Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Stabil homotópiaelmélet

Diplomamunka

Bodnár József
Matematikus szak

Témavezető: Szűcs András
Egyetemi tanár
ELTE TTK Analízis Tanszék

Budapest
2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az algebrai topológia alapvető tárgya a topologikus terekhez valamilyen algebrai struktúrát rendelő funktorok tanulmányozása; gondoljunk például a homotópia- és a homológiacsoportokra. Egy topologikus térnek éppen ezen két alapvető csoportja között teremt kapcsolatot az úgynevezett *Hurewicz-homomorfizmus*, mely a homotópiacsoportokat a homológiacsoportokba képező homomorfizmus.

A homotópiacsoportoknál bizonyos esetekben egyszerűbben számolhatók az úgynevezett *stabil homotópiacsoportok*, melyek lényegében a tér sokszoros szuszpenziójának homotópiacsoportjai. A Hurewicz-homomorfizmust a tér sokszoros szuszpenziójára alkalmazva kapjuk a stabil homotópiacsoportokból a homológiacsoportokba képező *stabil Hurewicz-homomorfizmust.*

Ismert, hogy a stabil homotópiacsoportok egy *általánosított homológiaelméletet* alkotnak, ily módon a stabil Hurewicz-homomorfizmus két homológiaelmélet csoportjai közötti leképezés. Ez a leképezés Abel-csoportok közötti homomorfizmus, így tanulmányozásának fő célja viselkedésének meghatározása az Abel-csoportok prímhatvány-rendű komponensein. Jelen munka motivációja Arlettaz [1] cikke, melyben felső becslést ad a stabil Hurewicz-homomorfizmus magjában, ill. komagjában előforduló elemek lehetséges prímrendjeire a szóban forgó tér sokszoros összefüggőségének függvényében.

Az 1. fejezetben röviden ismertetjük Arlettaz cikkének azon következményeit, melyek az elemrendek becslésére vezetnek, majd vázoljuk azt az ötletet, melynek segítségével hasonló becsléseket kaphatunk. Ez az út teljesen eltér az [1] cikkben ismertetettől és a stabil Hurewicz-homomorfizmusnak egy ,,topologikus realizációján" alapszik. Az elv az, hogy mind a stabil homotópiacsoportok, mind a homológiacsoportok előállnak egy-egy alkalmas topologikus tér közönséges homotópiacsoportjaiként, és a két topologikus tér között létezik egy egyszerűen megadható leképezés, mely a homotópiacsoportokon éppen a stabil Hurewicz-homomorfizmus megfelelőjét indukálja.

A 2. fejezetben a homológiacsoportok homotópiacsoportokként való realizálása és az ehhez szükséges *szimmetrikus szorzat* térfunktor kerül ismertetésre. Ez a realizáció a klasszikus Dold–Thom tétel értelmében lehetséges, melynek bizonyítását Hatcher [5] könyve alapján ismertetjük. A fejezet második felében egy, Kallel [7] cikkében megtalálható bizonyítás szerepel a redukált szimmetrikus szorzat összefüggőségének becslésére. Ez lehetővé teszi a szimmetrikus szorzat valamilyen értelemben vett véges közelítését, melyre az utolsó fejezet végén lesz szükségünk.

A 3. fejezet tárgya a stabil homotópiacsoportok realizálása közönséges homotópiacsoportokként. Erre alkalmas térfunktorként nyilvánvalóan adódik a végtelen szuszpenzió végtelen huroktere, mely azonban nehezen kezelhető abból a szempontból, hogy nem látszik semmilyen kapcsolata a szimmetrikus szorzat funktorral. Ismert azonban Barratt és Eccles [2] cikkben leírt konstruktív modellje erre a térre. Ez a konstrukció meglepő hasonlóságot mutat a szimmetrikus szorzattal, és ezt a hasonlóságot kihasználva adódik egy nyilvánvaló leképezés a Barratt–Eccles-konstrukció és a szimmetrikus szorzat között. Ezt a leképezést fogjuk a későbbi fejezetekben tanulmányozni.

Annak bizonyítása, hogy a Barratt–Eccles-funktor valóban közönséges homotópiacsoportokként realizálja a stabil homotópiacsoportokat, szintén a 3. fejezetben szerepel. A szakirodalomban általában megtalálható absztrakt bizonyítás helyett Rourke és Sanderson [11] cikke alapján egy szemléletes, differenciáltopológiai bizonyítást ismertetünk, mely a klasszikus kiegyenesítési tételt használja.

A 4. fejezet a már említett egyszerűen megadható leképezés szerkezetének tanulmányozása. Belátjuk, hogy a leképezés tényleg a stabil Hurewicz-homomorfizmus megfelelőjét indukálja a homotópiacsoportokon. Ahhoz azonban, hogy ez a leképezés „szép” tulajdonságokkal rendelkezzen, mind a Barratt–Eccles-konstrukció terét, mind a szimmetrikus szorzatot le kell cserélni ezek egy-egy, valamilyen értelemben vett véges approximációjára. Az ezekre az approximációkra leszűkített leképezésre alkalmazzuk a *Leray spektrális sorozatot* (megtalálható például Godement [4] könyvében), melynek segítségével információt nyerhetünk a leképezés által a homológiacsoportokon indukált homomorfizmusokról, a magban és komagban előforduló lehetséges prímrendekről.

Végül az 5. fejezetben megmutatjuk, hogy ha például a kiindulási terünk elég sokszorosan összefüggő, akkor a két konstruált térre is átvihetők a véges approximációkra nyert becslések (a 2. fejezetben ismertetett Kallel-eredmény és a 3. fejezetben tett egyszerű észrevétel alapján). A homológiacsoportokra vonatkozó eredmény a Serre–Whitehead tétel segítségével a homotópiacsoportokra is átvihető, ezért valójában a stabil Hurewicz-homomorfizmus magjában és komagjában előforduló prímrendek lehetséges értékeiről szól. Ezzel éppen Arlettaz becsléseit kapjuk.

A dolgozatban topologikus téren általában összefüggő CW-komplexust értünk (ahol nem, ott ezt külön jelezzük). A standard algebrai és differenciáltopológiai fogalmakat és eszközöket ismertnek tételezzük fel, csakúgy, mint a különféle spektrális sorozatokat és a belőlük levonható következtetések általános módszereit.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szűcs Andrásnak az érdekes témát és a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségét, türelmét. Nemcsak a bizonyításokkal és a használt módszerekkel kapcsolatos ötleteivel segítette munkámat, hanem a klasszikus eredmények elmagyarázásával és a hivatkozott cikkek értelmezésével is. A dolgozat korábbi változataiban előforduló matematikai pontatlanságokon túl a sajtóhibákra is felhívta a figyelmemet.

Köszönöm Terpai Tamásnak a 3. fejezet differenciáltopológiai érvelésének precízzé tételét.

1. A stabil Hurewicz-homomorfizmus

A *Hurewicz-homomorfizmus* az X tér $\pi_n(X)$ homotópia- és $H_n(X) := H_n(X;\mathbb{Z})$ egész együtthatós homológiacsoportja közötti homomorfizmus: $h_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$. Jelölje $g \in H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ az n dimenziós gömb homológiacsoportjának generátorát.

1.1. Definíció. *Az n-edik* Hurewicz-homomorfizmus *az a leképezés, melyre $[p] \in \pi_n(X)$ esetén (ahol $p : S^n \to X$) $h_n([p]) := p_H(g) \in H_n(X)$, ahol $p_H : H_n(S^n) \to H_n(X)$ a p leképezés által a homotópiacsoportokon indukált homomorfizmus.*

Ugyanígy definiálható a *relatív Hurewicz-homomorfizmus* egy $B \subset A$ térpárra: $h_n : \pi_n(A,B) \to H_n(A,B)$. A relatív esetben a g generátornak a $H_n(D_n, \partial D_n) \cong \mathbb{Z}$ csoport generátorát kell választani ($(D_n, \partial D_n)$ az n dimenziós tömör golyó és annak határa mint térpár).

Tetszőleges X topologikus térre $S(X)$ vagy SX jelöli a *szuszpenziót*, azaz $S\times[-1,1]$-nek $X \times \{-1\}$, illetve $X \times \{1\}$ egy-egy pontra húzásával való faktorizáltját (az X-re illesztett ,,kettős kúp"). A többszörös szuszpenziót $S^kX := S^k(X) := S(\dots(S(X))\dots)$ jelöli. Pontozott $x_0 \in X$ terekre az $S(X)$ szuszpenzió helyett inkább a *redukált szuszpenzió* funktort (jelölés: $\Sigma X := SX/\{x_0\} \times [-1,1]$, azaz a kettős kúp alappont fölötti ,,alkotóját" összehúzzuk) szoktuk használni (a többszörös redukált szuszpenzióra is használni fogjuk a $\Sigma^k X$ jelölést).

SX és ΣX nyilván homotóp ekvivalensek. Létezik egy $X \to SX$, illetve egy $X \to \Sigma X$ természetes beágyazás ($X \times \{0\} \subset \Sigma X$). Ezenkívül tetszőleges $f : X \to Y$ folytonos leképezésből készíthetünk egy nyilvánvaló $Sf : SX \to SY$ leképezést, hiszen f indukál egy $X \times [-1,1] \to Y \times [-1,1]$ leképezést (Sf tulajdonképpen a két kettős kúp között ,,szintenként" valósítja meg az f leképezést). Hasonlóan, van egy $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ leképezés is.

A homológia *Mayer–Vietoris sorozatának* standard alkalmazása, hogy a (redukált) szuszpenzió elcsúsztatja a homológiacsoportokat:

1.2. Állítás. *$n > 1$ esetén $H_n(\Sigma X; G) \cong H_{n-1}(X; G)$ tetszőleges kommutatív G együtthatócsoportra.*

$\pi_n(X)$ minden elemét egy $S^n \to X$ leképezés reprezentálja, így $\pi_n(X)$ minden eleméhez rendelhetünk egy $S^{n+1} = \Sigma S^n \to \Sigma X$ leképezést, ennek megfelelő ekvivalenciaosztályát véve $\pi_{n+1}(\Sigma X)$ egy elemét kapjuk. Nem nehéz meggondolni, hogy ez az $s : \pi_n(X) \to \pi_{n+1}(\Sigma X)$ hozzárendelés jóldefiniált, sőt, csoporthomomorfizmus (szuszpenzió-homomorfizmus):

Tetszőleges $[p] \in \pi_n(X)$ esetén, ahol $p : S^n \to X$, $s([p]) := [\Sigma p] \in \Sigma X$, ahol $\Sigma p : S^{n+1} = \Sigma S^n \to \Sigma X$.

Az úgynevezett *stabil homotópiacsoportok* definiálásához egy tételre van szükségünk (bizonyítása megtalálható például: Hatcher [5] könyvében, 358. oldal, 4.24. következmény)

1.3. Tétel. (Freudenthal)

Ha X $(n-1)$-szeresen összefüggő CW-komplexus (azaz $\pi_k(X) = 0$, ha $k \leq n-1$) és $i < 2n-1$, akkor az

$$s : \pi_i(X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X)$$

szuszpenzió-homomorfizmus izomorfizmus.

Figyeljük meg azt a következményt, hogy amennyiben X $(n-1)$-összefüggő, úgy ΣX n-összefüggő. A következő definícióhoz pedig lényeges lesz az alábbi:

1.4. Következmény. *A*

$$\pi_i(X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X) \to \pi_{i+2}(\Sigma^2 X) \to \dots$$

sorozatban elég nagy index után végül minden homomorfizmus valójában izomorfizmus, azaz a sorozat tetszőleges X térre stabilizálódik.

Bizonyítás:

$\Sigma^j X$ biztosan $(j-1)$-összefüggő, és elég nagy j-re persze $i + j < 2(j-1) - 1$. ■

1.5. Definíció. *A fenti sorozat stabilizálódott csoportját $\pi_i^s(X)$-szel jelöljük és X i-*edik stabil homotópiacsoportjának *nevezzük:*

$$\exists N : \forall n \geq N : \pi_{i+n}(\Sigma^n X) \cong \pi_i^s(X)$$

Teljes általánosságban még a gömbök stabil homotópiacsoportjai sem ismertek (természetesen $\pi_n^s(S^k) \cong \pi_{n-k}^s(S^0) =: \pi_{n-k}^s$). Ismert viszont, hogy végesen generáltak és bizonyos korlátokat is tudunk mondani a csoport elemeinek rendjére:

1.6. Tétel. (Serre, [13])

Páratlan $k \geq 3$ és páratlan p prím esetén $\pi_n(S^k)$ p-komponense triviális (azaz nincsen benne p rendű elem), ha $n < k + 2p - 3$.

1.7. Következmény. $\pi_n^s = \pi_n^s(S^0)$*-ban nincs p rendű elem (p páratlan prím), ha $p > \frac{n+3}{2}$.*

Könnyű látni, hogy a Hurewicz-homomorfizmus kommutál a szuszpenzióképzéssel: jelölje CX az X-re illesztett kúpot, azaz a $CX := X \times [0,1]/X \times \{1\}$ faktorteret.

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_i(X) & \overset{\cong}{\leftarrow} & \pi_{i+1}(CX,X) & \overset{\sigma}{\rightarrow} & \pi_{i+1}(SX,CX) & \overset{\cong}{\leftarrow} & \pi_{i+1}(SX) \\
\downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h \\
H_i(X) & \overset{\cong}{\leftarrow} & H_{i+1}(CX,X) & \overset{\cong}{\rightarrow} & H_{i+1}(SX,CX) & \overset{\cong}{\leftarrow} & H_{i+1}(SX)
\end{array}$$

A függőleges leképezések a megfelelő (relatív) Hurewicz-homomorfizmusok, a vízszintes leképezések pedig az $X \subset CX \subset SX$ térhármasból vett megfelelő térpárok hosszú egzakt soraiból származnak, illetve a beágyazások indukálják őket. Az alsó sor izomorfizmusai az 1.2. állítás izomorfizmusát adják (ez közvetlenül látszik a Mayer–Vietoris sor gondolatmenetéből), a fölső két izomorfizmus pedig CX pontrahúzhatóságán múlik (a homotopikus hosszú egzakt sor alapján) és a segítségükkel vett azonosításokkal a σ leképezés éppen az s szuszpenzió-homomorfizmust valósítja meg. A h definíciója alapján közvetlenül ellenőrizhető, hogy a diagram valóban kommutatív.

Ennek segítségével tekinthetjük az alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_i(X) & \xrightarrow{s} & \pi_{i+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{s} & \dots & \xrightarrow{s} & \pi_{i+K}(\Sigma^K X) & \cong & \pi_i^s(X) \\
\downarrow h_i & & \downarrow h_{i+1} & & & & \downarrow h_{i+K} & & \downarrow h_i^s \\
H_i(X) & \xrightarrow{\cong} & H_{i+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{\cong} & \dots & \xrightarrow{\cong} & H_{i+K}(\Sigma^K X) & \cong & H_i(X)
\end{array}$$

Itt a függőleges h leképezések a megfelelő Hurewicz-homomorfizmusok, a fölső sor vízszintes leképezései a szuszpenzió-homomorfizmusok, K elegendően nagy ahhoz, hogy a homomorfizmusok izomorfizmusokká stabilizálódjanak (így definíció szerint a $\pi_i^s(X)$ stabil homotópiacsoportokat kapjuk), az alsó sor leképezései az 1.2. állítás miatt izomorfizmusok.

A diagram segítségével kapjuk az úgynevezett *stabil Hurewicz-homomorfizmust:* $h_n^s : \pi_n^s(X) \to H_n(X)$ (a jelölésből az n indexet sokszor elhagyjuk).

Arlettaz [1] cikkében a stabil Hurewicz-homomorfizmus magjának, illetve komagjának exponenseire adja a következő becslést:

1.8. Tétel. (Arlettaz, [1], 4.1. tétel)

$(k-1)$-összefüggő X tér esetén a $h_n^s : \pi_n^s(X) \to H_n(X)$ stabil Hurewicz-homomorfizmusra érvényes:

- $(\prod_{j=1}^{n-k} exp(\pi_j^s)).Ker(h_n^s) = 0$, *ha* $n > k$
- $(\prod_{j=1}^{n-k-1} exp(\pi_j^s)).Coker(h_n^s) = 0$, *ha* $n > k+1$

Ez az 1.7. következménnyel együtt a következőt jelenti:

1.9. Következmény. *$(k-1)$-összefüggő X-re $k+1 < n$ esetén $h_n^s : \pi_n^s(X) \to H_n(X)$ magjában és komagjában nincs p-rendű elem, ha $p > \frac{n-k+3}{2}$ páratlan prím.*

Jelen dolgozatban a stabil Hurewicz-homomorfizmusnak egy topologikus realizációját fogjuk vizsgálni. Az ismertetésre kerülő SP és Γ térfunktorok segítségével mind a homológia-, mind a stabil homotópiacsoportok közönséges homotópiacsoportokként valósíthatók meg: $H_n(X) \cong \pi_n(SPX)$ és $\pi_n^s(X) \cong \pi_n(\Gamma X)$. Látni fogjuk, hogy egy egyszerű szerkezetű $f : \Gamma X \to SPX$ leképezés a homotópiacsoportokon épp a stabil Hurewicz-homomorfizmust indukálja, az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\Gamma(X)) & \cong & \pi_n^s(X) \\ \downarrow_{f_\pi} & & \downarrow_{h_s} \\ \pi_n(SP(X)) & \cong & H_n(X) \end{array}$$

A Γ és az SP funktorok konstrukciójából adódni fog egy-egy természetes

$$\cdots \subset \Gamma_k X \subset \Gamma_{k+1} X \subset \cdots \subset \Gamma X$$

és

$$\cdots \subset SP_k X \subset SP_{k+1} X \subset \cdots \subset SPX$$

filtrálás, és az $f : \Gamma X \to SPX$ leképezésnek elegendő lesz bizonyos $f : \Gamma_r X \to SP_r X$ megszorításait vizsgálni. Az hogy mit mondhatunk a homotópiacsoportokon indukált leképezés magjában és komagjában előforduló prímrendekről, elsősorban attól fog függni, milyen r érték vehető $SP_r X$-nél SPX elegendően jó közelítésére. (Ennek alapján az X összefüggőségi tulajdonságaiból kiindulva általában nem mondhatunk többet, mint a fenti 1.9. következmény.)

2. Az SP funktor

2.1. A szimmetrikus szorzat definíciója

A homológiacsoportok homotópiacsoportokként való realizálásához az SP-vel jelölt úgynevezett *szimmetrikus szorzat* funktort használjuk. Legyen ez értelmezve a $* \in X$ pontozott tereken.

Az $SP_n(X)$ n-edik szimmetrikus szorzatot a következőképpen kapjuk: X önmagával vett n-szeres $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$ direkt szorzatában kifaktorizáljuk a permutációcsoport hatását (azaz azonosítjuk azokat a pontokat a szorzatban, melyek csak a „koordináták” sorrendjében különböznek), vagyis vesszük az $SP_n(X) := X^n/\sim_{S_n}$ faktorteret, ahol S_n a koordinátákon ható permutációcsoport.

Létezik egy természetes $SP_n(X) \to SP_{n+1}(X)$ beágyazás, nevezetesen az alappont hozzáírása: $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, *)$. Így az

$$X = SP_1(X) \to SP_2(X) \to SP_3(X) \to \ldots$$

sorozattal definiálhatjuk az $SP(X) = SP_\infty(X)$ teret a direkt limesz topológiával. Tulajdonképpen a következő történik:

2.1. Definíció. *Vegyük a $\coprod_{n\geq 1} X^n$ diszjunkt uniót és faktorizáljuk a következő ekvivalenciarelációk szerint:*

1. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), \ \ \sigma \in S_n, \ n \geq 1$
2. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (x_1, x_2, \ldots, x_n, *), \ \ n \geq 1, * \in X$ *a rögzített alappont.*

(Vegyük észre, hogy a második típusú ekvivalencia az első miatt azzal is helyettesíthető lenne, hogy egy sorozat ekvivalens mindazon sorozatokkal, amiket belőle a $*$ tetszőleges helyekre való beszúrásaival kapunk.) Ezt a teret nevezzük X végtelen szimmetrikus szorzatának.

Jegyezzük még meg, hogy az SP tulajdonképpen egy funktor: tetszőleges $f : X \to Y$ leképezéshez tartozik egy $SP(f) : SP(X) \to SP(Y)$ leképezés: egyszerűen „koordinátánként” valósítjuk meg az eredeti f leképezést. (A szorzatterek között indukált koordinátánkénti leképezés kompatibilis az SP-t definiáló ekvivalenciarelációkkal.)

