_0-nak additív kiterjesztése egy $\mathscr{K}$-t tartalmazó Σ algebrára.

Bizonyítás. Definiáljuk a Φ funkcionált és a Σ halmazrendszert a következőképp:

$$\Phi(A) := \sup\{\Phi_0(K) : K \in \mathscr{K}, K \subseteq A\} \quad (A \subseteq X),$$

$$\Sigma := \{E : E \subseteq X,\ \Phi(A) = \Phi(A \cap E) + \Phi(A \setminus E)\ (\forall A \subseteq X)\}.$$

(1. lépés) Megmutatjuk, hogy Σ X-beli algebra, és hogy $\Phi|_{\mathscr{K}} = \Phi_0$. A 3.1.2. Lemma miatt elég, hogy $\Phi(\emptyset) = 0$. Ez nyilvánvalóan teljesül, helyettesítsünk ugyanis (3.1)-be $K = L = \emptyset$ -et. Ugyancsak (3.1)-ből látható, hogy $L, K \in \mathscr{K}$ és $L \subseteq K$ esetén $\Phi_0(L) \leq \Phi_0(K)$. Innen pedig világos, hogy:

$$\Phi(K) = \sup\{\Phi_0(K) : K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq K\} = \Phi_0(K) \quad (\forall K \in \mathscr{K}).$$

(2. lépés) Megmutatjuk, hogy Φ_0 additív $\mathscr{K}$-n, Φ szuperadditív $\mathcal{P}(X)$-en. Legyen $K_1, K_2 \in \mathscr{K}$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Ekkor (*ii*) szerint $K_1 \cup K_2 \in \mathscr{K}$ és: $\Phi_0(K_1 \cup K_2) = \Phi_0(L) + \sup\{\Phi_0(K') : K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq (K_1 \cup K_2) \setminus L\}$. Speciálisan $L = K_1$ helyettesítéssel $\Phi_0(K_1 \cup K_2) = \Phi_0(K_1) + \Phi_0(K_2)$. Legyen most $A, B \in X \quad (A \cap B = \emptyset)$ tetszőleges. Ekkor:

$$\begin{aligned}
&\Phi(A) + \Phi(B) = \\
&= \sup\{\Phi_0(K_1) : K_1 \in \mathscr{K}, K_1 \subseteq A\} + \sup\{\Phi_0(K_2) : K_2 \in \mathscr{K}, K_2 \subseteq B\} = \\
&= \sup\{\Phi_0(K_1) + \Phi_0(K_2) : K_1, K_2 \in \mathscr{K}, K_1 \subseteq A, K_2 \subseteq B\} = \\
&= \sup\{\Phi_0(K_1 \cup K_2) : K_1, K_2 \in \mathscr{K}, K_1 \subseteq A, K_2 \subseteq B\} \leq \Phi(A \cup B),
\end{aligned}$$

azaz Φ szuperadditív.

(3. lépés) Megmutatjuk, hogy $\mathscr{K} \subseteq \Sigma$. Legyen $K \in \mathscr{K}$, $A \subseteq X$ tetszőleges. Azt kell igazolnunk, hogy $\Phi(A) = \Phi(A \cap K) + \Phi(A \setminus K)$. Ehhez legyen $L \subseteq A, L \in \mathscr{K}$. Ekkor (3.1) szerint:
$\Phi_0(L) = \Phi_0(L \cap K) + \sup\{\Phi_0(K') : K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq L \setminus (L \cap K)\} =$
$= \Phi_0(L \cap K) + \sup\{\Phi_0(K') : K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq L \setminus K\} \leq \Phi(A \cap K) + \Phi(A \setminus K)$

Mivel $L \subseteq A$ tetszőleges volt, szuprémumot véve adódik, hogy:
$\Phi(A) = \sup\{\Phi_0(L) : L \in \mathscr{K}, L \subseteq A\} \leq \Phi(A \cap K) + \Phi(A \setminus K)$.
A másik irányú egyenlőtlenség a Φ szuperadditvitása miatt teljesül, ezzel megmutattuk, hogy $\mathscr{K} \subseteq \Sigma$. □

3.2. A kiterjesztés létezése

Az előző szakaszban minden eszközt előkészítettünk ahhoz, hogy bebizonyíthassuk a tételt, amely egy $\Phi : \mathscr{K} \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvény mértékké való kiterjeszthetőségére ad elégséges feltételt.

3.2.1. Definíció. *Legyen* (X, Σ, μ) *mértéktér,* $\mathscr{K}$ *egy tetszőleges halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy* μ *mérték belülről reguláris* $\mathscr{K}$*-ra nézve, ha* $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \in \Sigma \cap \mathscr{K},\ K \subseteq E\}$ $(\forall E \in \Sigma)$

3.2.2. Megjegyzés. *Jegyezzük meg, hogy a definícióban nem feltételeztük* $\mathscr{K}$*-ről, hogy* $\mathscr{K} \subseteq \Sigma$*, sőt még azt sem, hogy* $\mathscr{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$*.*

3.2.3. Megjegyzés. μ *pontosan akkor belülről reguláris* $\mathscr{K}$*-ra nézve, ha belülről reguláris* $\mathscr{K} \cap \Sigma$*-ra nézve.*

3.2.4. Tétel. *Legyen* X *tetszőleges halmaz,* $\mathscr{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ X*-beli halmazrendszer, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:*

(*i*) $\emptyset \in \mathscr{K}$

(*ii*) $K_1, K_2 \in \mathscr{K},\ K_1 \cap K_2 = \emptyset \ \Rightarrow K_1 \cup K_2 \in \mathscr{K}$

(*iii*) $(K_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K} \ \Rightarrow \ \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \in \mathscr{K}$.

Legyen továbbá $\Phi_0 : \mathscr{K} \to \mathbb{R}_+$ *tetszőleges funkcionál, amely rendelkezik a következő* (α)*-*(β) *tulajdonságokkal:*

(α) $\Phi_0(K) = \Phi_0(L) + \sup\{\Phi_0(K') : K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq K \setminus L\}$
$(\forall K, L \in \mathscr{K} : L \subseteq K)$

(β) *Ha* $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *a* $\mathscr{K}$ *elemeinek egy tartalmazásra nézve monoton fogyó sorozata, akkor:* $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i = \emptyset \Rightarrow \inf_{i\in\mathbb{N}} \Phi_0(K_i) = 0$.

Ekkor létezik X*-en olyan* μ *mérték, amely kiterjeszti* Φ_0*-t, és amely belülről reguláris* $\mathscr{K}$*-ra nézve.*

Bizonyítás. A korábbi tételhez hasonlóan definiáljuk a Φ halmazfüggvényt és a Σ halmazrendszert a következőképp:

$$\Phi(A) := \sup\{\Phi_0(K) : K \in \mathscr{K}, K \subseteq A\} \quad (A \subseteq X)$$

$$\Sigma := \{E : E \subseteq X,\ \Phi(A) = \Phi(A \cap E) + \Phi(A \setminus E)\ (\forall A \subseteq X)\}.$$

Ekkor a 3.1.4. Tétel szerint $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ algebra, amely tartalmazza $\mathscr{K}$-t, Φ additív Σ-n, és $\Phi|_{\mathscr{K}} = \Phi_0$. Elegendő megmutatnunk, hogy Φ belső mérték X-en. Ekkor ugyanis a 3.1.3. Tételből rögtön adódik, hogy Σ egy σ-algebra, $\Phi|_\Sigma$ pedig teljes mérték. A belső mértékek $(i), (ii)$ és (iv) tulajdonságainak teljesülése a Φ definíciójából azonnal látszik. Csak azt kell megmutatnunk, hogy (iii) is fennáll.
Azaz ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az X részhalmazainak egy tartalmazásra nézve monoton fogyó sorozata, és $\Phi(A_0) < +\infty$, akkor: $\Phi(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi(A_n)$. Elsőként igazoljuk az egyenlőséget abban a speciális esetben, amikor az A_n halmazokról nem csak azt tesszük fel, hogy az X részhalmazai, hanem még azt is, hogy $\mathscr{K}$-beliek. Ezt használva, a második lépésben igazoljuk az eredeti egyenlőséget.

(1. lépés) Legyen tehát $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozat, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K}$, $\Phi(K_0) < +\infty$. A $\mathscr{K}$-ra tett (iii) feltevés miatt $L := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \in \mathscr{K}$. Jelöljük a Φ függvény Σ-ra való leszűkítését μ-vel. Ekkor nyilván $\mu(L) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(K_n)$. A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A Φ_0 funkcionál (α) tulajdonsága és a $\Phi_0 = \mu|_{\mathscr{K}} = \Phi|_{\mathscr{K}}$ egyenlőségek miatt létezik $K' \in \mathscr{K}$, hogy $K' \subseteq K_0 \setminus L$ és $\mu(K_0) \le \Phi_0(L) + \Phi_0(K') + \frac{\varepsilon}{2}$. Igaz továbbá, hogy $(K_n \cap K')_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K}$ egy monoton fogyó halmazsorozat, amelyre $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(K_n \cap K) = \emptyset$.

Ekkor a (β) tulajdonság szerint $\exists n \in \mathbb{N}$, amelyre $\mu(K_n \cap K') \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Így $\mu(K_0) - \mu(L) = \mu(K_0 \setminus L) = \mu(K_0 \setminus (K' \cup L)) + \mu(K')$. Kihasználva, hogy $\mu(K') = \mu(K' \setminus K_n) + \mu(K' \cap K_n)$, valamint hogy $\mu(K' \setminus K_n) \leq \mu(K \setminus K_n)$, folytathatjuk a fenti egyenlőséget:

$$\begin{aligned} &\mu(K_0) - \mu(L) = \\ &= \mu(K_0 \setminus (K' \cup L)) + \mu(K' \cap K_n) + \mu(K' \setminus K_n) \leq \\ &\leq \mu(K_0 \setminus (K' \cup L)) + \mu(K' \cap K_n) + \mu(K_0 \setminus K_n) = \\ &= \mu(K_0 \setminus (K' \cup L)) + \mu(K' \cap K_n) + \mu(K_0) - \mu(K_n), \end{aligned}$$

ahol az első két tag $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb, azaz: $\mu(K_0) - \mu(L) \leq \varepsilon + \mu(K_0) - \mu(K_n)$, és így $\mu(K_n) \leq \mu(L) + \varepsilon$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, azt kaptuk, hogy $\mu(L) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(K_n)$.

(2. lépés) Rátérhetünk az általános eset igazolására.
Legyen tehát $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ monoton fogyó halmazsorozat, $\Phi(A_0) < +\infty$. Nyilván $\Phi(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi(A_n)$. A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.
Kihasználva, hogy $\Phi(A_0) < +\infty$, Φ definíciójából adódik, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists K_n \in \mathscr{K} : \quad K_n \subseteq A_n, \ \Phi(K_n) \geq \Phi(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $L_n := \bigcap_{i\leq n} K_i$, $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_i$.
Ekkor $\Phi(A_{n+1}) - \mu(L_{n+1}) =$
$= \Phi(A_{n+1}) - \mu(K_{n+1} \cap L_n) = \Phi(A_{n+1}) - (\mu(K_{n+1}) + \mu(L_n) - \mu(K_{n+1} \cup L_n))$.
Vegyük észre, hogy $K_{n+1} \subseteq A_{n+1} \subseteq A_n$ és $L_n \subseteq K_n \subseteq A_n$. Ekkor persze $K_{n+1} \cup L_n \subseteq A_n$ és $\mu(K_{n+1} \cup L_n) \leq \Phi(A_n)$. Továbbá a K_n-ek választása miatt

$$\Phi(A_{n+1}) - \mu(L_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n}\varepsilon + \Phi(A_n) - \mu(A_n)$$

$n = 0$-ra: $\Phi(A_0) - \mu(L_0) = \Phi(A_0) - \mu(K_0) < \varepsilon$
$n = 1$-re: $\Phi(A_1) - \mu(L_1) \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \Phi(A_0) - \mu(K_0) < \frac{1}{2}\varepsilon + \varepsilon$
és így tovább, az egyenlőtlenséget iterálva: $\Phi(A_n) - \mu(L_n) \leq \sum_{i\leq n} \frac{1}{2^i}\varepsilon < 2\varepsilon$.
Mivel minden $n \in \mathbb{N}$-re $K_n \subseteq A_n$, $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $L = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, ezért $L \subseteq A$

és így $\Phi(A) \geq \mu(L)$.

Továbbá az (1. lépés)-ben leírtak szerint $\mu(L) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(L_n)$, így fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\Phi(A) \geq \mu(L) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(L_n) \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi(A_n) - 2\varepsilon.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\Phi(A) \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi(A_n)$, azaz Φ egy belső mérték. Ekkor tehát a 3.1.3. Tétel szerint $\mu := \Phi|_\Sigma$ teljes mérték. Továbbá $\forall E \in \Sigma :$
$\mu(E) = \Phi|_\Sigma(E) = \Phi(E) = \sup\{\Phi_0(K) : \ K \subseteq E, K \in \mathscr{K}\} =$
$= \sup\{\Phi(K) : \ K \subseteq E, K \in \mathscr{K}\} = \sup\{\mu(K) : \ K \subseteq E, K \in \mathscr{K}\}$,
azaz μ belülről reguláris a $\mathscr{K}$-ra nézve. Ezzel a bizonyítást befejeztük $\square$

3.3. A kiterjesztés egyértelműsége

Látni fogjuk, hogy a fenti kiterjesztési tétel már elegendő a Riesz reprezentációs tételben szereplő μ mérték létezéséhez. Érdemes azonban tovább vizsgálódnunk annak érdekében, hogy a kiterjesztés (és így a reprezentáló mérték) unicitásáról is mondhassunk valamit.

Fremlin igazolta, hogy ha a Φ funkcionál Σ σ-algebrára való kiterjesztésétől megköveteljük azt is, hogy $\mathscr{K}$-ra nézve belülről reguláris, úgynevezett lokálisan meghatározott mérték legyen, akkor a 3.2.4. Tételben megkonstruált μ mértéken kívül nincs más, a feltételekek kielégítő kiterjesztés. Nekünk azonban olyan egyértelműségi állításra van szükségünk, amely az $\mathscr{U}(X)$ vektorháló által generált σ-algebrára vonatkozik. Elsőként bevezetünk néhány új fogalmat.

