

A Black-Scholes-Merton módszer kritikája

Szakdolgozat

Írta: **Szekeres Fanni**

Matematikus szak

Témavezető: **Pröhle Tamás**

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2010

Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----------|
| 1. Bevezetés | 3 |
| 2. Az általános Black-Scholes-Merton modell | 7 |
| 2.1. B-S piac | 7 |
| 2.2. Martingálmérték | 8 |
| 2.3. Opciók árazása | 11 |
| 2.4. "Greeks" | 16 |
| 3. GARCH folyamatok | 21 |
| 3.1. GARCH(p,q) | 21 |
| 3.2. Heston-Nandi-féle opcióárazás | 23 |
| 3.3. A kétféle opcióár összehasonlítása | 27 |
| 4. Stratonovich integrál | 37 |
| 4.1. Stratonovich integrál | 37 |
| 4.2. Black-Scholes egyenlet Stratonovich integrállal | 39 |
| 5. Az opcióárazás, mint hullám modell | 42 |
| 5.1. A Schrödinger-egyenletek | 42 |
| 5.2. Schrödinger-egyenletek megoldása | 43 |
| 5.3. Alkalmazás | 45 |

1. fejezet

Bevezetés

Dolgozatom a pénzügyi matematika egyik legfontosabb módszerével, Fisher Black, Myron Scholes és Robert Merton nevével fémjelzett modellel, és annak érvényességi körével foglalkozik. A téma érdekessége, hogy erősen vitatott a modell helyessége, használhatósága, és a napjainkban zajló gazdasági válságot is egyesek ennek hibáira akarják visszavezetni, így viták keresztútjába került. Célom megvizsgálni a módszer helyességét, illetve megoldást, alternatívát találni az esetleges hibákra, gyengeségekre.

Először bemutatom a használt modellt, fogalmait, matematikáját. Többnyire európai opciókat vizsgálok, ezeknek van egy rögzített T lejárat ideje, ellentétben az amerikai opciókkal, melyeket T -ig bármikor be lehet váltani. Az opció tulajdonosa rendelkezik a joggal, hogy eladja (*put* opció), illetve megvegye (*call* opció) a szóbanforgó eszközt egy fix összegért (jele: K). Ekkor a call opció ára T -ben: $C = (S(T) - K)^+$, ahol $S(t)$ a részvény ára t -ben. A részvényfolyamat dinamikáját sztochasztikus differenciálegyenlettel adhatjuk meg, ahol a meghajtó folyamat egy Brown-mozgás. A Brown-mozgás egy olyan $B(t)$ folyamat, ahol $B(0) = 0$, a folyamat stacionárius, és független növekményű, a $B(t) - B(s)$ növekmény ($t > s$) eloszlása 0 várható értékű,

$\sigma^2(t-s)$ szórásnégyzetű normális, és létezik 1 valószínűséggel folytonos trajektóriájú modifikációja (B' a B modifikációja, ha $P(B(t) = B'(t)) = 1$). Hasonlóan a kötvényfolyamatra is kapunk egy egyenletet, ez a folytonos kamatozás differenciálegyenlete. A sztochasztikus analízis eszközeit alkalmazva jutunk el a kívánt eredményekhez, leggyakrabban használt módszer az Itô-formula. Maga a Black-Scholes-Merton egyenlet egy opció árazási formula, ami kapcsolatot teremt az opció és a részvény ára között.

Tehát legyen az elvárt hozam, f_T , európai call opció esetén:

$$f_T = (S_T - K)^+,$$

ha K -ért vehetem meg a részvényt. A részvényár-folyamat dinamikáját a következő sztochasztikus differenciálegyenlet írja le:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)),$$

ahol μ a konstans növekedési ráta (driftes tag), σ pedig a volatilitás, ami a jövőbeni "bizonytalanságunkat" méri a részvényárra vonatkozóan. $S_0 > 0$, W pedig egy standard Wiener-folyamat. Ennek megoldása:

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W(t) \right\}.$$

Kötvény esetén, a folytonos kamatozás differenciálegyenlete:

$$dB(t) = rB(t)dt,$$

ahol r a kockázatmentes-kamatláb. Ekkor

$$B(t) = B(0)e^{rt}.$$

A stratégiánkat a $\pi(t) = (\beta(t), \gamma(t))$ mérhető folyamat adja meg, mely adaptált \mathcal{F}_t -hez, ahol $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), s \leq t\}$. $\beta(t)$ jelöli a kötvények mennyiségét, $\gamma(t)$ a részvényét. Ekkor az értékfolyamat:

$$V_\pi(t) = \beta(t)B(t) + \gamma(t)S(t).$$

Az opció ára definíció szerint az a legkisebb kezdeti tőke, $C(T, f_T)$, mellyel a befektető f_T tőkét érhet el, ekkora kezdeti befektetéssel, úgy hogy $V_\pi(t) \geq 0, \quad \forall t \quad 0 \leq t \leq T$.

Ennek a modellnek az egyik legfontosabb, legismertebb eredménye a Black-Scholes-Merton egyenlet:

$$C(T, (S(T) - K)^+) = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\log \frac{S(0)}{K} + T \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\log \frac{S(0)}{K} + T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Sajnos ez a modell nem feltétlen szolgáltat jó eredményt a való életre alkalmazva. Törékeny az ugrásokra, és a farokeseményekre, ezenkívül megköveteli a tranzakciók simaságát. Nem veszi figyelembe a tranzakciós költségeket, és a lejárat előtt nincs osztalék kifizetés. Továbbá feltesszük a kockázatmentes kamat létezését.

Dolgozatom célja felülvizsgálni ezeket a hibákat, és megoldást találni rájuk. Egyik ilyen alternatíva lehet a modell leírásánál használatos Itô integrál helyett a Stratonovich-féle integrál alkalmazása, ehhez [2] nyújtott segítséget. Sok esetben javítást jelenthet a GARCH folyamatok vizsgálata, amivel [1] is foglalkozik. Ezekon kívül a kvantum fizika is sok lehetőséget rejt magában a modellünk javítására.[3] Ezeket az eseteket külön-külön megvizsgálom a későbbiekben. A második fejezetben található definíciók, tételek, levezetések nagyrésze a pénzügyi folyamatok 2. előadás alapján készült.

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Pröhle Tamásnak, aki a témát figyelmembe ajánlotta, és a konzultációk alkalmával segítette a szakdolgozat elkészülését.

2. fejezet

Az általános

Black-Scholes-Merton modell

2.1. B-S piac

Tekintsük a bevezetőben definiált kötvény-részvény piacot, tehát a részvényár dinamikája:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), \quad (2.1)$$

a kötvényfolyamatunk pedig:

$$dB(t) = rB(t)dt. \quad (2.2)$$

Tehát a megoldások:

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W(t) \right\}, \quad (2.3)$$

$$B(t) = B(0)e^{rt}. \quad (2.4)$$

Tekintsük a részvényár logaritmusát:

$$\log S(t) = \log S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t). \quad (2.5)$$

2. FEJEZET. AZ ÁLTALÁNOS BLACK-SCHOLES-MERTON MODELLS

Ekkor a sodrás $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ (drift), a volatilitás pedig σ . Így a logaritmusra azt kaptuk, hogy sodródó Brown-mozgás, azaz $S(t)$ egy geometriai Brown-mozgás, ez is folytonos trajektóriájú, független növekményű, azonban lognormális eloszlású.

A $\pi(t) = (\beta(t), \gamma(t))$ mérhető folyamat **stratégia**, ha \mathcal{F}_t -hez adaptált, ahol $S(t)$ az előbb leírt dinamikával adott, és $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), s \leq t\}$ a benne szereplő Wiener-folyamat által generált természetes filtráció. A kötvények mennyiségét jelöljük $\beta(t)$ -vel, a részvényekét $\gamma(t)$ -vel. Ekkor az értékfolyamatunk:

$$V_\pi(t) = \beta(t)B(t) + \gamma(t)S(t). \quad (2.6)$$

Hogy értelmes legyen, feltesszük, hogy $\int_0^T |\beta(t)|^2 dt$ és $\int_0^T |\gamma(t)|^2 dt$ is véges legyen majdnem mindenütt.

A π stratégia **önfinanszírozó**, ha $(\beta(t), \gamma(t))$ kielégíti a következőt:

$$dV_\pi(t) = \beta(t)dB(t) + \gamma(t)dS(t).$$

2.2. Martingálmérték

Legyen $\tilde{S}(t) = e^{-rt}S(t)$ a **diszkontált részvényárfolyam**, és $\tilde{V}(t) = e^{-rt}V(t)$ a **diszkontált értékfolyamat**. Ekvivalens martingálmértékhez szeretnénk jutni, így Girsanov tételét fogjuk használni.