Az SP funktor homotopikus: ha X és Y homotóp ekvivalensek, akkor SPX és SPY is azok, az SP által az eredeti homotopikus ekvivalenciából indukált homotóp ekvivalenciával.

2.2. A Dold–Thom-tétel

A homológiacsoportok homotópiacsoportokként való megvalósítása a Dold–Thom tétel segítségével lehetséges, mely szerint $H_i(X;\mathbb{Z}) \cong \pi_i(SPX), i \geq 1$. Ez abból fog következni, hogy az $X \mapsto \pi_i(SPX) =: h_i(X)$ funktor egy (redukált) homológiaelméletet definiál.

2.2. Definíció. Redukált homológiaelméletnek *nevezünk egy olyan funktort, mely minden X CW-komplexushoz rendel egy $\widetilde{h}_n(X)$ Abel-csoportot (minden n-re) és minden $f : X \to Y$ CW-komplexusok közti folytonos leképezéshez egy $f_* : \widetilde{h}_n(X) \to \widetilde{h}_n(Y)$ homomorfizmust (minden n-re), hogy $(fg)_* = f_* g_*$ és az identitáshoz az identitást rendeli. A következő axiómáknak kell teljesülniük:*

1. *Homotóp leképezésekhez ugyanaz a homomorfizmus tartozik:*
   $f \cong g : X \to Y \Rightarrow f_* = g_* : \widetilde{h}_n(X) \to \widetilde{h}_n(Y)$

2. *Tetszőleges (X, A) CW-párra léteznek $\partial : \widetilde{h}_n(X/A) \to \widetilde{h}_{n-1}(A)$ homomorfizmusok, melyek természetesek és amelyekkel az $i : A \to X$ beágyazáshoz, valamint a $q : X \to X/A$ hányadosleképezésekhez tartozó i_*, q_* leképezések egy*

   $$\cdots \xrightarrow{\partial} \widetilde{h}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{h}_n(X) \xrightarrow{q_*} \widetilde{h}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{h}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

   hosszú egzakt sorozatba illeszkednek; a ∂ homomorfizmus természetessége pedig azt jelenti, hogy egy $f : (X, A) \to (Y, B)$ térpár-leképezésre és az általa indukált $f' : X/A \to Y/B$ leképezésre a

   $$\begin{array}{ccc} \widetilde{h}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{h}_{n-1}(A) \\ \downarrow_{f'_*} & & \downarrow_{f_*} \\ \widetilde{h}_n(Y/A) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{h}_{n-1}(B) \end{array}$$

   diagram kommutatív.

3. *Terek csokrához a direkt összeget rendeli: $X = \bigvee_\alpha X_\alpha$ esetén a természetes $i_\alpha : X_\alpha \to X$ beágyazások által indukált $\oplus_\alpha (i_\alpha)_* : \oplus_\alpha \widetilde{h}_n(X_\alpha) \to \widetilde{h}_n(X)$ leképezés izomorfizmus.*

Közönségesnek nevezünk egy homológiaelméletet, ha $\widetilde{h}_n(S^0) = 0$ minden $n \neq 0$ esetén. Ha előfordulhatnak nemtriviális csoportok a pontpár nem nulla indexű homológiacsoportjai között, akkor a homológiaelméletet *extraordinárisnak* nevezzük.

Ismert tétel, hogy egy közönséges homológiaelméletet teljesen meghatároz az S^0 pontpáron felvett értéke:

2.3. Tétel. Hatcher [5], a 4.59. tétel megfelelője *Legyen* $\widetilde{h}$ *egy közönséges homológiaelmélet. Ekkor létezik egy természetes* $\widetilde{h}_n(X) \cong \widetilde{H}_n(X; \widetilde{h}_0(S^0))$ *izomorfizmus a közönséges redukált* CW*-homológiával* ($\widetilde{h}_0(S^0)$ *együtthatócsoporttal).*

A $\widetilde{h}_n(S^0)$ csoportokat a $\widetilde{h}$ homológiaelmélet *együtthatócsoportjainak* nevezzük.

Ennek alapján elég lesz belátni, hogy a $\pi_n(SPX)$ csoportok redukált homológiaelméletet definiálnak, melynek együtthatócsoportjai megegyeznek a közönséges $\mathbb{Z}$ együtthatós CW-homológiaelmélet együtthatócsoportjaival ($\mathbb{Z}$ a 0 indexre, 0 egyébként).

Az egyetlen nagyobb problémát a 2. axióma ellenőrzése fogja jelenteni a $\pi_n(SPX)$ csoportokra. Arra lenne szükségünk, hogy egy (X, A) térpárra létezzen egy

$$\cdots \to \pi_n(SPA) \to \pi_n(SPX) \to \pi_n(SP(X/A)) \to \pi_{n-1}(SPA) \to \dots$$

hosszú egzakt sorozat. Bár $SP(X/A)$ minden pontjának a hányadosleképezés által indukált $SPX \to SP(X/A)$ leképezés szerinti őasképe homeomorf SPA-val (minden őskép az SPA szabad részmonoid egy mellékosztálya), az $SPA \to SPX \to SP(X/A)$ leképezések mégsem alkotnak Serre-fibrálást: Legyen γ egy olyan út, mely végpontját leszámítva $X - A$-ban halad, végpontja pedig A-beli (de nem a $* \in A$ alappont). Ennek SP szerinti megfelelője $SP(X/A)$-ban olyan, hogy nem emelhető föl alappontban végződő SPX-beli úttá.

2.4. Definíció. *Útösszefüggő B tér esetén egy $p : E \to B$ leképezést* kvázifibrálásnak *nevezünk, ha minden $b \in B$ pont esetén a p leképezés $p_\pi : \pi_n(E, p^{-1}(b), e) \to \pi_n(B, b)$ izomorfizmust indukál a (relatív) homotópiacsoportokon, tetszőleges $e \in p^{-1}(b)$ esetén.*

A kiválasztott alappont ősét egyszerűen F-fel jelölve, a definícióban megfogalmazott tulajdonság éppen ahhoz kell, hogy létezzen egy

$$\cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \dots$$

hosszú egzakt sorozat (az $(E, p^{-1}(b), e)$ hármas homotopikus egzakt sorozata alapján).

2.5. Lemma. (Hatcher [5] 4K.3. (a) lemma)

Ha $B = B_1 \cup B_2$ nyíltak uniója, hogy $E_i := p^{-1}(B_i)$ jelöléssel és p megszorításával $E_1 \to B_1$, $E_2 \to B_2$ és $E_1 \cap E_2 \to B_1 \cap B_2$ mindegyike kvázifibrálás, akkor a megadott $p : E \to B$ is kvázifibrálás.

Bizonyítás: Adott $b \in B_1 \cap B_2$ pontra bevezetve az $F := p^{-1}(b)$ jelölést, az $(E_i, E_1 \cap E_2, F)$ és a $(B_i, B_1 \cap B_2, b)$ térhármasok homotopikus egzakt sorozatait összehasonlítva:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & \pi_n(E_1 \cap E_2, F) & \to & \pi_n(E_i, F) & \to & \pi_n(E_i, E_1 \cap E_2) & \to & \pi_{n-1}(E_1 \cap E_2, F) & \to \\
 & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\cong & \\
\to & \pi_n(B_1 \cap B_2, b) & \to & \pi_n(B_i, b) & \to & \pi_n(B_i, B_1 \cap B_2) & \to & \pi_{n-1}(B_1 \cap B_2, b) & \to
\end{array}$$

a lemma feltevéseiből és az öt-lemmából kapjuk, hogy

$$\pi_n(E_i, E_1 \cap E_2) \cong \pi_n(B_i, B_1 \cap B_2)$$

minden n-re a p által indukált leképezéssel ($i = 1, 2$, az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy minden őskép összefüggő).

Ebből a homotópiacsoportok Mayer–Vietoris-szerű tulajdonsága szerint (Hatcher [5] 4K.1. állítás, 474. o.) következik, hogy $\pi_n(E, E_1) \cong \pi_n(B, B_1)$ minden n-re (p által indukálva). Most az (E, E_1, F) és a (B, B_1, b) hármasok hosszú egzakt sorát összevetve:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \to & \pi_n(E_1, F) & \to & \pi_n(E, F) & \to & \pi_n(E, E_1) & \to & \pi_{n-1}(E_1, F) & \to & \dots \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\
\dots & \to & \pi_n(B_1, b) & \to & \pi_n(B, b) & \to & \pi_n(B, B_1) & \to & \pi_{n-1}(B_1, b) & \to & \dots
\end{array}$$

a lemma feltevéséből és az előző eredményből ismét az öt-lemmával kapjuk, hogy $\pi_n(E, F) \cong \pi_n(B, b)$. ■

2.6. Lemma. (Hatcher [5] 4K.3. (c) lemma)

Ha létezik egy $\bar{F}_t$ deformáció B-ről annak B_0 alterére, melynek egy F_t felemeltje E-t annak E_0 alterére deformálja úgy, hogy p megszorítása E_0-ra már $E_0 \to B_0$ kvázifibrálás és $F_1 : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\bar{F}_1(b))$ izomorfizmust indukál a homotópiacsoportokon (azaz gyenge homotopikus ekvivalencia) minden $b \in B$-re, akkor az eredetileg megadott $p : E \to B$ is kvázifibrálás.

Bizonyítás: Vezessük be a $b_0 := \bar{F}_1(b) \in B_0$, $F := p^{-1}(b)$, $F_0 := p^{-1}(b_0)$ jelöléseket. Tekintsük az

$$(E, F) \xrightarrow{F_1} (E_0, F_0) \to (E, F_0)$$

kompozíciót (a második leképezés egyszerűen az $E_0 \to E$ beágyazásból jön). Ez a kompozíció a feltevés miatt ($F_1 : F \to F_0$ gyenge homotopikus ekvivalencia) az (E, F), ill. (E, F_0) párok homotopikus egzakt sorozatainak öt-lemmája alapján izomorfizmust indukál a relatív homotópiacsoportokon. De nyilván izomorfizmust indukál a $(E_0, F_0) \to (E, F_0)$ beágyazás is, azaz ezek szerint $(E, F) \xrightarrow{F_1} (E_0, F_0)$ is. Ekkor viszont

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(E, F) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(E_0, F_0) \\ \downarrow & & \downarrow\cong \\ \pi_n(B, b) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(B_0, b_0) \end{array}$$

szerint (az alsó izomorfizmust persze $\bar{F}_1$ indukálja, a jobb oldali a feltevésből következik) $\pi_n(E, F) \cong \pi_n(B, b)$ a p által indukálva. ∎

2.7. Állítás. *Összefüggő A esetén a $* \in A \subset X$ pontozott szimpliciális párra $SPA \to SPX \to SP(X/A)$ kvázifibrálás.*

Bizonyítás: (Hatcher [5] 4K.6. állítás, 481-484. o.)

Először is tegyük fel, hogy A-nak van olyan U környezete X-ben, melynek A deformációs retraktuma. Ez nem jelent extra feltételt, egyszerűen helyettesítsük X-et az $A \to X$ beágyazás cilinder konstrukciójával, mely persze homotóp ekvivalens X-szel (mivel SP homotóp ekvivalens terekhez homotóp ekvivalens tereket rendel, ezért ez a változtatás az állítás bizonyítása szempontjából nem számít). Az egész X-en értelmezett retrakciót jelölje f_t, melyre tehát $f_1 : U \to A$.

Vezessük be a $B_n := SP_n(X/A)$ jelölést, legyen továbbá $E_n := p^{-1}(B_n)$ azon SPX-beli pontok halmaza, melyeknek legfeljebb n darab „koordinátájuk" van $X - A$-ban. Mivel $SP(X/A)$ a B_n terek limesze, elég belátni, hogy minden $p : E_n \to B_n$ megszorítás kvázifibrálás (kompaktsági érvelés a homotópiacsoportok elemeit reprezentáló gömbök képeire). Ezt indukcióval látjuk be, a $B_0 := *$ alappont megállapodással a kezdő eset triviális.

Adott $n \geq 1$ esetén jelölje V az E_{n-1}-nek azt a (nyílt) környezetét E_n-ben, mely azon E_n-beli pontokból áll, melyeknek legalább egy koordinátájuk U-beli. Könnyen látható, hogy $W := p(V)$ a B_{n-1} környezete B_n-ben. A 2.5.lemma szerint elegendő belátni, hogy p a W, a $B_n - B_{n-1}$ (két nyílt halmaz) és a $W - B_{n-1}$ (az előbbi kettő metszete) fölött kvázifibrálás.

Azt, hogy $p : V \to W$ kvázifibrálás, a 2.6.lemma segítségével mutatjuk meg. Az SP_n funktor az f_t retrakcióból indukál egy F_t retrakciót, mely V-t E_{n-1}-re retrahálja. Mivel f_t az A-n az identitás, az F_t egy $\bar{F}_t$ retrakciónak a fölemeltje, mely W-t retrahálja B_{n-1}-re. Annyit kell tehát csak bizonyítani, hogy minden $b \in W$ esetén $F_1 : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\bar{F}_1(b))$ gyenge homotopikus ekvivalencia. Esetünkben az is igaz, hogy homotopikus ekvivalencia.

Legyen ugyanis a $b \in W$ pont a $[b_1, \ldots, b_k], b_i \in X - A (1 \leq i \leq k)$ ekvivalenciaosztállyal reprezentálva. $p^{-1}(b) = \{[b_1, \ldots b_k, a_1, \ldots, a_l] : a_j \in A\} \subset V \subset E_n$, tehát az őskép homeomorf SPA-val. Feltehetjük, hogy a b koordinátái úgy vannak rendezve, hogy csak az első q darabot viszi f_1 az A-ba, azaz $f_1(b_i) = a'_i$, ha $i \leq q$ és $b'_i := f_1(b_i) \notin A$, ha $i > q$. Most $p^{-1}(\bar{F}_1(b)) = \{[b'_{q+1}, \ldots b'_k, a_1, \ldots, a_l] : a_j \in A\}$ és $F_1(p^{-1}(b)) = \{[b'_{q+1}, \ldots b'_k, a'_1, \ldots, a'_q, a_1, \ldots, a_l] : a_j \in A\}$, hiszen f_1 az A-n az identitás. Vegyük észre, hogy az $a'_1, \ldots, a'_q$ koordináták itt rögzítettek (tehát $F_1(p^{-1}(b))$ is homeomorf SPA-val) és csak a b ponttól függenek: a megadott b pont rögzítése után ezért rögzíthetünk egy γ utat a $*$ alappontból az $[a'_1, \ldots, a'_q]$ ponthoz $SP_q(A)$-ban, melynek segítségével egy homotópiát konstruálhatunk az $F_1 : p^{-1}(b) \to p^{-1}(\bar{F}_1(b))$ leképezés és egy homeomorfizmus között. (Mely homeomorfizmus egyszerűen az A-beli koordinátákat identikusan leképezi.)

Most belátjuk, hogy p kvázifibrálás $B_n - B_{n-1}$ és $W - B_{n-1}$ fölött. Mindkét eset ugyanúgy megy. Feltehető, hogy ezek a terek útösszefüggőek: az $A \to X$ beágyazást a cilinder konstrukcióval helyettesítettük, akkor $X - A$ útösszefüggő (hisz az útösszefüggő eredeti, cilinderkonstrukció előtti X-re retrahálható), így $SP_n(X-A)$ is, ami természetes módon azonosítható $B_n - B_{n-1}$-gyel. Mivel U is összefüggő volt, ezért $W - B_{n-1}$ is összefüggő. A bizonyítást $V - E_{n-1} \to W - B_{n-1}$ esetére mondjuk el, az $E_n - E_{n-1} \to B_n - B_{n-1}$ eset analóg és még egyszerűbb is.

Legyen tehát $b \in W - B_{n-1}$ tetszőleges, $b = [b_1^0, \ldots, b_n^0]$, ahol $b_i^0 \in X - A$ és mondjuk $b_1^0 \in U - A$. Világos, hogy

$$p_\pi : \pi_i(V - E_{n-1}, p^{-1}(b)) \to \pi_i(W - B_{n-1}, b)$$

szürjektív: az utóbbi homotópiacsoport tetszőlegesen választott elemének egy $(D^i, \partial D^i) \to (W - B_{n-1}, b) : u \mapsto [b_1(u), \ldots, b_n(u)]$ reprezentánsa tekinthető $(D^i, \partial D^i) \to (V - E_n, p^{-1}(b))$ leképezésnek is; ennek képe p szerint pedig nyilván a választott elem. Azonban injektív is: ha $(D^i, \partial D^i) \to (V - E_{n-1}, p^{-1}(b))$ egy $u \mapsto [a_1(u), \ldots, a_k(u), b_1(u), \ldots, b_n(u)]$, $a_i(u) \in A, b_j(u) \in V - E_{n-1}$ leképezés, melynek vetülete, $u \mapsto [b_1(u), \ldots, b_n(u)]$ egy homotópiával a konstans $[b_1^0, \ldots, b_n^0]$-ba mozgatható, akkor ugyanez a homotópia a b_i koordinátákon hatva az eredeti leképezést $u \mapsto [a_1(u), \ldots, a_k(u), b_1^0, \ldots, b_n^0]$-be viszi, ami teljes egészében $p^{-1}(b)$-ben van, azaz az eredeti leképezés a nullelemet reprezentálja $\pi_i(V - E_{n-1}, p^{-1}(b))$-ben is.
■

2.8. Tétel. (Dold–Thom)

$n \geq 1$ esetén összefüggő X CW-komplexusra $\pi_n(SPX) \cong H_n(X; \mathbb{Z})$.

Bizonyítás: (Hatcher [5] 4K.6. állítás, 481-484. o.)

Először megmutatjuk, hogy $\pi_n(SP\ \ .\ )$ egy $\hat{h}$ homológiaelméletet definiál az összefüggő, pontozott szimpliciális komplexusokon. Az első axióma teljesülése triviális, mivel SP homotóp leképezéseket homotópakba visz. A második axióma az előző állítás következménye, a kvázifibráláshoz tartozó homotopikus hosszú egzakt sorozat alapján. (A ∂ leképezés természetességi követelményével együtt.) A harmadik axióma az $SP(\bigvee_\alpha X_\alpha) = \prod_\alpha X_\alpha$ egyenlőség következménye.

Minden $\hat{h}$ redukált homológiaelméletre érvényes a $\hat{h}_i(X) \cong \hat{h}_{i+1}(\Sigma X)$ egyenlőség, ezért a $\hat{h'}_i(X) := \hat{h}_{i+1}(\Sigma X)$ módon definiált $\hat{h}'$ homológiaelmélet megegyezik $\hat{h}$-val az összefüggő tereken, de már minden térre definiálva van, még akkor is, ha $\hat{h}$ csak összefüggőekre volt. Minden CW-komplexushoz létezik vele homotóp ekvivalens szimpliciális komplexus, így az elméletet CW-komplexusokra is kiterjeszthetjük.

Szintén a $\hat{h}_i(X) \cong \hat{h}_{i+1}(\Sigma X)$ azonosság miatt az együtthatócsoportokat az S^2 gömbön is leellenőrizhetjük: $\hat{h}_i(S^2) = \pi_i(SPS^2) = \pi_i(\mathbb{C}P^\infty)$ csak $i = 2$-re nem triviális, arra pedig $\mathbb{Z}$-vel izomorf, mivel $\mathbb{C}P^\infty \cong K(\mathbb{Z}, 2)$ Eilenberg–MacLane tér. ($SPS^2 \cong \mathbb{C}P^\infty$-hez l. a következő állítást.)

Így a 2.3. tétel miatt az általunk definiált homológiaelmélet és $H_*(.,\mathbb{Z})$ megegyeznek. ■

2.9. Állítás. $SPS^2 \cong \mathbb{C}P^\infty$

Bizonyítás: S^2-t a zárt komplex síkkal azonosítva, alappontnak a ∞-t választva, $[z_1, \ldots, z_n] \mapsto [a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{C}P^\infty$, ahol $[z_1, \ldots, z_n] \in SPS^2$, $z_i \in \mathbb{C}$ (azaz mindegyik koordináta a választott alapponttól különböző) és $\prod_{i=1}^n (z - z_i) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ mint z komplex egyváltozós polinomja, az algebra alaptétele szerint megadja a kívánt homeomorfizmust. ■

Jelölje ΩX az X topologikus tér *hurokterét*, azaz azoknak az $s : [0,1] \to X$ leképezéseknek a terét, melyekre $s(0) = s(1) = x_0 \in X$ a kijelölt alappont. ΩX topológiája az $X^{[0,1]}$ függvénytér megfelelő altértopológiája. (Ω nyilván funktor: $f : X \to Y$-hoz egy $\Omega f : \Omega X \to \Omega Y$ függvény rendelhető – egy hurkot az S^1 körvonalból képező függvénynek képzelhetünk, majd vehetjük a kompozíciót f-fel.) Az X tér szokásos útfibrálásának homotopikus hosszú egzakt sorozatából látható, hogy $\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X)$. (Később erről még precízen is szó lesz.) Az Ω funktor tehát elcsúsztatja a homotópiacsoportokat. Tudjuk, hogy a Σ funktor a homológiacsoportokat csúsztatja el, így $\Omega SP\Sigma X$ homotópiacsoportjai megegyeznek SPX homotópiacsoportjaival. Ennél azonban több is igaz.