3.3.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\mu : \Sigma \subseteq \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mérték szemifinit, ha $\forall F \in \Sigma$ $(\mu(F) = +\infty)$ $\exists E \in \Sigma \ : E \subseteq F, \ 0 < \mu(E) < +\infty$.*

3.3.2. Definíció. *(Fremlin) Azt mondjuk, hogy a $\mu : \Sigma \subseteq \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mérték lokálisan meghatározott, ha szemifinit, és tetszőleges $E \subseteq X$-re ekvivalens:*

(*i*) $E \in \Sigma$

(*ii*) $E \cap F \in \Sigma$, *ha* $F \in \Sigma$ *és* $\mu(F) < +\infty$

3.3.3. Megjegyzés. *A fenti tulajdonságot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az* X *egy részhalmaza vagy* μ*-mérhető, vagy van olyan véges* μ*-mértékű halmaz, amelyet "rosszul metsz" (vagyis a metszet nem* μ*-mérhető).*

3.3.4. Lemma. *A 3.2.4. Tételben megkonstruált* μ *mérték lokálisan meghatározott.*

Bizonyítás. A μ szemifinit, hiszen Φ_0 véges értékű, $\mu|_{\mathscr{K}} = \Phi_0$ és $\mu(F) = \Phi|_\Sigma(F) = \sup\{\Phi_0(K) : \ K \in \mathscr{K}, K \subseteq F\}$. A lokális meghatározottság igazolásához legyen $E \subseteq X$ tetszőleges részhalmaz. Feltétel szerint $E \cap F \in \Sigma$, ha $F \in \Sigma$ és $\mu(F) < +\infty$. Meg kell mutatnunk, hogy:
$\forall A \subseteq X : \Phi(A) = \Phi(A \cap E) + \Phi(A \cap E^c)$. Ehhez legyen $K \subseteq A, K \in \mathscr{K}$ tetszőleges ($\Phi_0(K) = \Phi(K) = \mu(K) < +\infty$). Ekkor persze $K \cap E \in \Sigma$ és $K \cap E^c \in \Sigma$, továbbá fennáll, hogy $\Phi(K) = \mu(K) = \mu(K \cap E) + \mu(K \cap E^c) = \Phi(K \cap E) + \Phi(K \cap E^c) \leq \Phi(A \cap E) + \Phi(A \cap E^c)$. K-ban szuprémumot véve: $\Phi(A) = \sup\{\Phi(K) : \ K \in \mathscr{K}, K \subseteq A\} \leq \Phi(A \cap E) + \Phi(A \cap E^c)$. Mivel Φ belső mérték, ezért a másik irányú egyenlőtlenség is teljesül. Azt kaptuk tehát, hogy $E \in \Sigma$.
Az $(i) \Rightarrow (ii)$ implikáció nyilvánvaló, ezért a bizonyítást befejeztük. □

Szükségünk van még a mérhető burok fogalmára, és néhány tulajdonságára.

3.3.5. Definíció. *Legyen* (X, Σ, μ) *mértéktér,* $A \subseteq X$*. Azt mondjuk, hogy az* $E \subseteq X$ *halmaz mérhető burka* A*-nak, ha* $A \subseteq E$, $E \in \Sigma$ *és* $\mu(F \cap E) = \mu^*(F \cap A)$ $(\forall F \in \Sigma)$ *(ahol* μ^* *a* μ *által generált külső mértéket jelöli).*

3.3.6. Lemma. *Legyen* (X, Σ, μ) *mértéktér,* $A \subseteq X$ *. Ekkor*

(*a*) *az* E *halmaz* $(E \in \Sigma, A \subseteq E)$ *pontosan akkor mérhető burka* A*-nak, ha* $\mu(F) = 0$ *minden* $F \subseteq E \setminus A$, $F \in \Sigma$ *esetén.*

(*b*) *ha A befedhető véges mértékű halmazzal, akkor van mérhető burka.*

Bizonyítás. (*a*) Legyen E mérhető fedése A-nak, és legyen $F \subseteq E \setminus A$. Ekkor feltétel szerint $\mu(F \cap E) = \mu^*(F \cap A)$. Továbbá $\mu(F \cap E) = \mu(F)$ és $\mu^*(F \cap A) = \mu^*(\emptyset) = 0$, így tehát $\mu(F) = 0$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mu(F) = 0$ minden $F \subseteq E \setminus A,\ F \in \Sigma$ esetén, de E nem mérhető burka A-nak. Ekkor létezik $H \in \Sigma :\ \mu^*(A \cap H) < \mu(E \cap H)$.
Legyen $G \in \Sigma$ olyan, hogy $A \cap H \subseteq G$ és $\mu^*(A \cap H) = \mu(G)$.
Ilyen G létezik, választható ugyanis $G_n \in \Sigma$ halmazoknak olyan sorozata, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ \mu^*(A \cap H) \leq \mu(G_n) \leq \mu^*(A \cap H) + \frac{1}{2^n}.$$

Ekkor a $G := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ választással $\mu^*(A \cap H) \leq \mu(G) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(G_n) \leq \mu^*(A \cap H)$.

Ezek után legyen $F := (E \cap H) \setminus G$. Világos, hogy $\mu(G) < \mu(E \cap H)$, ezért $\mu(F) > 0$. Ugyanakkor $F \subseteq E$ és $F \cap A \subseteq (H \cap A) \setminus G$, ami üres. Következésképp $F \subseteq E \setminus A$, ami ellentmondás, hiszen $\mu(F) \neq 0$.

(*b*) Legyen H egy véges mértékű befedése A-nak, $E \in \Sigma$ pedig olyan fedés, hogy $\mu(E) = \mu^*(A)$. (Ilyen E létezését láttuk az (*a*) pontban.) Ekkor E mérhető burka az A-nak. Legyen ugyanis $F \subseteq E \setminus A,\ F \in \Sigma$. Ekkor persze $A \subseteq E \setminus F$, és $\mu(E) = \mu^*(A)$-ből adódik, hogy $\mu(E \subseteq F) = \mu(E)$. Mivel E véges mértékű (kihasználva, hogy H az), ezért $\mu(F) = 0$. Az (*a*) pont szerint tehát E mérhető burka A-nak. □

Ezzel minden eszközt előkészítettünk a szakasz legfontosabb tételének bizonyításához. Igazolni fogjuk, hogy a Φ funkcionál különböző σ-algebrákra való kiterjesztései (ha léteznek egyáltalán) szoros kapcsolatban állnak a korábban megkonstruált μ mértékkel .

3.3.7. Tétel. *Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathscr{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ X-beli halmazrendszer, amelyre:*

(i) $\emptyset \in \mathscr{K}$

(ii) $K_1, K_2 \in \mathscr{K},\ K_1 \cap K_2 = \emptyset \ \Rightarrow K_1 \cup K_2 \in \mathscr{K}$

(iii) $(K_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K} \ \Rightarrow \ \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \in \mathscr{K}$

Legyen továbbá $\Phi_0 : \mathscr{K} \to \mathbb{R}_+$ tetszőleges funkcionál, amely rendelkezik a következő (α)-(β) tulajdonságokkal:

(α) $\Phi_0(K) = \Phi_0(L) + \sup\{\Phi_0(K') : K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq K \setminus L\}$
$(\forall K, L \in \mathscr{K} : L \subseteq K)$

(β) *Ha $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{K}$ elemeinek egy tartalmazásra nézve monoton fogyó sorozata, akkor: $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i = \emptyset \Rightarrow \inf_{i\in\mathbb{N}} \Phi_0(K_i) = 0$.*

Ekkor a 3.2.4. Tételben meghatározott μ mérték maximális a Φ_0 funkcionál azon σ-additív kiterjesztései között, amelyek $\mathscr{K}$-ra nézve belülről regulárisak. (Abban az értelemben, hogy ha (X, Σ', μ') mértéktér, μ' rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, akkor μ kiterjeszti μ'-t.)

Bizonyítás. Legyen $\mu = \Phi|_\Sigma$, ahol $\Phi(A) := \sup\{\Phi_0(K) : K \in \mathscr{K}, K \subseteq A\}$, és $\Sigma = \{E : E \subseteq X,\ \Phi(A) = \Phi(A \cap E) + \Phi(A \cap E^c)\ (\forall A \subseteq X)\}$.
Legyen ezen kívül μ' egy $\mathscr{K} \subseteq \Sigma'$ σ-algebrán értelemezett, $\mathscr{K}$-ra nézve belülről reguláris mérték. Azt fogjuk igazolni, hogy ha $F \in \Sigma'$, akkor $F \in \Sigma$, és $\mu(F) = \mu'(F)$. Mivel μ lokálisan meghatározott mérték a 3.3.4. Lemma szerint, elég megmutatnunk, hogy $\forall E \in \Sigma :\ \mu(E) < +\infty$ esetén $F \cap E \in \Sigma$.

Legyenek $H_1 \in \Sigma$, illetve $H_2 \in \Sigma$ az $E \cap F$, illetve $E \setminus F$ halmazok mérhető burka. Ilyen H_1 és H_2 létezik a 3.3.6. Lemma szerint, hiszen $H_1, H_2 \subseteq E$ és $\mu(E) < +\infty$.

Azt fogjuk igazolni, hogy $\mu(H_1 \cap H_2) = 0$. Ezzel készen is leszünk, ugyanis az $(E \cap H_1) \setminus (E \cap F) \subseteq (H_1 \cap H_2)$ tartalmazás, és a μ-mérték teljessége maga után vonja, hogy $(E \cap H_1) \setminus (E \cap F) \in \Sigma$. Amiből viszont rögtön adódik, hogy $E \cap F \in \Sigma$, kihasználva, hogy $E \cap H_1 \in \Sigma$.

Tegyük fel indirekt, hogy $\mu(H_1 \cap H_2) > 0$. A μ belső regularitása miatt $\exists K \in \mathscr{K} : K \subseteq H_1 \cap H_2$, és $\mu(K) > 0$. Mivel $K \subseteq H_1 \cap H_2$, ezért $K \cap E \neq \emptyset$ és $K \cap F \neq \emptyset$. Ezen a ponton használjuk, hogy μ' is belülről reguláris $\mathscr{K}$-ra nézve. A fenti K-hoz létezik ugyanis K_1 és K_2, hogy $K_1 \subseteq K \cap F$, $K_2 \subseteq K \setminus F$, és $\mu'(K) \geq \mu'(K_1 \cup K_2) = \mu'(K_1) + \mu'(K_2) > \mu'(K \cap F) + \mu'(K \setminus F) - \mu(K) = \mu'(K) - \mu(K) = 0$, hiszen $\mu'|_{\mathscr{K}} = \mu|_{\mathscr{K}} = \Phi_0$.

Vegyük észre, hogy a $\mu'(K_1) + \mu'(K_2) > 0$ egyenlőtlenségből adódóan $\mu'(K_1)$ és $\mu'(K_2)$ közül legalább az egyik pozitív. Ez viszont mindenképp ellentmondás, mert $K_1 \subseteq H_2 \setminus (E \setminus F), K_2 \subseteq H_1 \setminus (E \cap F)$, amely halmazok egyike sem tartalmazat pozitív mértékű halmazt a 3.3.6. Lemma (a) pontja miatt. Ezzel beláttuk, hogy $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

Az, hogy $\mu|\Sigma' = \mu'$, könnyen adódik a $\mathscr{K}$-ra vonatkozó belső regularitásból, és abból, hogy $\mu'|_{\mathscr{K}} = \mu|_{\mathscr{K}} = \Phi_0$. Ugyanis tetszőleges $F \in \Sigma'$-re $\mu'(F) = \sup\{\mu'(K) : \ K \in \mathscr{K},\ K \subseteq F\} = \sup\{\mu(K) : \ K \in \mathscr{K},\ K \subseteq F\} = \mu(F)$ □

Innen már egyszerűen adódik egyfajta unicitás. Bár a Φ-re és $\mathscr{K}$-ra vonatkozó feltevések teljesen megegyeznek a 3.3.7 Tételben leírtakkal, a könnyebb átláthatóság kedvéért a tételt hivatkozások nélkül, precízen kimondjuk.

3.3.8. Tétel. *Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathscr{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ X-beli halmazrendszer, amelyre:*

(i) $\emptyset \in \mathscr{K}$

(ii) $K_1, K_2 \in \mathscr{K},\ K_1 \cap K_2 = \emptyset \ \Rightarrow K_1 \cup K_2 \in \mathscr{K}$

(iii) $(K_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K} \ \Rightarrow \ \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \in \mathscr{K}$

Legyen továbbá $\Phi_0 : \mathscr{K} \to \mathbb{R}_+$ tetszőleges funkcionál, amely rendelkezik a következő (α)-(β) tulajdonságokkal:

(α) $\Phi_0(K) = \Phi_0(L) + \sup\{\Phi_0(K') : K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq K \setminus L\}$
$(\forall K, L \in \mathscr{K} : L \subseteq K)$

(β) *Ha* $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *a* $\mathscr{K}$ *elemeinek egy tartalmazásra nézve monoton fogyó sorozata, akkor:* $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i = \emptyset \Rightarrow \inf_{i\in\mathbb{N}} \Phi_0(K_i) = 0$.

Legyen adott továbbá $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *egy* $\mathscr{K}$*-t tartalmazó* σ*-algebra. Ekkor ha létezik* Φ_0*-nak* $\mathscr{K}$*-ra nézve belülről reguláris kiterjesztése* $\mathscr{A}$*-ra, akkor az egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyenek μ_1 és μ_2 $\mathscr{A}$-n értelmezett, a fenti tulajdonságokkal rendelkező mértékek. Ekkor a 3.3.7. Tételben szereplő μ mérték mindkettőnek kiterjesztése, azaz $\mathscr{A} \subseteq \Sigma$ és $\mu_1 = \mu|_{\mathscr{A}} = \mu_2$. □

Végül néhány egyszerű észrevétel:

3.3.9. Megjegyzés. *Érdemes megfigyelnünk a 3.3.7. Tétel bizonyításánál, hogy maga a* Φ *halmazfüggvény, illetve annak tulajdonságai semmilyen szerepet nem játszottak. Mindössze a belőle konstruált* μ *mérték teljességét, lokális meghatározottságát, és belső regularitását használtuk. Valamint azt, hogy* μ *és* μ' *egyaránt definiálva vannak* $\mathscr{K}$*-n, és ott egybe is esnek.*

3.3.10. Következmény. *Legyen* X *tetszőleges halmaz,* $\mathscr{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *tetszőleges halmazrendszer. Tegyük fel, hogy* μ_1 *és* μ_2 *két teljes, lokálisan meghatározott mérték, amelyek értelmezve vannak* $\mathscr{K}$*-n, belülről regulárisak* $\mathscr{K}$*-ra nézve és* $\mu_1|_{\mathscr{K}} = \mu_2|_{\mathscr{K}}$*. Ekkor* $\mu_1 = \mu_2$*.*

4. fejezet

A Riesz reprezentációs tétel

Ezen fejezetben igazoljuk fő tételünket. Elsőként olyan bizonyítást adunk, amely az egész eddigi apparátust felhasználja. Azt is mondhatjuk, hogy az eddigi erőfeszítéseink kizárólag ezt a részt voltak hivatottak előkészíteni.