Tétel (Girsanov): Legyen $a(t)$ ($0 < t < T$) mérhető, adaptált folyamat, melyre $\int_0^T a(t)dt < \infty$ majdnem mindenütt, és tegyük fel, hogy

$Z(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t a^2(s)ds - \int_0^t a(s)dW(s) \right\}$ folyamat \mathcal{F}_t^W -martingál a P mérték szerint. Továbbá legyen Q_a egy új mérték, melyre $dQ_a(\omega) = Z(t, \omega)dP(\omega)$. Ekkor $Z(t)$ sűrűségfüggvény, és $\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t a(s)ds$ standard Wiener-folyamat a Q_a mérték szerint. ■

2. FEJEZET. AZ ÁLTALÁNOS BLACK-SCHOLES-MERTON MODELL9

Nézzük az $\tilde{S}(t) = e^{-rt}S(t)$ diszkontált részvényárfolyamatot:

$$\begin{aligned} d\tilde{S}(t) &= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t) = -r\tilde{S}(t) + e^{-rt}S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) = \\ &= \tilde{S}(t)((\mu - r)dt + \sigma dW(t)). \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a Girsanov tételt $a(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}$ -val. Eszerint van olyan Q_μ P -vel ekvivalens mérték, melyre

$$\begin{aligned} dQ_\mu &= \exp \left\{ -\int_0^T \frac{\mu - r}{\sigma} dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 dt \right\} dP = \\ &= \exp \left\{ -\frac{\mu - r}{\sigma} W(T) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T \right\} dP. \end{aligned}$$

Q_μ szerint a $W_\mu(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}t + W(t)$ folyamat standard Wiener-folyamat. Ebből következik, hogy Q_μ szerint $d\tilde{S}(t) = \tilde{S}(t)\sigma dW_\mu(t)$, azaz \tilde{S} Wiener-folyamat szerinti integrál, amiről tudjuk, hogy lokális martingál, így pedig Q_μ martingál mérték ebben az értelemben. Továbbá

$$\tilde{S}(t) = S(0) \exp \left\{ \sigma W_\mu(t) - \frac{\sigma^2 t}{2} \right\}. \quad (2.7)$$

2. FEJEZET. AZ ÁLTALÁNOS BLACK-SCHOLES-MERTON MODELL 10

Tekintsük a π önfinanszírozó stratégiát. Értékfolyamata:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= V(0) + \int_0^t \beta(s)dB(s) + \int_0^t \gamma(s)dS(s) = V(0) + r \int_0^t \beta(s)B(s)ds + \\
 &+ \mu \int_0^t \gamma(s)S(s)ds + \sigma \int_0^t \gamma(s)S(s)dW(s) = V(0) + r \int_0^t \beta(s)B(s)ds + \\
 &+ r \int_0^t \gamma(s)S(s)ds + (\mu - r) \int_0^t \gamma(s)S(s)ds + \int_0^t \gamma(s)S(s)\sigma dW(s) = \\
 &= V(0) + r \int_0^t V(s)ds + \int_0^t \gamma(s)S(s)\sigma \left(\frac{\mu - r}{\sigma} ds + dW(s) \right) = \\
 &= V(0) + r \int_0^t V(s)ds + \int_0^t \gamma(s)S(s)\sigma dW_\mu(s).
 \end{aligned}$$

Tehát

$$dV(t) = rV(t)dt + \gamma(t)S(t)\sigma dW_\mu(t). \quad (2.8)$$

Tekintsük a diszkontált értékfolyamatot:

$$\begin{aligned}
 d\tilde{V}(t) &= -rB^{-1}(0)e^{-rt}V(t)dt + B^{-1}(0)e^{-rt}dV(t) = \\
 &\underbrace{-rB^{-1}(0)e^{-rt}V(t)dt + rB^{-1}(0)e^{-rt}V(t)dt}_{=0} + B^{-1}(0)e^{-rt}\gamma(t)S(t)\sigma dW_\mu(t),
 \end{aligned}$$

tehát $d\tilde{V}(t) = \gamma(t)\frac{S(t)}{B(t)}\sigma dW_\mu(t) = \gamma(t)\tilde{S}(t)\sigma dW_\mu(t)$. Ebből $\tilde{V}(t) - V(0)$ lokális martingál, mert Wiener-folyamat szerinti integrál.

Definíció: Azt mondjuk, hogy π **hedge** stratégia, ha önfinanszírozó, és $\tilde{V}_\pi(t) \geq 0$ (jеле: $\pi \in SF(0)$).

Állítás: Ha $\pi \in SF$, akkor $\tilde{V}(t)$ lokális martingál, továbbá ha $\pi \in SF(0)$, akkor $\tilde{V}(t)$ nemnegatív szupermartingál.

Bizonyítás: Egy jó lokalizáló sorozat a

$T_n = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t (\gamma(s)\tilde{S}(s)\sigma)^2 ds \geq n \right\}$. A lokális martingál tulajdonság miatt $s < t$ esetén: $E_\mu(\tilde{V}(T_n \wedge t) | \mathcal{F}_s) = \tilde{V}(T_n \wedge s)$. Továbbá a Fatou-lemmát alkalmazva: $E_\mu(\liminf \tilde{V}(T_n \wedge t) | \mathcal{F}_s) \leq \liminf \tilde{V}(T_n \wedge s)$. A lokalizálás miatt $\liminf \tilde{V}(T_n \wedge t) = \lim \tilde{V}(T_n \wedge t) = \tilde{V}(t)$. Innen $E_\mu(\tilde{V}(t) | \mathcal{F}_s) \leq \tilde{V}(s)$, ezért $\tilde{V}(t)$ szupermartingál. ■

2.3. Opciók árazása

Definíció: Az f_T európai **opció ára** az a legkisebb kezdeti tőke, $C(T, f_T)$, amellyel a befektető f_T tőkét érhet el $C(T, f_T)$ kezdeti befektetésből $SF(0)$ -beli stratégiával.

Tétel (martingálreprezentáció): Legyen $X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s)$, az X folyamat által generált filtráció \mathcal{F}_t^X , $N(t)$ pedig négyzetesen integrálható martingál \mathcal{F}_t^X szerint. Ekkor létezik $\gamma(t)$ \mathcal{F}_t^X előrelátható folyamat, hogy $N(t) = \int_0^t \gamma(s)dX(s)$. ■

Nézzük a következő martingált: $N(t) = E_\mu(e^{-rT}f_T | \mathcal{F}_t)$, ahol $0 \leq t \leq T$.

A tétel szerint létezik olyan $b(s)$ előrelátható folyamat, hogy

$E \int_0^T b^2(s)ds < \infty$, és $N(t) = N_0 + \int_0^t b(s)dW_\mu(s)$ majdnem mindenütt. Nézzük a következő stratégiát:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \frac{b(t)B(t)}{\sigma S(t)}, \\ \beta(t) &= N(t) - \frac{b(t)}{\sigma}. \end{aligned}$$

Tétel: $(\beta(t), \gamma(t))$ önfinanszírozó, és $N(t) = \tilde{V}_\pi(t)$.

Bizonyítás: Definíció szerint:

$$\begin{aligned} V(t) &= \beta(t)B(t) + \gamma(t)S(t) = \left(N(t) - \frac{b(t)}{\sigma}\right)B(t) + \left(\frac{b(t)B(t)}{\sigma S(t)}\right)S(t) = \\ &= N(t)B(t), \end{aligned}$$

innen $N(t) = \frac{V(t)}{B(t)} = \tilde{V}_\pi(t)$.

Kell még, hogy önfinanszírozó stratégia. Az adaptáltság következik a martingálrepresentációból. Önfinanszírozó:

$$\begin{aligned} dV(t) &= N(t)dB(t) + B(t)dN(t) = N(t)dB(t) = N(t)dB(t) + \\ &+ B(t)b(t)dW_\mu(t) = \left(N(t) - \frac{b(t)}{\sigma}\right)dB(t) + \frac{b(t)}{\sigma}dB(t) + B(t)b(t)dW_\mu(t) = \\ &= \beta(t)dB(t) + \frac{B(t)b(t)}{\sigma}(rdt + \sigma dW_\mu(t)) = \beta(t)dB(t) + \gamma(t)dS(t). \blacksquare \end{aligned}$$

Legyen $S^{(r)}(t)$ megoldása a $dS^{(r)}(t) = S^{(r)}(t)(rdt + \sigma dW_\mu(t))$ egyenletnek. Így $S^{(r)}(t) = S^{(r)}(0) \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\}$. Ekkor $S(t) \sim S^{(r)}(t)$ eloszlásban, és így $f_T(S(T)) = f_T(S^{(r)}(T))$ eloszlásban, innen pedig $E_\mu(e^{-rT} f_T(S(T))) = E(e^{-rT} f_T(S^{(r)}(T)))$ (a jobboldalon P szerint vesszük a várható értéket, ami viszont így független μ -tól). Tehát S Q_μ szerinti, és $S^{(r)}$ P szerinti eloszlása megegyezik. Így az előzőek alapján

$$V(t) = E(e^{-r(T-t)} f(S^{(r)}(T)) \mid \mathcal{F}_t).$$

Az opció ára $V(0) = E(e^{-rT} f(S^{(r)}(T)))$. Így $E(f(S^{(r)}(T)) \mid (S^{(r)}(t) = s)$ -re vagyunk kíváncsiak. Tudjuk, hogy

$$\frac{S^{(r)}(T)}{S^{(r)}(t)} = \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))\right\}.$$

Innen $E(f(S^{(r)}(T)) \mid S^{(r)}(t) = s) = Ef(se^X)$, ahol X eloszlása az előzőekből $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))$ feltételes eloszlásával egyenlő (a feltétel: $S^{(r)}(t) = s$).