A későbbiekben fontos lesz az SP funktornak azon tulajdonsága, hogy SPX homotóp ekvivalens $\Omega SP\Sigma X$-szel. A precíz állításhoz megadunk egy explicit leképezést, mely homotopikus ekvivalencia a két tér között.

Két pontozott tér *ékszorzatának* nevezzük és $X \wedge Y$-nal jelöljük az $x_0 \in X$ és $y_0 \in Y$ pontozott terek szorzatának a két tényező egy-egy (a másik tér alappontja fölötti) példányával vett faktorizáltját: $X \wedge Y = X \times Y/\{\{x_0\} \times Y, X \times \{y_0\}\} = X \times Y/X \vee Y$, ahol $X \vee Y$ a pontozott terek *csokra*: a két tér diszjunkt uniójának faktorizáltja azzal, hogy az x_0 és y_0 alappontokat azonosítjuk.

Könnyű látni, hogy $\Sigma X = X \wedge S^1$, ahol S^1 a körvonal mint topologikus tér egy tetszőleges pontjával pontozva. A $\Sigma X \to Y$ leképezések az úgynevezett adjungálással megfeleltethetők az $X \to \Omega Y$ leképezéseknek: a redukált szuszpenziónak mint az X fölötti kettős kúp faktorának az X egy tetszőleges x pontja fölötti „kúpalkotójának" képe egy hurkot ír le Y-ban, ez legyen az x-hez rendelt ΩY-beli elem.

Tehát egy $\beta_X : SPX \to \Omega SP\Sigma X$ leképezés megadható úgy, hogy megadjuk a vele adjungált $\beta : \Sigma SPX \to SP\Sigma X$ leképezést, azaz a fentiek értelmében egy $SP(X) \wedge S^1 \to SP(X \wedge S^1)$ leképezést. Egy ilyen viszont megadható „koordinátánként" ($SP(X)$ elemei $[x_1, \ldots, x_n]$ alakú ekvivalenciaosztályok) a következőképpen:

$$([x_1, \ldots, x_n], s) \mapsto [(x_1, s), \ldots, (x_n, s)]$$

ahol $s \in S^1$, és az ékszorzat elemeit rendezett párokként írjuk föl (hisz az ékszorzat a szorzat egy faktora).

2.10. Állítás. *A fenti módon definiált leképezésnek megfelelő $\beta_X : SPX \to \Omega SP\Sigma X$ leképezés homotopikus ekvivalencia a két tér között.*

Bizonyítás: Jelölje CX az $* \in X$ pontozott tér fölötti redukált kúpot, azaz az $X \times [0, 1]/\{X \times \{1\}, \{*\} \times [0, 1]\}$ faktort. A nyilvánvaló $CX \to \Sigma X$ leképezéssel (a redukált kúpban a $X \times \{0\}$ réteget is összehúzzuk) képezhetjük a következő kommutatív diagram fölső leképezéssorozatát:

$$\begin{array}{ccccc} SPX & \to & SPCX & \to & SP\Sigma X \\ \downarrow_{\beta_X} & & \downarrow_{\alpha_X} & & \downarrow \\ \Omega SP\Sigma X & \to & PSP\Sigma X & \to & SP\Sigma X \end{array}$$

Az alsó leképezéssorozat $SP\Sigma X$ útfibrálása. A jobb oldali függőleges leképezés az identitás, a középső α_X pedig annak a leképezésnek az adjungáltja, melyet egy

$CSPCX \to SPCCX \to SPCX \to SP\Sigma X$ kompozícióval kaphatunk, ahol az első leképezés a β_X-hez hasonlóan képezhető (a direkt szorzat írásmódban „koordinátánként" bevisszük az intervallum paraméterét), a középső a $CCX \to CX$: $(x, s, t) \mapsto (x, \max\{s, t\})$ leképezésből származik ($s, t \in [0, 1]$), az utolsó pedig az előbb is említett nyilvánvaló $CX \to \Sigma X$ leképezésből. Összefoglalva, α_X : $[(x_1, s_1), \ldots, (x_n, s_n)] \mapsto (t \mapsto [(x_1, \max\{s_1, t\}), \ldots, (x_n, \max\{s_n, t\})]) \in PSP\Sigma X$, ahol $x_i \in X$, $s_i, t \in [0, 1]$.

A fölső sor a 2.7. állítás szerint kvázifibrálás, így létezik egy hosszú egzakt sorozat a homotópiacsoportokon. Az alsó fibrálásra nyilván létezik egy hosszú egzakt sorozat a homotópiacsoportokon. Mivel mind $PSP\Sigma X$, mind $SPCX$ pontrahúzható (utóbbihoz: SP homotopikus funktor), ezért nemcsak a jobb oldali, hanem a középső leképezés is izomorfizmust indukál a homotópiacsoportokon. Így a két hosszú egzakt sorozatot összehasonlítva az öt-lemmából kapjuk, hogy a β_X gyenge homotopikus ekvivalencia. Felhasználva, hogy CW-komplexus szimmetrikus szorzatának létezik homotóp ekvivalens CW-modellje, illetve hogy CW-komplexus hurokterének is létezik homotóp ekvivalens CW-modellje, Whitehead klasszikus tételével kapjuk az állítást.
■

2.11. Lemma. *Az $i : X \to SPX$ természetes beágyazás a homotópiacsoportokon a Hurewicz-homomorfizmust indukálja, azaz $i_\pi : \pi_n(X) \to \pi_n(SPX) \cong H_n(X)$ megegyezik a $h : \pi_n(X) \to H_n(X)$ homomorfizmussal.*

Bizonyítás: Tulajdonképpen arról van szó, hogy elegendő ezt az S^1 körvonalra tudni, arra pedig nyilvánvaló abból, hogy S^1 a természetes beágyazása révén homotóp ekvivalens $SP(S^1)$-gyel (hiszen mindkettő $K(\mathbb{Z}, 1)$ Eilenberg–MacLane tér). Valójában még S^2-re is tudjuk, hogy a beágyazása SPS^2-be a Hurewicz-homomorfizmus megfelelőjét indukálja, hiszen ez a beágyazás az $SPS^2 \cong \mathbb{C}P^\infty$ azonosítás szerint éppen $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$ generátorát adja.

Ahhoz, hogy magasabb dimenziós gömbökre is belássuk az állítást, elegendő azt megmutatni, hogy az $S^n \to SPS^n$ beágyazás izomorfizmust indukál az n-edik homotópiacsoportokon, hiszen tudjuk, hogy $\pi_n(SPS^n) \cong H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ és a közönséges Hurewicz-homomorfizmusnál van szabadságunk a generátor előjelének választására (hogy a $+1$ vagy a $-1 \in \mathbb{Z}$ elemet tekintsük-e a generátornak $H_n(S^n)$-ben).

Ha már tudjuk, hogy $S^{n-1} \to SPS^{n-1}$ a $\pi_{n-1}(SPS^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ generátorát reprezentálja, akkor a $\mathbb{Z} \cong \pi_n(SPS^n) = \pi_n(SP\Sigma S^{n-1}) \cong \pi_{n-1}(\Omega SP\Sigma S^{n-1}) = \pi_{n-1}(SPS^{n-1})$ azonosítás alapján $\pi_n(SP\Sigma S^{n-1})$ generátorát az $S^n = \Sigma S^{n-1} \to$

$SP\Sigma S^{n-1}$ beágyazás reprezentálja, mivel ez az előbbi megfeleltetés szerint az $S^{n-1} \to \Omega SP\Sigma S^{n-1} \cong SPS^{n-1}$ generátor-reprezentáns adjungáltja.

Ha pedig gömbökre már tudjuk az állítást, akkor – felhasználva, hogy $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ és a generátor a gömb önmagára való identikus leképezésének homotópiaosztálya, valamint azt, hogy $H_n(X) \cong \mathbb{Z}$ és a generátor a gömbnek önmagára való identikus leképezésének mint szinguláris n-szimplexnek a homológiaosztálya – kapjuk tetszőleges térre is az állítást, az alábbi diagram felhasználásával:

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_n(X) & \xleftarrow{p_\pi} & \pi_n(S^n) & = & \pi_n(S^n) & \xrightarrow{p_\pi} & \pi_n(X) \\
\downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow i_\pi & & \downarrow i_\pi \\
H_n(X) & \xleftarrow{p_H} & H_n(S^n) & \cong & \pi_n(SP(S^n)) & \xrightarrow{SP(p)_\pi} & \pi_n(SP(X))
\end{array}$$

ahol úgy képzeljük, hogy $\pi_n(X)$ egy tetszőlegesen választott elemét a $p : S^n \to X$ leképezés reprezentálja, h a Hurewicz-homomorfizmus, i az $X \to SP(X)$ beágyazás. Látjuk, hogy ha a gömbökön a két leképezés megegyezik, akkor minden X térre is meg kell hogy egyezzenek. (Az alsó sorral kapcsolatban gondoljuk meg, hogy a $\pi_*(SP\ .)$ funktor úgy alkot a közönséges homológiákkal izomorf homológiaelméletet, hogy a leképezésekhez azok SP által indukált megfelelőinek hatását rendeli a homotópiacsoportokon.) ■

2.3. A redukált szimmetrikus szorzat többszörös összefüggősége

Kallel [7] cikkében belátja a következőt:

2.12. Tétel. ([7], 1.3. tétel)

Ha X $(k-1)$-összefüggő CW-komplexus ($k \geq 2$), akkor az $SP_rX/SP_{r-1}X$ faktortér $(2r+k-3)$-összefüggő.

2.13. Következmény. *X $(k-1)$-összefüggő CW-komplexus ($k \geq 2$) esetén $H_l(SP_rX) \cong H_l(SP_{r+1}X) \cong \ldots \cong H_l(SPX)$ a természetes beágyazások által indukált izomorfizmusokkal, ha $l \leq 2r+k-2$.*

A bizonyítás egy részének vázlatát alább közöljük. Megjegyezzük, hogy Kallel bizonyítása A. Dold azon eredményét használja, hogy a $H_*(SP_rX)$ homológiacsoportok kizárólag a $H_*(X)$ homológiacsoportoktól függnek, azaz ha két tér homológiacsoportjai megegyeznek, akkor szimmetrikus szorzataik homológiacsoportjai is megegyeznek. Ezt felhasználva elég az állítást szuszpenziókra bizonyítani (egyszerű konstrukcióval ugyanis minden X CW-komplexushoz megadhatunk egy Y CW-komplexust, hogy $H_i(X) \cong H_i(\Sigma Y)$, $\forall i \geq 0$). Későbbi következmények levezetéséhez azonban számunkra elegendő lesz a tétel által állított összefüggőségi feltételt szuszpenziókra alkalmazni, így a fenti tételt tulajdonképpen csak abban a változatban használjuk, hogy $X \cong \Sigma X'$ valamilyen X' térre. Továbbá a tétel következményének összefüggőségi állítását homologikus összefüggőségi állítássá gyengítjük. A következő hasonló tételt fogjuk tehát bizonyítani (egy X teret *homologikusan k-összefüggőnek* nevezünk, ha $i \leq k$ esetén $\tilde{H}_i(X) = 0$):

2.14. Tétel. *Ha az X pontozott CW-komplexus $(k-1)$-összefüggő ($k \geq 2$), akkor $\overline{SP}_r(\Sigma X) := SP_r(\Sigma X)/SP_{r-1}(\Sigma X)$ homologikusan $(2r+k-2)$-összefüggő.*

Bizonyítás: (S. Kallel, [7] 5. fejezet, 5.1. tétel)

Jelölje $X^r := \underbrace{X \times \cdots \times X}_{r}$ az r-szeres szorzatot, $X^{(r)} := \underbrace{X \wedge \cdots \wedge X}_{r}$ az r-szeres ékszorzatot. Legyen $\Delta_r := \{(x_1, \ldots, x_r) \in X^r | \exists i \neq j : x_i = x_j\}$, illetve $\Delta_{(r)} := \{(x_1, \ldots, x_r) \in X^{(r)} | \exists i \neq j : x_i = x_j\}$ azokat az altereket X^r-ben, illetve $X^{(r)}$-ben, melyekben nem minden koordináta különböző (az úgynevezett *bő átlókat*). Tekinthetjük az S_r permutációcsoport természetes hatását az X^r és az $X^{(r)}$ tereken, ill. ezek bő átlóikkal vett faktorain, ez utóbbit egyszerűen $X^{(r)}/\Delta_{(r),\sim_{S_r}}$ jelöli.

A bizonyításhoz az alábbi állításra lesz szükségünk:

2.15. Állítás. (M. Nakaoka, [9], 4.3. állítás)

Ha az X pontozott CW-komplexus $(k-1)$-összefüggő ($k \geq 2$), akkor $X^{(r)}/\Delta_{(r),\sim_{S_r}}$ homologikusan $(r+k-2)$-összefüggő.

Bizonyítás: (Nakaoka)

2.16. Lemma. *$(k-1)$-összefüggő X-re ($k \geq 2$ esetén) $\Delta_{(r)} \subset X^{(r)}$ homologikusan $(k+r-3)$-összefüggő.*

Bizonyítás: $\Delta_{(r)}$ azon pontokból áll, melyekben valahol van két egyforma koordináta. A kulcs az, hogy azt is megkülönböztetjük, pontosan *mely pozíciókon* helyezkednek el az azonos koordináták.

Ha p egy partíciója az $\{1, 2, \ldots, r\} =: [r]$ halmaznak, akkor úgy képzelhetjük, hogy a p partíció páronként diszjunkt nemüres $U_i \subset [r]$ részhalmazokból áll, melyek uniója lefedi $[r]$-et. Feltehetjük, hogy ezek a halmazok úgy vannak indexelve, hogy $i < j$ esetén U_i legkisebb $l_i \in [r]$ eleme kisebb, mint U_j legkisebb $l_j \in [r]$ eleme. A részhalmazok (ekvivalenciaosztályok) számát a p partíció $m(p)$ *magasságának* nevezzük.

Egy ilyen adott $p = \{U_1, \ldots, U_m\}$ partíciónál (halmazrendszernél) jelölje M_p azt a részhalmazát $X^{(r)}$-nek, melyben a p partíció szerint ekvivalens pozíciókon azonos koordináta áll, azaz legyen $M_p := \{(x_1, \ldots, x_r) \in X^{(r)} | (\exists l : i, j \in U_l) \Rightarrow x_i = x_j\}$. Mivel most pontosan rögzítve van, mely pozíciókon állhatnak azonos koordináták, ez a tér homeomorf lesz az $X^{(m)}$ térrel: a homeomorfizmust nyilvánvalóan az

$$(x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_{l_1}, \ldots, x_{l_m})$$

megfeleltetés adja (l_i az U_i osztály legkisebb eleme). Minden, a bizonyításban szereplő topologikus tér függeni fog X-től, így az egyszerűség kedvéért X-et a jelölésből mindenhol elhagyjuk ($\Delta_{(r)}(X) = \Delta_{(r)}$, $M_p(X) = M_p$, stb.).

Egy partíciókból álló $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$ partíciósorozatra legyen

$$M_{\mathcal{P}} := M_{p_1} \cup \cdots \cup M_{p_l}$$

az előbb bevezetett terek uniója $X^{(r)}$-ben. (Ebből a szempontból nyilván nem számít a $\mathcal{P}$ tagjainak sorrendje, de későbbi indukciós gondolatmenetek szempontjából $\mathcal{P}$-t mégis rendezett sorozatnak tekintjük.) Ha például $\mathcal{P} = (p_{(1,2)}, p_{(1,3)}, \ldots, p_{(n-1,n)})$ az az $\binom{n}{2}$ darab partícióból álló partíciósorozat, melyre a $p_{(a,b)}$ partíció halmazai között $\{a, b\}$ mint kételemű halmaz, az $[r]$ halmaz a-tól és b-től különböző elemei pedig mint egy-egy egyelemű halmaz szerepelnek, akkor $M_{\mathcal{P}} = \Delta_{(r)}$.

Ha adott két partíció, p_1 és p_2, akkor egyszerűen meggondolható, hogy mi lesz M_{p_1} és M_{p_2} metszete:

$$M_{p_1} \cap M_{p_2} = M_{p_1 \wedge p_2}$$

ahol a $p_1 \wedge p_2$ az a legfinomabb partíció, melynek mind p_1, mind p_2 a finomítása. (Hasonlóan értelmezhető $p_1 \vee p_2$ is, bár erre nem lesz szükségünk: $p_1 \vee p_2$ a p_1 és p_2 partíciók legdurvább közös finomítása. A partíciókon bevezethető egy részbenrendezés, melyre definíció szerint $p \succ q$, ha p finomítása q-nak. Ezzel a partíciók hálót alkotnak; az előbbi $\vee, \wedge$ műveletek éppen a szokásos hálóelméleti értelemben használatosak. Ekvivalenciarelációkként értelmezve p_1-et és p_2-t: $p_1 \vee p_2$ szerint akkor ekvivalens két elem, ha mind p_1, mind p_2 szerint ekvivalensek; $p_1 \wedge p_2$ szerint pedig akkor, ha van olyan elem, mellyel p_1 szerint az egyik, p_2 szerint a másik ekvivalens.)

Egy $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$ partíciósorozatot nevezzünk *valódinak*, ha nincs benne ismétlődés (a benne szereplő partíciók páronként különbözőek) és *egyenletesnek*, ha a benne szereplő partíciók magassága azonos (azaz minden i-re a p_i halmazainak száma ugyanaz az m érték), ekkor lehet beszélni a $\mathcal{P}$ sorozat magasságáról: $m(\mathcal{P}) := m(p_1) = \cdots = m(p_l)$. Tekintsük a következő rekurzív definíciót:

2.17. Definíció. *Egy $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_l)$ valódi egyenletes m magasságú sorozatot* regulárisnak *nevezünk, ha*

- *a $(p_1 \wedge p_2), (p_1 \wedge p_3, p_2 \wedge p_3), \ldots, (p_1 \wedge p_l, p_2 \wedge p_l, \ldots, p_{l-1} \wedge p_l)$ sorozatok mindegyike egyenletes $m-1$ magasságú*
- *az előbbi sorozatok mindegyikében az esetleg többször előforduló partíciókból csak az elsőt megtartva, így kapva rendre a $D_2\mathcal{P}, D_3\mathcal{P}, \ldots, D_l\mathcal{P}$ egyenletes $m-1$ magasságú és immár valódi sorozatokat, ezen sorozatok mindegyike reguláris.*

Az egyértelmű 1 magasságú, egyetlen partícióból álló (mely partíció egyetlen halmazból, az egész $[r]$-ből áll) partíciósorozat reguláris.

Könnyű gyakorlat, hogy léteznek nem triviális reguláris partíciósorozatok (például minden valódi 2 magasságú egyenletes valódi sorozat ilyen).

A definíciót a következő lemma és annak indukciós bizonyítása indokolja:

2.18. Lemma. *Egy m magasságú (egyenletes valódi) reguláris $\mathcal{P}$ partíciósorozatra az $M_{\mathcal{P}}$ tér homologikusan $(k+m-2)$-összefüggő (ha X $(k-1)$-összefüggő volt).*

Bizonyítás: Indukció $\mathcal{P}$ m magasságára. $m = 1$ esetén $\mathcal{P} = (p_1)$, ahol p_1 a triviális, egyetlen halmazból álló partíciója $[r]$-nek, akkor $M_{\mathcal{P}} = M_{p_1} \cong X^{(1)} = X$ ami tényleg $k + 1 - 2 = (k-1)$-összefüggő.

$m > 1$ magasságú reguláris $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_l)$ esetén még egy l szerinti indukciót is használunk. $l = 1$-re $M_{\mathcal{P}} = M_{p_1} \cong X^{(m)}$ amint azt már láttuk, és ez a tér valóban $mk - 1 \geq (m + k - 2)$-szeresen összefüggő.