4.1. A reprezentáló mérték létezése

Az ebben a szakaszban található bizonyítások Fremlintől származnak [6].

4.1.1. Lemma. *Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathscr{U}(X)$ Stone-tulajdonságú vektorháló. Jelölje $\mathscr{K}_0$ a következő halmazrendszert:*

$$\mathscr{K}_0 := \{K : K = \{x : u(x) \geq 1\} \subseteq X \quad (u \in \mathscr{U}(X))\}.$$

Legyen ezen kívül μ olyan mérték X-en, amely a $\mathscr{K}_0$ halmazrendszeren teljesíti a következő egyenlőséget:

$$\mu(K) = \inf\{\Phi(u) : u \in \mathscr{U}(X)\ ,\ \chi_K \leq u\} \quad (\forall K \in \mathscr{K}_0),$$

ahol $\Phi : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ egy monoton σ-folytonos pozitív lineáris funkcionál. Ekkor az $\int_X u\, d\mu$ formula értelmes minden $u \in \mathscr{U}$ esetén, és $\Phi(u) = \int_X u\, d\mu$.

Bizonyítás. Elég az $u \geq 0$ esettel foglalkozni, mert Φ is és az $\int$ operáció is lineáris. Elkészítünk egy $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X)$ és egy $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{K}$-lépcsős függvény sorozatot, amelyekre fennáll, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; w_n \leq v_n \leq u, \; w_n \uparrow u.$$

Ekkor persze $\Phi(w_n) \uparrow \Phi(u)$, $\Phi(w_n) \leq \int_X v_n \, d\mu \leq \Phi(u)$, és így:

$$\int_X u \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X v_n \, d\mu = \Phi(u).$$

Vegyük észre, hogy ha $v \in \mathscr{U}(X)$, $K \in \mathscr{K}_0$, és $v \leq \chi_K$, akkor $\Phi(v) \leq \mu(K)$. (Ugyanis $\mu(K) = \inf\{\Phi(u) : u \in \mathscr{U}(X) \; , \; \chi_K \leq u\}$, $v \leq \chi_K \leq u \Rightarrow v \leq u$ és így $\Phi(v) \leq \Phi(u)$, mivel Φ pozitív.)

Legyen $u \in \mathscr{U}(X)$ és definiáljuk a $K_{n,k}$ halmazokat, illetve az $u_{n,k}$ függvényeket a következőképp:

$$K_{n,k} := \{x : u(x) \geq \frac{k}{2^n}\}, \; u_{n,k} := u \wedge \left(\left(\frac{k}{2^n}\right) \cdot 1_X\right) \quad (n, k \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $2^n(u_{n,k+1} - u_{n,k}) \leq \chi_{K_{n,k}} \leq 2^n(u_{n,k} - u_{n,k-1})$. A fenti észrevétel szerint egyúttal $2^n\Phi(u_{n,k+1} - u_{n,k}) \leq \mu(K_{n,k}) \leq 2^n\Phi(u_{n,k} - u_{n,k-1})$ is fennáll. Az egyenlőltenségeket $\frac{1}{2^n}$ -nel szorozva és összegezve 4^n-ig k-ra azt kapjuk, hogy

$$\Phi(u_{n,4^n+1} - u_{n,1}) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k \leq 4^n} \mu(K_{n,k}) \leq \Phi(u \wedge 2^n \cdot 1) \leq \Phi(u)$$

Vezessük be a $w_n := u_{n,4^n+1} - u_{n,1} \in \mathscr{U}(X)$ és $v_n := \frac{1}{2^n} \sum_{k \leq 4^n} \chi_{K_{n,k}} \in \mathscr{U}(X)$ jelöléseket. Ekkor $w_n \uparrow u$, ugyanis $n \to +\infty$ esetén: $u_{n,4^n+1} \uparrow u$ és $u_{n,1} \downarrow 0$. Mivel Φ monoton σ-folytonos, ezért $\Phi(w_n) \to \Phi(u)$.

A Beppo-Levi tételből és a $\Phi(w_n) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k \leq 4^n} \mu(K_{n,k}) = \int_X v_n \, d\mu \leq \Phi(u)$ egyenlőtlenségekből azonnal adódik, hogy u integrálható, és

$$\int_X u \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X v_n \, d\mu = \Phi(u),$$

amit bizonyítani akartunk. $\square$

4.1.2. Tétel. *Legyen $\mathscr{U}(X)$ Stone-féle vektorháló, $\Phi : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *Φ monoton σ-folyonos*

(ii) *Létezik μ mérték X-en, amelyre $\int_X u\ d\mu$ értelmes minden $u \in \mathscr{U}(X)$ esetén, és $\int_X u\ d\mu = \Phi(u)$.*

Bizonyítás. A $(ii) \Rightarrow (i)$ irány nyilvánvaló. (Hivatkozhatunk akár a Lebesgue-féle dominált konvergencia tételre, akár a Fatou-lemmára)

Az $(i) \Rightarrow (ii)$ implikáció bizonyításához definiáljuk a következő X-beli $\mathscr{K}$ halmazrendszert:

$$\mathscr{K} := \{K :\ K \subseteq X,\ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X) : \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) = \chi_K(x) \quad (\forall x \in X)\}$$

. Vegyük észre, hogy $\mathscr{K}$ zárt a véges unióra, és a megszámlálható metszetre:

$K_1, K_2 \in \mathscr{K} \Rightarrow \exists (u_{1,n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}(X) : \chi_{K_1} = \inf_{n\in\mathbb{N}}(u_{1,n})$
$\chi_{K_2} = \inf_{n\in\mathbb{N}}(u_{2,n})$. Ekkor $\inf_{n\in\mathbb{N}}((u_{1,n}) \vee (u_{2,n})) = \chi_{K_1\cup K_2}$

$(K_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K},\ \forall i \in \mathbb{N}\ \exists (u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}(X) :\ \inf_{n\in\mathbb{N}} u_{i,n} = \chi_{K_i}$.
Ekkor: $\inf_{(i,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_{i,n} = \chi_{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i}$

Az előző lemmát akarjuk alkalmazni, ehhez azonban meg kell mutatnunk, hogy az $\{x : u(x) \geq 1\}$ alakú halmazok mind $\mathscr{K}$-ban vannak (azaz $\mathscr{K}_0 \subseteq \mathscr{K}$). Mivel $\mathscr{U}(X)$ Stone-tulajdonságú vektorháló, $u \in \mathscr{U}(X)$, ezért:

$$u_n := 2^n((u \wedge 1_X) - (u \wedge (1 - 2^n) \cdot 1_X)) \in \mathscr{U}(X) \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{4.1}$$

látható továbbá, hogy $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = \chi_{\{x:\ u(x)\geq 1\}}$. Definiáljuk ezek után $\mathscr{K}$-n a következő $\Phi_0 : \mathscr{K} \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvényt:

$$\Phi_0(K) := \inf\{\Phi(u) :\ u \in \mathscr{U}(X),\ \chi_K \leq u\} \quad (K \in \mathcal{K}) \tag{4.2}$$

Ha erre a Φ_0-ra teljesülnek a 3.2.4. Tételben szereplő (α) és (β) feltevések, akkor a 3.3.7. Tétel szerint létezik egy $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-algebra, és azon egy μ mérték, amely maximális a Φ_0-t kiterjesztő, $\mathscr{K}$-ra nézve belülről reguláris mértékek között. Igazoljuk tehát ezen $(\alpha) - (\beta)$ tulajdonságokat:

(α): Legyen $K, L \in \mathscr{K},\ L \subseteq K$, $\gamma := \sup\{\Phi_0(K') :\ K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq K \setminus L\}$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\Phi_0(K) = \Phi_0(L) + \gamma$.

$(\geq)$ Legyen $K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq K \setminus L$, $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $K', L \in \mathscr{K}$, így $\exists (u_{K,n})_{n\in\mathbb{N}},\ \exists (u_{L,n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X) :\ \chi_{K'} = \inf_{n\in\mathbb{N}}(u_{K',n}),\ \chi_L = \inf_{n\in\mathbb{N}}(u_{L,n})$. Legyen továbbá $u \in \mathscr{U}(X)$ olyan, hogy $\Phi(u) \leq \Phi_0(K) + \varepsilon$ teljesüljön. Ilyen u a Φ definíciója szerint létezik. Definiáljuk ezek után a $v_{K',n}$ és $v_{L,n}$ függvényeket a következőképp:

$$v_{K',n} := u \wedge \inf_{i\leq n} u_{K',i}, \quad v_{L,n} := u \wedge \inf_{i\leq n} u_{L,i} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Világos, hogy $(v_{K',n})_{n\in\mathbb{N}},\ (v_{L,n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X)$, továbbá $(v_{K',n} \wedge v_{L,n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó függvénysorozat, amelyre $\inf_{n\in\mathbb{N}}(v_{K',n} \wedge v_{L,n}) = \chi_{K'} \wedge \chi_L = 0$. Így a Φ monoton σ-folytonossága miatt $\Phi(v_{K',n} \wedge v_{L,n}) \to 0 \quad (n \to +\infty)$. Következésképp a fenti $\varepsilon > 0$-hoz $\exists n \in \mathbb{N} : (v_{K',n} \wedge v_{L,n}) < \varepsilon$.

Ekkor: $\Phi_0(L) + \Phi_0(K') \leq \Phi(v_{L,n}) + \Phi(v_{K',n}) = \Phi(v_{L,n} + v_{K',n}) =$
$= \Phi(v_{L,n} \vee v_{K',n}) + \Phi(v_{L,n} \wedge v_{K',n}) \leq \Phi(u) + \varepsilon \leq \Phi_0(K) + \varepsilon + \varepsilon$.
Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, így $\Phi_0(L) + \Phi_0(K') \leq \Phi_0(K)$. Ezek után $K' \in \mathscr{K}$-ra szuprémumot véve: $\Phi_0(L) + \gamma \leq \Phi_0(K)$.

$(\leq)$ Legyen $\varepsilon \in (0,1)$ tetszőleges, $u_K, u_L \in \mathscr{U}(X)$ olyanok, hogy $\chi_K \leq u_K$ és $\chi_L \leq u_L$, továbbá $\Phi(u_L) \leq \Phi_0(L) + \varepsilon$. Tekintsük a következő K' halmazt:

$$K' := \{x :\ x \in K,\ (1_X \wedge u_K(x)) - u_L(x) \geq \varepsilon\} \subseteq K.$$

Ekkor fennáll, hogy $K' \subseteq K \setminus L$. Ugyanis $1 - u_L(x) \geq \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon \geq u_L(x)$, ami pedig $x \in L$ esetén nem teljesül, ugyanis $1 = \chi_L(x) \leq u_L(x)$.

Sőt, az is igaz, hogy $K' \in \mathscr{K}$, mert $\frac{1}{\varepsilon}[(u_K \wedge 1_X) - u_L] \in \mathscr{U}(X)$, következésképp $\{x : \frac{1}{\varepsilon}((u_K(x) \wedge 1_X) - u_L(x)) \geq 1\} \in \mathscr{K}$.
Ezek után, ha $w \in \mathscr{U}(X), w \geq \chi_{K'}$, akkor $u_L(x) + w(x) \geq 1 - \varepsilon \quad (\forall x \in \mathscr{K})$ és

$$\Phi_0(K) \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\Phi(u_L + w) \leq \frac{1}{1-\varepsilon}(\Phi_0(L) + \varepsilon + w).$$

Az egyenlőtlenséget $(1-\varepsilon)$-nal szorozva, és $w \geq \chi_{K'}$-re infimumot véve:

$$(1-\varepsilon)\Phi_0(K) \leq \Phi_0(L) + \varepsilon + \Phi_0(K') \leq \Phi_0(L) + \varepsilon + \gamma.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi volt, azt kaptuk, hogy $\Phi_0(K) \leq \Phi_0(L) + \gamma$, amit bizonyítani akartunk.

(β) Legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K}$ monoton fogyó halmazsorozat üres metszettel. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists (u_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X) : \inf_{k\in\mathbb{N}} u_{n,k} = \chi_{K_n}$. Tekintsük a következő $v_n := \inf_{i,j\leq n} u_{i,j}$ függvényeket. Nyilvánvaló, hogy $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X)$, v_n monoton fogyó függvénysorozat és $\inf_{n\in\mathbb{N}} v_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \chi_{K_n} = 0$.
Így $\inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi(v_n) = 0$. Node $\chi_{K_n} = \inf_{j\leq n} \chi_{K_j} \leq v_n \Rightarrow \Phi_0(K_n) \leq \Phi(v_n)$. Következésképp $\inf_{n\in\mathbb{N}} \Phi_0(K_n) = 0$.

Igazoltuk tehát a Φ_0 funkcionál rendelkezik az (α) és (β) tulajdonságokkal, így hivatkozhatunk a 3.2.4. Tételre, amely szerint van Φ_0-t kiterjesztő μ mérték. Sőt, ez a μ a $\mathscr{K}_0$ elemein a $\mu(K) = \inf\{\Phi(u) : \; u \in \mathscr{U}(X), \; u \geq \chi_K\}$ egyenlőséggel van definiálva, azaz teljesíti a 4.1.1. Lemma feltételeit. Ezzel megmutattuk, hogy $\Phi(u) = \int_X u \, d\mu \quad (\forall u \in \mathscr{U}(X))$.
Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Mielőtt megkezdenénk az unicitás bizonyítását, érdemes megjegyezni, hogy van olyan $\mathscr{U}(X)$ függvényháló, amely nem teljesíti a Stone-feltételt, és létezik olyan pozitív, monoton σ-folytonos lineáris funkcionál, amelyhez nem létezik a fenti μ reprezentáló mérték. A példa Bogatchevtől származik [1].

4.1.3. Példa. *Jelölje $\mathscr{F}$ azon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvények halmazát, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonsággal: valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ valós számra a*

$\{t:\ t\in[0,1],\ f(t)\neq\alpha(1+t)\}$ halmaz első kategóriájú. (Azaz előáll megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként.) Ekkor $\mathscr{F}$ függvényháló. Definiáljuk Φ-t $\mathscr{F}$-en a következő módon: $\Phi(f):=\alpha$, ahol $\alpha\in\mathbb{R}$ az f-hez tartozó, a fentieknek eleget tevő konstans. Ekkor Φ pozitív lineáris funkcionál, monoton σ-folytonos, és nem létezik μ mérték az $I:=[0,1]\subseteq R$ halmazon, hogy $\Phi(f)=\int_I f\,d\mu$ teljesüljön tetszőleges $f\in\mathscr{F}$ esetén.