Ha $F(T-t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(s \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-ty}\right\}\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$,
akkor $Ef(se^X) = F(T-t, s)$, tehát

$$E(f(S^{(r)}(T)) | S^{(r)}(t)) = F(T-t, S^{(r)}(t)) = \frac{V(t)}{e^{-r(T-t)}} = \tilde{V}(t)e^{rT}.$$

Az kellett, hogy $S^{(r)}(t)$ Markov-folyamat, mert akkor mindegy, hogy a feltétel $S^{(r)}(t)$, vagy \mathcal{F}_t . Ehhez pedig elég annyi, hogy kielégít egy diffúziós egyenletet.

Következésképp $d\tilde{V}(t) = e^{-rT} dF(T-t, e^{rt}\tilde{S}^{(r)}(t)) = e^{-rT} dG(t, \tilde{S}^{(r)}(t))$,
ahol $G(t, s) = F(T-t, e^{rt}s)$.

Itô-formula: Legyen $dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t)$.

Ekkor

$$df(t, X(t)) = \{f_t(t, X(t)) + f_x(t, X(t))a(t, X(t)) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))b^2(t, X(t))\}dt + f_x(t, X(t))b(t, X(t))dW(t). \quad \blacksquare$$

Alkalmazzuk az Itô-formulát G -re. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d\tilde{V}(t) &= e^{-rT} \left(\frac{\partial G}{\partial s}(t, \tilde{S}^{(r)}(t)) \right) d\tilde{S}^{(r)}(t) + \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} \sigma^2 \tilde{S}^{(r)}(t)^2 \right) dt = \\ &= e^{-rT} \left(\frac{\partial G}{\partial s} \sigma \tilde{S}^{(r)}(t) dW(t) + \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} \sigma^2 \tilde{S}^{(r)}(t)^2 \right) dt \right). \end{aligned}$$

A bal oldal martingál, a jobboldal pedig szemimartingál (X szemimartingál, ha adaptált, és előáll, mint egy martingál, és egy korlátos változású folyamat összege), így a dt -s tag 0 együtthatójú. Ezért

$$d\tilde{V}(t) = e^{-rT} \frac{\partial G}{\partial s}(t, \tilde{S}^{(r)}(t)) \sigma \tilde{S}^{(r)}(t) dW(t).$$

Másrészt, mivel önfinanszírozó $d\tilde{V}(t) = \gamma(t) \sigma \tilde{S}^{(r)}(t) dW(t)$.

Tehát

$$\gamma(t) = e^{-rT} \frac{\partial G}{\partial s}(t, S^{(r)}(t)), \quad (2.9)$$

azaz átírva $\gamma(t) = e^{-r(T-t)} \frac{\partial F}{\partial s}(T-t, S^{(r)}(t))$.

Mivel $\beta(t) = (V(t) - \gamma(t)S^{(r)}(t))e^{-rt}$, és $V(t) = e^{-r(T-t)}F(T-t, S^{(r)}(t))$,

kapjuk, hogy

$$\beta(t) = e^{-rT}(F(T-t, S^{(r)}(t)) - S^{(r)}(t) \frac{\partial F}{\partial s}(T-t, S^{(r)}(t))). \quad (2.10)$$

Így megkaptuk a minimális hedge által adott stratégiát, és értékfolyamatot.

Azt már láttuk, hogy az értékfolyamat nem a teljes múlttól, csak $S^{(r)}(t)$ -től függ, így felírható $V(t) = v(t, \tilde{S}^{(r)}(t))$ alakban. Innen diszkontáltjára:

$$\begin{aligned} d\tilde{V}(t) &= d(e^{-rt}v(t, S^{(r)}(t))) = e^{-rt}dv(t, S^{(r)}(t)) - re^{-rt}v(t, S^{(r)}(t))dt = \\ &= e^{-rt} \left(\frac{\partial}{\partial t}v(t, S^{(r)}(t)) + \frac{\partial}{\partial s}v(t, S^{(r)}(t))rS^{(r)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}v(t, S^{(r)}(t))\sigma^2 S^{(r)^2}(t) \right) dt + \\ &\quad + e^{-rt} \left(\frac{\partial}{\partial s}v(t, S^{(r)}(t))\sigma S^{(r)}(t)dW(t) - rv(t, S^{(r)}(t))dt \right). \end{aligned}$$

A baloldal martingál, a jobboldalon pedig a Doob-Meyer felbontás egyértelműsége miatt a dt-s tag együtthatója 0 ($\forall s$). Legyen $v(t, s) = v$, ezzel kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial t}v + rs \frac{\partial}{\partial s}v + \frac{\sigma^2}{2} s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}v - rv = 0. \quad (2.11)$$

Ez a **Black-Scholes-féle parciális differenciálegyenlet**, melynek végfeltétele $v(T, s) = f(s)$, így már egyértelmű a megoldás, ami az értékfolyamat.

Tétel (Black-Scholes) $C(T, (S(T) - K)^+) = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$,

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, és

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log \frac{S(0)}{K} + T \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\log \frac{S(0)}{K} + T \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}. \end{aligned}$$

Bizonyítás:

$$F(t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f \left(s \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} y \right\} \right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

ahol most $f = (s - K)^+$. Innen

$$F(t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} \left(s \exp \left\{ \sigma \sqrt{t} y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} - K \right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

ahol z -t a $K = s \exp \left\{ \sigma \sqrt{t} z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\}$ egyenletből kapjuk, így

$$z = \frac{\log \left(\frac{K}{s} \right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}}. \text{ Átalakítva}$$

$$\begin{aligned} F(t, s) &= \frac{e^{rt}s}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} \underbrace{\exp \left\{ \sigma \sqrt{t} y - \frac{\sigma^2 t}{2} - \frac{y^2}{2} \right\}}_{= \frac{1}{2} (y - \sigma \sqrt{t})^2, \text{ ami } N(0, \sigma \sqrt{t})} dy - K(1 - \Phi(z)) = \\ &= \frac{e^{rt}s}{\sqrt{2\pi}} \int_{z - \sigma \sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - K(1 - \Phi(z)) = e^{rt}s(1 - \Phi(z - \sigma \sqrt{t})) - K(1 - \Phi(z)). \end{aligned}$$

Alkalmazzuk $T = t$ -re

$$\begin{aligned} C(T, (S(T) - K)^+) &= e^{-rT} F(T, S(0)) = S(0)(1 - \Phi(z - \sigma \sqrt{T})) - \\ &- e^{-rT} K(1 - \Phi(z)) = S(0)\Phi(\sigma \sqrt{T} - z) - e^{-rT} K\Phi(-z). \end{aligned}$$

Itt pedig $\sigma \sqrt{T} - z = d_1$, és $z = d_2$, így készen vagyunk. ■

Látható, hogy a call opció ára öt faktortól függ: a részvény áratól ($S(0)$), lejáratú idejétől (T), beváltási áratól (K), a kockázatmentes kamatlábtól (r), és a volatilitástól (σ). K és T rögzített az opció szerződésében, $S(t)$ és r megfigyelhető a többi pénzügyi piacon. σ pedig becsülhető a múltból. Figyeljük

meg, hogy az opció ára nem függ a driftől (μ). Tehát azt megtudtuk, hogy melyek azok a paraméterek melyek befolyással vannak az ár kialakulására, a kérdés hogy mennyire, és hogyan.

2.4. "Greeks"

Az opció árakat jól jellemző mennyiségek, a "görögök"-nek nevezett mutatók. Ezek az opció árának az érzékenységet mérik az egyes paraméterekre, azaz, hogy hogyan változik az opció ára valamely paraméterének változtatásával.

Az első ilyen mutató, a delta, azt méri, mennyit változik az opció értéke, a részvény elmozdulása esetén. Azaz

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial s} \quad (s = S_0). \quad (2.12)$$

A delta 0 és 1 között van call opció esetén (long call), illetve -1 és 0 között put opcióra (long put).