Legyen most $l > 1$ és tekintsük a $\mathcal{P}' := (p_1, \ldots, p_{l-1})$ reguláris sorozatot. Definíció szerint

$$M_{\mathcal{P}} = M_{\mathcal{P}'} \cup M_{p_l}$$

Alkalmazzuk a Mayer–Vietoris sorozatot ezzel a felbontással. Ismernünk kell majd a metszet homológiáit.

$$M_{\mathcal{P}'} \cap M_{p_l} = (M_{p_1} \cup \cdots \cup M_{p_{l-1}}) \cap M_{p_l} = (M_{p_1} \cap M_{p_l}) \cup \cdots \cup (M_{p_{l-1}} \cap M_{p_l}) =$$

$$= M_{((p_1 \wedge p_l, \ldots, p_{l-1} \wedge p_l))} = M_{D_l\mathcal{P}}$$

ahol $D_l\mathcal{P}$ egy $m-1$ magasságú reguláris sorozat, így a magasságra vonatkozó indukciós feltevés szerint a metszet homologikusan $m - 1 + k - 2 = (m + k - 3)$-összefüggő.

A Mayer–Vietoris-sorozat részlete:

$$\dots \to H_q(M_{\mathcal{P}'}) \oplus H_q(M_{p_l}) \to H_q(M_{\mathcal{P}}) \to H_{q-1}(M_{D_l\mathcal{P}}) \to \dots$$

Itt $M_{p_l} \cong X^{(m)}$, ami $km-1 \geq (k+m-2)$-összefüggő. Az l-re vonatkozó indukciós feltevésünk szerint $M_{\mathcal{P}'}$ is homologikusan $(k+m-2)$-összefüggő. Az előbbi, metszetre vonatkozó megjegyzésünk szerint $q-1 \leq k+m-3$ esetén a jobb oldali csoport is 0. Mindez adja, hogy a középső $H_q(M_{\mathcal{P}})$ csoport is triviális a kívánt tartományban. ■

Az iménti lemma szerint tehát $\Delta_{(r)}$ homologikus $(k+r-3)$-összefüggőségéhez elegendő egy alkalmasan választott $r-1$ magasságú reguláris $\mathcal{P}$ partíciósorozatot találnunk, melyre $M_{\mathcal{P}} = \Delta_{(r)}$. A partíciósorozatban $\binom{n}{2}$ darab partíció fog szerepelni, mindegyik $r-1$ darab halmazból áll majd és mindegyikben más-más $a, b \in [r]$ számpár lesz összefogva egy ekvivalenciaosztályban. Világos, hogy minden ilyen partíciósorozat tényleg előállítja $\Delta_{(r)}$-et.

Az $[r]$ halmazból vett számpárokat egyetlen számmal fogjuk kódolni: $s, t \in [r], s < t$ esetén legyen $B(s,t) := \frac{(t-2)(t-1)}{2} + s$, ekkor $\forall i \leq B(r-1, r) : \exists! 0 < s_i < t_i : i = B(s_i, t_i)$. Legyen minden $n \leq r$ esetén $i \leq B(n-1, n)$-re $q_i^n = q^n_{B(s_i,t_i)} =: p^n_{(s_i,t_i)}$ az a partíciója $[n]$-nek, melyben az $\{s_i, t_i\}$ kételemű halmazon kívül csupa egyelemű halmaz szerepel ($m(q_i^n) = n-1$). Tekintsük a $\mathcal{P}_n := (q_1^n, q_2^n, \dots, q^n_{B(n-1,n)})$ partíciósorozatot. n-re vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy mindegyik $\mathcal{P}_n$ reguláris; végül kapjuk, hogy $\mathcal{P}_r$ is az, de tudjuk, hogy $M_{\mathcal{P}_r} = \Delta_{(r)}$, így készen leszünk.

Vezessünk be két műveletet a partíciókon: ha p az $[n]$ halmaz partíciója, akkor S_+p legyen az $[n+1]$ halmaz azon partíciója, melynek a halmazrendszerét úgy kapjuk, hogy p halmazrendszeréhez hozzávesszük az $\{n+1\}$ egyelemű halmazt (ez a művelet tehát a magasságot eggyel növeli). Legyen ismét p az $[n]$ halmaz partíciója. Akkor $a \in [n]$-re jelölje S_ap azt a partícióját az $[n+1]$ halmaznak, melyet p-ből úgy kapunk, hogy halmazrendszerében az a-t tartalmazó halmazba belevesszük még az $\{n+1\}$-et is (ez a művelet tehát nem változtatja a magasságot). Ugyanezt a műveletet partíciósorozatokra is értelmezhetjük tagonként: ha $\mathcal{P}$ az $[n]$ partícióinak sorozata, akkor $S_+\mathcal{P}$ és $S_a\mathcal{P}$ az $[n+1]$ halmaz partícióinak sorozata lesz.

A regularitás rekurzív definíciójából és abból, hogy $S(p_1 \wedge p_2) = Sp_1 \wedge Sp_2$ alapján $SD_i\mathcal{P} = D_iS\mathcal{P}$ (ahol S lehet az S_+, ill. az S_a műveletek bármelyike), könnyen következik, hogy amennyiben $\mathcal{P}$ reguláris partíciósorozata volt $[n]$-nek, akkor $S\mathcal{P}$ reguláris partíciósorozata lesz $[n+1]$-nek.

A $\mathcal{P}_j$ partíciósorozatok regularitásának indukciós bizonyítása: $\mathcal{P}_2$ a $[2]$ halmaz partíciósorozata könnyen láthatóan valóban reguláris (hiszen magassága 1). Most indukciós lépésként bizonyítjuk az n magasságú $\mathcal{P}_{n+1}$ regularitását. A regularitás definíciója szerint elég azt belátni, hogy minden lehetséges i-re $D_i\mathcal{P}_{n+1}$ egy $n-1$ magasságú reguláris partíciósorozat.

Nézzük először azt az esetet, amikor az i indexhez $i = B(s_i, t_i)$ alapján tartozó $s_i < t_i$ párra $t_i \leq n$. Vegyük észre, hogy $j \leq i$ esetén $q_j^{n+1} = S_+ q_j^n$ (a $\mathcal{P}_{n+1}$ és a $\mathcal{P}_n$ tagjai közötti kapcsolat). Ezért

$$(q_1^{n+1} \wedge q_i^{n+1}, \ldots, q_{i-1}^{n+1} \wedge q_i^{n+1}) = (S_+ q_1^n \wedge S_+ q_i^n, \ldots, S_+ q_{i-1}^n \wedge S_+ q_i^n) =$$

$$= (S_+(q_1^n \wedge q_i^n), \ldots, S_+(q_{i-1}^n \wedge q_i^n))$$

szerint $D_i\mathcal{P}_{n+1} = S_+ D_i \mathcal{P}_n$ és ez $n-1$ magasságú reguláris, hiszen az indukciós feltevés szerint $\mathcal{P}_n$ már reguláris.

Legyen most i olyan, hogy $s_i < t_i = n+1$. $D_i\mathcal{P}_{n+1}$ minden eleme $q_z^{n+1} \wedge q_i^{n+1}$ alakú ($z < i$). Az egyszerűen látható $q_{B(c,d)}^{n+1} \wedge q_{B(a,n+1)}^{n+1} = S_a q_{B(c,d)}^n$ összefüggés szerint

$$q_z^{n+1} \wedge q_i^{n+1} = q_{B(s_z,t_z)}^{n+1} \wedge q_{B(s_i,t_i)}^{n+1} = S_{s_i} q_{B(s_z,t_z)}^n = S_{s_i} q_z^n$$

ami mutatja, hogy most $D_i\mathcal{P}_{n+1} = S_{s_i}\mathcal{P}_n$, így az indukciós feltevésből következően $n-1$ magasságú reguláris.

Tehát $\mathcal{P}_r$ is reguláris, így $M_{\mathcal{P}_r}$-re elmondható a megfelelő homologikus összefüggőségi becslés.

Ezzel a 2.16. lemma bizonyítását befejeztük. ■

Mivel $(k-1)$-összefüggő X esetén $X^{(r)}$ biztosan $(kr-1)$-összefüggő, ezért az $(X^{(r)}, \Delta_{(r)})$ pár homologikus egzakt sorából az iménti 2.16. lemma alapján kapjuk, hogy $j \leq k+r-2$ esetén $H_j(X^{(r)}, \Delta_{(r)}) = 0$.

Az S_r csoport nyilvánvaló módon hat a $H^*(X^{(n)}, \Delta_{(n)})$ relatív kohomológiacsoportokon (a térpáron vett hatása által indukált hatással). Felírhatjuk a relatív Cartan-Leray spektrális sorozatot. (Ez a legegyszerűbb esetben a következő: Ha egy G csoport szabadon hat az Y téren, akkor tekinthetjük az $Y \times_G EG \to BG$ fibrálást Y fibrummal a G csoport BG klasszifikáló tere fölött, melynek fundamentális csoportjára $\pi_1(BG) \cong G$. Mivel EG pontrahúzható, a szabad csoporthatás miatt $Y \times_G EG \approx Y/\sim_G$, homotóp ekvivalensek. A Serre-spektrális sorozatból tehát $E_2^{p,q} \cong H^p(BG; \mathcal{H}^q(Y))$, ahol most $\mathcal{H}^q(Y)$ lokális együtthatókként szerepel a BG tér kohomológi-acsoportjaiban: természetes módon adott a $\pi_1(BG) \cong G$ csoport hatása $H^*(Y)$-on. Ezt akár a G csoport kohomológiacsoportjainak definíciójaként is használhatjuk. Az állítás az, hogy a spektrális sorozat a $H^{p+q}(Y/\sim_G)$ csoportokhoz konvergál.)

Esetünkben ez a spektrális sorozat a következőt adja: $E_2^{p,q} \cong H^p(S_r; H^q(X^{(r)}, \Delta_{(r)}))$ (az S_r szimmetrikus csoport kohomológiacsoportjai) és a $H^{p+q}(X^{(r)}/\sim_{S_r}, \Delta_{(r)}/\sim_{S_r})$ relatív kohomológiacsoportokhoz konvergál. Mivel az előbb megállapítottuk, hogy a $(X^{(r)}, \Delta_{(r)})$ pár homologikusan $(k+r-2)$-összefüggő, az univerzális együttható tétel szerint a kohomológiacsoportok is eltűnnek ugyanebben a tartományban, és emiatt $E_2^{p,q} = 0$, ha $q \leq k+r-2$. Így $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = 0$, ha $q \leq k+r-2$, vagyis $H^j(X^{(r)}/\sim_{S_r}, \Delta_{(r)}/\sim_{S_r}) = 0$, ha $j \leq k+r-2$. Ebből az univerzális együttható tétel szerint már következik, hogy a homológiacsoportok is triviálisak $j < k+r-2$ esetén.

Ugyancsak a spektrális sorozatból kapjuk, hogy

$$H^{r+k-1}(X^{(r)}/\sim_{S_r}, \Delta_{(r)}/\sim_{S_r}) \cong E_\infty^{0,r+k-1} \cong E_2^{0,r+k-1} \cong$$

$$\cong H^0(S_r; H^{r+k-1}(X^{(r)}, \Delta_{(r)})) \cong (H^{r+k-1}(X^{(r)}, \Delta_{(r)}))^{S_r} \leq H^{r+k-1}(X^{(r)}, \Delta_{(r)})$$

a csoportnak az S_r-hatásra invariáns része. De az univerzális együttható tételből az is következik, hogy mivel a homológiacsoportok $(r+k-2)$-ig triviálisak voltak, $H^{r+k-1}(X^{(r)}, \Delta_{(r)}) \cong \mathrm{Hom}(H_{r+k-1}(X^{(r)}, \Delta_{(r)}), \mathbb{Z})$, azaz torziómentes (szabad Abel) csoport. Ekkor viszont minden részcsoportja is az, így

$$H^{r+k-1}(X^{(r)}/\sim_{S_r}, \Delta_{(r)}/\sim_{S_r})$$

is torziómentes, vagyis (most ismét az $(X^{(r)}/\sim_{S_r}, \Delta_{(r)}/\sim_{S_r})$ párra vonatkozó) univerzális együttható tétel szerint $H_{r+k-2} := H_{r+k-2}(X^{(r)}/\sim_{S_r}, \Delta_{(r)}/\sim_{S_r})$ torziómentes. De szabad rész sincs benne, hiszen az univerzális együttható tétel eggyel korábbi indexre vonatkozó rövid egzakt sora $0 \to \mathrm{Hom}(H_{r+k-2}, \mathbb{Z}) \to 0$-ra végződik. Azaz H_{r+k-2} is 0.

Ezzel a 2.15. állítás bizonyítását befejeztük. ■

Most rátérünk $\overline{SP}_r(\Sigma X)$ homologikus $(2r+k-2)$-összefüggőségének bizonyítására. (X $(k-1)$-összefüggő volt.) Nem nehéz látni, hogy tetszőleges A térre $\overline{SP}_r(A) = SP_rA/SP_{r-1}A \cong A^{(r)}/\sim_{S_r}$ (hiszen épp azokat a pontokat faktorizáljuk ki, amelyeknek legalább az egyik koordinátájuk alappont – ezek vannak benne $SP_{r-1}A$-ban is).

Továbbírva az egyenlőséget most már ΣX-re:

$$\overline{SP}_r(\Sigma X) \cong (\Sigma X)^{(r)}/\sim_{S_r} \cong (S^1 \wedge X)^{(r)}/\sim_{S_r} \cong (S^1)^{(r)} \wedge_{S_r} X^{(r)}$$

Tekintsük ebben az $(S^1)^{(r)} \wedge_{S_r} \Delta_{(r)}$ alteret. Azt állítjuk, hogy ez pontrahúzható.

Minden $\Delta_{(r)}$-beli pont S_r-hatásnál vett stabilizátora egy $S_{a_1} \times \cdots \times S_{a_l} \leq S_r$ alakú részcsoporttal izomorf csoport, ahol $\Sigma a_i = r$ és $\exists i : a_i > 1$. Nevezzük az ilyen részcsoportokat *megfelelő alakúaknak*. Minden ilyen részcsoporttal vett hatás szerinti faktora az $(S^1)^{(r)}$ térnek pontrahúzható. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy egy $a > 1$ természetes számra $(S^1)^{(a)}/\sim_{S_a}$ pontrahúzható. Ez pedig következik abból, hogy $(S^1)^{(a)}/\sim_{S_a} \cong \overline{SP}_a(S^1) = SP_aS^1/SP_{a-1}S^1$, márpedig a konstrukció szerinti $SP_{a-1}S^1 \to SP_aS^1$ beágyazás homotopikus ekvivalencia, ugyanis $SP_aS^1 \approx S^1$. (Ezen legutóbbi ekvivalenciához S^1-nek tekintsük a $\mathbb{C}$ komplex sík egységkörét az $1 \in \mathbb{C}$ alapponttal, mely homotóp ekvivalens $\mathbb{C}\backslash\{0\}$-val; ekkor a $SP_a(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ teret, pontjait komplex polinomgyököknek tekintve, azonosíthatjuk azon 1 főegyütthatós a-adfokú polinomok terével, melyeknek a 0 nem gyöke, azaz konstans tagjuk nem 0; ezen polinomok pedig az együtthatóikat nézve a $\mathbb{C}^{a-1} \times \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tér pontjaival azonosíthatók.)

Az $(S^1)^{(r)} \wedge_{S_r} \Delta_{(r)}$ tér pontrahúzhatóságának bizonyítását folytatva, $\Delta_{(r)}$-et fogjuk felépíteni cellánként. Létezik olyan cellafelbontás, hogy minden cella S_r csoporthatás szerinti stabilizátora *megfelelő alakú* részcsoport S_r-ben. Az egypontú $\{*\}$ térre tudjuk, hogy $\{*\} \wedge_{S_r} (S^1)^{(r)}$ pontrahúzható. Ezután az indukciós lépés a következő: tegyük fel, hogy $\Delta_{(r)}$ vázának egy részére, $\Delta^j_{(r)}$-re már tudjuk az állítást, és most képezzük $\Delta^{j+1}_{(r)}$-et a ∂D határú D cella ragasztásával, melynek stabilizátora $H \leq S_r$ egy *megfelelő alakú* részcsoport. A ragasztást az alábbi homotopikus előrelökési diagrammal írhatjuk le:

$$\begin{array}{ccc} \partial D \wedge ((S^1)^{(r)}/\sim_H) & \xrightarrow{\phi} & \Delta^j_{(r)} \wedge_{S_r} (S^1)^{(r)} \\ \downarrow i & & \downarrow \\ D \wedge ((S^1)^{(r)}/\sim_H) & \to & \Delta^{j+1}_{(r)} \wedge_{S_r} (S^1)^{(r)} \end{array}$$

A fenti diagram úgy értendő, hogy a bal felső tér fölötti henger egyik végét a jobb oldali térhez ragasztjuk a ϕ leképezés képe mentén, a másik végét pedig a bal alsó térhez az i leképezés képe mentén, és ezzel kapjuk a jobb alsó teret.

A bal alsó tér nyilván pontrahúzható, a bal felső tér a H megfelelő alakú volta miatt pontrahúzható, a jobb felső pedig az indukciós feltevés miatt szintén az. Ebből következik, hogy a jobb alsó tér is pontrahúzható, tehát az indukciós lépés teljes.

Tehát a $(S^1)^{(r)} \wedge_{S_r} \Delta_{(r)} \subset (S^1)^{(r)} \wedge_{S_r} X^{(r)}$ altér pontrahúzható. Így

$$\overline{SP}_r(\Sigma X) \cong (S^1)^{(r)} \wedge_{S_r} X^{(r)}/\Delta_{(r)}$$

Tekintsük az

$$E := (S^1)^{(r)} \times_{S_r} X^{(r)}/\Delta_{(r)}$$

teret. Ebben altérként szerepel az $E' := X^{(r)}/\Delta_{(r)}, \sim_{S_r}$ tér, és ezen pár relatív homológiacsoportjai éppen a vizsgálni kívánt

$$(S^1)^{(r)} \wedge_{S_r} X^{(r)}/\Delta_{(r)}$$

tér homológiacsoportjaival egyeznek meg. (Valóban, ahhoz hogy ezen utóbbi teret kapjuk, E-ben a E' összehúzása után már csak a pontrahúzható $(S^1)^{(r)}/\sim_{S_r}$ teret kell összehúzni.)

Tehát tételünkhöz elég azt belátni, hogy $H_j(E, E') = 0$ minden $j \leq 2r + k - 2$ esetén.

Legyen $B \cong E'$ és tekintsük a $* \to E' \to B$ triviális fibrálást, valamint az $E \to B$ leképezést. Ezen utóbbinál az alappont ősképe a pontrahúzható $(S^1)^{(r)}/\sim_{S_r}$, bármely másik pont ősképe az $F := (S^1)^{(r)} \cong S^r$ tér (mivel $X^{(r)}/\Delta_{(r)}$-en az alappontot leszámítva már fixpontmentesen hat S_r).

A relatív Serre-spektrális sorozat egy változatát fogjuk alkalmazni. Az általános eset a következő (ezen bekezdés erejéig felejtsük el az előzőekben bevezetett jelöléseket): tegyük föl, hogy $E \to B$ egy F fibrumú, $E' \to B$ pedig egy F' fibrumú Serre-fibrálás ugyanazon B alaptér fölött, és $E' \subset E$ kofibrálás a két, B fölötti totális térrel. Ekkor létezik egy spektrális sorozat, melyre $E^2_{p,q} \cong H_p(B; H_q(F, F'))$ (feltesszük, hogy a B alaptér egyszeresen összefüggő) és a $H_{p+q}(E, E')$ relatív homológiacsoportokhoz konvergál.