Bizonyítás. Elsőként jegyezzük meg, hogy Φ funkcionál jóldefiniált, azaz: $\forall f\in\mathscr{F}\ \exists!\alpha\in\mathbb{R}$, amelyre a $\{t:\ f(t)\neq\alpha(1+t)\}$ halmaz első kategóriájú. Adott $f\in\mathscr{F}$-re $E_f:=\{t: f(t)=\alpha_f(1+t)\}$, ahol α_f az f-hez tartozó konstans. Ha $f,g\in\mathscr{F}$, akkor $E_f\cup E_g$ első kategóriájú és $f(t)+f(g)=(\alpha+\beta)(1+t)$ az $E_f\cap E_g$-n kívül. Emellett tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ konstansra $cf(t)=c\alpha_f$ az E_f halmazon kívül, így $\mathscr{F}$ lineáris tér. Nyilvánvaló, hogy $|f|\in\mathscr{F}$, ha $f\in\mathscr{F}$, így $\mathscr{F}$ függvényháló, amely nem teljesíti a Stone-feltételt. Szintén nyilvánvaló, hogy a Φ funkcionál lineáris, és hogy $f\geq 0$ esetén $\Phi(f)\geq 0$.
Tegyük fel, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{F},\ f_n\downarrow 0$. Ekkor az E_{f_n} halmazok uniója első kategóriájú. Emiatt:

$$\exists t\in[0,1]:\ \Phi(f_n)=\frac{f_n(t)}{1+t}\quad(\forall n\in\mathbb{N}),$$

ugyanis $[0,1]$ második kategóriájú, a Baire-féle kategória tétel szerint. Innen persze azonnal látszik, hogy $\Phi(f_n)\to 0$, ha $n\to+\infty$. Ezzel igazoltuk, hogy Φ monoton σ-folytonos.

Tegyük fel indirekt, hogy van olyan μ mérték $[0,1]$-en, amelyre nézve minden $\mathscr{F}$-beli függvény mérhető, és fennál a $\Phi(f)=\int_{[0,1]}f\,d\mu$ egyenlőség. Mivel a $\Psi(t):=1+t$ függvény az $\alpha=1$ konstanssal $\mathscr{F}$-beli, ezért a $[0,1]$ minden nyílt részhalmaza mérhető. Továbbá az a tény, hogy $\Psi\geq 1$, maga után vonja, hogy $\mu([0,1])\leq\Phi(\Psi)=1$, így a μ megszorítása a $\mathcal{B}([0,1])$ Borel σ-algebrára véges mérték.
Ekkor van olyan első kategóriájú E Borel halmaz, amelyre: $\mu([0,1]\setminus E)=0$. (Az E halmazt megkonstruálhatjuk, mint sehol sem sűrű K_n kompakt halmazok ($\mu([0,1]\setminus K_n)<\frac{1}{n}$) uniója. Ilyen K_n-eket pedig úgy készítünk, hogy

egy sehol sem sűrű, 0-mértékű halmaz pontjai körül kidobunk elég kis intervallumokat.)

Tekintsük ezek után a következő f függvényt: $f(t) := 0$, ha $t \in E$, $f(t) := 1 + t$, ha $t \in [0,1] \setminus E$. Világos, hogy $f \in \mathscr{F}$ és $\Phi(f) = 1$. Másfelől viszont $\int_{[0,1]} f \ d\mu = 0$, ami ellentmondás. $\square$

4.2. A reprezentáló mérték egyértelműsége

Végezetül rátérhetünk az unicitás kérdésére. Használni fogjuk a 4.1. szakaszban bevezetett $\mathscr{K}_0$, illetve $\mathscr{K}$ jelöléseket, azaz
$\mathscr{K}_0 := \{K : \ K \subseteq X, \exists u \in \mathscr{U}(X) : K = \{x : \ u(x) \geq 1\}\}$
$\mathscr{K} := \{K : \ K \subseteq X, \ \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X) : \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n(x) = \chi_K(x) \ \ (\forall x \in X)\}$.

4.2.1. Megjegyzés. *Rögtön jegyezzük meg, hogy a $\mathscr{K}$ halmazrendszer által generált σ-algebra megyegyezik a $\mathscr{K}_0$ által generált σ-algebrával. (Jelölje ezeket $\sigma_A(\mathscr{K})$, illetve $\sigma_A(\mathscr{K}_0)$.)*

Bizonyítás. A $\sigma_A(\mathscr{K}_0) \subseteq \sigma_A(\mathscr{K})$ tartalmazás nyilvánvaló, hiszen $\mathscr{K}_0 \subseteq \mathscr{K}$, ahogy azt az egzisztencia tétel bizonyításában igazoltuk. Megfordítva, elegendő megmutatnunk, hogy $K \in \mathscr{K} \Rightarrow K \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$. Legyen tehát $K \in \mathscr{K}$. Feltétel szerint $\exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X) : \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n(x) = \chi_K(x) \ \ (\forall x \in X)$. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N} : \ K \subseteq \{x : x \in X, u_n(x) \geq 1\}$, így

$$K \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x : x \in X, \ u_n(x) \geq 1\}.$$

Tegyük fel most, hogy $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x : x \in X, \ u_n(x) \geq 1\}$. Az u_n választása miatt $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n(x_0) \geq 1 \Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n(x_0) = 1 \Rightarrow x_0 \in K$, következésképp $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x : x \in X, \ u_n(x) \geq 1\}$, azaz $K \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$ $\square$

4.2.2. Tétel. *Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathscr{U}(X)$ Stone-tulajdonságú vektorháló. Ekkor tetszőleges $\Phi : \mathscr{U}(X) \to \mathbb{R}$ pozitív, monoton σ-folytonos lineáris funkcionálhoz egyértelműen létezik olyan $\mathscr{K}$-ra nézve belülről reguláris μ mérték $\sigma_A(\mathscr{K}_0)$-on, amelyre*

$$\Phi(u) = \int_X u \, d\mu \quad (\forall u \in \mathscr{U}(X))$$

Bizonyítás. A 3.2.4 Tételben megmutattuk, hogy létezik olyan μ mérték, amely kiterjeszti (4.2).-vel definiált Φ_0 funkcionált, sőt maximális a $\mathscr{K}$-ra nézve belülről reguláris kiterjesztések között. Mivel $\mathscr{K}_0 \subseteq \mathscr{K} \subseteq \Sigma$, ezért nyilvánvalóan a $\sigma_A(\mathscr{K}_0) \subseteq \Sigma$ tartalmazás is fennáll, hiszen Σ σ-algebra. Következésképp a $\mu|_{\sigma_A(\mathscr{K}_0)}$ mérték kielégíti a 3.3.8. Tétel feltételeit, így egyetlen a Φ_0 funkcionál $\mathscr{K}$-ra nézve belülről reguláris kiterjesztései között.

Tegyük fel most, hogy ν egy tetszőleges $\sigma_A(\mathscr{K}_0)$-on értelmezett mérték, amely $\mathscr{K}$-ra nézve belülről reguláris, és amelyre $\Phi(u) = \int_X u \, d\nu$. Legyen $K \in \mathscr{K}$ tetszőleges halmaz. Ekkor (4.1) szerint létezik $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X)$ függvénysorozat, amelyre $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \chi_K$, következésképp a Beppo-Levi tétel szerint

$$\mu(K) = \int_X \chi_K \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X u_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X u_n \, d\nu = \int_X \chi_K \, d\nu = \nu(K).$$

Azaz $\mu|_{\mathscr{K}} = \nu|_{\mathscr{K}}$, azaz ν is kiterjesztése Φ_0-nak, amiből már következik, hogy $\mu = \nu$. □

Az eddigiekben csak egyfajta "feltételes" unicitást bizonyítottunk, ugyanis a reprezentáló mértéktől megköveteltük, hogy az adott $\mathscr{K}$ halmazrendszerre nézve belülről reguláris legyen. Felmerül a kérdés, hogy mely esetekben hagyható el ez a megkötés, azaz mikor áll fenn valódi egyértelműség.

A továbbiakban μ jelöl a 4.2.2. Tételben szereplő reprezentáló mértéket, amely belülről reguláris a $\mathscr{K}$ halmazrendszerre nézve, ν pedig egy tetszőleges mérték, amelyre $\Phi(u) = \int_X u \, d\nu$ $(\forall u \in \mathscr{U}(X))$.

4.2.3. Lemma. *Tetszőleges $A \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$-ra $\mu(A) \leq \nu(A)$.*

Bizonyítás. Legyen $K \in \mathscr{K}$ tetszőleges. Attól, hogy ν-ről nem tettük fel, hogy belülről reguláris $\mathscr{K}$-ra nézve, a $\mu|_{\mathscr{K}} = \nu|_{\mathscr{K}}$ egyenlőség még fennáll. Létezik ugyanis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}(X)$, amelyre $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \chi_K$, így

$$\mu(K) = \int_X \chi_K \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X u_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X u_n \, d\nu = \int_X \chi_K \, d\nu = \nu(K),$$

ahogy azt a 4.2.2. Tételben igazoltuk. Legyen most $A \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$ tetszőleges. Ekkor μ belső regularitása és a fenti egyenlőség miatt:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) = \nu(K) : \ K \subseteq A, \ K \in \mathscr{K}\} \leq \nu(A),$$

azaz $\mu \leq \nu$, amit bizonyítani akartunk. □

4.2.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $A \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$ halmaz befedhető $\mathscr{K}$-belivel. Ekkor $\mu(A) = \nu(A)$.*

Bizonyítás. Legyen tehát $A \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$, $K \in \mathscr{K}$, amelyre $A \subseteq K$. Ekkor

$$\mu(K) = \mu(A) + \mu(K \setminus A) \leq \nu(A) + \nu(K \setminus A) = \nu(K).$$

Kihasználva, hogy $\mu|_{\mathscr{K}} = \nu|_{\mathscr{K}}$ és hogy $\mu \leq \nu$, adódik, hogy $\mu(A) = \nu(A)$. □

4.2.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $A \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$ halmaz befedhető megszámlálható sok $\mathscr{K}$-belivel. Ekkor $\mu(A) = \nu(A)$.*

Bizonyítás. Legyen tehát $A \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K}$, amelyre $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ekkor $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap K_n)$. A klasszikus diszjunktizációs eljárással megkonstruálható az A-nak egy olyan diszjunkt $A = \bigcup^*_{n\in\mathbb{N}}(A \cap K'_n)$ felbontása, amelyben minden tényező befedhető $\mathscr{K}$-belivel. A 4.2.4. Lemma szerint $\forall n \in \mathbb{N}$-re $\mu(A \cap K'_n) = \nu(A \cap K'_n)$, így

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap K'_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A \cap K'_n) = \nu(A),$$

amit bizonyítani akartunk. □

4.2.6. Tétel. *Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathscr{U}(X)$ Stone-féle vektorháló. Ha X befedhető megszámlálható sok $\mathscr{K}$-beli halmazzal, akkor egyértelműen létezik μ mérték $\sigma_A(\mathscr{K}_0)$-on, amelyre*

$$\Phi(u) = \int_X u \; d\mu \; (\forall u \in \mathscr{U}(X)).$$

Bizonyítás. Ha X befedhető megszámlálható sok $\mathscr{K}$-belivel, akkor minden $A \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$-beli is. Alkalmazva a 4.2.5.Lemmát minden $A \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$ halmazra azt kapjuk, hogy $\mu(A) = \nu(A)$, azaz $\mu = \nu$. $\square$

4.3. A klasszikus tétel

Ebben a bekezdésben, a fenti 4.2.6. Tétel alkalmazásaként meghatározzuk a $C(K)$-tér topologikus duálisát, ahol K kompakt topologikus tér.

4.3.1. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér. Az $F \subseteq X$ halmazt zéró halmaznak nevezzük, ha létezik olyan $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $F = f^{-1}[\{0\}]$.*

4.3.2. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér. Ekkor a zéró halmazok által generált σ-algebrát Baire σ-algebrának nevezzük, és $\mathcal{B}a(X)$-szel jelöljük.*

4.3.3. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér. Ekkor Baire mérték alatt $\mathcal{B}a(X)$-en értelmelmezett mértéket értünk.*

4.3.4. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $f : X \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f Baire-mérhető, vagy $\mathcal{B}a(X)$-mérhető, ha az $\mathbb{R}$ tetszőleges nyílt G részhalmazára $f^{-1}[G] \in \mathcal{B}a(X)$.*

4.3.5. Lemma. *Legyen (X, τ) topologikus tér. Ekkor $\mathcal{B}a(X)$ a legszűkebb σ-algebra, amelyre nézve minden valós értékű folytonos függvény mérhető.*

Bizonyítás. Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiáljuk a g függvényt a következőképp:

$$g(x) := max(0, f(x) - \alpha) \quad (x \in X).$$

Ekkor g folytonos, és $\{x: \ f(x) \leq \alpha\} = \{x: \ g(x) = 0\}$, azaz $\{x: \ f(x) \leq \alpha\}$ zéró halmaz, és így $\{x: \ f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{B}a(X)$, azaz f mérhető.