Ebből származtatható másik "görög", a gamma jelöli azt, hogy a részvény elmozdulása esetén, mennyit változik az opció deltája. Azaz

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial s} = \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}. \quad (2.13)$$

Vega mutatja, hogy a volatilitás százalékos változása, mekkora változást idéz elő az opcióárban.

$$\Lambda = \frac{\partial C}{\partial \sigma}. \quad (2.14)$$

(Néha úgy definiálják, hogy ezt még 100-zal elosztják, hogy a százalékot mutassa.)

Theta jelzi az opció időértékét, azaz mennyire érzékeny az ár az idő múlására.

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (2.15)$$

2. FEJEZET. AZ ÁLTALÁNOS BLACK-SCHOLES-MERTON MODELL 17

Ezt általában még 365-tel elosztják, hogy napokra legyen az idő bontva. Ha $\Theta > 0$, akkor az opció értéke nő időben. Ha $\Theta < 0$, akkor pedig csökken a lejárat felé közeledve.

Az utolsó "greek" a rho, a kockázatmentes kamatlábra való érzékenységet fejezi ki.

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}. \quad (2.16)$$

Ezt is hasonlóan a vegához 100-zal le szokás osztani.

Szemléltetésképpen egy táblázatban összefoglalom a Black-Scholes modellből számolható "greek"-eket, majd ábrákon is látható a különböző "görögök" viselkedése, felülete. [6] [7]

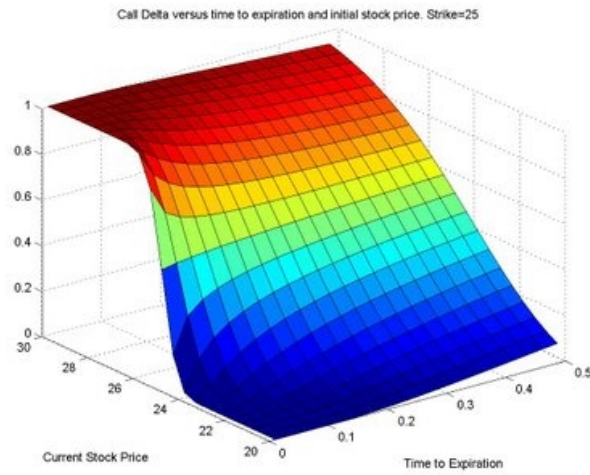
| | Call opció |
|--------------|---|
| delta | $e^{-q\tau}\Phi(d_1)$ |
| gamma | $e^{-q\tau}\frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$ |
| rho | $K\tau e^{-r\tau}\Phi(d_2)$ |
| theta | $-e^{q\tau}\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rKe^{-r\tau}\Phi(d_2) + qSe^{-q\tau}\Phi(d_1)$ |
| vega | $Se^{-q\tau}\Phi(d_1)\sqrt{\tau} = Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)\sqrt{\tau}$ |

2.1. táblázat. A call opciók "greek"-ei a Black-Scholes árra vonatkozóan

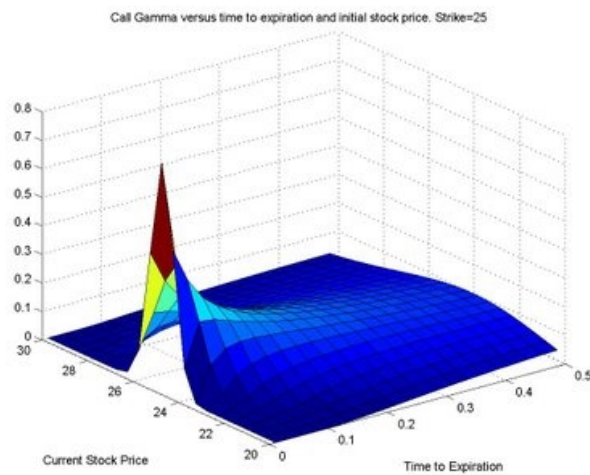
| | Put opció |
|--------------|---|
| delta | $-e^{-q\tau}\Phi(-d_1)$ |
| gamma | $e^{-q\tau}\frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$ |
| rho | $-K\tau e^{-r\tau}\Phi(-d_2)$ |
| theta | $-e^{q\tau}\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} + rKe^{-r\tau}\Phi(-d_2) - qSe^{-q\tau}\Phi(-d_1)$ |
| vega | $Se^{-q\tau}\Phi(d_1)\sqrt{\tau} = Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)\sqrt{\tau}$ |

2.2. táblázat. A put opciók "greek"-ei a Black-Scholes árra vonatkozóan

2. FEJEZET. AZ ÁLTALÁNOS BLACK-SCHOLES-MERTON MODELL 18

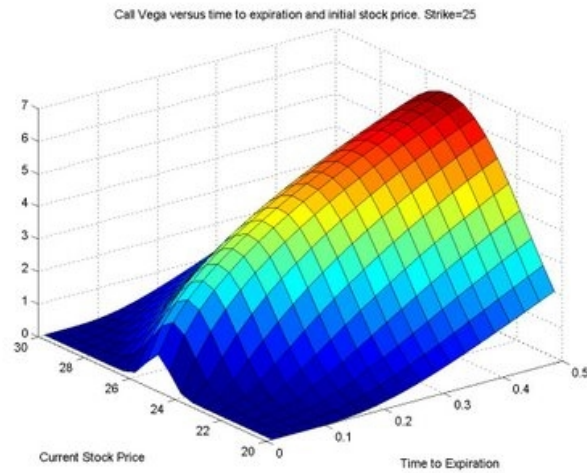


2.1. ábra. A call opció deltájának ábrája. A 2 alsó vízszintes tengelyen a részvény ára, és a lejárat ideje áll, $K = 25$.

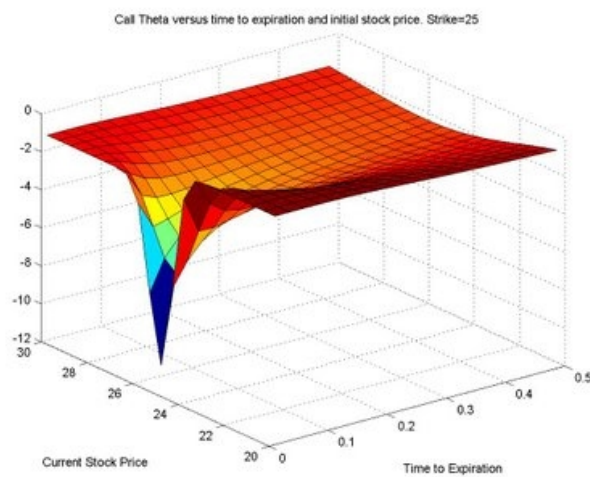


2.2. ábra. A call opció gammájának ábrája. A 2 alsó vízszintes tengelyen a részvény ára, és a lejárat ideje áll, $K = 25$.

2. FEJEZET. AZ ÁLTALÁNOS BLACK-SCHOLES-MERTON MODELL 19

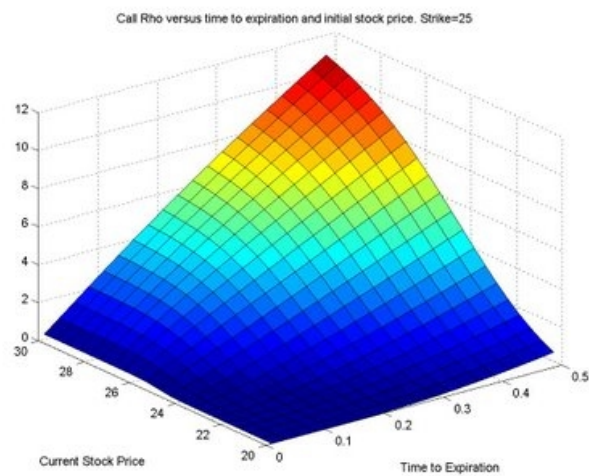


2.3. ábra. A call opció vegájának ábrája. A 2 alsó vízszintes tengelyen a részvény ára, és a lejárat ideje áll, $K = 25$.



2.4. ábra. A call opció thetájának ábrája. A 2 alsó vízszintes tengelyen a részvény ára, és a lejárat ideje áll, $K = 25$.

2. FEJEZET. AZ ÁLTALÁNOS BLACK-SCHOLES-MERTON MODELL 20



2.5. ábra. A **call opció rhójának ábrája**. A 2 alsó vízszintes tengelyen a részvény ára, és a lejárat ideje áll, $K = 25$.

3. fejezet

GARCH folyamatok

3.1. GARCH(p,q)

Ahogy az előző fejezetben láttuk, a vizsgált Black-Scholes egyenlet feltételezi a konstans volatilitást. Ez azonban nem tartható, mert a valóságban állandóan változik, így talán ez a legnagyobb hibája a modellnek. Többféle módon megkísérelhető a konstans volatilitás kiküszöbölése.

Egyik ilyen módszer többek között Cox, Ross, Rubinstein nevéhez fűződik. Itt azt tesszük fel, hogy a volatilitás a részvényár függvénye, tehát:

$$dS_t = S_t(\sigma_S(S_t)dW(t) + \mu dt).$$

Ezzel az esettel most nem foglalkozunk.