Visszatérve a bevezetett jelölésekhez, esetünkben az $E' \to B$ leképezés triviális fibrálás lévén valóban fibrálás, de az $E \to B$ leképezés, mint ezt korábban megjegyeztük, csak az alappontot leszámítva az. Emiatt az alábbi apró módosítást kell elvégeznünk: a $B \cong X^{(r)}/\Delta_{(r)}, \sim_{S_r}$ tér alappontjának válasszuk ki egy pontrahúzható környezetét, ezt kivágva kapjuk a $\hat{B}$ teret, a kivágott rész határát jelölje $\partial\hat{B} \subset \hat{B}$. A $\hat{B}$, ill. a $\partial\hat{B}$ terek ősképét E-ben jelölje $\hat{E}$, ill. $\partial\hat{E}$. Most az $(\hat{E}, \partial\hat{E}) \to (\hat{B}, \partial\hat{B})$ térpárok közötti leképezés már valóban fibrálás. A relatív homológiacsoportokról áttérve a megfelelő faktorterek redukált homológiacsoportjaira kapjuk a célunknak megfelelő spektrális sorozatot: felhasználva, hogy nyilvánvalóan $\hat{B}/\partial\hat{B} \approx B$ és hogy $\hat{E}/\partial\hat{E} \approx E$ (mivel a B-ből kihagyott környezet egy pontjának őse pontrahúzható volt), a következő adódik:

Létezik egy spektrális sorozat, melyre $E^2_{p,q} = \tilde{H}_p(B; \tilde{H}_q(S^r))$ és a $H_{p+q}(E, E')$ csoportokhoz konvergál. De S^r homologikusan $(r-1)$-összefüggő, B pedig a 2.15. állítás szerint homologikusan $(k + r - 2)$-összefüggő, így a spektrális sorozat szerint (E, E') homologikusan $(r - 1) + (k + r - 2) + 1 = (2r + k - 2)$-összefüggő, amint állítottuk.

Ezzel a 2.14. tétel bizonyítását befejeztük. ■

3. A Γ funktor

3.1. A stabil homotópiacsoportok realizációja

Mint azt az SP funktor esetében már említettük, a szokásos útfibrálásból látható, hogy az Ω huroktér funktor elcsúsztatja a homotópiacsoportokat. Ennek alapján ($\Omega^k Y = \Omega \dots \Omega Y$ jelöléssel az ismételt huroktér operációra) $\pi_n(\Omega^k \Sigma^k X) \cong \pi_{n+k}(\Sigma^k X) \cong \pi_n^s(X)$ elég nagy k-ra. Majdnem kaptunk egy, a stabil homotópiacsoportokat homotópiacsoportokként megvalósító funktort: az egyetlen probléma, hogy különböző n értékekre és X terekre más és más lehet az az ,,elég nagy" k érték.

Láttuk, hogy Ω elcsúsztatja a homotópiacsoportokat. Ennek felhasználásával és Ω definíciójának segítségével $\Omega^N Y$ azonosítható az $S^N \to Y$ alappontot alappontba vivő folytonos függvények terével ($N = 1$-re épp az eredeti definíció). Ez a tér a redukált szuszpenzió funktorialitása segítségével beágyazható a $\Sigma S^N \to \Sigma Y$ függvények terébe (a kettős kúpok közötti ,,szintenkénti" függvény), de ez utóbbi tulajdonképpen az $S^{N+1} \to \Sigma Y$ függvények tere, azaz $\Omega^{N+1}\Sigma Y$. Mindezt $Y = \Sigma^N X$-re alkalmazva kapjuk $\Omega^N \Sigma^N X$ beágyazását $\Omega^{N+1}\Sigma^{N+1} X$-be.

Ez alapján az $\Omega\Sigma X \to \Omega^2\Sigma^2 X \to \Omega^3\Sigma^3 X \to \dots$ beágyazás-sorozat megad egy $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$-szel jelölt teret a direkt limesz topológiával. A fentiek alapján (és az 1.3. Freudenthal-tétel alapján, amely szerint minden i-re az előbbi $\Omega^N\Sigma^N X \to \Omega^{N+1}\Sigma^{N+1} X$ beágyazás elég nagy N-re π_i-n izomorfizmust indukál) érvényes:

3.1. Állítás. $\pi_n(\Omega^\infty\Sigma^\infty X) \cong \pi_n^s(X)$

3.2. Egy konstruktív modell

Az $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ térnek több konstruktív modellje is létezik; mi a Barratt-Eccles féle Γ funktorral képzett ΓX teret fogjuk használni, mivel konstrukciója hasonló az SPX szimmetrikus szorzat konstrukciójához.

Egy G (véges) csoportra jelöljön EG egy pontrahúzható teret, melyen megadható egy szabad (azaz fixpontmentes) G-hatás (egy ilyen hatást rögzítettnek tekintünk, bár a jelölésben nem szerepeltetjük). Ilyen létezik, például a Milnor-konstrukció alapján:

Tetszőleges X, Y topologikus terekre $X * Y$ jelöli a két tér *csatoltját (join)*: az X és Y terek pontjait összekötő szakaszok terét, amiben az ugyanott ,,kezdődő", illetve ,,végződő" szakaszok ,,kezdő-", illetve ,,végpontjait" azonosítjuk, azaz a $t_1 x + t_2 y$, $x \in X, y \in Y, 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, t_1 + t_2 = 1$ formális lineáris kombinációk terét.

Nem nehéz látni, hogy a $*$ művelet asszociatív: vehető az $X_1 * \cdots * X_n$ tér mint a $t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$ formális konvex lineáris kombinációk tere, ahol a $t_i = 0$ együtthatójú $x_i \in X_i$ pontokat elhagyjuk. Vezessük be az $X^{[k]} := \underbrace{X * \cdots * X}_{k}$ jelölést. Nyilván megadható egy $X^{[k]} \to X^{[k+1]}$ beágyazás, ennek segítségével definiálható az $X^{[\infty]}$ tér a direkt limesz topológiával. $EG := G^{[\infty]}$ egy G topologikus csoportra (például egy véges csoportra mint diszkrét topologikus térre) pontrahúzható lesz, és szabadon hat rajta a G csoport. Nem nehéz látni, hogy $G^{[m+1]}$ $(m-1)$-összefüggő és szintén szabadon hat rajta G (a formális lineáris kombináció ,,koordinátáin" balszorzással).

Két csoport közötti tetszőleges $f : G_1 \to G_2$ függvény (nem feltétlenül homomorfizmus) indukál egy $Ef : EG_1 \to EG_2$ leképezést (a formális lineáris kombinációkon ,,koordinátánként").

Mi ezt a konstrukciót a $G = S_n$, $n \geq 1$ szimmetrikus csoportokra (permutációcsoportokra) fogjuk használni. Megadunk bizonyos $S_m \to S_n$ leképezéseket (általában nem lesznek homomorfizmusok), mikor $n \geq m$, illetve $n \leq m$. A precíz definíció előtt lássuk, mit is szeretnénk elérni.

A definiálni kívánt leképezéseink alaptípusai a következők: egyrészt $S_n \to S_{n+1}$ esetén, mikor úgy tekintjük, hogy S_n egy n elemű, S_{n+1} egy $(n+1)$-elemű rendezett halmazon hat, vehetjük azt a leképezést, mely S_n minden csoportelemét az S_{n+1} azon csoportelemének felelteti meg, mely ugyanazt a permutálást végzi el a rendezett $(n+1)$-es első n elemén, az utolsó elemet pedig helyben hagyja. (Ez még homomorfizmus is).

Másrészt $S_{n+1} \to S_n$ esetén nézhetjük a következőt: S_{n+1} minden eleme elviszi a rendezett $(n+1)$-es első n elemét valahová, közben a sorrendjükön is változtat. Vegyük most azt az S_n-beli elemet, mely az első n elem képének sorrendjét ,,visszarendezi", őket összességében ugyanazon az n helyen tartva.

A precíz definíció a következő. Jelölje $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$ a k-nál nem nagyobb pozitív egészek halmazát. Legyen $m \leq n$ és tekintsük az $\alpha : [m] \to [n]$ szigorúan monoton növő függvényeket. Ezek bijekcióban állnak $[n]$ m-elemű részhalmazaival a képhalmazuk révén.

$\sigma \in S_m$ esetén legyen $\alpha_*(\sigma) \in S_n$ a következőképp definiálva: $\alpha_*(\sigma)(\alpha(i)) = \alpha(\sigma(i))$, $i \in [m]$, illetve $\alpha_*(\sigma)(j) = j$, ha $j \in [n]$, de $j \notin \alpha([m])$. Tehát $\alpha_* : S_m \to S_n$. ([2] 27. o., 1.3. definíció.)

Egy $\sigma \in S_n$ tekinthető $\sigma : [n] \to [n]$ függvénynek. A $\sigma \circ \alpha : [m] \to [n]$ kompozíció képhalmazának megfelel egy $\beta : [m] \to [n]$ szigorúan monoton növő függvény. Ehhez létezik egy egyértelmű $\alpha^*(\sigma) \in S_m$, azaz $\alpha^*(\sigma) : [m] \to [m]$, amire $\beta \circ \alpha^*(\sigma) = \sigma \circ \alpha$.

Tehát $\alpha^* : S_n \to S_m$. ([2] 27. o., 1.5. definíció.)

Legyen speciálisan $\alpha^0_{n,n+1} : [n] \to [n+1]$ az identikus inklúzió: $\alpha^0_{n,n+1}(i) = i,\ i \leq n$. Ekkor $\alpha^0_{n,n+1_*}$ és ${\alpha^0_{n,n+1}}^*$ éppen a korábbi bekezdésekben intuitívan leírt leképezések.

A szimmetrikus szorzat definíciójánál láttuk, hogy S_n nyilvánvaló módon hat az X^n n-szeres direkt szorzaton. Ez a hatás nem szabad: a diagonális elemek (csupa azonos koordináta) például fixpontok. ES_n-en viszont szabadon hat a csoport. Vegyük az $X^n \times ES_n$ szorzatteret, persze ezen is szabadon hat S_n, a diagonális hatással. Az SP konstrukciójakor faktorizáltunk S_n hatásával. Most ugyanezt tesszük, $X^n \times ES_n$-et faktorizáljuk S_n hatásával, azaz tekintjük az $X^n \times_{S_n} ES_n$ teret.

Megint csak SP konstrukciójához hasonlóan, megadhatunk egy

$$X^n \times_{S_n} ES_n \to X^{n+1} \times_{S_{n+1}} ES_{n+1}$$

beágyazást: $[(x_1, x_2, \ldots, x_n), s] \mapsto [(x_1, x_2, \ldots, x_n, *), (E\alpha^0_{n,n+1_*})(s)]$, ahol $* \in X$ az alappont, $s \in ES_n$ és $E\alpha^0_{n,n+1_*} : ES_n \to ES_{n+1}$ az $\alpha^0_{n,n+1_*} : S_n \to S_{n+1}$ által indukált leképezés.

Térjünk rá a precíz definícióra. Egy tetszőleges $\alpha : [m] \to [n]$ szigorúan monoton növő függvény indukál egy (szintén α^*-gal jelölt) $X^n \to X^m$ leképezést:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, \ldots, x_{\alpha(m)})$$

tehát az α képhalmazán kívüli koordinátákat töröljük.

A következő definícióban azt mondjuk, hogy $\alpha : [m] \to [n]$ *teljes* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$-re, ha az előbb ismertetett $\alpha^* : X^n \to X^m$ csak $*$ alappontot tüntet el $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ből, azaz $i \notin \alpha([m]) \Rightarrow x_i = *$.

3.2. Definíció. ([2] 30. o., 3.1. definíció.)

Az $* \in X$ pontozott térre a ΓX teret a következőképpen kapjuk: Vesszük az $\coprod_{n\geq 1} X^n \times ES_n$ diszjunkt uniót és faktorizáljuk a következő ekvivalenciarelációk szerint:

1. *$((x_1, x_2, \ldots, x_n), s) \sim ((x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), (E\sigma)(s))$, ahol $s \in ES_n$ és $E\sigma$ a $\sigma \in S_n$ hatása ES_n-en,*

2. *$((x_1, x_2, \ldots, x_n, *), s) \sim ((x_1, x_2, \ldots, x_n), (E{\alpha^0_{n,n+1}}^*)(s))$, ahol $s \in ES_{n+1}$ és $E{\alpha^0_{n,n+1}}^*$ az ${\alpha^0_{n,n+1}}^* : S_{n+1} \to S_n$ által indukált $ES_{n+1} \to ES_n$ leképezés.*

Vegyük észre, hogy az első ekvivalencia miatt a második helyett a következő is írható:

$$((x_1, x_2, \ldots, x_n), s) \sim ((x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, \ldots, x_{\alpha(m)}), (E\alpha^*)(s))$$

ahol $s \in ES_n$ és $\alpha : [m] \to [n]$ teljes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-re.

Ha a fenti definícióban csak az $\coprod_{r\geq n\geq 1} X^n \times ES_n$ diszjunkt uniót vesszük, akkor kapjuk a $\Gamma_r X$ tereket minden r természetes számra. Nyilván ezek egy $\Gamma_r X \subset \Gamma_{r+1} X \subset \dots \subset \Gamma X$ filtrálást adnak.

3.3. Lemma. *$(k-1)$-összefüggő X esetén a $\Gamma_r X/\Gamma_{r-1} X$ faktor $(kr-1)$-összefüggő.*

Bizonyítás:

$$\Gamma_r X/\Gamma_{r-1} X = \frac{\coprod_{i=0}^{r} X^i \times_{S_i} ES_i/\sim}{\coprod_{j=0}^{r-1} X^j \times_{S_j} ES_j/\sim} = \underbrace{X \wedge \dots \wedge X}_{r} \times_{S_r} ES_r/\{*\} \times_{S_r} ES_r$$

hiszen $\Gamma_r X$ pontjai éppen ΓX azon pontjai, melyek $X^r \times ES_r$ egy pontjának felelnek meg a definiáló ekvivalenciarelációk szerint, és ezek közül éppen azok vannak benne $\Gamma_{r-1} X$-ben is, ahol az X^r tényezőben valamelyik koordináta a $*$ alappont (ezért vehetjük X r-szeres ékszorzatát a faktorban).

ES_r pontrahúzható, így $(k-1)$-összefüggő X esetén $\underbrace{X \wedge \dots \wedge X}_{r}$-hez hasonlóan $\underbrace{X \wedge \dots \wedge X}_{r} \times ES_r$ is $(kr-1)$-összefüggő (készítsünk például CW-modellt X-hez, ekkor a kr-nél kisebb dimenziós cellák kifaktorizálódnak az ékszorzat képzésekor). Ezt a teret faktorizáljuk az S_r *szabad* hatásával, az így kapott tér π_i homotópiacsoportjai triviálisak $2 \leq i < kr$ esetén, persze ugyanez (még sokkal több is) igaz a $\{*\} \times_{S_r} ES_r$ másik faktortérre. Sőt, fundamentális csoportjaik izomorfak (S_r), így a $\Gamma_r X/\Gamma_{r-1} X$ faktortér $(kr-1)$-összefüggő, vagyis $r > 1$-re $H_i(\Gamma_r X, \Gamma_{r-1} X) = 0$, ha $i < kr$. (Ez persze azt is jelenti, hogy a $\Gamma_{r-1} X \to \Gamma_r X$ beágyazás izomorfizmust indukál az i indexű homológiacsoportokon $i \leq kr-2$ esetén.) ∎

3.4. Következmény. *Legyen X $(k-1)$-összefüggő CW-komplexus. Ekkor $H_l(\Gamma_r X) \cong H_l(\Gamma_{r+1} X) \cong \dots \cong H_l(\Gamma X)$ a természetes beágyazások által indukált izomorfizmusokkal, ha $l \leq kr+k-2$.*

3.5. Megjegyzés. *A Γ funktor definíciójában lecserélhetjük az ES_k pontrahúzható (∞-összefüggő) tereket $(m-1)$-összefüggőekre: jelöljön $E^m S_k$ egy olyan $(m-1)$-összefüggő teret, melyen szabadon hat az S_k permutációcsoport. (Használhatjuk például a Milnor-konstrukcióból $G^{[m+1]}$-et, ekkor az $E^m S_k$ terek még kompaktak is.)*

3.6. Definíció. *A ΓX tér definíciójában minden ES_k teret $E^m S_k$-ra cserélve kapjuk a $\Gamma^m X$ teret.*

Ennek ugyanúgy létezik egy természetes filtrálása a $\Gamma_k^m X \subset \Gamma_{k+1}^m X \subset \dots$ terekkel.

3.3. A konstrukció helyessége

Az elkövetkezőkben azt szeretnénk belátni, hogy a Γ funktor az $\Omega^\infty\Sigma^\infty$ funktorhoz hasonlóan realizálja a stabil homotópiacsoportokat, vagyis hogy egy X térre ΓX és $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ homotópiacsoportjai megegyeznek. Még jobb lenne, ha találnánk egy $k_X : \Gamma X \to \Omega^\infty\Sigma^\infty X$ leképezést, ami a homotópiacsoportokon izomorfizmust indukál.

Valójában minden $\Omega^N\Sigma^N X$-hez létezik egy, a Γ funktor definíciójához nagyon hasonlóan leírható modell. Az $\Omega^N\Sigma^N X$ térre úgy érdemes tekinteni, mint az $S^N \to \Sigma^N X$ leképezések terére. Ki fog derülni, hogy majdnem minden ilyen leképezés tekinthető olyannak, amely véges sok pontban „transzverzálisan" metszi az $X \subset \Sigma^N X$ alteret; egy ilyen leképezés pedig leírható úgy, hogy kijelöljük S^N-ben azon pontokat, amik X valamely pontjára képződnek, majd „megcímkézzük" őket a képükkel mint X-beli ponttal. Tehát tulajdonképpen S^N-nek a véges, X pontjaival címkézett részhalmazait kell leírnunk. S^N helyett tekinthető $\mathbb{R}^N$ is, hiszen úgy képzelhetjük, hogy egy címkézett véges ponthalmaz esetén minden pont az ő címkéjének megfelelő X-beli pontra képződik, a köré rajzolt elegendően kis tömör gömb vagy kocka pedig a megfelelő X-beli pont „fölötti" S^N-re ($\Sigma^N X = X \wedge S^N$) úgy, hogy minden kis tömör gömb határa, ill. $\mathbb{R}^N$-nek minden, a kis tömör gömbökön kívüli pontja $\Sigma^N X$ alappontjába képződik.

Lássuk, hogyan írható le egy ilyen konfigurációs tér (Koschorke és Sanderson [8] cikke alapján): $\mathbb{R}^N$ véges, X pontjaival címkézett részhalmazait szeretnénk precízen megadni. Vezessünk be egy jelölést $\mathbb{R}^N$ csupa különböző vektorból álló rendezett vektor k-asaira: $\widetilde{(\mathbb{R}^N)^k} := \{(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) : \underline{v}_i \in \mathbb{R}^N, \underline{v}_i \neq \underline{v}_j (i \neq j)\}$. Jegyezzük mindjárt meg, hogy $\widetilde{(\mathbb{R}^N)^k}$-n létezik egy *szabad* S_k permutációhatás: $\sigma \in S_k$-ra $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) \overset{\sigma}{\mapsto} (\underline{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \underline{v}_{\sigma(k)})$.

Az X pontjaival címkézett rendezetlen k-asokat nyilván $X^k \times_{S_k} \widetilde{(\mathbb{R}^N)^k}$ adja meg, az összes véges részhalmazhoz pedig a $\coprod_{k\geq 1} X^k \times_{S_k} \widetilde{(\mathbb{R}^N)^k}$ diszjunkt uniót kell venni. Azzal a megállapodással, hogy a $* \in X$ alapponttal címkézett pontok „elfelejthetők", egy $\sim$ ekvivalenciareláció jön létre ezen a diszjunkt unión, így kapjuk a $C_N(X) := \coprod_{k\geq 1} X^k \times_{S_k} \widetilde{(\mathbb{R}^N)^k}/\sim$ faktorteret. Tulajdonképpen a következő a definíció:

3.7. Definíció. *Egy X térből a $C_N(X)$ teret úgy kapjuk, hogy a 3.2. definícióban kicseréljük az ES_k tereket az $\widetilde{(\mathbb{R}^N)^k}$ terekre.*

Az $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N+1}$ természetes (koordináta-hipersíkként való) beágyazás (utolsó koordinátaként egy 0 hozzáírása minden vektorhoz) indukál egy $C_N(X) \to C_{N+1}(X)$ beágyazást. A direkt limesz topológia adja a $C_\infty(X)$ teret a $\cdots \subset C_N(X) \subset$

$C_{N+1}(X) \subset \cdots \subset C_\infty(X)$ filtrálással. Tulajdonképpen

$$C_\infty(X) = \coprod_{k \geq 1} X^k \times_{S_k} \widetilde{(\mathbb{R}^\infty)^k} / \sim$$

azaz ugyanúgy a 3.2. definíció alapján képezhető, ES_k helyett $\widetilde{(\mathbb{R}^\infty)^k}$-val, ahol $\mathbb{R}^\infty$ pontjainak csak olyan vektorokat engedünk meg, melyekben csak véges sok nem nulla koordináta szerepel.