Megfordítva, legyen Σ tetszőleges σ-algebra, amelyre nézve minden valós értékű folytonos függvény mérhető. Legyen továbbá $F \subseteq X$ tetszőleges zéró halmaz. Ekkor definíció szerint létezik olyan folytonos g függvény, amelyre $F = g^{-1}[\{0\}]$. Ekkor persze $F \in \Sigma$, és így $\mathcal{B}a(X) \subseteq \Sigma$. $\square$

4.3.6. Definíció. *Legyen (X, τ) topologikus tér. Ekkor $C_b(X)$ jelöli az X-en értelmezett valós értékű korlátos folytonos függvények halmazát.*

4.3.7. Tétel. *Legyen (X, τ) topologikus tér. Ekkor a $C_b(X) \to \mathbb{R}$ pozitív, monoton σ-folytonos lineáris funkcionálok, és az X-en értelmezett véges Baire mértékek között bijekció áll fenn.*

Bizonyítás. Legyen μ egy véges Baire mérték X-en. Ekkor minden $f \in C_b(X)$ függvény integrálható μ szerint, továbbá a $\Phi_\mu : f \mapsto \int_X f \ d\mu$ lineáris funkcionál pozitív, és a Fatou-lemma miatt monoton σ-folytonos is.
Megfordítva, legyen most $\Phi : C_b(X) \to \mathbb{R}$ egy pozitív, monoton-σ folytonos lineáris funkcionál. Ekkor a 4.2.6. Tétel alkalmazható, ugyanis $1_X \in C_b(X)$, így $X \in \mathscr{K}$. Következésképp egyértelműen létezik olyan μ mérték $\sigma_A(\mathscr{K}_0)$-on, amelyre:

$$\Phi(f) = \int_X f \ d\mu \quad (f \in C_b(X)).$$

Igazolni fogjuk, hogy $\sigma_A(\mathscr{K}_0) = \mathcal{B}a(X)$, azaz μ Baire-mérték. Legyen G tetszőleges zéró halmaz. Létezik tehát $g \in C_b(X)$ függvény, amelyre $G = \{x: \ g(x) = 0\} = \{x: \ g(x) \leq 0\} \cap \{x: \ g(x) \geq 0\}$.
Ugyanakkor $\{x: \ g(x) \leq 0\}$ és $\{x: \ g(x) \geq 0\}$ $\sigma_A(\mathscr{K}_0)$-beliek, ugyanis $\{x: \ g(x) \geq 0\} = \{x: \ g(x) + 1 \geq 1\}$ és $1_X \in C_b(X) \Rightarrow g + 1_X \in C_b(X)$. Hasonlóan igazolható, hogy $\{x: \ g(x) \leq 0\} \in \sigma_A(\mathscr{K}_0)$. Ezzel megmutattuk, hogy $\mathcal{B}a(X) \subseteq \sigma_A(\mathscr{K}_0)$. A másik irányú tartalmazáshoz legyen $K \in \mathscr{K}_0$ tetszőleges. Ekkor létezik $k \in C_b(X) : \ K = \{x: \ k(x) \geq 1\}$. Node

$\{x: \ k(x) \geq 1\} = \{x: \ k(x) - 1 \geq 0\} = \{x: \ (k(x)-1) \wedge 0 \geq 0\} = \{x: \ (k(x)-1) \wedge 0 = 0\} \in \mathcal{B}a(X)$, hiszen $(k(x)-1) \wedge 0 \in C_b(X)$.

Igazoltuk tehát, hogy $\sigma_A(\mathscr{K}_0) = \mathcal{B}a(X)$, azaz az 4.2.6 tételben szereplő mérték Baire-mérték. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

4.3.8. Tétel. *Legyen (K, τ) kompakt topologikus tér. Ekkor minden $\Phi \in C(K)^*$ folytonos lineáris funkcionálhoz egyértelműen létezik μ előjeles Baire mérték, amelyre*

$$\Phi(f) = \int_K f \ d\mu \quad (f \in C(K)).$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $C(K)$ ellátva a maximum-normával normált vektorháló, így a 2.2.2. Tétel szerint tetszőleges $\Phi \in C(K)^*$ folytonos lineáris funkcionál előáll két pozitív folytonos lineáris funkcionál különbségeként. A Dini Tétel szerint ezek mindegyike monoton σ-folytonos is, alkalmazható tehát a 4.3.7. Tétel, hiszen kompakt topologikus téren $C(K) = C_b(K)$.
Azaz $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$, és léteznek μ_1, illetve μ_2 Baire-mértékek (méghozzá egyértelműen), amelyekre tetszőleges $f \in C(K)$ esetén fennáll, hogy:

$$\Phi_+(f) = \int_K f \ d\mu_+, \quad \Phi_-(f) = \int_K f \ d\mu_-.$$

Mivel $1_X \in C(K)$, ezért μ_1 és μ_2 véges Baire mértékek, így $\mu := \mu_1 - \mu_2$ előjeles Baire mérték. $\square$

5. fejezet

A Riesz reprezentációs tétel - egy másik megközelítés

Ebben a fejezetben bemutatjuk a Tétel egy másik változatának rövid és frappáns bizonyítását. Az alapgondolat ugyanaz, mint Jürgen Kindler cikkében [10], azonban ott nem esik szó az unicitásról. Azon túl, hogy ezt a hiányosságot egy elegáns bizonyítással pótoljuk, több észrevételt is teszünk magát a reprezentáló mértéket illetően. Előre megjegyezzük, hogy az eddigiektől eltérően az integrálelméletnek nem a lépcsősfüggvényeken keresztül történő felépítésével dolgozunk majd. Továbbá mérték alatt nem σ-algebrán, hanem σ-gyűrűn értelmezett, kiterjesztett valós értékű nemnegatív σ-additív halmazfüggvényt értünk.

Célunk, hogy a dolgozat ezen része a Bevezetőben és az 1. Fejezetben leírtakkal kiegészítve önmagában is olvasható legyen.

A most következő felépítés és az egyértelműség bizonyítása teljes egészében Czách László munkája. Ragaszkodni fogunk az általa írt kéziratban használt jelölésekhez.

5.1. Definíciók, jelölések

5.1.1. Jelölés. *Legyen X tetszőleges halmaz, $f : X \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor $X(f > c) := \{x \in X : f(x) > c\}(c \in \mathbb{R})$. Hasonlóan értendőek az $X(f = c)$, $X(f < c)$, $X(f \neq c)$ jelölések.*

5.1.2. Definíció. *Legyen X tetszőleges nemüres halmaz, $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ X-beli σ-gyűrű. Az $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt mérhetőnek nevezzük az $\mathscr{S}$ σ-gyűrűre vonatkozóan, ha minden $c \in \mathbb{R}$ mellett $X(f \neq 0) \cap X(f > c) \in \mathscr{S}$. Ha az $\mathscr{S}$ σ-algebra, akkor f mérhetősége azt jelenti, hogy $X(f > c) \in \mathscr{S}$ minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.*

5.1.3. Definíció. *Legyen V valós vektorháló. Jelölje $\mathcal{B}_0$ azt a legszűkebb X-beli σ-gyűrűt, amelyre nézve a vektorháló minden eleme mérhető. Ezt a $\mathcal{B}_0$ σ-gyűrűt a V vektorháló által meghatározott Baire-féle σ-gyűrűnek, elemeit pedig Baire-halmazoknak nevezzük.*

Könnyen előállíthatjuk a $\mathcal{B}_0$ σ-gyűrű egy generátorrendszerét, azaz olyan $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{B}_0$ halmazredszert, amelyre $\mathscr{S}(\mathcal{G}_0) = \mathcal{B}_0$, ahol $\mathscr{S}(\mathcal{G}_0)$-lal jelöltük a $\mathcal{G}_0$ halmazrendszert tartalmazó legszűkebb X-beli σ-gyűrűt.

Tekintsük ugyanis a következő

$$\mathcal{G}_0 := \{X(f > 1) : \ f \in V_+\}$$

halmazrendszert, amelyre nyilván $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{B}_0$, így $\mathscr{S}(\mathcal{G}_0) \subseteq \mathcal{B}_0$. Ha megmutatjuk, hogy minden $f \in V$ függvény $\mathscr{S}(\mathcal{G}_0)$-mérhető, akkor $\mathcal{B}_0$ értelmezése miatt $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathscr{S}(\mathcal{G}_0)$, így a fentiek figyelembe vételével igazolva lesz, hogy

$$\mathcal{B}_0 = \mathscr{S}(\mathcal{G}_0). \tag{5.1}$$

Legyen először $f \in V_+$. Ekkor $c > 0$ mellett $\frac{1}{c}f \in V_+$, így $X(f > c) = X(\frac{1}{c}f > 1) \in \mathcal{G}_0 \subseteq \mathscr{S}(\mathcal{G}_0)$, továbbá $X(f > 0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X(f > \frac{1}{n}) \in \mathscr{S}(\mathcal{G}_0)$, végül $c < 0$ mellett $X(f \neq 0) \cap X(f > c) = X(f > 0) \in \mathscr{S}(\mathcal{G}_0)$, amivel megmutattuk, hogy minden V_+-beli függvény $\mathscr{S}(\mathcal{G}_0)$-mérhető.

Mivel bármely $f \in V$ előáll $f = f_+ - f_-$ alakban, ahol $f_+, f_- \in V_+$, továbbá két mérhető függvény különbsége is mérhető, ezért minden V-beli függvény $\mathscr{S}(\mathcal{G}_0)$-mérhető. Ezzel a kívánt (5.1) egyenlőséget igazoltuk.

Könnyen igazolható továbbá, hogy a $\mathcal{G}_0$ halmazrendszer háló, azaz bármely $A, B \in \mathcal{G}_0$ esetén egyúttal $A \cup B$ és $A \cap B \in \mathcal{G}_0$. Ha ugyanis $A, B \in \mathcal{G}_0$, akkor létezik $f, g \in V_+$, amelyre $A = X(f > 1)$, $B = X(g > 1)$. Világos, hogy $A \cup B = X(f \vee g > 1)$, $A \cap B = X(f \wedge g > 1)$.
Közismert, hogy ha $\mathscr{H}$ halmazrendszer X-beli háló, akkor a

$$\mathcal{P}_0 := \{A \setminus B : \ A, B \in \mathscr{H}, B \subseteq A\}$$

egyenlőséggel értelmezett $\mathcal{P}_0$ halmazrendszer X-beli félgyűrű, amely szintén generátorrendszere $\mathcal{B}_0$-nak, tehát az (5.1) egyenlőség mellett fennáll a

$$\mathcal{B}_0 = \mathscr{S}(\mathcal{P}_0) \tag{5.2}$$

egyenlőség is.

Korábban megemlítettük, hogy a $C_0(X)$ (X lokálisan kompakt Hausdorff tér), $C(K)$ (K kompakt topologikus tér), $L^p(X, \mathscr{S}, \mu)$ terek mindegyike Stone-tulajdonságú vektorháló. Érdemes meggondolnunk, hogy ezen terekben hogyan írható le a Baire-féle σ-gyűrű.

Tekintsük először a $C_0(X)$ Stone-féle vektrohálót, ahol X lokálisan kompakt T_2 tér. Jelölje $\mathcal{G}^*$ az X tér olyan nyílt részhalmazainak összességét, amelyeknek lezárása kompakt, továbbá legyen $\mathcal{K}_\sigma$ az X tér olyan részhalmazainak összessége, amelyek előállnak megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítéseként. Ha $f \in C_0(X)$, $f \geq 0$, akkor $X(f > 1)$ nyílt halmaz, $X(f > 1) \subseteq \operatorname{supp} f$, így $X(f > 1) \in \mathcal{G}^*$, továbbá az

$$X(f > 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X(f \geq 1 + \frac{1}{n})$$

egyenlőségből következik, hogy $X(f>1) \in \mathcal{K}_\sigma$, ami azt jelenti, hogy a

$$\mathcal{G}_0 := \{X(f>1) : \ f \in C_0(X), f > 0\}$$

halmazrendszer minden eleme relatív kompakt nyílt, és egyidejűleg $\mathcal{K}_\sigma$-beli halmaz, vagyis $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}^* \cap \mathcal{K}_\sigma$.

Legyen most $G \in \mathcal{G}^* \cap \mathcal{K}_\sigma$ egy tetszőleges halmaz. Ekkor G előáll $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ alakban, ahol mindegyik K_n halmaz az X kompakt részhalmaza. Mivel a $G^c := X \backslash G$ halmaz zárt, ezért az Uriszon-lemma miatt van olyan $f_n : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $0 \le f_n \le 1$ és

$$f_n|_{K_n} = 1 \qquad f_n|_{G_n^c} = 0.$$

Tekintsük az $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n$ egyenlőséggel értelmezett $f : X \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvényt, amelyre $f|_G > 0$, $f|_{G^c} = 0$, így $\mathrm{supp} f \subseteq \overline{G}$. Mivel $\overline{G}$ kompakt, ezért $f \in C_0(X)$. Legyen továbbá $F \in C_0(X)$ tetszőleges olyan függvény, amelyre $F|_G = 1$, és $0 \le F \le 1$ az egész X-en. Végül legyen $g := f + F$, ekkor $g \in C_0(X)$, $X(g>1) = G$, tehát $G \in \mathcal{G}_0$, amivel megmutattuk, hogy $\mathcal{G}^* \cap \mathcal{K}_\sigma \subseteq \mathcal{G}_0$. Innen már következik, hogy $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}^* \cap \mathcal{K}_\sigma$, tehát a $C_0(X)$ vektorháló által meghatározott Baire-féle σgyűrű a következő alakban áll elő:

$$\mathcal{B}_0 = \mathscr{S}(\mathcal{G}^* \cap \mathcal{K}_\sigma).$$

Jelölje $\mathcal{K}_0$ az X tér kompakt G_δ halmazainak összességét. Igazolható, hogy a $\mathcal{K}_0$ halmazrendszer is generátorrendszere $\mathcal{B}_0$-nak, azaz $\mathcal{B}_0 = \mathscr{S}(\mathcal{K}_0)$.

A fentiekből következik, hogy ha X kompakt-T_2 tér, akkor a $C(X)$ vektorháló által meghatározott Baire-féle σ-gyűrű generátorrendszere: $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \cap \mathcal{K}_\sigma$, ahol $\mathcal{G}$ az X tér nyílt halmazainak osztálya.

Ha $(X, \mathscr{S}, \mu)$ egy mértéktér, akkor $1 \le p < +\infty$ mellett az $L^p(X, \mathscr{S}, \mu)$ vektorháló Baire-halmazainak σ-gyűrűje azonos az $\mathscr{S}$ σ-véges mértékű halmazainak összességével.

5.1.4. Definíció. *Ha* $f : X \to \mathbb{R}_+$ *függvény, akkor a*

$$[0, f) := \{(x, y) : \ x \in X, \ y \in [0, f(x))\} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times [0, f(x))$$

egyenlőséggel értelmezett $[0, f) \subseteq X \times \mathbb{R}_+$ *halmazt az* f *függvény szubgráfjának nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $A \subseteq X$ és $c > 0$ esetén $[0, c\chi_A) = A \times [0, c)$. Legyenek f és $g : X \to \mathbb{R}_+$ olyan nemnegatív függvények, amelyekre $g \leq f$. Jelölje $[g, f)$ a $[0, f) \setminus [0, g)$ halmazt. Ekkor

$$[g, f) = \{(x, y) : \ x \in X, \ y \in [g(x), f(x))\}.$$

5.1.5. Lemma. *Legyen* V *egy valós vektorháló. Ekkor a következő*

$$\mathbb{P} := \{[g, f) : \ f, g \in V_+, \ g \leq f\}$$

halmazrendszer $(X \times \mathbb{R}_+)$*-beli félgyűrű.*

Bizonyítás. Tekintsük a V_+-beli függvények szubgráfjaiból álló

$$\mathbb{H} := \{[0, f) : \ f \in V_+\}$$

halmazrendszert. Ekkor $\mathbb{H}$ háló, és így az önmagával vett zárójeles különbsége, azaz a

$$\{[0, f) \setminus [0, g) : \ [0, f), \ [0, g) \in \mathbb{H}, \ [0, g) \subseteq [0, f)\}$$

halmazrendszer félgyűrű. Nyilvánvaló, hogy a fenti halmazrendszer azonos $\mathbb{P}$-vel. $\square$

Végezetül igazolunk egy kiterjesztési tételt, amelyre a reprezentációs tétel bizonyításánál szükségünk lesz.