Egy másik lehetséges megközelítése a nemkonstans volatilitásnak, mikor a volatilitás is egy önálló diffúzió, tehát egy másik Brown-mozgás hajtja meg, mint a részvényár-folyamatát. Ez többek között Hull, és White nevéhez köthető. Így írható fel:

$$dS_t = S_t(\sigma_t dW(t) + \mu(S_t, \sigma_t, t)dt)$$

$$dV_t = V_t(\delta(\sigma_t, t)dB_t + \gamma(\sigma_t, t)dt),$$

ahol $V_t = \sigma_t^2$, és B_t, W_t Wiener-folyamatok.

Ha azt nézzük, hogy a megfigyelések azt mutatják, hogy a volatilitás klaszterekben alakul ki, azaz vannak nagyobb volatilitással rendelkező periodusok, és ezeket alacsonyabb volatilitással bíró szakaszok követik, akkor kézenfekvő (G)ARCH (*generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*) modelleket használni, hogy a viselkedésük kifejezzük, mert azokra is jellemző a klasztereződés. Ezt az alternatívát fogom ebben a fejezetben alaposabban megvizsgálni. GARCH esetben az opció ára a kockázati prémium funkcionálja, be van ágyazva a szóbanforgó eszközbe. Másrészt az opció-árazási formula nem Markov ebben az esetben (az egyetlen GARCH, ami Markov-folyamat az ARCH(1), azaz GARCH(0,1), de jólismert, hogy beágyazható Markovba). Ez ellentétben van az általános elmélettel, miszerint az eszközünk értéke diffúziós folyamat, így Markov. Másik sajátossága a GARCH folyamatokkal való számolásnak, hogy az adatok vastagabb farkú eloszlást generálnak, ami jobban egybevág a megfigyelésekkel. Azaz két utat lehetne választani a folytonos idejű sztochasztikus volatilitást, vagy a diszkrét idejű GARCH folyamatokat, én az utóbbit tekintem, hiszen a megfigyelések is diszkrét időpillanatokban történnek.

Akkor most nézzük, hogyan is épül fel egy (G)ARCH folyamat. A lényeges sajátosságuk, hogy szórásuk az idővel változik. Legyen $Z_t, t \in \mathbb{Z}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változó sorozat, 0 várható értékkel, 1 szórással. Tekintsük azt az X_t folyamatot, mely a következő alakú:

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

ahol σ_t a volatilitás, ami a folyamat múltját mutatja $t - 1$ -ig (azaz \mathcal{F}_{t-1} mérhető). Ekkor az X_t lesz az ARCH/GARCH folyamat. Z_t -ről feltesszük, hogy független \mathcal{F}_{t-1} -től, ahol \mathcal{F}_t az $\{X_s, s \leq t - 1\}$ által generált filtráció. Tehát a volatilitás a feltételes szórása a folyamatunknak.

X_t ARCH(p) folyamat, ha minden t -re:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{t-j}^2, \quad \alpha_j > 0. \quad (3.2)$$

X_t GARCH(p,q) folyamat, ha minden t -re:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{t-k}^2, \quad \alpha_j, \beta_k > 0. \quad (3.3)$$

A GARCH(p,q) stacionárius, véges szórással, ha $\sum_{j=1}^p \alpha_j + \sum_{k=1}^q \beta_k < 1$. A folyamatunk korrelálatlan fehér zaj, mert az autokovarianciára: $cov(X_t, X_{t+h}) = E(\sigma_{t+h} Z_{t+h} \sigma_t Z_t) = 0$. Azonban a folyamat négyzete, illetve abszolútértéke korrelált. Például egy GARCH(1,1) folyamat, olyan mint egy ARMA(1,1) modell X_t^2 -re.

3.2. Heston-Nandi-féle opcióárazás

Nézzük a GARCH modellezés segítségével, hogyan épül fel a jelenlegi modellünk!

$$\log(S(t)) = \log(S(t - \Delta)) + r + \lambda \sigma^2(t) + \sigma(t)Z(t), \quad (3.4)$$

$$\sigma^2(t) = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma^2(t - i\Delta) + \sum_{i=1}^q \alpha_i (Z(t - i\Delta) - \gamma_i \sigma(t - i\Delta))^2, \quad (3.5)$$

ahol r a Δ nagyságú intervallum kamatlába, $Z(t)$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, σ pedig a feltételes szórása a hozam logaritmusának $t - \Delta$ és t között. Ha α_i 0-hoz tart, akkor egy autoregresszív mozgóátlag folyamathoz közelít a logaritmusár. Ha α_i és β_i 0-hoz tart, akkor pedig a Black-Scholes modellt kapjuk, diszkrét megfigyelésekre.

Átrendezve kapjuk (GARCH(1,1) eset), hogy

$$\sigma^2(t + \Delta) = \omega + \beta_1 \sigma^2(t) + \alpha_1 \frac{(\log(S(t)) - \log(S(t - \Delta)) - r - \lambda \sigma^2(t) - \gamma_1 \sigma^2(t))^2}{\sigma^2(t)}. \quad (3.6)$$

A γ_1 paraméter adja a sokkok asszimmetriáját, egy nagy pozitív sokk más hatással van a szórásra, mint egy nagy negatív sokk. Ha γ_1 pozitív, akkor negatívan korrelált a részvényhozam és a szórás (egybevág a "leverage effect"-tel). Tehát γ_1 határozza meg az asszimmetriáját, ferdeségét a hozam logaritmusok eloszlásának, így ha 0-val egyenlő, akkor szimmetrikus az eloszlás.

Ezenfelül tudjuk, hogy a részvényár feltételesen lognormális eloszlású. Fel kell tenni az előzőeken felül még, hogy a call opció értéke a lejárat előtt a Black-Scholes-Rubinstein formulát követi.

A kockázatsemleges folyamat ugyanolyan alakú GARCH, mint a fenti, csak a λ helyett $-1/2$ áll, és $\gamma_1^* = \gamma_1 + \lambda + 1/2$ ([1] alapján). Legyen $f(x)$ a feltételes generátorfüggvénye az eszközünk árának, azaz

$$f(x) = E_t(S(T)^x). \quad (3.7)$$

Másképpen a $\log S(T)$ momentumgeneráló függvénye.

Tétel: A generátorfüggvény a következő alakú:

$$f(x) = S(t)^x \cdot \exp\left\{A(t, T, x) + \sum_{i=1}^p B_i(t, T, x) \sigma^2(t + 2\Delta - i\Delta) + \sum_{i=1}^{q-1} C_i(t, T, x) (Z(t + \Delta - i\Delta) - \gamma_i \sigma(t + \Delta - i\Delta))^2\right\},$$

ahol ($p = q = 1$ esetén)

$$A(t, T, x) = A(t + \Delta, T, x) + xr + B_1(t + \Delta, T, x)\omega - \\ - \frac{1}{2} \ln(1 - 2\alpha_1 B_1(t + \Delta, T, x)), \\ B_1(t, T, x) = x(\lambda + \gamma_1) - \frac{1}{2}\gamma_1^2 + \beta_1 B_1(t + \Delta, T, x) + \frac{\frac{1}{2}(x - \gamma_1)^2}{1 - 2\alpha_1 B_1(t + \Delta, T, x)},$$

és a határ feltevés miatt:

$$A(t - \Delta, T, x) = xr, \\ B_1(t - \Delta, T, x) = \lambda x + \frac{1}{2}x^2$$

Bizonyítás (vázlat): Legyen $f(t, T, x)$ a feltételes generátor függvénye $S(T)$ -nek, azaz ha $\log S(t) = Y(t)$, akkor a momentumgeneráló függvénye $Y(T)$ -nek. Azaz

$$f(t, T, x) = E_t[\exp(xY(T))].$$

Az ötlet, hogy keressük a momentumgeneráló függvényt ilyen alakban:

$$f(t, T, x) = \exp\{xY(t)A(t, T, x) + \sum_{i=1}^p B_i(t, T, x)\sigma^2(t + 2\Delta - i\Delta) + \\ + \sum_{i=1}^{q-1} C_i(t, T, x)(Z(t + \Delta - i\Delta) - \gamma_i\sigma(t + \Delta - i\Delta))^2\}.$$

A $T - \Delta$ időpillanatban való feltételes normalitásból:

$$B_i(T - \Delta, T, x) = C_{i-1}(T - \Delta, T, x) = 0, \quad \text{ha } i > 1.$$

Iteráljuk az eljárást, így kapjuk, hogy:

$$f(t, T, x) = E_t[f(t + \Delta, T, x)] = \exp\{xY(t + \Delta)A(t + \Delta, T, x) + \\ + \sum_{i=1}^p B_i(t + \Delta, T, x)\sigma^2(t + 3\Delta - i\Delta) + \\ + \sum_{i=1}^{q-1} C_i(t + \Delta, T, x)(Z(t + 2\Delta - i\Delta) - \gamma_i\sigma(t + 2\Delta - i\Delta))^2\}.$$