Mivel $\widetilde{(\mathbb{R}^N)^k}$ mint egy $Nk - k$ kodimenziós halmaz $\mathbb{R}^{Nk}$-beli komplementere $(Nk - k - 2)$-összefüggő, ezért $\widetilde{(\mathbb{R}^\infty)^k}$ már ∞-összefüggő, vagyis pontrahúzható, így választható ES_k-nak. Vegyük észre, hogy a Γ funktor 3.2. definíciójában szereplő pontrahúzható ES_k terek szabadon választhatók: a kapott ΓX tér homotopikus ekvivalencia erejéig egyértelmű lesz. (Ez abból látszik, hogy tetszőleges két, szabad G csoporthatással rendelkező tér között létezik egy G-ekvivariáns homotopikus ekvivalencia, hiszen mindkét térnek a G-hatás szerinti faktora egy $K(G, 1)$ Eilenberg–MacLane tér, ami pedig homotopikus ekvivalencia erejéig egyértelmű.)

A fenti gondolatmenet mutatja, hogy $C_\infty(X) \approx \Gamma(X)$.

Tehát az $\Omega^\infty\Sigma^\infty X \approx \Gamma X$ állításhoz elég lenne azt bizonyítani, hogy $\Omega^N\Sigma^N X \approx C_N(X)$ úgy, hogy a homotopikus ekvivalenciák kommutálnak az eggyel nagyobb indexű terekbe történő beágyazásokkal, azaz $\Omega^\infty\Sigma^\infty X \approx C_\infty(X)$ is teljesül.

Legyen $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges rögzített természetes egész. Definiálunk egy $k = k_X^{(N)} : C_N(X) \to \Omega^N\Sigma^N X$ leképezést a következőképpen: $C_N(X)$ minden c pontja tulajdonképpen egy k-elemű $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ részhalmaza $\mathbb{R}^N$-nek $X - *$ pontjaival címkézve. Rajzoljunk mind a k darab $\mathbb{R}^N$-beli pont köré egy elegendően kis r sugarú tömör gömböt; legyen például r a $\underline{v}_i$ pontok között előforduló minimális távolság harmada. Így kapjuk a $B_r(\underline{v}_i)$ nyílt gömböket $x_i \in X - *$ pontokkal címkézve.

A kiszemelt c ponthoz $k(c) \in \Omega^N\Sigma^N X \cong (\Sigma^N X)^{S^N}$ legyen a következő $S^N \xrightarrow{u} \Sigma^N X$ leképezés: S^N-et $\mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$-nek tekintve $u = k(c)$ képezze a ∞ potot és $\mathbb{R}^N$ minden egyes $B_r(\underline{v}_i)$ nyílt gömbökön kívüli pontját $\Sigma^N X$ alappontjába, a $B_r(\underline{v}_i)$ nyílt gömböt pedig képezze az $\{x_i\} \times (S^N - *) \subset X \wedge S^N = \Sigma^N X$ altérre egy előre rögzített $B_r \to (S^N - *) \cong B_1$ homeomorfizmust használva (B_1 jelöli az N dimenziós nyílt egységgömböt).

Könnyű meggondolni, hogy az imént definiált k leképezések kommutálnak a $C_N(X) \to C_{N+1}(X)$, ill. az $\Omega^N\Sigma^N X \to \Omega^{N+1}\Sigma^{N+1} X$ beágyazásokkal, így a következő állítás, mely azt jelenti, hogy a k leképezés gyenge homotopikus ekvivalencia, tulajdonképpen azt is mutatja, hogy $C_\infty(X)$ és $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ gyengén homotóp ekvivalensek. (Valójában CW-modellt készítve $C_N(X)$-hez és $\Omega^N\Sigma^N X$-hez Whitehead tételével azt is beláthatnánk, hogy homotóp ekvivalensek.)

3.8. Állítás. *Tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén $[S^m, C_N(X)] \cong [S^m, \Omega^N \Sigma^N X]$ és a megfeleltetést a $k : C_N(X) \to \Omega^N \Sigma^N X$ leképezéssel vett kompozíció adja.*

Bizonyítás: (Rourke és Sanderson [11] cikke nyomán)

Homotopikus ekvivalencia erejéig megváltoztathatjuk X-et (mindkét vizsgált funktor homotopikus): az eredeti alapponthoz ragaszthatjuk a $[0,1]$ intervallum $\{1\}$ pontját, és feltehetjük, hogy $\{0\}$ az új alappont. Az így módosított $* \in X$ pontozott térben lesz az alappontnak egy intervallummal homeomorf környezete. A ragasztott intervallum egy rögzített belső pontjára a későbbiekben egyszerűen $1/2$-ként hivatkozunk.

$[S^m, C_N(X)]$ elemeihez a következő objektum elemeit rendelhetjük: $\mathcal{H}$ álljon bizonyos (W, h) párokból, ahol $W \subset S^m \times \mathbb{R}^N$ olyan sima, m dimenziós, peremes, összefüggő részsokaságok diszjunkt uniója (∂W-vel jelöljük a komponensek határának unióját), hogy az S^m-re való vetítés W belső pontjainál lokálisan (0 kodimenziós) beágyazás (azaz az $\mathbb{R}^N$ koordinátázásból adódó természetes tüskézés sehol sem érintőirányú) és a $* \in S^m$ alappont fölött nincs pontja W-nek, h pedig olyan $W \to X$,,címkéző" függvény, melyre $h|_{\partial W} \equiv * \in X$ és $h|_{\mathrm{int} W} \neq * \in X$ Az ilyen párokat a W sokaságok izotópiáinak (melyek minden időpillanatban megtartják a fenti tulajdonságokat), sőt, kobordizmusainak (hogy a kobordizmust tanúsító $\overline{W} \subset I \times S^m \times \mathbb{R}^N$-beli részsokaságra is igazak legyenek a fent elmondottak, az $\mathbb{R}^N$ koordináta-irányaiból adódó tüskézés sehol sem érintőirányú), ill. a h függvény homotópiáinak erejéig ekvivalenseknek tekintjük.

A $\mathcal{H}$ minden eleméhez tartozik egy $[S^m, C_N(X)]$-beli elem: egy (W, h) párhoz rendelhetjük azt az $u : S^m \to C_N(X)$ leképezést, melyre $u(s) = [x_1, \ldots, x_k; \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k] \in C_N(X)$, ahol $\underline{v}_i$-k pontosan a W-nek az s fölötti pontjainak felelnek meg, azaz $(s, \underline{v}_i) \in W$ és $h((s, \underline{v}_i)) = x_i$. Mivel az S^m alappontja fölött nem volt pontja W-nek, ezért a (W, h) párhoz rendelt leképezés pontozott lesz, tehát tényleg eleme $[S^m, C_N(X)]$-nek.

Fordítva, minden $[S^m, C_N(X)]$-beli elemhez rendelhetünk egy $\mathcal{H}$-beli elemet a következőképpen: egy $u : S^m \to C_N(X)$ leképezés által reprezentált osztályhoz kell konstruálnunk $\mathcal{H}$-beli elemet. Először csak egy $S^m \times \mathbb{R}^N$-beli W részhalmazt adunk meg; álljon ez pontosan azokból az $(s, \underline{v}) \in S^m \times \mathbb{R}^N$ pontokból, melyekre valamelyik i-re $\underline{v} = \underline{v}_i$, ahol $u(s) = [x_1, \ldots, x_k; \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k] \in \coprod_{k \geq 1} X^k \times_{S_k} \widetilde{(\mathbb{R}^N)^k} / \sim \; = C_N(X)$. Az így megadott $W \subset S^m \times \mathbb{R}^N$ halmazon értelmezhetünk egy $h : W \to X$ címkéző függvényt: $h((s, \underline{v})) := x_i$, ha (s, v) azért került beválasztásra a W részhalmazba, mert $\underline{v} = \underline{v}_i$ volt, azaz $\underline{v}$ az $u(s)$-nek az i-edik ,,vektor-értékű" koordinátájával egyezett meg.

A W részhalmazt minden olyan (s,m) pontjánál, melyre $h((s,m)) \neq * \in X$, lokálisan egy $S^m \to \mathbb{R}^N$ lokális leképezés gráfja határozza meg (az ilyen pontoknál W vetítése S^m-re lokális homeomorfizmus). Feltehető, hogy ez a lokális leképezés mindenütt sima (és gráfja az eredeti leképezés gráfjához tetszőlegesen közel van), ehhez csak homotópia erejéig kell megváltoztatni azt a leképezést, amiből a W részhalmazt nyertük. Ezután feltehetjük, hogy a h címkéző függvény transzverzális a $* \in X$ alappont $[0,1]$ intervallummal homeomorf környezetének $1/2$ pontjára, majd komponálhatjuk h-t ennek az intervallumnak egy olyan nyújtásával, mely az $1/2$-et az alappontba viszi. Ekkor a W részhalmaz minden komponense egy sima, esetleg peremes sokaság lesz, melynek csak a peremén veheti fel a h címkéző függvény a $* \in X$ értéket. Ha van nem peremes komponens, akkor annak egy tetszőleges pontját és annak egy gömbszerű környezetét kiszemelve változtassuk meg homotópia erejéig a h címkéző függvényt úgy, hogy ezen a gömbön a konstans $* \in X$ leképezés legyen (ez megtehető, mivel X összefüggő: a kiszemelt ponton a h által felvett értéket mint X-beli pontot összeköthetjük az alapponttal, majd ezt az utat használva változtassuk meg a h-t a kiszemelt gömbön annak sugarai mentén). Ezután a gömb $*$ ponttal lesz címkézve, így elhagyhatjuk, de ezzel a komponens peremes sokasággá vált. Mivel a kiindulási $S^m \to C_N(X)$ leképezésünk pontozott volt, ezért W-nek nem lesz pontja a $* \in S^m$ alappont fölött.

Egy $S^m \xrightarrow{f} C_N(X)$ leképezés homotópiája valóban a megfelelő W részsokaság leírt kobordizmusának felel meg és fordítva: a homotópiából adódó $I \times S^m \xrightarrow{F} C_N(X)$ függvény és a kobordizmusból adódó $\overline{W} \subset I \times S^m \times \mathbb{R}^N$ részsokaság teljesen hasonló konstrukció segítségével feleltethető meg egymásnak.

Hasonlóan, $[S^m, \Omega^N \Sigma^N X]$ elemeihez a következő objektum elemeit rendelhetjük: $\mathcal{I}$ álljon bizonyos (W', t', h') hármasokból, ahol $W' \subset S^m \times \mathbb{R}^N$ minden komponense sima peremes m-dimenziós sokaság (melynek ismét nincsen pontja $* \in S^m$ fölött), $h' : W' \to X$ címkéző függvény, melyre $(h')^{-1}(*) = \partial W'$, t' pedig W' sima N-tüskézése, azaz minden $w \in W'$ pontban $t'(w)$ értéke N darab rendezett lineárisan független vektor ($S^m \times \mathbb{R}^N$ w-beli érintőterében), melyek közül egyik sem esik W'-nek a w pontbeli érintőterébe. $\mathcal{I}$ elemeit W' izotópiái, sőt, kobordizmusai, valamint h' és t' homotópiái erejéig ismét ekvivalenseknek tekintjük (ha az izotópia és a homotópiák végig megőrzik a fenti tulajdonságokat, a kobordizmust tanúsító $\overline{W}' \subset I \times S^m \times \mathbb{R}^N$ sokaság hasonlóan N-tüskézett).

A hozzárendelés az alábbi módon adható meg: tekintsünk egy $u : S^m \to \Omega^N \Sigma^N X$ reprezentánst. $\Omega^N \Sigma^N X$ pontjai azonosíthatók az $S^N \to \Sigma^N X$ pontozott leképezések terével, azaz u-nak egy $u' : S^m \times S^N \to \Sigma^N X$ felel meg. Itt $S^N \approx \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$

értelmezéssel dolgozunk tovább. Feltehető (u'-nek egy közeli homotópiájával) hogy u' transzverzális az $\{1/2\} \times S^N \subset X \wedge S^N$ részhalmazra ($1/2$ az X alappontjának $[0,1]$ intervallummal homeomorf környezetének egy belső pontja). Ezután u'-t komponáljuk egy nyújtással, mely az $1/2$ pontot az alappontba viszi. További homotópiával feltehetjük, hogy u' transzverzális $X \times \{*\} \subset X \wedge S^N$-re (ahol $* \in S^N$).

Most $W' := (u')^{-1}(X \times \{*\}) \subset S^m \times \mathbb{R}^N \subset S^m \times \{\mathbb{R}^N \cup \{\infty\}\}$ minden komponense egy esetleg peremes N kodimenziós részsokaság, melyre a h' címkéző függvényt maga az u' adja meg (így $(h')^{-1}(*) = \partial W'$), a t' tüskézés vektorait a $w \in W'$ pontnál pedig az $u'(w) =: x$ fölötti S^N határozza meg ($u'(w) = x \in X \times \{*\} \subset X \wedge S^N$) úgy, hogy a $*$ pontja körül lokálisan $\mathbb{R}^N$-nek tekintjük a standard koordinátázással és a $*$ ponttal mint origóval. Hasonlóan az előbbi esethez, most is feltehetjük, hogy W' minden egyes komponense peremes sokaság (a h' címkéző függvény megfelelő homotópiájával). u' további homotópiájával az is elérhető, hogy minden $w \in W'$ pontra az u' leképezés, ha a w pontot $(x, *) \in X \wedge S^N$ pontba képezte, akkor W' csőszerű környezetének a tüskéknek megfelelő részét az x fölötti $S^N \cong \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$-re képezze.

Fordítva, minden egyes (W', t', h') hármas, mely egy $\mathcal{I}$-beli elemet reprezentál, meghatároz (homotópiától eltekintve) egy $u : S^m \to \Omega^N \Sigma^N X$ leképezést: W' egy alkalmas csőszerű környezetének $S^m \times \mathbb{R}^n$-beli komplementerét képezzük a $* \in X \subset \Sigma^N X$ alappontra, minden $w \in W'$ pontot képezzünk a $h'(w)$-nek megfelelő X-beli pontra, a csőszerű környezetnek a w-beli $t'(w)$ tüskéknek megfelelő részét pedig a $h'(w)$ X-beli pont fölötti S^N-re ($X \wedge S^N$-ben) a tüskéknek megfelelően. Ezzel megadtunk egy $u' : S^m \times S^N \to \Sigma^N X$ leképezést, melynek megfelel egy $u : S^m \to \Omega^N \Sigma^N X$ leképezés.

Hasonlóan az előző esethez, egy $S^m \xrightarrow{u} \Omega^N \Sigma^N X$ leképezés $I \times S^m \xrightarrow{U} \Omega^N \Sigma^N X$ homotópiája megfeleltethető egy $\overline{W'} \subset I \times S^m \times \mathbb{R}^N$ kobordizmusnak és viszont (teljesen hasonló konstrukcióval, U transzverzálissá tételével).

Nyilvánvalóan létezik egy természetes $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{I}$ leképezés: $(W, h) \mapsto (W', t', h')$, ahol t' az $\mathbb{R}^N$ koordinátáinak megfelelő tüskézés. (Vegyük észre, hogy ez jóldefiniált: két ekvivalens $\mathcal{H}$-beli reprezentáns közti kobordizmust tanúsító $I \times S^m \times \mathbb{R}^N$-beli sokaságot értelmezhetünk $\mathcal{I}$-beli reprezentánsokat ekvivalenssé tevő kobordizmusként.) Nem nehéz meggondolni, hogy ez a ι leképezés a $k : C_N(X) \to \Omega^N \Sigma^N X$ által indukált $[S^m, C_N(X)] \to [S^m, \Omega^N \Sigma^N X]$ leképezés megfelelője.

A következő, úgynevezett *kiegyenesítési tételt* fogjuk használni (különböző változatai megtalálhatók például Rourke és Sanderson [10] cikkében):

3.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy egy a-dimenziós A^a sima sokaság be van ágyazva $Q^q \times \mathbb{R}^N$-be, ahol Q^q egy q-dimenziós sima sokaság, $q > a$, és A beágyazásán minden* *pontban adott N darab lineárisan független, A-hoz sehol sem érintőirányú sima vektormező (N-tüskézés). Ekkor a tüskézett beágyazás izotópiával megváltoztatható úgy, hogy az N-tüskézés vektorai minden pontban az $\mathbb{R}^N$ koordinátairányaiba mutassanak.*

Ha $K \subseteq Q$ egy kompakt halmaz, melynek egy környezete fölötti részen az N-tüskézés minden vektora már $\mathbb{R}^N$ koordinátairányaiba mutat, akkor a fenti következmény izotópiájáról feltehető, hogy az a K kompakt részhalmaz fölött minden pillanatban az identitás.

A fenti két tétel akkor is igaz, ha $a = q$ és az A egy peremes sokaság.

Először belátjuk, hogy a ι leképezés szürjektív. Vegyünk egy tetszőleges (W', t', h') reprezentánst. A kiegyenesítési tétel 0 kodimenziós esetét alkalmazva (megtehetjük, mivel minden komponens peremes sokaság) a $Q := S^m$ szereposztással kapjuk a következőt: egy izotópia mutatja azt, hogy a (W', t', h') hármas tekinthető egy (W, h) páros képének (az izotópia során a címkéző függvényt értelemszerűen tarthatjuk meg).

Az injektivitáshoz tekintsünk két kobordáns $\mathcal{I}$-beli reprezentánst, melyek megkaphatók képként. Tekintsük az $\mathcal{I}$-beli ekvivalenciát tanúsító $\overline{W'} \subset I \times S^m \times \mathbb{R}^N$ sokaságot. Feltehető, hogy ennek szintén minden komponense peremes. Így alkalmazhatjuk a kiegyenesítési tétel kompakt részhalmazon rögzített tüskézésű esetét a $Q := I \times S^m$, $K := \{0, 1\} \times S^m$ szereposztással. Az izotópia után egy, a $\mathcal{H}$-beli ekvivalenciát tanúsító kobordizmust kapunk.

Ezzel az állítást beláttuk. ■

Számunkra az a fontos következménye ennek az állításnak, hogy

$$\pi_n(\Gamma X) \cong \pi_n(C_\infty(X)) \cong \pi_n(\Omega^\infty \Sigma^\infty X) \cong \pi_n^s(X)$$

3.4. További észrevételek a Γ funktorról

3.10. Állítás. (Az általánosított Freudenthal-tétel megfelelője)

$(n-1)$-összefüggő X tér esetén (ha $n > 1$) a $(\Gamma X, X)$ pár $(2n-1)$-összefüggő (így $i < 2n-1$ esetén $\pi_i(X) \cong \pi_i(\Gamma X)$ és az izomorfizmust a természetes beágyazás indukálja).

Bizonyítás: A 3.3. lemma szerint a $\Gamma_m X / \Gamma_{m-1} X$ faktortér $(nm-1)$-összefüggő, vagyis $p > 1$-re $H_i(\Gamma_p X, \Gamma_{p-1} X) = 0$, ha $i < np$. $\Gamma_1 X = X$, $\Gamma_0 X = *$ az alappontnak tekintjük, a filtrálás kisebb indexű tagjait az üres halmaznak vehetjük. Ezzel a filtrálással a $H_*(\Gamma X)$ csoportokhoz konvergáló spektrális sorozatot elkészítve látjuk, hogy $E^1_{p,q} = H_{p+q}(\Gamma_p X, \Gamma_{p-1} X)$ alapján $p > 1$-re $E^\infty_{p,q} = E^1_{p,q} = 0$, ha $p + q \leq np - 1$, azaz ha $q < p(n-1)$ (ahol $n \geq 2$), $p = 0$-ra $E^\infty_{0,q} = E^1_{0,q} = 0$, ha $q > 0$, $p = 1$-re pedig $E^\infty_{1,q} = E^1_{1,q} = H_{q+1}(X)$. Ebből és a konvergenciából kapjuk, hogy (mivel $p \geq 2, q < 2(n-1)$ esetén $E^\infty_{p,q} = E^1_{p,q} = 0$) $H_i(X) \cong H_i(\Gamma X)$, ha $i \leq 2(n-1)+1$, azaz $i < 2n$ esetén $H_i(\Gamma X, X) = 0$. A relatív Hurewicz-tételből (alkalmazható: X-szel együtt ΓX is egyszeresen összefüggő, hiszen homotópiacsoportjai a stabil homotópiacsoportok) kapjuk, hogy $(\Gamma X, X)$ $(n-1)$-összefüggő. ■

Ahogyan az SP funktor a közönséges homológiaelméletet realizálja, ugyanúgy a Γ funktor a stabil homotópiacsoportok alkotta extraordináris homológiaelméletet realizálja. Ezért itt is igaz lesz, hogy $\Omega\Gamma\Sigma X$ és ΓX homotópiacsoportjai megegyeznek. Ennél megint több is igaz: ebben az esetben is megadható egy homotopikus ekvivalencia a két tér között.