5.1.6. Definíció. *A* $\mathcal{P}$ *félgyűrűn értelmezett* $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *mérték* σ*-véges, ha minden* $A \in \mathcal{P}$ *halmaz befedhető megszámlálható sok véges* μ*-mértékű* $\mathcal{P}$*-beli halmaz uniójaként.*

5.1.7. Lemma. *Jelölje $\mathcal{T}$ az olyan $\sigma(\mathcal{P})$-beli halmazok osztályát, amelyek befedhetők megszámlálható sok véges μ-mértékű halmaz uniójával. Ekkor $\mathcal{T}$ σ-gyűrű. Következésképp ha $\mathcal{P}$ σ-véges mérték, akkor $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$, és így $\mathscr{S}(\mathcal{P}) = \mathcal{T}$.*

Bizonyítás. Legyen $T_1,\ T_2 \in \mathcal{T}$. Ekkor nyilván $T_1 \setminus T_2 \in \mathcal{T}$, hiszen a T_1 fedése fedi $T_1 \setminus T_2$-t is. A $\mathcal{T}$ σ-uniózártsága pedig egyszerűen következik abból, hogy megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható. □

5.1.8. Tétel. *Ha μ σ-véges mérték a $\mathcal{P}$ félgyűrűn, akkor a μ kiterjesztése $\mathscr{S}(\mathcal{P})$-re egyértelmű.*

Bizonyítás. Elsőként jegyezzük meg, hogy tetszőleges félgyűrűn értelmezett mértéknek van σ-additív kiterjesztése a generált σ-gyűrűre, éspedig az úgynevezett Caratheodory kiterjesztés. Ismert továbbá, hogy ha $\widetilde{\mu}$ jelöli a μ Caratheodory kiterjesztését, $\overline{\mu}$ pedig egy tetszőleges kiterjesztést, akkor $\overline{\mu} \leq \widetilde{\mu}$.

Legyen $A \in \mathcal{P}$ tetszőleges véges mértékű halmaz. Ekkor persze $\widetilde{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$. Vegyük észre, hogy ekkor az A halmaz minden mérhető H részhalmazára $\widetilde{\mu}(H) = \overline{\mu}(H)$. Ugyanis

$$\mu(A) = \overline{\mu}(A) = \overline{\mu}(H) + \overline{\mu}(A \setminus H) \leq \widetilde{\mu}(H) + \widetilde{\mu}(A \setminus H) = \widetilde{\mu}(A) = \mu(A)$$

és $\overline{\mu}(H) \leq \widetilde{\mu}(H)$, továbbá $\overline{\mu}(A \setminus H) \leq \widetilde{\mu}(A \setminus H)$ a fentiek szerint, ezért egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $\overline{\mu}(H) = \widetilde{\mu}(H),\ \overline{\mu}(A \setminus H) = \widetilde{\mu}(A \setminus H)$.

Legyen ezután $H \in \mathscr{S}(\mathcal{P})$ tetszőleges. A fenti lemma szerint létezik olyan véges μ-mértékű halmazokból álló $\mathcal{P}$-beli sorozat, amely befedi H-t. Mivel $\mathcal{P}$ félgyűrű, ezért a fedőhalmazok választhatóak páronként diszjunktnak. Azaz

$$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P} : A_i \cap A_j = \emptyset, ha\ (i \neq j),\ \mu(A_n) < +\infty,\ H \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Ekkor a $H_n := H \cap A_n$ jelölés mellett $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = H,\ H_n \subseteq A_n\ (n \in \mathbb{N})$, és így $\widetilde{\mu}(H) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mu}(H_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(H_n) = \overline{\mu}(H)$. Ezzel megmutattuk, hogy a μ mérték kiterjesztése a $\mathcal{P}$ félgyűrűről a generált σ-gyűrűre egyértelmű. □

5.2. A tétel bizonyítása

5.2.1. Tétel. *Ha V egy Stone-féle valós vektorháló és $\mathcal{B}_0$ az általa meghatározott Baire-féle σ-gyűrű, akkor minden $\Phi : V \to \mathbb{R}$ monoton σ-folytonos pozitív lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen olyan $\mu : \mathcal{B}_0 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mérték, hogy minden $f \in V$ mellett*

$$\Phi(f) = \int_X f \; d\mu,$$

emellett $\mu|_{\mathcal{G}_0}$ véges, így μ σ-véges mérték.

Bizonyítás. Tekintsük az előző lemmában megadott

$$\mathbb{P} := \{[g, f) : \; g, f \in V_+, g \leq f\}$$

félgyűrűt, és értelmezzük rajta a ν halmazfüggvényt a következő egyenlőséggel:

$$\nu([g, f)) := \Phi(f - g) = \Phi(f) - \Phi(g) \quad ([g, f) \in \mathbb{P}),$$

Nyilvánvaló, hogy μ nemnegatív, véges értékű halmazfüggvény a $\mathbb{P}$ félgyűrűn. Megmutatjuk, hogy σ-additív is. Legyen

$$[g, f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [g_n, f_n)$$

a $[g, f) \in \mathbb{P}$ halmaz egy $\mathbb{P}$-beli diszjunkt felbontása. Ekkor minden $x \in X$ mellett $[g(x), f(x)) = \bigcup^*_{n \in \mathbb{N}} [g_n(x), f_n(x))$, és így

$$f(x) - g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f_n(x) - g_n(x)) \quad (x \in X),$$

vagyis $f - g = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f_n - g_n)$, ahol $f - g \in V_+$, $f_n - g_n \in V_+$ $(n \in \mathbb{N})$, így Φ monoton σ-folytonossága miatt $\Phi(f - g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi(f_n - g_n)$, azaz

$$\nu([g, f)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu([g_n, f_n)),$$

amivel igazoltuk, hogy a $\nu : \mathbb{P} \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvény σ-additív, tehát mérték a $\mathbb{P}$ félgyűrűn.

Ismeretes, hogy a $\mathbb{P}$-n értelmezett ν mérték egyértelműen kiterjeszthető a generált $\mathscr{S}(\mathbb{P})$ σ-gyűrűre. Az egyszerűség kedvéért az $\mathscr{S}(\mathbb{P})$-re kiterjesztett mértéket is ν-vel jelöljük. Tekintsük a $\mathcal{B}_0$ Baire-féle σ-gyűrűnek a fentiekben bevezetett

$$\mathcal{G}_0 := \{X(g > 1) : \ g \in V_+\}$$

generátorrendszerét, továbbá az

$$\mathcal{I}_0 := \{[0, c) : \ c \in \mathbb{R}_+\}$$

intervallumrendszert. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{G}_0 \times \mathcal{I}_0 \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{P})$.

Legyen $G := X(g > 1) \in \mathcal{G}_0$ és $I := [0, c) \in \mathcal{I}_0$, tehát itt $g \in V_+$ és $c \geq 0$, legyen továbbá

$$g_n := (n(g - g \wedge 1)) \wedge 1_X \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{5.3}$$

Ekkor a Stone-feltétel figyelembevételével $g_n \in V_+$ $(n \in \mathbb{N})$. Könnyen igazolható továbbá, hogy $g_n \uparrow \chi_G$ és egyúttal $cg_n \uparrow c\chi_G$, amiből következik, hogy a $([0, cg_n))_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat is monoton növekedő, emellett

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, cg_n) = [0, c\chi_G) = G \times [0, c) = G \times I. \tag{5.4}$$

Mivel itt $[0, cg_n) \in \mathbb{P}$, ezért $G \times I \in \mathscr{S}(\mathbb{P})$, amiből a kívánt tartalmazás már következik.

Jelölje $\mathcal{B}_+$ a $[0, +\infty)$ intervallumba eső Borel halmazok összességét. Ekkor $\mathcal{B}_+$ σ-gyűrű (sőt, σ-algebra), emellett könnyen látható, hogy az $\mathcal{I}_0$ generátorrendszere $\mathcal{B}_+$-nak, vagyis $\mathcal{B}_+ = \mathscr{S}(\mathcal{I}_0)$. Ezek után $\mathcal{G}_0 \times \mathcal{I}_0 \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{P})$-ből már következik, hogy $\mathscr{S}(\mathcal{G}_0 \times \mathcal{I}_0) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{P})$, következésképp

$$\mathscr{S}(\mathcal{G}_0 \times \mathcal{I}_0) = \mathscr{S}(\mathscr{S}(\mathcal{G}_0) \times \mathscr{S}(\mathcal{I}_0)) = \mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+) \Rightarrow \mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{P}). \tag{5.5}$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f := \sum_{i \leq n} c_i \chi_{B_i}$ egy $\mathcal{B}_0$-mérhető nemnegatív lépcsősfüggvény X-en, azaz: $c_i \geq 0$, $B_i \in \mathcal{B}_0$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, ha $i \neq j$ $(i, j \leq n)$. Ekkor $[0, f) = \bigcup_{i \leq n}^{*} B_i \times [0, c_i)$, amiből látható, hogy $[0, f) \in \mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+)$.

Ha most $f \in V_+$ egy tetszőleges függvény, akkor van olyan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nemnegatív, $\mathcal{B}_0$-mérhető lépcsősfüggvényekből álló sorozat, amelyre $f_n \uparrow f$. Ekkor $[0, f_n) \in \mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+)$ $(n \in \mathbb{N})$, így $[0, f) \in \mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+)$, amiből következik, hogy $\mathbb{P} \subseteq \mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+)$ és egyuttal

$$\mathscr{S}(\mathbb{P}) \subseteq \mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+). \tag{5.6}$$

Ebből és az 5.5 tartalmazásból kapjuk, hogy

$$\mathscr{S}(\mathbb{P}) = \mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+). \tag{5.7}$$

Ha $B \in \mathcal{B}_0$ egy tetszőleges halmaz, akkor $B \times [0, 1) \in \mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+) = \mathscr{S}(\mathbb{P})$. Ennek figyelembe vételével a $\mathcal{B}_0$ σ-gyűrűn értelmezhető a μ halmazfüggvény a következő egyenlőséggel:

$$\mu(B) := \nu(B \times [0, 1)) \quad (B \in \mathcal{B}_0).$$

Könnyen igazolható, hogy a $\mu : \mathcal{B}_0 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ halmazfüggvény mérték. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $g \in V_+$-ra $\mu(G) < +\infty$ és $G = X(g > 1) \in \mathcal{G}_0$. Mivel $\chi_G \leq g$, ezért $G \times [0, 1) = [0, \chi_G) \subseteq [0, g)$, amiből következik, hogy

$$\mu(G) = \nu(G \times [0, 1)) \leq \nu([0, g)) = \Phi(g) < +\infty.$$

Megmutattuk tehát, hogy $\mu|_{\mathcal{G}_0}$ véges. Mivel $\mathcal{G}_0$ generátorrendszere $\mathcal{B}_0$-nak, ezért innen már egyszerűen adódik, hogy a $\mu : \mathcal{B}_0 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mérték σ-véges.

Jelölje λ az egydimenziós Lebesgue-mérték $\mathcal{B}_0$-ra való leszűkítését, és tekintsük a $\mu \times \lambda : \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ szorzatmértéket. Ez nyilván σ-véges a $\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+$ félgyűrűn, így az 5.1.8. Tétel szerint a generált $\mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+)$ σ-gyűrűre való kiterjesztése egyértelmű ($\mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+) = \mathscr{S}(\mathbb{P})$). Az egyszerűség kedvéért jelölje a kiterjesztett mértéket is $\mu \times \lambda$.

Megmutatjuk, hogy $\nu = \mu \times \lambda$. Ehhez elegendő igazolni, hogy:

$$\nu|_{\mathcal{G}_0 \times \mathcal{I}_0} = \mu \times \lambda|_{\mathcal{G}_0 \times \mathcal{I}_0}. \tag{5.8}$$

Tekintsük ugyanis a $\mathcal{P}_0 := \{A \setminus B : \ A, B \in \mathcal{G}_0, B \subseteq A\}$ félgyűrűt, amely generátorrendszere $\mathcal{B}_0$-nak. Jelölje továbbá $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P} := \{I \setminus J : \ I, J \in \mathcal{I}_0, J \subseteq I\}$ halmazrendszert. Ekkor persze $\mathcal{P}$ is félgyűrű, amelyre $\mathscr{S}(\mathcal{P}) = \mathcal{B}_+$. Fennáll továbbá, hogy $\mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}$ félgyűrű, amelyre $\mathscr{S}(\mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}) = \mathscr{S}(\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_+) = \mathscr{S}(\mathbb{P})$. Viszont (5.8) fennállásából következik, hogy

$$\nu|_{\mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}} = \mu \times \lambda|_{\mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}}.$$

Az (5.8) igazolásához legyen $G \times I \in \mathcal{G}_0 \times \mathcal{I}_0$ egy tetszőleges halmaz. Tehát $G = X(g > 1) \in \mathcal{G}_0$, $I = [0, c) \in \mathcal{I}_0$, ahol $g \in V_+,\ c \geq 0$. A korábbi (5.3) és (5.4) egyenlőségek felhasználásával

$$\nu(G \times I) = \lim_{n \to +\infty} \nu([0, cg_n)) = \lim_{n \to +\infty} \Phi(cg_n) = c \lim_{n \to +\infty} \Phi(g_n), \tag{5.9}$$

amiből $c = 1$ esetén nyerjük, hogy

$$\mu(G) = \nu(G \times I) = \lim_{n \to +\infty} \nu([0, cg_n)) = \lim_{n \to +\infty} \Phi(cg_n). \tag{5.10}$$

Innen $\nu(G \times I) = c\mu(G) = \mu(G)\lambda(I)$, amiből a $\nu|_{\mathcal{G}_0 \times \mathcal{I}_0} = \mu \times \lambda|_{\mathcal{G}_0 \times \mathcal{I}_0}$ egyenlőség már következik.