Ebbe kell behelyettesíteni az $Y(t) = \log S(t)$ helyére, ami adva van $\log S(t)$ dinamikájára. Innen kapjuk átalakításokkal az állítást. ■

Tétel: A részvényár logaritmusának karakterisztikus függvénye $f(ix)$, és ekkor

$$\begin{aligned} E(\max(S(T) - K, 0)) &= \\ &= f(1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{K^{-ix} f(ix+1)}{ix f(1)} \right) dx \right) - \\ &\quad - K \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{K^{-ix} f(ix)}{ix} \right) dx \right). \end{aligned}$$

Bizonyítás (vázlat): Legyen $p(y)$ a valószínűség sűrűség. Ennek segítségével definiáljunk egy módosított valószínűség sűrűséget: $p^*(y) = \exp(y) p(y) / f(1)$. $p^*(y)$ momentumgeneráló függvénye:

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(xy) p^*(y) dy = \frac{1}{f(1)} \int_{-\infty}^\infty \exp((x+1)y) p(y) dy = \frac{f(x+1)}{f(1)}.$$

Tehát a call opció ára a következő alakú:

$$\begin{aligned} E[\max(e^y - K)] &= \int_{\ln(K)}^\infty \exp(y) p(y) dy - K \int_{\ln(K)}^\infty p(y) dy = \\ &= f(1) \int_{\ln(K)}^\infty p^*(y) dy - K \int_{\ln(K)}^\infty p(y) dy. \end{aligned}$$

Még azt kell felhasználni, hogy igaz az alábbi összefüggés (Feller 1966, Kendall és Stuart 1977), amivel visszanyerhetjük a karakterisztikus függvényből a "jobbaldalt".

$$\int_{\ln(K)}^\infty p(y) dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{ix \ln(K)} f(ix)}{ix} \right) dx.$$

Ezt felírva $p(y)$ -ra és $p^*(y)$ -ra is, majd behelyettesítve $E[\max(e^y - K)]$ kapott felírásába, készen vagyunk. ■

Tétel: Az európai opció ára t -ben (T lejáráttal) a következő:

$$\begin{aligned} C &= e^{-r(T-t)} E_t^*(\max(S(T) - K, 0)) = \\ &= \frac{1}{2} S(t) + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{K^{-ix} f^*(ix + 1)}{ix} \right) dx - \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{K^{-ix} f^*(ix)}{ix} \right) dx \right), \end{aligned}$$

ahol $f^*(x)$ a kockázatmentes folyamat generátorfüggvénye. \square

Tehát megkaptuk a Heston és Nandi módszerével készített opcióárazási formulát. A Black-Scholes modellből kapottal ellentétben, itt az opció ára csak az $S(t)$ jelenlegi részvényártól, és a feltételes szórástól, $\sigma^2(t + \Delta)$ -tól függ. Ellentétben a sztochasztikus modellekkel, a volatilitásokat nem kell becsülni, mert a diszkrét megfigyelésekből megkapjuk.

3.3. A kétféle opcióár összehasonlítása

Megnézzük mennyire térnek el valós adatok feldolgozásakor a Black-Scholes modellből és a Heston-Nandi-féle opcióárazással kapott modelltől eredményeink. Az adataink napi árfolyamok, 1999-től 2010 május elejéig, a JPY, CAD, GBP, AUD valuták árfolyamaira. ¹

Külön-külön szerepel a táblázatban a Black-Scholes-ból kapott call opció ára, deltája, gammája, majd ugyanezen mennyiségek a Heston-Nandi-féle számítással, végül pedig ezen mutatók put opcióra is. Látjuk, hogy teljesen hasonló értékek jöttek ki a kétféle opcióárazással, de a GARCH esetben mindig alacsonyabb árakat kaptunk. Az elemzés, modellezés mindkét esetben az R (2.9) nevű programmal lett készítve. Az árfolyam adatok feldolgozásakor a növekmények hányadosának logaritmus szerepel, ez tette legstabilabbá az

¹Az adatok a <http://www.ecb.int/stats/exchange/eurofxref/html/index.en.html> oldalról lettek letöltve. Ez a webcím a szakdolgozat leadásakor még megtalálható volt.

adataink. A további elemzést (a táblázat további sorait) pedig az adatok léptetésének segítségével nyerjük (a lépésköz 50), majd ismételjük a léptetések. Ezt az eljárást külön-külön alkalmaztam a különböző árfolyamok idősoraira. Látható, hogy a különböző idősorok hasonlóan reagáltak az eljárásra.

Ha megnézzük, hogy a gammák, és delták értékei mit adnak, azt figyelhetjük meg, hogy itt még kisebbek az eltérések, ha egyáltalán vannak. Az eltérések a gamma, és delta esetén is csak 10^{-3} nagyságrendűek a Black-Scholes eset, és Heston-Nandi módszere között.

| BS.call.ár | BS.call.del | BS.call.ga | HN.call.ár | HN.call.del | HN.call.ga | BS.put.ár | BS.put.del | BS.put.ga | HN.put.ár | HN.put.del | HN.put.ga |
|------------|-------------|------------|------------|-------------|------------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|
| 7,528 | 0,683 | 0,030 | 7,519 | 0,684 | 0,030 | 2,651 | -0,317 | 0,030 | 2,642 | -0,316 | 0,030 |
| 7,507 | 0,683 | 0,030 | 7,498 | 0,684 | 0,030 | 2,629 | -0,317 | 0,030 | 2,621 | -0,316 | 0,030 |
| 7,503 | 0,683 | 0,030 | 7,494 | 0,685 | 0,030 | 2,626 | -0,317 | 0,030 | 2,617 | -0,315 | 0,030 |
| 7,500 | 0,683 | 0,030 | 7,492 | 0,685 | 0,030 | 2,623 | -0,317 | 0,030 | 2,615 | -0,315 | 0,030 |
| 7,507 | 0,683 | 0,030 | 7,498 | 0,684 | 0,030 | 2,630 | -0,317 | 0,030 | 2,621 | -0,316 | 0,030 |
| 7,507 | 0,683 | 0,030 | 7,499 | 0,684 | 0,030 | 2,630 | -0,317 | 0,030 | 2,622 | -0,316 | 0,030 |
| 7,517 | 0,683 | 0,030 | 7,508 | 0,684 | 0,030 | 2,640 | -0,317 | 0,030 | 2,631 | -0,316 | 0,030 |
| 7,542 | 0,682 | 0,029 | 7,533 | 0,683 | 0,030 | 2,665 | -0,318 | 0,029 | 2,656 | -0,317 | 0,030 |
| 7,546 | 0,682 | 0,029 | 7,537 | 0,683 | 0,030 | 2,669 | -0,318 | 0,029 | 2,660 | -0,317 | 0,030 |
| 7,500 | 0,683 | 0,030 | 7,492 | 0,685 | 0,030 | 2,623 | -0,317 | 0,030 | 2,615 | -0,315 | 0,030 |
| 7,493 | 0,684 | 0,030 | 7,484 | 0,685 | 0,030 | 2,616 | -0,316 | 0,030 | 2,607 | -0,315 | 0,030 |
| 7,507 | 0,683 | 0,030 | 7,499 | 0,684 | 0,030 | 2,630 | -0,317 | 0,030 | 2,622 | -0,316 | 0,030 |
| 7,502 | 0,683 | 0,030 | 7,493 | 0,685 | 0,030 | 2,625 | -0,317 | 0,030 | 2,616 | -0,315 | 0,030 |
| 7,505 | 0,683 | 0,030 | 7,496 | 0,684 | 0,030 | 2,628 | -0,317 | 0,030 | 2,619 | -0,316 | 0,030 |
| 7,506 | 0,683 | 0,030 | 7,497 | 0,684 | 0,030 | 2,629 | -0,317 | 0,030 | 2,620 | -0,316 | 0,030 |
| 7,487 | 0,684 | 0,030 | 7,479 | 0,685 | 0,030 | 2,610 | -0,316 | 0,030 | 2,602 | -0,315 | 0,030 |
| 7,494 | 0,684 | 0,030 | 7,486 | 0,685 | 0,030 | 2,617 | -0,316 | 0,030 | 2,609 | -0,315 | 0,030 |
| 7,493 | 0,684 | 0,030 | 7,484 | 0,685 | 0,030 | 2,616 | -0,316 | 0,030 | 2,607 | -0,315 | 0,030 |
| 7,484 | 0,684 | 0,030 | 7,475 | 0,685 | 0,030 | 2,607 | -0,316 | 0,030 | 2,598 | -0,315 | 0,030 |
| 7,486 | 0,684 | 0,030 | 7,477 | 0,685 | 0,030 | 2,609 | -0,316 | 0,030 | 2,600 | -0,315 | 0,030 |
| 7,490 | 0,684 | 0,030 | 7,482 | 0,685 | 0,030 | 2,613 | -0,316 | 0,030 | 2,605 | -0,315 | 0,030 |
| 7,491 | 0,684 | 0,030 | 7,482 | 0,685 | 0,030 | 2,614 | -0,316 | 0,030 | 2,605 | -0,315 | 0,030 |
| 7,499 | 0,683 | 0,030 | 7,490 | 0,685 | 0,030 | 2,622 | -0,317 | 0,030 | 2,613 | -0,315 | 0,030 |
| 7,488 | 0,684 | 0,030 | 7,479 | 0,685 | 0,030 | 2,611 | -0,316 | 0,030 | 2,602 | -0,315 | 0,030 |
| 7,489 | 0,684 | 0,030 | 7,481 | 0,685 | 0,030 | 2,612 | -0,316 | 0,030 | 2,604 | -0,315 | 0,030 |
| 7,489 | 0,684 | 0,030 | 7,480 | 0,685 | 0,030 | 2,612 | -0,316 | 0,030 | 2,603 | -0,315 | 0,030 |
| 7,487 | 0,684 | 0,030 | 7,478 | 0,685 | 0,030 | 2,610 | -0,316 | 0,030 | 2,601 | -0,315 | 0,030 |
| 7,492 | 0,684 | 0,030 | 7,484 | 0,685 | 0,030 | 2,615 | -0,316 | 0,030 | 2,607 | -0,315 | 0,030 |
| 7,488 | 0,684 | 0,030 | 7,480 | 0,685 | 0,030 | 2,611 | -0,316 | 0,030 | 2,603 | -0,315 | 0,030 |
| 7,490 | 0,684 | 0,030 | 7,481 | 0,685 | 0,030 | 2,613 | -0,316 | 0,030 | 2,604 | -0,315 | 0,030 |
| 7,496 | 0,683 | 0,030 | 7,487 | 0,685 | 0,030 | 2,619 | -0,317 | 0,030 | 2,610 | -0,315 | 0,030 |
| 7,502 | 0,683 | 0,030 | 7,494 | 0,685 | 0,030 | 2,625 | -0,317 | 0,030 | 2,617 | -0,315 | 0,030 |
| 7,498 | 0,683 | 0,030 | 7,490 | 0,685 | 0,030 | 2,621 | -0,317 | 0,030 | 2,613 | -0,315 | 0,030 |
| 7,495 | 0,683 | 0,030 | 7,486 | 0,685 | 0,030 | 2,618 | -0,317 | 0,030 | 2,609 | -0,315 | 0,030 |