A $\gamma_X : \Gamma X \to \Omega\Gamma\Sigma X$ leképezést újra a neki megfelelő $\gamma : \Sigma\Gamma X \to \Gamma\Sigma X$ leképezés segítségével definiálhatjuk: egy $\Gamma(X) \wedge S^1 \to \Gamma(X \wedge S^1)$ leképezést kell megadni. Ez itt is lehetséges ,,koordinátánként" ($\Gamma(X)$ elemei $[x_1, \ldots, x_n, e]$ alakú ekvivalenciaosztályok, $e \in ES_n$) a következőképpen:

$$([x_1, \ldots, x_n, e], s) \mapsto [(x_1, s), \ldots, (x_n, s), e]$$

ahol $s \in S^1$, és az ékszorzat elemeit rendezett párokként írjuk föl (hisz az ékszorzat a szorzat egy faktora).

3.11. Állítás. *A fenti módon definiált leképezésnek megfelelő $\gamma_X : \Gamma X \to \Omega\Gamma\Sigma X$ leképezés homotopikus ekvivalencia a két tér között.*

Bizonyítás: Itt is a megfelelő

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma X & \to & \Gamma C X & \to & \Gamma\Sigma X \\ \downarrow_{\gamma_X} & & \downarrow_{\alpha_X} & & \downarrow \\ \Omega\Gamma\Sigma X & \to & P\Gamma\Sigma X & \to & \Gamma\Sigma X \end{array}$$

kommutatív diagramot kell tekinteni. A középső α_X itt annak a leképezésnek az adjungáltja, melyet egy $C\Gamma CX \to \Gamma CCX \to \Gamma CX \to \Gamma\Sigma X$ kompozícióval kaphatunk az SP esetéhez hasonlóan.

Az $X \to CX \to \Sigma X$ kofibrálásra az a tény, hogy a stabil homotópiacsoportok homológiaelméletet alkotnak, biztosít egy hosszú egzakt sorozatot a homotópiacsoportokon. Az alsó fibrálásra nyilván létezik egy hosszú egzakt sorozat a homotópiacsoportokon. A kettőt összehasonlítva az öt-lemmából kapjuk, hogy a γ_X gyenge homotopikus ekvivalencia. Felhasználva, hogy X CW-komplexus esetén

ΓX-nek létezik homotóp ekvivalens CW-modellje, illetve hogy CW-komplexus hurokterének is létezik homotóp ekvivalens CW-modellje, Whitehead klasszikus tételével kapjuk az állítást. ■

4. A stabil Hurewicz-homomorfizmus topologikus realizációja

4.1. A leképezés definíciója

Tekintsük a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\Gamma(X)) & \cong & \pi_n^s(X) \\ \downarrow_{f_\pi} & & \downarrow_{h_s} \\ \pi_n(SP(X)) & \cong & H_n(X) \end{array}$$

A fölső és alsó izomorfizmusokat ismertettük. A jobb oldali leképezés a stabil Hurewicz-homomorfizmus. Nyilván létezik egy bal oldali leképezés, mely a diagramot kommutatívvá teszi. Azt állítjuk, hogy ezt a leképezést egy egyszerű szerkezetű $f : \Gamma(X) \to SP(X)$ leképezés indukálja. Az f leképezést a következőképp kaphatjuk:

Az $f_{(n)} : X^n \times_{S_n} ES_n \to X^n / \sim_{S_n}$ „felejtő" leképezés, melyre $f_{(n)}([(x_1, \ldots, x_n), u]) = [x_1, \ldots, x_n]$ (ahol $u \in ES_n$) és amely értelmes, mert kompatibilis a $\Gamma(X)$ és $SP(X)$ tereket definiáló első ekvivalenciarelációval, kompatibilis a második relációval is, ezért értelmes $f_X : \Gamma(X) \to SP(X)$ leképezést definiál (a szóban forgó X térre vonatkozó alsó indexet a jelölésből gyakran elhagyjuk).

Azt állítjuk, hogy ez az f_X a stabil Hurewicz-homomorfizmus topologikus realizációja: a fenti diagramot az általa a homotópiacsoportokon indukált $(f_X)_\pi$ leképezés teszi kommutatívvá.

Többször föl fogjuk használni az alábbi egyszerű észrevételt:

4.1. Állítás. *Az alábbi diagram kommutatív:*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma X & \xrightarrow{\gamma_X} & \Omega\Gamma\Sigma X \\ \downarrow_{f_X} & & \downarrow_{\Omega f_{\Sigma X}} \\ SP\ X & \xrightarrow{\beta_X} & \Omega SP\Sigma\ X \end{array}$$

ahol γ_X, illetve β_X a 3.11., illetve a 2.10. állítások homotopikus ekvivalenciái.

Bizonyítás: A γ és β leképezéseket tulajdonképpen koordinátánkénti leképezésekből kaptuk, így a diagram kommutativitása pontonként ellenőrizhető. ■

4.2. Következmény. *Az alábbi diagram kommutatív:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\Gamma X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(\Omega\Gamma\Sigma X) \\ \downarrow_{f_\pi} & & \downarrow_{\Omega f_\pi} \\ \pi_n(SP\ X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(\Omega SP\Sigma\ X) \end{array}$$

ahol a leképezések jelöléséből a terekre vonatkozó információt az egyszerűség kedvéért elhagytuk. A vízszintes izomorfizmusokat, amint azt korábban megjegyeztük, a γ és β leképezések indukálják.

Tekintsük a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_n(\Gamma X) & \xrightarrow{(\gamma_N)_\pi} & \pi_n(\Omega^N \Gamma \Sigma^N X) & \cong & \pi_{n+N}(\Gamma \Sigma^N X) & \xleftarrow{(i_1)_\pi} & \dots \\
\downarrow (f_X)_\pi & & \downarrow (\Omega^N f_{\Sigma^N X})_\pi & & \downarrow (f_{\Sigma^N X})_\pi & & \\
\pi_n(SPX) & \xrightarrow{(\beta_N)_\pi} & \pi_n(\Omega^N SP\Sigma^N X) & \cong & \pi_{n+N}(SP\Sigma^N X) & = & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\dots & \xleftarrow{(i_1)_\pi} & \pi_{n+N}(\Sigma^N X) & = & \pi_{n+N}(\Sigma^N X) \\
& & \downarrow (i_2)_\pi & & \downarrow h \\
\dots & = & \pi_{n+N}(SP\Sigma^N X) & \cong & H_{n+N}(\Sigma^N X)
\end{array}$$

Itt N egyrészt elég nagy ahhoz, hogy az utolsó függőleges h leképezés már (definíció szerint) a stabil Hurewicz-homomorfizmust adja, másrészt $N \geq n$, hogy a 3.10. állítás értelmében a fölső sor $i_1 : \Sigma^N X \to \Gamma\Sigma^N X$ beágyazása a homotópiacsoportokon izomorfizmust indukáljon (feltesszük, hogy X összefüggő, akkor $\Sigma^N X$ N-összefüggő), γ_N és β_N leképezések a 3.11. és a 2.10. állításokban szereplő leképezések N-szeri ismétlésével kaphatók (így a korábbiak értelmében izomorfizmust adnak a homotópiacsoportokon), az $i_2 : \Sigma^N X \to SP\Sigma^N X$ beágyazás 2.11 szerint a közönséges Hurewicz-homomorfizmus megfelelőjét indukálja (emiatt azt már látjuk, hogy a diagram utolsó négyzete tényleg kommutatív).

Az utolsó előtti négyzet kommutativitása is nyilvánvaló: az i_1 beágyazás után alkalmazva az f ,,felejtő" leképezést az i_2 beágyazást kapjuk. Az első négyzet a 4.1. állítás miatt kommutál, míg a másodikhoz egyszerűen azt használjuk, hogy a huroktér képzése elcsúsztatja a homotópiacsoportokat. Tehát az egész diagram kommutál, így f_X tényleg a stabil Hurewicz-homomorfizmus megfelelője:

4.3. Állítás. *A*

$$\begin{array}{ccc}
\pi_n(\Gamma(X)) & \cong & \pi_n^s(X) \\
\downarrow f_\pi & & \downarrow h_s \\
\pi_n(SP(X)) & \cong & H_n(X)
\end{array}$$

diagramot a fentiekben definiált f ,,felejtő" leképezés teszi kommutatívvá: a homotópiacsoportokon a stabil Hurewicz-homomorfizmus megfelelőjét indukálja.

Nyilvánvaló, hogy f megtartja a filtrálást: az $f : \Gamma_k X \to SP_k X$ megszorítás értelmes. Ugyanígy, ,,felejtő leképezésként" értelmezhető f akkor is, ha a $\Gamma^m X$ tereket, ill. annak $\Gamma_k^m X$ filtrálását tekintjük, melyek konstrukciójában tehát a pontrahúzható (∞-összefüggő) ES_n tereket az $(m-1)$-összefüggő $E^m S_n$ approximációkkal helyettesítjük.

4.2. A leképezés szerkezete

Tekintsük egy tetszőleges $x \in SP(X)$ pontnak az $F_x := f^{-1}(x)$ őskëpét. Tegyük fel, hogy az $x \in SP(X)$ pontnak (legfeljebb) n darab $* \in X$ alapponttól különböző koordinátája van. Az SP-t definiáló ekvivalenciarelációknak köszönhetően ez az x pont a következő alakban írható: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ahol $x_i \neq *$. Rögzítsük ezt az amúgy tetszőleges koordináta-sorrendet. A $\Gamma(X)$-et definiáló ekvivalenciarelációknak köszönhetően x minden f szerinti őse a következő alakban írható: $((x_1, x_2, \ldots, x_n), u)$, ahol $u \in ES_n$. (Az, hogy az őskép X-beli koordinátái X^n-be vihetők alappontok törlésével – a 2. ekvivalenciarelációval – és az, hogy ott S_n hatásával az előre rögzített sorrendbe rakhatók az 1. ekvivalenciarelációval, világos. Azt kell még meggondolni, hogy az u tényleg tekinthető ES_n-belinek, de lényegében ez is nyilvánvaló: ugyanis ha a 2. relációval minden alappont-koordinátát törlünk, azzal egyúttal az ES_m-et is $(m > n)$ ES_n-be visszük.)

Az f leképezés definíciója szerint u tetszőleges ES_n-beli pont lehet, de ezek esetleg nem mind adnak különböző pontokat $\Gamma(X)$-ben, ugyanis (most már csak az 1.) ekvivalenciareláció (az S_n hatása) azonosíthat látszólag különböző ősöket. A koordináta-sorrend rögzítésével ez a hatás csak olyan lehet, mely az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sorrendet fixen hagyja, ilyen permutációból viszont bármelyik előfordulhat. Jelölje a sorrendet fixen hagyó permutációk részcsoportját S_n-ben G_x. Mivel ez a részcsoport izomorfia erejéig csak attól függ, hány különböző pont van az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontok között és melyikből hány darab, ez a jelölés korrekt: a csoport valóban csak x-től függ. Tehát két ,,standard alakra" (az X-beli koordináták választott sorrendjére) hozott ős ekvivalens, ha $u \in ES_n$ koordinátáik egyazon G_x szerinti orbitban vannak (G_x mint S_n részcsoportja nyilván hat ES_n-en). Azaz az x fölötti fibrum homeomorf a pontrahúzható ES_n tér G_x véges csoporttal vett faktorterével: $F_x \cong ES_n/\sim_{G_x}$.

Ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy ha f valamelyik megszorításával dolgozunk és az ES_n terek helyett csak az $E^m S_n$ approximációt használjuk, akkor $f_r : \Gamma_r^m X \to SP_r X$ esetén $f_r^{-1}(x) \cong E^m S_r/\sim_{G_x}$, ahol $G_x \leq S_r$.

A következő lemmát kaptuk:

4.4. Lemma. *A korábban definiált $f_r : \Gamma_r^m X \to SP_r X$ leképezésre $x \in SP_r X$ esetén $f_r^{-1}(x) \cong E^m S_r/\sim_{G_x}$ valamilyen $G_x \leq S_r$ részcsoportra ($m \in \mathbb{N} \cup \infty$). Az állítás az $f : \Gamma^m X \to SPX$ leképezésre is érvényes, de akkor r értéke függ az $x \in SPX$ ponttól (r az a legkisebb érték, melyre $x \in SP_r X \subset SPX$).*

4.3. Kohomologikus viselkedés

Az $f : \Gamma X \to SPX$ leképezés által a homotópiacsoportokon indukált homomorfizmusokat szeretnénk vizsgálni. A Whitehead-tétel és annak általánosított változatai lehetőséget adnak erre a homológia- és a kohomológiacsoportokon indukált homomorfizmusok ismeretében. Először tehát a különféle együtthatójú kohomológiákon indukált leképezéseket szeretnénk megérteni.

Általában egy $p : E \to B$ fibrálás esetén $H^*(B; G)$ és $H^*(E; G)$ között spektrális sorozatok teremthetnek kapcsolatot, ha ismerjük az $F \cong p^{-1}(b)$ $(b \in B)$ fibrum kohomológiacsoportjait. Esetünkben az ősök szerkezete egyszerű, minden pont őseképe egy magasan összefüggő tér véges csoport szerinti faktora, azaz gyakorlatilag egy klasszifikáló tér. Ennek kohomológiacsoportjai bizonyos együtthatócsoportokkal triviálisak. $\Gamma X \to SPX$ leképezésünk azonban nem fibrálás, így a szokásos spektrális sorozatoknál (pl. Serre-féle) erősebb eszközökre lesz szükségünk.

Lássuk először, miért reménykedhetünk egy spektrális sorozat alkalmazhatóságában: nézzük egy-egy pont ősképének kohomológiacsoportjait speciális együtthatócsoportokkal.

4.5. Lemma. (Serre, [13])

Ha egy G véges csoport, melynek rendjével lehet osztani a kommutatív P együtthatócsoportban, szabadon hat az X téren és Y jelöli az ezzel a hatással vett faktorteret, akkor $H_n(Y; P) \cong H_n(X; P)^G := H_n(X; P)/N(G)$, ahol $N(G)$ az $x - g_*(x)$, $x \in H_n(X; P)$, $g \in G$ alakú elemek által generált részcsoport (normálosztó) $H_n(X; P)$-ben. (Itt g_* a g csoportelem X téren való hatásának funktoriálisan megfelelő hatás $H_n(X; P)$-n.)

4.6. Következmény. *Legyen p páratlan prím, $r < p$ természetes szám, $x \in SP_rX$. Ekkor a $f_r : \Gamma_r^m X \to SP_rX$ leképezésre $0 < i < m$ esetén $H^i(f_r^{-1}(x); \mathbb{Z}_p) = 0$ ($\mathbb{Z}_p$ a p elemű ciklikus csoport), illetve $H^i(f_r^{-1}(x); \mathbb{Q}) = 0$, ahol ezen utóbbi esetben állhat $r = \infty$ is ($\mathbb{Q}$ a racionális számok additív csoportja, $m \in \mathbb{N} \cup \infty$).*

Bizonyítás: A 4.4. lemma szerint $f^{-1}(x) \cong E^m S_r / \sim_{G_x}$, $G_x \leq S_r$. Mivel $E^m S_r$ $(m-1)$-összefüggő, ezért $H_i(E^m S_r; \mathbb{Z}_p) = 0$ $(i < m)$ és mivel $p > r$, ezért $(p, |G_x|) = 1$ (hiszen $|G_x|\,|r!$), vagyis $\mathbb{Z}_p$ együtthatócsoportban lehet osztani G_x rendjével. Így az előző 4.5. lemma alapján $H_i(E^m S_r / \sim_{G_x}; \mathbb{Z}_p) = 0$, ha $i < m$. Az univerzális együttható tétel alapján ez a kohomológiacsoportokra is igaz. Ha $\mathbb{Z}_p$ helyett a $\mathbb{Q}$ csoportot tekintjük, a bizonyítás még egyszerűbb: $\mathbb{Q}$-ban minden természetes számmal lehet osztani, így az állítás ebben az esetben minden egyes r értékre igaz. ■

Mint megjegyeztük, a vizsgálandó leképezésünk nem fibrálás, hiszen a különböző pontok ősképei nem is homotóp ekvivalensek egymással. Ami ennek ellenére kapcsolatot teremthet a két tér kohomológiacsoportjai között, az az úgynevezett *Leray spektrális sorozat*. Ennek használatához meg kell ismerkednünk a *kéve* fogalmával.

4.7. Definíció. *Egy X topologikus tér fölötti Abel-csoport értékű* előkévének *nevezzük a következő $\mathcal{F}$ objektumot:*

- *$\mathcal{F}$ minden egyes $U \subseteq X$ nyílt részhalmazhoz rendel egy $\mathcal{F}(U)$ Abel-csoportot*
- *egymásba ágyazott $V \subseteq U$ nyílt halmazpárhoz rendel egy $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ csoporthomomorfizmust*

a következő tulajdonságokkal:

1. *$\forall U$ nyíltra $r_{U,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ az identitás*
2. *$W \subseteq V \subseteq U$ esetén $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$*

4.8. Definíció. *Az $\mathcal{F}$ előkévét* kévének *nevezzük, ha a következők teljesülnek:*

- *Ha $U = \bigcup_i U_i$ nyílt halmaz nyíltakkal való előállítása és $s, t \in \mathcal{F}(U)$, hogy $r_{U,U_i}(s) = r_{U,U_i}(t)$ minden i-re, akkor $s = t$*
- *Ha $U = \bigcup_i U_i$ nyílt halmaz nyíltakkal való előállítása és minden i-re adott $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ úgy, hogy minden i, j párra $r_{U_i,U_i \cap U_j}(s_i) = r_{U_j,U_j \cap U_i}(s_j)$, akkor létezik $s \in \mathcal{F}(U)$, hogy $s_i = r_{U,U_i}(s)$*

Az $\mathcal{F}$ kéve $x \in X$ pont fölötti *rostjának* nevezzük a $\lim \mathrm{ind}_{U \ni x}\mathcal{F}(U)$ induktív limeszt.

Az X tér tetszőleges $\mathcal{F}$ kévéjéhez rendelhetjük az $\mathcal{F}(X)$ Abel-csoportot. Ez a hozzárendelés funktoriális és *globális szelés* funktornak nevezik. A globális szelés funktor balegzakt. Derivált funktorai adják a $H^i(X; \mathcal{F})$ *kévekohomológia-csoportokat.*

Ismert, hogy lokálisan kontraktibilis X tér esetén a konstans A Abel-csoport értékű kéve (minden nyílthoz az A csoportot, minden tartalmazáshoz az identitás homomorfizmust rendeli) kévekohomológiái megegyeznek az X tér szinguláris A együtthatós kohomológiáival.

4.9. Tétel. (Leray spektrális sorozat, [4] 201-202. o.)

Legyen $f : E \to B$ egy folytonos leképezés két topologikus tér között, $\mathcal{A}$ egy kéve az E tér fölött. Tetszőleges $U \subseteq B$ nyílt halmazhoz hozzárendelhetjük a $H^q(f^{-1}(U); \mathcal{A})$

kévekohomológia-csoportot; ezzel egy előkévét kapunk a B tér fölött (minden $q \geq 0$ egészre). Az általa generált B fölötti kévét jelölje $\mathcal{H}^q(F;\mathcal{A})$. (Amennyiben mindkét tér lokálisan kompakt, E parakompakt és az f leképezésnél kompakt részhalmaza ősképe kompakt, akkor a $\mathcal{H}^q(F;\mathcal{A})$ kéve rostja a $b \in B$ pont fölött izomorf a $H^q(f^{-1}(b);\mathcal{A})$ kévekohomológia-csoporttal.)

Ekkor létezik egy spektrális sorozat az $E_2^{p,q} = H^p(B;\mathcal{H}^q(F;\mathcal{A}))$ csoportokkal, amely a $H^*(E;\mathcal{A})$ csoportokhoz konvergál.