A most bizonyított $\nu = \mu \times \lambda$ egyenlőségből a tétel már könnyen adódik: Legyen ugyanis $f \in V_+$ egy tetszőleges függvény. Mivel f $\mathcal{B}_0$-mérhető, ezért μ-integrálható, emellett

$$\int_X f \ d\mu = (\mu \times \lambda)([0, f)).$$

Másrészt a $\nu : \mathbb{P} \to \mathbb{R}_+$ mérték definíciója szerint: $\Phi(f) = \nu([0, f))$, így:

$$\Phi(f) = \int_X f \ d\mu \quad (f \in V_+)$$

Mivel minden $f \in V$ függvény előáll két V_+-beli függvény különbségeként, ezért a fenti egyenlőség minden $f \in V$ függvényre is igaz, amivel a tétel lényeges részét igazoltuk.

Hátra van még a mérték unicitásának igazolása. Tegyük fel, hogy a μ mértéken kívül létezik másik $\widetilde{\mu} : \mathcal{B}_0 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mérték, amelyre fennáll, hogy:

$$\Phi(f) = \int_X f \; d\widetilde{\mu} \quad (\forall f \in V).$$

Legyen $G = X(g > 1) \in \mathcal{G}_0$ egy tetszőleges halmaz, és tekintsük az (5.3) egyenlőséggel értelmezett $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V_+$ függvénysorozatot. Ekkor a fentiek miatt $\int_X g_n \; d\mu = \int_X g_n \; d\widetilde{\mu} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.
Mivel $g_n \uparrow \chi_G$, ezért az utóbbi egyenlőség a Beppo-Levi tétel felhasználásával kapjuk, hogy $\mu(G) = \widetilde{\mu}(G) \quad (G \in \mathcal{G}_0)$. Így fennáll az is, hogy $\mu|_{\mathcal{G}_0} = \widetilde{\mu}|_{\mathcal{G}_0}$, amiből már következik, hogy $\mu = \widetilde{\mu}$, amit bizonyítani akartunk. $\square$

5.3. Függvényterek duálisa

Végezetül lássuk a fenti tétel néhány alkalmazását.

Ha X kompakt T_2-tér, akkor a maximum normával ellátott $C(X)$ tér normált vektorháló, tehát a korábbi 2.2.2. Tétel szerint minden $\Phi \in C(X)^*$ folytonos lineáris funkcionál előáll két pozitív lineáris és folytonos funkcionál különbségeként.

Ha $(X, \mathscr{S}, \mu)$ egy tetszőleges mértéktér, akkor a szokásos normával ellátott $L^p := L^p(X, \mathscr{S}, \mu)$ függvénytér normált vektorháló, így az előzőhöz hasonlóan tetszőleges $\Phi \in L^p$ folytonos lineáris funkcionál előáll két pozitív lineáris és folytonos funkcionál különbségeként.

Legyen most X lokálisan kompakt T_2-tér, jelölje $\mathscr{K}$ az X összes kompakt részhalmazából álló halmazrendszert. Tetszőleges $K \in \mathscr{K}$ mellett jelölje $C_0^K(X)$ a $C_0(X)$ vektortér azon elemeinek halmazát, amelyek tartója K-ban fekszik, azaz

$$C_0^K(X) := \{f : f \in C_0(X),\ suppf \subseteq K\}.$$

Ekkor persze $C_0^K(X)$ lineáris altere $C_0(X)$-nek. Jelölje a továbbiakban I_K a $C_0^K(X)$ altérnek a $C_0(X)$-be való beágyazását, vagyis azt a leképezést, amelyre

$$I_K(f) = f \quad (f \in C_0^K(X))$$

Ha mindegyik $C_0^K(X)$ alteret ellátjuk a maximum normával, és τ_K-val jelöljük a $C_0^K(X)$-beli normatopológiát, akkor létezik $C_0(X)$-en olyan legerősebb lokálisan konvex τ topológia, amelyik mellett mindegyik $I_K : C_0^K(X) \to C_0(X)$ beágyazás folytonos. Ezt a τ topológiát a $\{\tau_K :\ K \in \mathscr{K}\}$ topológia-család induktív limeszének nevezik [14].

Könnyen igazolható, hogy egy $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál pontosan akkor τ-folytonos, ha Φ-nek mindegyik $C_0^K(X)$-ra való leszűkítése τ_K-folytonos, ami egyenértékű azzal, hogy mindegyik $K \in \mathscr{K}$ halmazhoz létezik olyan $M_K \geq 0$ állandó, hogy minden $f \in C_0^K(X)$ esetén

$$|\Phi(f)| \leq M_K \|f\|. \tag{5.11}$$

Könnyen látható, hogy minden $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$ τ-folytonos lineáris funkcionál korlátos változású is. Legyen $f \in C_0(X)$ tetszőleges, $K := \text{supp} f$. Ekkor bármely $g \in C_0(X), g \leq f$ esetén $g \in C_0^K(X)$, így az (5.11) egyenlőtlenség g-re való alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\Phi(g) \leq |\Phi(g)| \leq M_K\|g\| \leq M_K\|f\|,$$

amiből már következik, hogy $\sup\{\Phi(g) :\ g \in C_0(X)_+,\ g \leq f\} \leq +\infty$.

Ebből és a 2.2.2. Tételből következik, hogy tetszőleges $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$ τ-folytonos lineáris funkcionál előáll két pozitív lineáris funkcionál különbségeként.

Megfordítva, legyen most $\Phi : C_0^K(X) \to \mathbb{R}$ egy pozitív lineáris funkcionál. Megmutatjuk, hogy Φ τ-folytonos. Legyen $K \in \mathscr{K}$ egy tetszőleges halmaz. Ekkor az Uriszon-lemma alapján van olyan $g_K \in C_0(X)$ függvény, amelyre $0 \leq g_K \leq 1$, és $g_K|_K = 1$. Ekkor minden $f \in C_0^K(X)$ függvényre: $-\|f\|g \leq f \leq \|f\|g$, amiből $-\|f\|\Phi(g) \leq \Phi(f) \leq \|f\|\Phi(g)$. Ekkor az $M_K := \Phi(g)$ jelölés mellett $|\Phi(f)| \leq M_K\|f\|$, ami azt jelenti, hogy a Φ-nek a $C_0(X)$-re való leszűkítése τ_K-folytonos, amiből következik, hogy Φ τ-folytonos.

A fentiek figyelembevételével már nyilvánvaló, hogy minden $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$ τ-folytonos lineáris funkcionál előáll két τ-folytonos pozitív lineáris funkcionál különbségeként.

Lássuk tehát, hogy miként alkalmazható a Riesz integrál-reprezentációs tétel. Elsőként vezessük be a következő fogalmat:

5.3.1. Definíció. *A $(V, \|.\|)$ normált vektorhálót Riesz-féle vektorhálónak nevezzük, ha egyrészt V Stone tulajdonságú, másrészt minden $\Phi \in V^*$ folytonos (azaz norma-topológiában folytonos) lineáris funkcionál egyúttal monoton σ-folytonos is.*

Ha tehát V Riesz-féle vektorháló, akkor minden $\Phi \in V^*$ folytonos lineáris funkcionál előáll

$$\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$$

alakban, ahol Φ_+, illetve Φ_- mindegyike monoton σ-folytonos pozitív lineáris funkcionál, de akkor az 5.2.1. Tétel szerint a V vektorhálóhoz tartozó $\mathcal{B}_0$ Baire-féle σ-gyűrűn léteznek olyan μ_+, illetve μ_- mértékek, hogy minden $f \in V$ mellett

$$\Phi_+(f) = \int_X f \, d\mu_+, \quad \textit{illetve} \quad \Phi_-(f) = \int_X f \, d\mu_-$$

A fentiek szerint igaz tehát a következő tétel:

5.3.2. Tétel. *Ha $(V, \|.\|)$ egy Riesz-féle vektorháló és $\mathcal{B}_0$ a hozzá tartozó Baire-féle σ-gyűrű, akkor léteznek olyan μ_+ és μ_- mértékek $\mathcal{B}_0$-on, hogy tetszőleges $f \in V$ esetén*

$$\Phi(f) = \int_X f \; d\mu_+ \; - \; \int_X f \; d\mu_-. \tag{5.12}$$

Ha a μ_+ és a μ_- mértékek közül legalább az egyik véges, akkor a $\mu := \mu_+ - \mu_-$ jelölés bevezetésével $\mu : \mathcal{B}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ előjeles mérték, emellett minden $f \in V$ esetén

$$\Phi(f) = \int_X f \; d\mu. \tag{5.13}$$

Legyen most X kompakt Hausdorff tér. Ekkor a maximum-normával ellátott $C(X)$ vektortér tér Riesz-féle vektorháló, mert ha $\Phi \in C(X)^*$ egy norma-folytonos lineáris funkcionál, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(X)_+$ olyan függvénysorozat, amelyre $f_n \downarrow 0$, akkor a jól ismert Dini tétel miatt $f_n \to 0$ egyenletesen X-en, de akkor Φ folytonossága miatt $\Phi(f_n) \to 0$, ami éppen azt jelenti, hogy Φ monoton σ-folytonos. Alkalmazható tehát a fenti tétel. Figyelembe véve, hogy $1_X \in V$, a μ_+, illetve μ_- mértékek mindegyike véges, megkaptuk a következő klasszikus eredményt:

5.3.3. Tétel. *Ha X kompakt Hausdorff tér, akkor a maximum-normával ellátott $(C(X), \|.\|)$ tér esetén minden $\Phi \in C(X)^*$ norma-folytonos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen olyan véges értékű $\mu : \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}$ előjeles mérték a $C(X)$-hez tartozó $\mathcal{B}_0$ Baire-féle σ-gyűrűn, hogy minden $f \in C(X)$ esetén*

$$\Phi(f) = \int_X f \; d\mu$$

5.3.4. Megjegyzés. *Mivel a mérték unicitását csak pozitív lineáris és monoton σ-folytonos funkcionálok esetén igazoltuk, ezért némi meggondolást igényel a fenti tételben szereplő μ előjeles mérték egyértelműsége. Ha létezne két ν és $\mu : \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}$ véges értékű előjeles mérték, hogy minden $f \in C(X)$ mellett*

$$\Phi(f) = \int_X f \; d\mu = \int_X f \; d\nu,$$

akkor tekintsük a μ és ν előjeles mértékek $\mu = \mu_+ - \mu_-$ és $\nu = \nu_+ - \nu_-$ Jordan felbontását. A fentiek szerint minden $f \in C(X)$-re fennáll, hogy:

$$\int_X f\ d(\mu_+ + \nu_-) = \int_X f\ d(\nu_+ + \mu_-),$$

amiből következik, hogy $\mu_+ + \nu_- = \nu_+ + \mu_-$ és így $\mu = \nu$.

A Riesz-féle vektorháló fogalma a fentinél általánosabban is értelmezhető. Ha ugyanis V egy Stone-féle vektorháló, τ pedig olyan lokálisan konvex vektortopológia V-n, hogy a V-n értelmezett minden τ-folytonos lineáris funkcionál előáll két τ-folytonos pozitív lineáris funkcionál különbségeként, másrészt minden τ-folytonos lineáris funkcionál egyúttal monoton σ-folytonos is, akkor a (V, τ) lokálisan konvex topologikus vektorteret is Riesz-féle vektorhálónak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a fentiekben igazolt reprezentációs tétel ebben az esetben is érvényes.

Legyen X lokálisan kompakt T_2-tér, akkor a fentiekben láttuk, hogy az X-en értelmezett valós értékű folytonos és kompakt tartójú függvények halmaza Stone-féle vektorháló. Jelölje τ a már definiált induktív limesz topológiát $C_0(X)$-en. Ekkor $(C_0(X), \tau)$ lokálisan konvex tér. A fentiekben láttuk, hogy $C_0(X)$-en minden τ-folytonos lineáris funkcionál előáll két τ-folytonos pozitív lineáris funkcionál különbségeként, továbbá a Dini tétel segítségével könnyen igazolható, hogy minden τ-folytonos lineáris funkcionál egyúttal monoton σ-folytonos is. Ezekből következik, hogy $(C_0(X), \tau)$ Riesz-féle vektorháló, tehát a reprezentációs tétel minden $C_0(X)$-en értelmezett τ-folytonos lineáris funkcionálra is teljesül.

Következő alkalmazásként leírjuk az $L^p := L^p(X, \mathscr{S}, \nu)$ tér duális terét abban az esetben, amikor $(X, \mathscr{S}, \nu)$ σ-véges mértéktér.

Elsőként igazoljuk az önmagában is érdekes, fordított Hölder-egyenlőtlenség (vagy Toeplitz-Landau) néven ismert tételt [4]

5.3.5. Tétel. *Legyen* $(X, \mathscr{S}, \nu)$ *mértéktér,* $1 \leq p \leq +\infty$, q *legyen olyan, hogy* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *teljesüljön. Ha az* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *függvény mérhető, és az* $X(f \neq 0)$ *halmaz* σ*-véges mértékű, és minden* $g \in L^q$ *esetén az* $fg \in L^1$*, akkor* $f \in L^p$*.*

Bizonyítás. Elsőként jegyezzük meg, hogy $\nu(X(f = +\infty)) = 0$. Ha ugyanis $\nu(X(f = +\infty)) \neq 0$, akkor a ν σ-végessége miatt:

$$\exists S \in \mathscr{S} : S \subseteq X(f = +\infty),\ 0 < \nu(S) < +\infty$$

Ekkor $\chi_S \in L^q$, és feltétel szerint $\int_X |f\chi_S|\ d\nu < +\infty$, másrészt $\int_X |f\chi_S|\ d\nu = \int_S |f|\ d\nu = +\infty$, ami ellentmondás.

Ezzel tehát megmutattuk, hogy f ν-majdnem mindenütt véges értékű. Mivel az $X(f \neq 0)$ halmaz feltétel szerint σ-véges mértékű így létezik olyan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{S}$-mérhető lépcsősfüggvény-sorozat, amelyre $s_n(x) \to f(x)$ (továbbá $|s_n(x)| \uparrow |f(x)|$) ν-majdnem mindenütt pontonként.