3.1. ábra. JPY árfolyamára a Black-Scholes és Heston-Nandi-féle eredmények összehasonlítása. A kétféle módszer eredményei a call és put opciók árára, illetve külön-külön a kapott gammák, és delták.

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|
| 7,504 | 0,683 | 0,030 | 7,495 | 0,685 | 0,030 | 2,627 | -0,317 | 0,030 | 2,618 | -0,315 | 0,030 |
| 7,497 | 0,683 | 0,030 | 7,488 | 0,685 | 0,030 | 2,620 | -0,317 | 0,030 | 2,611 | -0,315 | 0,030 |
| 7,492 | 0,684 | 0,030 | 7,483 | 0,685 | 0,030 | 2,615 | -0,316 | 0,030 | 2,606 | -0,315 | 0,030 |
| 7,490 | 0,684 | 0,030 | 7,482 | 0,685 | 0,030 | 2,613 | -0,316 | 0,030 | 2,605 | -0,315 | 0,030 |
| 7,497 | 0,683 | 0,030 | 7,488 | 0,685 | 0,030 | 2,620 | -0,317 | 0,030 | 2,611 | -0,315 | 0,030 |
| 7,495 | 0,683 | 0,030 | 7,486 | 0,685 | 0,030 | 2,618 | -0,317 | 0,030 | 2,609 | -0,315 | 0,030 |
| 7,494 | 0,684 | 0,030 | 7,486 | 0,685 | 0,030 | 2,617 | -0,316 | 0,030 | 2,608 | -0,315 | 0,030 |
| 7,486 | 0,684 | 0,030 | 7,477 | 0,685 | 0,030 | 2,609 | -0,316 | 0,030 | 2,600 | -0,315 | 0,030 |
| 7,497 | 0,683 | 0,030 | 7,488 | 0,685 | 0,030 | 2,620 | -0,317 | 0,030 | 2,611 | -0,315 | 0,030 |
| 7,489 | 0,684 | 0,030 | 7,481 | 0,685 | 0,030 | 2,612 | -0,316 | 0,030 | 2,603 | -0,315 | 0,030 |
| 7,500 | 0,683 | 0,030 | 7,491 | 0,685 | 0,030 | 2,623 | -0,317 | 0,030 | 2,614 | -0,315 | 0,030 |
| 7,498 | 0,683 | 0,030 | 7,490 | 0,685 | 0,030 | 2,621 | -0,317 | 0,030 | 2,613 | -0,315 | 0,030 |
| 7,508 | 0,683 | 0,030 | 7,500 | 0,684 | 0,030 | 2,631 | -0,317 | 0,030 | 2,623 | -0,316 | 0,030 |
| 7,517 | 0,683 | 0,030 | 7,508 | 0,684 | 0,030 | 2,640 | -0,317 | 0,030 | 2,631 | -0,316 | 0,030 |
| 7,511 | 0,683 | 0,030 | 7,503 | 0,684 | 0,030 | 2,634 | -0,317 | 0,030 | 2,626 | -0,316 | 0,030 |
| 7,515 | 0,683 | 0,030 | 7,506 | 0,684 | 0,030 | 2,638 | -0,317 | 0,030 | 2,629 | -0,316 | 0,030 |
| 7,512 | 0,683 | 0,030 | 7,503 | 0,684 | 0,030 | 2,635 | -0,317 | 0,030 | 2,626 | -0,316 | 0,030 |
| 7,514 | 0,683 | 0,030 | 7,505 | 0,684 | 0,030 | 2,637 | -0,317 | 0,030 | 2,628 | -0,316 | 0,030 |
| 7,512 | 0,683 | 0,030 | 7,504 | 0,684 | 0,030 | 2,635 | -0,317 | 0,030 | 2,627 | -0,316 | 0,030 |
| 7,507 | 0,683 | 0,030 | 7,498 | 0,684 | 0,030 | 2,629 | -0,317 | 0,030 | 2,621 | -0,316 | 0,030 |
| 7,511 | 0,683 | 0,030 | 7,502 | 0,684 | 0,030 | 2,634 | -0,317 | 0,030 | 2,625 | -0,316 | 0,030 |
| 7,503 | 0,683 | 0,030 | 7,494 | 0,685 | 0,030 | 2,626 | -0,317 | 0,030 | 2,617 | -0,315 | 0,030 |
| 7,500 | 0,683 | 0,030 | 7,492 | 0,685 | 0,030 | 2,623 | -0,317 | 0,030 | 2,615 | -0,315 | 0,030 |
| 7,503 | 0,683 | 0,030 | 7,494 | 0,685 | 0,030 | 2,626 | -0,317 | 0,030 | 2,617 | -0,315 | 0,030 |
| 7,526 | 0,683 | 0,030 | 7,517 | 0,684 | 0,030 | 2,649 | -0,317 | 0,030 | 2,640 | -0,316 | 0,030 |

3.2. ábra. JPY árfolyamára a Black-Scholes és Heston-Nandi-féle eredmények összehasonlító táblázatának folytatása. A kétféle módszer eredményei a call és put opciók árára, illetve külön-külön a kapott gammák, és delták.