Alkalmazzuk ezt a tételt az $f_r : \Gamma_r^m X \to SP_r X$ leképezésre, a $\Gamma_r^m X$ téren a konstans A kévére, ahol $A = \mathbb{Z}_p$ valamilyen $p > r$ prímre vagy $A = \mathbb{Q}$. Éppen azért használtuk a 3.6. definíció $\Gamma_r^m X$ terét a $\Gamma_r X$ helyett, hogy alkalmazhassuk ezt a tételt: a 3.5. megjegyzés szerint alkalmas választással az $E^m S_k$ terek a konstrukcióban kompaktak is, így ha a lokális kompaktságot és a parakompaktságot is feltesszük, akkor a tétel alkalmazásának minden feltétele teljesül. (Mint említettük, a konstans A kéve kévekohomológiái lokálisan kontraktibilis tér fölött megegyeznek a szokásos A-együtthatós szinguláris kohomológiákkal.)

Ekkor a 4.6. következmény szerint a 4.9. tétel spektrális sorozatában $0 < q < m$ esetén $E_2^{p,q} = H^p(B;0) = 0$, mivel $H^q(f_r^{-1}(x);A) = 0$ minden $x \in SP_r X$-re (a konstans 0 rostú kéve kohomológiái triviálisak). Ebből ($E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = 0$, $0 < q < m$ alapján) adódik, hogy $i < m$ esetén $H^i(\Gamma_r^m X;A) \cong H^i(SP_r X;A)$. Kaptuk a következőt:

4.10. Tétel. *Az $f_r : \Gamma_r^m \to SP_r X$ leképezés izomorfizmust indukál a következő kohomológiacsoportokon (legyen X parakompakt, lokálisan kompakt és lokálisan kontraktibilis):*

$$f_r^H : H^i(SP_r X;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^i(\Gamma_r^m X;\mathbb{Z}_p) \text{ ha } i < m \text{ és } r < p \text{ prím}$$

illetve

$$f_r^H : H^i(SP_r X;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^i(\Gamma_r^m X;\mathbb{Q}) \text{ ha } i < m \text{ és } r \text{ tetszőleges, akár } r = \infty \text{ is lehet.}$$

Bizonyítás: Már csak azt kell belátnunk, hogy a spektrális sorozatból következő izomorfizmust valóban az f_r leképezés indukálja, de ez egyszerű következménye a spektrális sorozatok elméletének: Ha $f : E \to B$ és $f' : E' \to B'$ külön-külön teljesítik a spektrális orozatokra vonatkozó tétel feltételeit, továbbá adottak a $b : B \to B'$ és $e : E \to E'$ leképezések, melyek kommutálnak az f, f' leképezésekkel, akkor léteznek $g^r : E_r'^{p,q} \to E_r^{p,q}$ homomorfizmusok ($r = 2, 3, \ldots, \infty$), melyek kommutálnak a $d_r^{p,q}$, $d_r'^{p,q}$ differenciálokkal, $e^H : H^n(E';A) \to H^n(E;A)$ megőrzi a filtrálásokat, és a filtrálás szomszédos tagjainak faktorcsoportján indukált leképezések megegyeznek a $g^\infty : E'^{p,q}_\infty \to E^{p,q}_\infty$ leképezésekkel. Ennek segítségével levezethető (az $f' : E' \to B'$ leképezést az $id : B \to B$-re cserélve, b helyett id_B-t, e helyett f-et véve), hogy $f^H : H^n(B;A) \to H^n(E;A)$ képe, Im f^H megegyezik $E^{n,0}_\infty$-nel, mely utóbbi a mi esetünkben $H^n(B;A) \cong E_2^{n,0} \subseteq H^n(E;A)$. Tehát a kapott $H^n(B;A) \cong H^n(E;A)$ izomorfizmust az f leképezés indukálja. ■

5. Következmények a stabil Hurewicz-homomorfizmusra

5.1. Homotopikus viselkedés

A kohomológiákon mutatott viselkedésből szeretnénk következtetni a homotópiacsoportokon mutatott viselkedésre. Ennek standard algebrai topológiai eszközei a Whitehead- és a Hurewicz-tétel különböző változatai. Ezek kimondásához be kell vezetnünk a *Serre-osztály* fogalmát.

5.1. Definíció. ([3] 10.1. definíció)

Abel-csoportok egy $\mathcal{C}$ *osztályát* Serre-osztálynak *nevezzük, ha teljesülnek rá a következő axiómák:*

1. *Abel-csoportok* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *rövid egzakt sorozatára* $B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow A, C \in \mathcal{C}$
2. $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \otimes B, Tor(A, B) \in \mathcal{C}$
3. $A \in \mathcal{C} \Rightarrow H_n(K(A,1);\mathbb{Z}) \in \mathcal{C}, \forall n > 0$, *ahol* $K(A,1)$ *az* A *csoport Eilenberg–MacLane tere*

Ha a ezen felül még az is teljesül, hogy $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \otimes B \in \mathcal{C}$ tetszőleges B *Abel-csoportra, akkor* $\mathcal{C}$*-t* erős Serre-osztálynak *nevezzük (valójában ebből a tulajdonságból a fenti 2. tulajdonság már következik, ld. pl. [3]).*

Klasszikus példák Serre-osztályokra a következők:

5.2. Példa.

- Végesen generált Abel-csoportok
- Azon kommutatív torziócsoportok, melyekben minden elem rendje csak egy előre rögzített, de tetszőleges halmazból való prímekkel osztható
- Az előbbi osztály véges csoportjai

Az utóbbi két csoportosztály egyben erős Serre-osztály is.

Azt mondjuk, hogy egy $h : A \to B$ homomorfizmus $\mathcal{C}$*-monomorfizmus*, ha Ker $h \in \mathcal{C}$; $\mathcal{C}$*-epimorfizmus*, ha Coker $h \in \mathcal{C}$ és $\mathcal{C}$*-izomorfizmus*, ha mindkét előbbi feltétel egyszerre teljesül.

Az általunk használt tételek a következők lesznek:

5.3. Tétel. (Mod $\mathcal{C}$ Hurewicz-tétel)

Legyen $\mathcal{C}$ egy Serre-osztály, X egyszeresen összefüggő, $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$, $i < n$.

Ekkor $H_i(X) \in \mathcal{C}$, $i < n$ és a $h : \pi_n(X) \to H_n(X)$ Hurewicz-homomorfizmus $\mathcal{C}$-izomorfizmus.

5.4. Tétel. (Relatív mod $\mathcal{C}$ Hurewicz-tétel)

Legyen $\mathcal{C}$ egy erős Serre-osztály, $A \subset X$, mindkét tér egyszeresen összefüggő, és tegyük fel, hogy a beágyazás epimorfizmust indukál a második homotópiacsoportokon: $\pi_2(A) \xrightarrow{i} \pi_2(X)$ szürjektív.

Ezen feltételek mellett ha $\pi_i(X, A) \in \mathcal{C}$, $i < n$, akkor $H_i(X, A) \in \mathcal{C}$, $i < n$ és a $h : \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ relatív Hurewicz-homomorfizmus $\mathcal{C}$-izomorfizmus.

5.5. Tétel. (Mod $\mathcal{C}$ Whitehead-tétel)

Legyen $\mathcal{C}$ erős Serre-osztály, X, Y egyszeresen összefüggő terek, $f : X \to Y$ indukáljon epimorfizmust a második homotópiacsoportokon, azaz legyen $f_\pi : \pi_2(X) \to \pi_2(Y)$ szürjektív. (Speciálisan, ha X és Y is 2-összefüggő, akkor minden feltétel teljesül.)

Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

- *$f_H : H_i(X) \to H_i(Y)$ $\mathcal{C}$-izomorfizmus $i < n$-re és $\mathcal{C}$-epimorfizmus $i = n$-re;*
- *$f_\pi : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ $\mathcal{C}$-izomorfizmus $i < n$-re és $\mathcal{C}$-epimorfizmus $i = n$-re;*

Legyen X egy összefüggő CW-komplexus végesen generált homológiacsoportokkal. Ekkor az 5.3. tétel szerint a homotópiacsoportok is végesen generáltak. Ugyanez lesz igaz a 2-összefüggő $\Sigma^2 X$ tér homológiacsoportjaira, következésképp (ismét a az 5.3. tétel miatt) homotópiacsoportjaira is. Ekkor nyilván a stabil homotópiacsoportok is ilyenek, azaz $\Gamma\Sigma^2 X$ és $SP\Sigma^2 X$ homotópia- és homológiacsoportjai is végesen generáltak (és szintén 2-összefüggőek a klasszikus Hurewicz-tétel miatt).

Mivel $\Omega^2\Gamma\Sigma^2 X \approx \Gamma X$ (3.11. állítás) és $\Omega^2 SP\Sigma^2 X \approx SPX$ (2.10. állítás) és az Ω^2 képzése csupán elcsúsztatja a homotópiacsoportokat (és ez az elcsúsztatás a 4.1. állítás szerint felcserélhető az f leképezéssel), a homotopikus viselkedést elég $\Gamma\Sigma^2 X$, illetve $SP\Sigma^2 X$ esetén vizsgálni. Így a továbbiakban feltesszük, hogy X 2-összefüggő, homológiacsoportjai (és így homotópiacsoportjai is) végesen generáltak. Ebből következik, hogy ugyanez igaz ΓX-re és SPX-re is.

5.6. Tétel. *Legyen X 2-összefüggő CW-komplexus végesen generált homológiacsoportokkal. Tegyük fel, hogy adott n természetes számhoz létezik olyan r_n*

pozitív egész, melyre $l \leq n$ esetén $H_l(\Gamma_{r_n}X) \cong H_l(\Gamma X)$ és $H_l(SP_{r_n}X) \cong H_l(SPX)$, hogy az izomorfizmusokat mindenhol a természetes beágyazások indukálják.

Ekkor a $h_l^s : \pi_l^s(X) \to H_l(X)$ stabil Hurewicz-homomorfizmus ($l \leq n$) magjában és komagjában nincs p-rendű elem, ha $r_n < p$ prím.

Bizonyítás: n rögzített, legyen $r := r_n$. A 4.10. tétel szerint $f_r : \Gamma_r X \to SP_r X$ izomorfizmust indukál $p > r$ esetén a $\mathbb{Z}_p$ együtthatós kohomológiacsoportokon.

Valóban, bár a 4.10. tételben $\Gamma_r X$ helyett még $\Gamma_r^m X$ szerepel, a tételt minden lehetséges $m \to \infty$ értékre elmondhatjuk, ezzel megszabadulva a kohomológiacsoportok indexeire vonatkozó felső korláttól. Ehhez azt kell csupán meggondolni, hogy minden rögzített i-re a $H^i(\Gamma_r^m X; A)$ kohomológiacsoport elég nagy m értékre megegyezik $H^i(\Gamma_r X; A)$-val. Valóban, a $\Gamma_r^m X$ konstrukciójában (3.6. definíció) $(m-1)$-összefüggő $E^m S_k$ terek szerepelnek, $\Gamma_r X$ definíciójában pedig ∞-összefüggő (pontrahúzható) ES_k terek, ráadásul a Milnor-konstrukció ad egy nyilvánvaló $E^m S_k \to ES_k$ beágyazást $S_k^{[m+1]} \to S_k^{[\infty]}$ szerint. Látszik, hogy a kohomológiacsoportok valóban tartanak a formálisan $m = \infty$-ként írható eset kohomológiacsoportjaihoz.

Tekintsük a következő kommutatív diagramokat:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_r X & \to & \Gamma X \\ \downarrow f_r & & \downarrow f \\ SP_r X & \to & SPX \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^l(\Gamma_r X; \mathbb{Z}_p) & \stackrel{\cong}{\leftarrow} & H^l(\Gamma X; \mathbb{Z}_p) \\ \uparrow f_r^H & & \uparrow f^H \\ H^l(SP_r X; \mathbb{Z}_p) & \stackrel{\cong}{\leftarrow} & H^l(SPX; \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

A kohomológiákon a vízszintes leképezések izomorfizmusok (feltettük, hogy a homológiákon azok; alkalmazzuk az univerzális együttható tételt), és mivel a bal oldali függőleges leképezés is izomorfizmus, ezért kapjuk, hogy $f^H : H^l(SPX; \mathbb{Z}_p) \to H^l(\Gamma X; \mathbb{Z}_p)$ izomorfizmus. Ismét az univerzális együttható tételt használva ($T = \Gamma X$, ill. SPX) a

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(T), \mathbb{Z}_p) \to H^n(T; \mathbb{Z}_p) \to \mathrm{Hom}(H_n(T), \mathbb{Z}_p) \to 0$$

rövid egzakt sor alapján látjuk, hogy $f_H : H_l(\Gamma X) \to H_l(SPX)$ magjában és komagjában nincs p-rendű elem ($l \leq n$), azaz f_H mod $\mathcal{C}_p$-izomorfizmus, ahol $\mathcal{C}_p$ azon végesen generált csoportok osztálya, melyekben minden elem rendje relatív prím p-hez. Mivel $\mathcal{C}_p$ Serre-osztály, alkalmazhatjuk az 5.5. tételt, melyből következik, hogy a homotópiákon indukált $f_\pi : \pi_l(\Gamma X) \to \pi_l(SPX)$ leképezés is mod $\mathcal{C}_p$-izomorfizmus. De ez a 4.3. állítás alapján pont azt jelenti, hogy a $h_l^s : \pi_l^s(X) \to H_l(X)$ stabil Hurewicz-homomorfizmus mod $\mathcal{C}_p$-izomorfizmus. ∎

5.2. Alkalmazások

A bizonyításban 4.10. tétel első felét használtuk. A tétel második fele nem tartalmaz megkötést az r értékre, így megkapjuk Serre klasszikus tételét:

5.7. Tétel. *A $h_l^s : \pi_l^s(X) \to H_l(X)$ stabil Hurewicz-homomorfizmus magjában és komagjában nincs végtelen rendű elem (ahol X összefüggő, de nem feltétlenül 2-összefüggő).*

Bizonyítás: A 4.10. tétel második fele azt adja, hogy

$$f_r^H : H^l(SP_r X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^l(\Gamma_r X; \mathbb{Q})$$

izomorfizmus minden l és r értékre (hasonlóan az 5.6. tétel bizonyításához, itt is $m \to \infty$ esetekben használjuk a 4.10. tételt), azaz

$$f^H : H^l(SPX; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^l(\Gamma X; \mathbb{Q})$$

izomorfizmus, de akkor a $\mathbb{Q}$-homológiákon is az (univerzális együttható tétel), ez pedig $H_*(T; \mathbb{Q}) \cong H_*(T) \otimes \mathbb{Q}$ miatt éppen azt jelenti, hogy a magban és a komagban nincs végtelen rendű elem, vagyis a leképezés mod $\mathcal{T}$-izomorfizmus a homológiákon, ahol $\mathcal{T}$ a torziócsoportok Serre-osztálya. Ismét az 5.5. tétel adja, hogy a homotópiacsoportokra ugyanez igaz, de a 4.3. állítás szerint ez éppen a stabil Hurewicz-homomorfizmus megfelelője. A tétel közvetlen használatához ugyan fel kell tenni, hogy például X 2-összeföggő, de mint említettük, ez mindig megtehető a $\Sigma^2 X$ teret véve és a $\Gamma\Sigma^2 X$, ill. $SP\Sigma^2 X$ tereket tekintve. Ha pedig az így elcsúsztatott homotópiacsoportokra tudjuk az állítást, akkor az az eredeti homotópiacsoportokra is érvényes. ■

Az SP és a Γ funktorok tulajdonságainak ismeretében az 5.6. tételből megkaphatjuk az 1.9. következményt:

5.8. Következmény. *Egy X $(k-1)$-összefüggő CW-komplexusra a $h_n^s : \pi_n^s(X) \to H_n(X)$ stabil Hurewicz-homomorfizmus magjában és komagjában nincs p rendű elem, ha $p > r \geq \frac{n-k+2}{2}$, ahol r egész.*

Bizonyítás: Legyen $X' := \Sigma^2 X$, ekkor X' a $k' := k+2$ jelöléssel $(k'-1)$-összefüggő, azaz legalább 2-összefüggő ($k' \geq 3$). Belátjuk, hogy az $n' := n+2$ választással a $h_{n'}^s : \pi_{n'}^s(X') \to H_{n'}(X')$ magjában és komagjában nincs p rendű elem, ha $p > r' \geq \frac{n'-k'+2}{2}$.

Elegendő azt megmutatni, hogy az X' legalább 2-összefüggősége miatt alkalmazható 5.6. tételben választható $r_{n'} := \left\lceil \frac{n'-k'+2}{2} \right\rceil$. A tétel feltételei közül a Γ funktorra vonatkozó feltétel a 3.4. szerint akkor teljesül, ha $r_{n'} \geq \frac{n'-k'+2}{k'}$, az SP funktorra vonatkozó pedig a 2.13. szerint akkor, ha $r_{n'} \geq \frac{n'-k'+2}{2}$. Mivel $k' > 2$, ezért az utóbbi feltétel a szigorúbb. A 2.13 a 2.12. tétel következménye, amit ugyan nem bizonyítottunk, de most a terünk $X' = \Sigma(\Sigma X)$ alakú, ahol ΣX legalább egyszeresen összefüggő, és ebben a speciális esetben a bizonyított 2.14. tétel pontosan a 2.12. tételt adja, így a 2.13. következmény ebben az esetben általunk is bizonyítottan érvényes.

Tehát az X'-re vonatkozó $h^s_{n'}$ stabil Hurewicz-homomorfizmus magjában és komagjában nincs p-rendű elem, ha $p > r \geq \frac{n'-k'+2}{2} = \frac{n-k+2}{2}$. De

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_{n'}(\Gamma X') & = & \pi_{n'}(\Gamma\Sigma^2 X) & \cong & \pi_{n'-2}(\Omega^2\Gamma\Sigma^2 X) & \cong & \pi_n(\Gamma X) \\
\downarrow{\scriptstyle (f_{X'})_\pi} & & \downarrow{\scriptstyle (f_{\Sigma^2 X})_\pi} & & \downarrow{\scriptstyle (\Omega^2 f_{\Sigma^2 X})_\pi} & & \downarrow{\scriptstyle (f_X)_\pi} \\
\pi_{n'}(SPX') & = & \pi_{n'}(SP\Sigma^2 X) & \cong & \pi_{n'-2}(\Omega^2 SP\Sigma^2 X) & \cong & \pi_n(SPX)
\end{array}$$

(ahol használtuk a 4.1. állítást és következményét) alapján látszik, hogy az X'-re vonatkozó $h^s_{n'}$ tulajdonképpen az X-re vonatkozó h^s_n, így a következményünket beláttuk. ■

Hivatkozások

[1] Arlettaz, Dominique: *The exponent of the homotopy groups of Moore spectra and the stable Hurewicz homomorphism*, Canadian Journal of Mathematics 48 (1996), 483-495.

[2] Barratt, M. G., Eccles, P. J.: Γ^+*-structures – I: A Free Group Functor For Stable Homotopy Theory*, Topology Vol. 13, pp. 25-45., 1974

[3] Davis, J. F., Kirk, P.: *Lecture Notes in Algebraic Topology*, 2001, American Mathematical Society

[4] Godement, Roger: *Théorie des faisceaux*, 1958, Hermann, Paris

[5] Hatcher, Allen: *Algebraic Topology*,
`http://www.math.cornell.edu/~hatcher`

[6] Hatcher, Allen: *Spectral Sequences*, Chapter 1: The Serre Spectral Sequence,
`http://www.math.cornell.edu/~hatcher`

[7] Kallel, Sadok: *Symmetric products, duality and homological dimension of configuration spaces*, Geometry and Topology Monographs 13 (2008), 499-527.,
`http://www-gat.univ-lille1.fr/~kallel/Papers/cohenfest.pdf`

[8] Koschorke, U., Sanderson, B.: *Self-intersections and Higher Hopf Invariants*, Topology Vol. 17, pp. 283-290., 1978

[9] Nakaoka, Minoru: *Cohomology of symmetric products*, Journal of the Institute of Polytechnics, Osaka City University, Vol. 8 (1957) 121-145.

[10] Rourke, C., Sanderson, B.: *The compression theorem I*, Geometry Topology, Vol. 5 (2001) 399-429.,
`http://www.emis.de/journals/GT/ftp/main/2001/2001-14.pdf`

[11] Rourke, C., Sanderson, B.: *The compression theorem III*, Geometry Topology, Vol. 3 (2003) 857-872.,
`http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0301/0301356v2.pdf`

[12] Segal, Graeme: *Configuration-Spaces and Iterated Loop-Spaces*, Inventiones math. 21, 213-221., 1973

[13] Serre, J.-P.: *Homologie singulière des espaces fibrés*, Applications, Ann. of Math. (2) 54 (1951), 425-505.