Definiáljuk ezek után $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén a $\Phi_n : L^q \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált a

$$\Phi_n(g) := \int_X s_n g\ d\nu \quad (g \in L^q)$$

képlettel. (A fenti $\int_X s_n g\ d\nu$ integrál létezik, mert $s_n g = s_n g_+ - s_n g_-$ és $s_n g_+ \leq f g_+$, $s_n g_- \leq f g_-$, így $|s_n g| \leq |fg|$, fg-ről pedig feltettük, hogy L^1-beli.)
Könnyen igazolható, hogy $\|\Phi_n\|_{(L^q)^*} = \|s_n\|_{L^p}$, így a Banach-Steinhaus tétel szerint

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n\|_{L^p} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Phi_n\|_{(L^q)*} = \|s_n\|_{L^p} \leq M.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $1 \leq p < +\infty$ esetén

$$M^p \geq \lim_{n\to+\infty} \|s_n\|_{L^p}^p = \lim_{n\to+\infty} \int_X |s_n|^p d\nu = \int_X |f|^p\ d\nu$$

teljesül a Lebesgue monoton konvergencia tétel szerint, és így $f \in L^p$. Ha $p = +\infty$, akkor $M \geq \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x)$ ν-majdnem minden $x \in X$ esetén, így $f \in L^\infty$. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

5.3.6. Tétel. *Legyen $(X, \mathscr{S}, \nu)$ σ-véges mértékér, $1 \leq p \leq +\infty$. Ekkor minden $L^p := L^p(X, \mathscr{S}, \nu)$-n értelmezett $\Phi \in (L^p)^*$ folytonos lineáris funkcionálhoz található egyetlen olyan $g \in L^q$ függvény (ahol $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), hogy tetszőleges $f \in L^p$ mellett*

$$\Phi(f) = \int_X fg \; d\mu.$$

Bizonyítás. A Beppo-Levi tétel segítségével könnyen igazolható, hogy az L^p téren értelmezett minden norma-folytonos lineáris funkcionál monoton σ-folytonos is, ezért $(L^p, \|.\|)$ normált tér Riesz-féle vektorháló, emellett könnyen látható, hogy az L^p-hez tartozó Baire-féle σ-gyűrű azonos $\mathscr{S}$-sel. Legyen tehát $\Phi \in (L^p)^*$ folytonos lineáris funkcionál. Ekkor Φ előáll $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$ alakban, ahol Φ_+ és Φ_- monoton σ-folytonos pozitív lineáris funkcionálok. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint léteznek olyan μ_+ és μ_- mértékek $\mathscr{S}$-en, hogy minden $f \in L^p$ esetén

$$\Phi_+(f) = \int_X f \; d\mu_+, \quad \Phi_-(f) = \int_X f \; d\mu_-.$$

Ekkor azonban előfordulhat, hogy a μ_+ és a μ_- mértékek egyike sem véges. Egyszerűen igazolható azonban, hogy a μ_+ és μ_- egyaránt abszolút folytonosak a ν mértékre nézve, és mivel μ_+, μ_- és ν mértékek σ-végesek, ezért alkalmazható a Radon-Nikodym tétel. Azaz léteznek olyan nemnegatív véges értékű mérhető függvények X-en - jelölje ezeket g_+, illetve g_- -, hogy minden $H \in \mathscr{S}$ mellett

$$\nu_+(H) = \int_H g_+ \; d\nu, \quad \nu_-(H) = \int_H g_- \; d\nu.$$

Ekkor $\Phi_+(f) = \int_X fg_+ \; d\nu$, $\Phi_-(f) = \int_X fg_- \; d\nu$, így a $g := g_+ - g_-$ jelölés bevezetésével:

$$\Phi(f) = \int_X fg \; d\nu. \tag{5.14}$$

Meg kell még mutatnunk, hogy $g \in L^q$. Azt látjuk, hogy a fenti (5.14) integrál tetszőleges $f \in L^p$ esetén véges. Ekkor hivatkozhatunk a fordított

Hölder-egyenlőtlenségre, amelyből már adódik, hogy $g \in L^q$. Mivel g egyértelmű, a bizonyítást befejeztük. $\square$

Végezetül leírjuk az $L^\infty(X)$ függvénytér duálisát. A szakdolgozat ezen része független a korábbiaktól. Nem használjuk fel eddigi tételeinket, pusztán ismertetünk egy önmagában is érdekes eredményt. A tételt már Kantorovich igazolta az 1964-es könyvében [9].

5.3.7. Definíció. *Legyen X tetszőleges nemüres halmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ekkor jelölje $B(X, \mathcal{A})$ az X-en értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező, korlátos $\mathcal{A}$-mérhető függvények vektorterét. A $B(X, \mathcal{A})$ vektortér a szuprémum normával ellátva Banach tér.*

5.3.8. Lemma. *Legyen $X \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ algebra. Ekkor tetszőleges $\Phi : B(X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionálhoz egyértelműen létezik μ korlátos változású végesen additív előjeles mérték, amelyre*

$$\Phi(u) = \int_X u \, d\mu,$$

továbbá fennáll, hogy $\|\Phi\|_{B(X,\mathcal{A})^*} = \|\mu\|(X)$, ahol $\|\mu\|$ jelöli a μ teljes változását.

Bizonyítás. Legyen $\Phi \in B(X, \mathcal{A})^*$. Az $\mathcal{A}$ elemein definiáljuk μ-t a

$$\mu(A) := \Phi(\chi_A) \quad (A \in \mathcal{A})$$

egyenlőséggel. Mivel Φ lineáris, ezért μ végesen additív előjeles mérték. Igazoljuk, hogy μ korlátos változású. Legyen $k \in \mathbb{N}$, $(E_n)_{n=1}^k \subseteq \mathcal{A}$ az X egy partíciója. Definiáljuk az $s := \sum_{n=1}^k \operatorname{sgn}(\Phi(\chi_{E_n})) \cdot \chi_{E_n}$ lépcsősfüggvényt. Ekkor persze $s \in B(X, \mathcal{A})$, és

$$\sum_{n=1}^k |\mu(E_n)| = \sum_{n=1}^k \operatorname{sgn}(\Phi(\chi_{E_n})) \cdot \Phi(\chi_{E_n}) = |\Phi(s)| \leq \|\Phi\| \|s\|_\infty = \|\Phi\|.$$

Következésképp $\|\mu\|(X) \leq \|\Phi\|_{B(X,\mathcal{A})^*}$. Igazoljuk ezek után, hogy $\Phi(u) = \int_X u \, d\mu$ fennáll minden $B(X, \mathcal{A})$-beli u függvényre.

Legyen $u \in B(X,\mathcal{A})$ rögzített, $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Tekintsük a $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$ intervallumnak egy ε-nál finomabb $(I_n)_{n=1}^k$ felosztását. Minden $1 \le n \le k$-ra legyen $E_n := \{x : \ x \in X,\ u(x) \in I_n\}$, legyen továbbá $\xi_n \in I_n$ tetszőleges, és definiáljuk az s lépcsősfüggvényt az

$$s(x) := \sum_{n=1}^{k} \xi_n \cdot \chi_{E_n}(x) \quad (x \in X)$$

egyenlőséggel. Ekkor $|u(x) - s(x)| \le \varepsilon$ $(\forall x \in X)$, így $\|u - s\|_\infty \le \varepsilon$. A Φ leképezés linearitását és a $\Phi(\chi_E) = \mu(E)$ egyenlőséget használva
$|\Phi(u) - \int_X s \ d\mu| = |\Phi(u) - \sum_{n=1}^k \xi_n \mu(E_n)| = |\Phi(u) - \sum_{n=1}^k \xi_n \Phi(\chi_{E_n})| = |\Phi(u-s)| \le \|\Phi\|\|u-s\|_\infty \le \|\Phi\| \cdot \varepsilon$.

Ezek után készítsük el az $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$-hoz tartozó s_k lépcsősfüggvényt. Ezekre fennáll, hogy $s_k \to u$ X-en egyenletesen, $\lim_{n\to+\infty} \int_X s_n \ d\mu = \Phi(u)$, és így $\int_X u \ d\mu = \Phi(u)$.

Hátra van még annak igazolása, hogy $\|\Phi\|_{B(X,\mathcal{A})^*} \le \|\mu\|(X)$. Kihasználva, hogy $\|u - s\|_\infty \le \varepsilon$, a háromszög egyenlőtlenség szerint:
$|\Phi(u)| \le |\int_X s \ d\mu| + \|\Phi\|_{B(X,\mathcal{A})^*} \cdot \varepsilon \le \sum_{n=1}^k |\xi_n||\mu(E_n)| + \|\Phi\|_{B(X,\mathcal{A})^*} \cdot \varepsilon \le (\|u\|_\infty + \varepsilon) \sum_{n=1}^k |\mu(E_k)| + \|\Phi\|_{B(X,\mathcal{A})^*} \cdot \varepsilon \le (\|u\|_\infty + \varepsilon)\|\mu\|(X) + \|\Phi\|_{B(X,\mathcal{A})^*} \cdot \varepsilon$.
Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, azt kaptuk, hogy $|\Phi(u)| \le \|u\|_\infty \cdot \|\mu\|$, következésképp $\|\Phi\|_{B(X,\mathcal{A})^*} \le \|\mu\|$, amit bizonyítani akartunk.
Megfordítva, ha μ végesen additív előjeles mérték, akkor a $\Phi(u) := \int_X u \ d\mu$ egyenlőséggel definiált Φ funkcionál nyilvánvalóan lineáris és folytonos. $\square$

Legyen $(X,\mathcal{A},\nu)$ mértéktér, azaz X nemüres halmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-algebra, ν egy $\mathcal{A}$-n értelmezett mérték. Tekintsük a szokásos $L^\infty(X) := L^\infty(X,\mathcal{A},\nu)$ teret.

5.3.9. Tétel. *Tetszőleges $\Phi : L^\infty(X) \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál egyértelműen reprezentálható*

$$\Phi(u) = \int_X u \ d\mu \quad (\forall u \in L^\infty(X)) \tag{5.15}$$

alakban, ahol μ egy $\mathcal{A}$-n értelmezett végesen additív előjeles mérték. Fennáll továbbá, hogy $\|\Phi\|_{L^\infty(X)^*} = \|\mu\|(X)$. Megfordítva, tetszőleges végesen additív előjeles mérték folytonos lineáris funkcionált határoz meg az (5.15) egyenlőséggel.

Bizonyítás. Legyen $\Phi \in L^\infty(X)^*$. Az $L^\infty(X)$ tér elemei a ν-majdnem mindenütt korlátos függvények ekvivalenciaosztályai. Egy adott $u \in B(X, \mathcal{A})$ ekvivalencia osztályát $[u]$-val jelöljük. Ezzel a hozzárendeléssel meghatároztunk egy $B(X, \mathcal{A}) \to L^\infty(X)$ leképezést, amelyre fennáll, hogy $\|[u]\|_{L^\infty(X)} \leq \sup_{x\in X} |u(x)|$. Definiáljuk a következő Φ_0 funkcionált $B(X, \mathcal{A})$-n:

$$\Phi_0(u) := \Phi([u]) \quad (u \in B(X, \mathcal{A})).$$

Ekkor $|\Phi_0(u)| = |\Phi([u])| \leq \|\Phi\|_{L^\infty(X)^*} \|[u]\|_{L^\infty(X)} \leq \|\Phi\|_{L^\infty(X)^*} \cdot \sup_{x\in X} |u(x)|$, és így $\|\Phi_0\|_{B(X,\mathcal{A})^*} \leq \|\Phi\|_{L^\infty(X)^*}$. Másrészt minden ekvivalencia osztályból választható olyan $\widetilde{u} : X \to \mathbb{R}$ reprezentáns, amelyre

$$\sup_{x\in X} |\widetilde{u}(x)| = \|[u]\|_{L^\infty(X)}.$$

Így $\frac{|\Phi([u])|}{\|[u]\|_{L^\infty(X)}} = \frac{|\Phi_0(\widetilde{u})|}{\sup_{x\in X} |\widetilde{u}(x)|} \leq \|\Phi_0\|_{B(X,\mathcal{A})^*}$, következésképp $\|\Phi_0\|_{B(X,\mathcal{A})^*} = \|\Phi\|_{L^\infty(X)^*}$. Mivel $\Phi_0 \in B(X, \mathcal{A})^*$, ezért a fenti 5.3.8. Lemma szerint egyértelműen létezik olyan μ végesen additív előjeles mérték, amelyre

$$\Phi_0(u) = \int_X u \, d\mu \quad \text{és} \quad \|\Phi_0\|_{B(X,\mathcal{A})^*} = \|\mu\|(X).$$

Jegyezzük meg, hogy ha $u, v \in B(X, \mathcal{A})$, $u = v$ ν-majdnem mindenütt, akkor

$$\int_X u \, d\mu = \Phi_0(u) = \Phi([u]) = \Phi([v]) = \Phi_0(v) = \int_X v \, d\mu.$$

Ha speciálisan $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = 0$, akkor $\chi_A \in [0]$ és így $\mu(A) = \int_X \chi_A \, d\mu = \Phi([0]) = 0$. Ezzel megmutattuk, hogy μ korlátos változású előjeles mérték $(X, \mathcal{A}, \nu) - n$.

Megfordítva, nyilvánvaló, hogy ha μ végesen additív előjeles mérték, akkor a $\Phi([u]) = \int_X u \, d\mu$ egyenlőséggel értelmezett Φ funkcionál jóldefiniált, lineáris és folytonos. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] V. I. Bogachev. *Measure theory. Vol. I, II.* Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[2] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[3] R. E. Edwards. *Functional analysis. Theory and applications.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

[4] Irene Fonseca and Giovanni Leoni. *Modern methods in the calculus of variations: L^p spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2007.

[5] D. H. Fremlin. *Measure theory. Vol. 1.* Torres Fremlin, Colchester, 2004. The irreducible minimum, Corrected third printing of the 2000 original.

[6] D. H. Fremlin. *Measure theory. Vol. 4.* Torres Fremlin, Colchester, 2006. Topological measure spaces. Part I, II, Corrected second printing of the 2003 original.

[7] Paul R. Halmos. *Measure Theory.* D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950.

[8] Shizuo Kakutani. Concrete representation of abstract (M)-spaces. (A characterization of the space of continuous functions.). *Ann. of Math. (2)*, 42:994–1024, 1941.

[9] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov. *Functional analysis in normed spaces.* Translated from the Russian by D. E. Brown. Edited by A. P. Robertson. International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 46. The Macmillan Co., New York, 1964.

[10] Jürgen Kindler. A simple proof of the Daniell-Stone representation theorem. *Amer. Math. Monthly*, 90(6):396–397, 1983.

[11] Frigyes Riesz and Béla Sz.-Nagy. *Functional analysis.* Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications Inc., New York, 1990. Translated from the second French edition by Leo F. Boron, Reprint of the 1955 original.

[12] Walter Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[13] Stanisław Saks. *Theory of the integral.* Second revised edition. English translation by L. C. Young. With two additional notes by Stefan Banach. Dover Publications Inc., New York, 1964.

[14] Helmut H. Schaefer. *Topological vector spaces.* The Macmillan Co., New York, 1966.

[15] V. S. Varadarajan. On a theorem of F. Riesz concerning the form of linear functionals. *Fund. Math.*, 46:209–220, 1959.

[16] John von Neumann. *Invariant measures.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.