| BS.call.ár | BS.call.del | BS.call.ga | HN.call.ár | HN.call.del | HN.call.ga | BS.put.ár | BS.put.del | BS.put.ga | HN.put.ár | HN.put.del | HN.put.ga |
|------------|-------------|------------|------------|-------------|------------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|
| 6.058 | 0.753 | 0.041 | 6.053 | 0.754 | 0.041 | 1.181 | -0.247 | 0.041 | 1.176 | -0.246 | 0.041 |
| 6.037 | 0.755 | 0.041 | 6.032 | 0.756 | 0.041 | 1.160 | -0.245 | 0.041 | 1.155 | -0.244 | 0.041 |
| 6.032 | 0.755 | 0.041 | 6.027 | 0.756 | 0.041 | 1.155 | -0.245 | 0.041 | 1.150 | -0.244 | 0.041 |
| 6.042 | 0.754 | 0.041 | 6.037 | 0.756 | 0.041 | 1.165 | -0.246 | 0.041 | 1.160 | -0.244 | 0.041 |
| 6.035 | 0.755 | 0.041 | 6.030 | 0.756 | 0.041 | 1.158 | -0.245 | 0.041 | 1.153 | -0.244 | 0.041 |
| 6.039 | 0.755 | 0.041 | 6.034 | 0.756 | 0.041 | 1.162 | -0.245 | 0.041 | 1.157 | -0.244 | 0.041 |
| 6.046 | 0.754 | 0.041 | 6.040 | 0.755 | 0.041 | 1.169 | -0.246 | 0.041 | 1.163 | -0.245 | 0.041 |
| 6.075 | 0.752 | 0.041 | 6.070 | 0.753 | 0.041 | 1.198 | -0.248 | 0.041 | 1.193 | -0.247 | 0.041 |
| 6.046 | 0.754 | 0.041 | 6.041 | 0.755 | 0.041 | 1.169 | -0.246 | 0.041 | 1.164 | -0.245 | 0.041 |
| 6.030 | 0.755 | 0.041 | 6.025 | 0.757 | 0.041 | 1.153 | -0.245 | 0.041 | 1.148 | -0.243 | 0.041 |
| 6.034 | 0.755 | 0.041 | 6.029 | 0.756 | 0.041 | 1.157 | -0.245 | 0.041 | 1.152 | -0.244 | 0.041 |
| 6.036 | 0.755 | 0.041 | 6.030 | 0.756 | 0.041 | 1.159 | -0.245 | 0.041 | 1.153 | -0.244 | 0.041 |
| 6.033 | 0.755 | 0.041 | 6.028 | 0.756 | 0.041 | 1.156 | -0.245 | 0.041 | 1.151 | -0.244 | 0.041 |
| 6.025 | 0.756 | 0.041 | 6.019 | 0.757 | 0.041 | 1.147 | -0.244 | 0.041 | 1.142 | -0.243 | 0.041 |
| 6.027 | 0.756 | 0.041 | 6.022 | 0.757 | 0.041 | 1.150 | -0.244 | 0.041 | 1.145 | -0.243 | 0.041 |
| 6.021 | 0.756 | 0.041 | 6.016 | 0.757 | 0.041 | 1.144 | -0.244 | 0.041 | 1.139 | -0.243 | 0.041 |
| 6.021 | 0.756 | 0.041 | 6.021 | 0.757 | 0.041 | 1.144 | -0.244 | 0.041 | 1.144 | -0.243 | 0.041 |
| 6.023 | 0.756 | 0.041 | 6.018 | 0.757 | 0.041 | 1.146 | -0.244 | 0.041 | 1.141 | -0.243 | 0.041 |
| 6.024 | 0.756 | 0.041 | 6.018 | 0.757 | 0.041 | 1.147 | -0.244 | 0.041 | 1.141 | -0.243 | 0.041 |
| 6.024 | 0.756 | 0.041 | 6.019 | 0.757 | 0.041 | 1.147 | -0.244 | 0.041 | 1.142 | -0.243 | 0.041 |
| 6.024 | 0.756 | 0.041 | 6.019 | 0.757 | 0.041 | 1.147 | -0.244 | 0.041 | 1.142 | -0.243 | 0.041 |
| 6.028 | 0.756 | 0.041 | 6.023 | 0.757 | 0.041 | 1.151 | -0.244 | 0.041 | 1.146 | -0.243 | 0.041 |
| 6.026 | 0.756 | 0.041 | 6.021 | 0.757 | 0.041 | 1.149 | -0.244 | 0.041 | 1.144 | -0.243 | 0.041 |
| 6.023 | 0.756 | 0.041 | 6.018 | 0.757 | 0.041 | 1.146 | -0.244 | 0.041 | 1.141 | -0.243 | 0.041 |
| 6.030 | 0.755 | 0.041 | 6.025 | 0.757 | 0.041 | 1.153 | -0.245 | 0.041 | 1.148 | -0.243 | 0.041 |
| 6.025 | 0.756 | 0.041 | 6.020 | 0.757 | 0.041 | 1.148 | -0.244 | 0.041 | 1.143 | -0.243 | 0.041 |
| 6.026 | 0.756 | 0.041 | 6.021 | 0.757 | 0.041 | 1.148 | -0.244 | 0.041 | 1.144 | -0.243 | 0.041 |
| 6.025 | 0.756 | 0.041 | 6.020 | 0.757 | 0.041 | 1.148 | -0.244 | 0.041 | 1.144 | -0.243 | 0.041 |
| 6.025 | 0.756 | 0.041 | 6.020 | 0.757 | 0.041 | 1.148 | -0.244 | 0.041 | 1.143 | -0.243 | 0.041 |
| 6.027 | 0.756 | 0.041 | 6.022 | 0.757 | 0.041 | 1.150 | -0.244 | 0.041 | 1.145 | -0.243 | 0.041 |
| 6.034 | 0.755 | 0.041 | 6.029 | 0.756 | 0.041 | 1.157 | -0.245 | 0.041 | 1.152 | -0.244 | 0.041 |
| 6.026 | 0.756 | 0.041 | 6.021 | 0.757 | 0.041 | 1.149 | -0.244 | 0.041 | 1.144 | -0.243 | 0.041 |
| 6.028 | 0.756 | 0.041 | 6.022 | 0.757 | 0.041 | 1.150 | -0.244 | 0.041 | 1.145 | -0.243 | 0.041 |

3.3. ábra. GBP árfolyamára a Black-Scholes és Heston-Nandi-féle eredmények összehasonlítása. A kétféle módszer eredményei a call és put opciók árára, illetve külön-külön a kapott gammák, és delták.

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|
| 6.032 | 0,755 | 0,041 | 6,027 | 0,756 | 0,041 | 1,155 | -0,245 | 0,041 | 1,150 | -0,244 | 0,041 |
| 6.032 | 0,755 | 0,041 | 6,027 | 0,756 | 0,041 | 1,155 | -0,245 | 0,041 | 1,150 | -0,244 | 0,041 |
| 6.033 | 0,755 | 0,041 | 6,028 | 0,756 | 0,041 | 1,156 | -0,245 | 0,041 | 1,151 | -0,244 | 0,041 |
| 6.030 | 0,755 | 0,041 | 6,025 | 0,757 | 0,041 | 1,153 | -0,245 | 0,041 | 1,148 | -0,243 | 0,041 |
| 6.029 | 0,756 | 0,041 | 6,023 | 0,757 | 0,041 | 1,151 | -0,244 | 0,041 | 1,146 | -0,243 | 0,041 |
| 6.025 | 0,756 | 0,041 | 6,020 | 0,757 | 0,041 | 1,148 | -0,244 | 0,041 | 1,143 | -0,243 | 0,041 |
| 6.029 | 0,755 | 0,041 | 6,024 | 0,757 | 0,041 | 1,152 | -0,245 | 0,041 | 1,147 | -0,243 | 0,041 |
| 6.023 | 0,756 | 0,041 | 6,018 | 0,757 | 0,041 | 1,146 | -0,244 | 0,041 | 1,141 | -0,243 | 0,041 |
| 6.025 | 0,756 | 0,041 | 6,020 | 0,757 | 0,041 | 1,148 | -0,244 | 0,041 | 1,143 | -0,243 | 0,041 |
| 6.028 | 0,756 | 0,041 | 6,023 | 0,757 | 0,041 | 1,151 | -0,244 | 0,041 | 1,146 | -0,243 | 0,041 |
| 6.033 | 0,755 | 0,041 | 6,028 | 0,756 | 0,041 | 1,156 | -0,245 | 0,041 | 1,151 | -0,244 | 0,041 |
| 6.032 | 0,755 | 0,041 | 6,026 | 0,756 | 0,041 | 1,155 | -0,245 | 0,041 | 1,149 | -0,244 | 0,041 |
| 6.032 | 0,755 | 0,041 | 6,027 | 0,756 | 0,041 | 1,155 | -0,245 | 0,041 | 1,150 | -0,244 | 0,041 |
| 6.036 | 0,755 | 0,041 | 6,031 | 0,756 | 0,041 | 1,159 | -0,245 | 0,041 | 1,154 | -0,244 | 0,041 |
| 6.042 | 0,754 | 0,041 | 6,037 | 0,756 | 0,041 | 1,165 | -0,246 | 0,041 | 1,160 | -0,244 | 0,041 |
| 6.037 | 0,755 | 0,041 | 6,032 | 0,756 | 0,041 | 1,160 | -0,245 | 0,041 | 1,155 | -0,244 | 0,041 |
| 6.040 | 0,755 | 0,041 | 6,035 | 0,756 | 0,041 | 1,163 | -0,245 | 0,041 | 1,158 | -0,244 | 0,041 |
| 6.051 | 0,754 | 0,041 | 6,046 | 0,755 | 0,041 | 1,174 | -0,246 | 0,041 | 1,169 | -0,245 | 0,041 |
| 6.039 | 0,755 | 0,041 | 6,034 | 0,756 | 0,041 | 1,162 | -0,245 | 0,041 | 1,157 | -0,244 | 0,041 |
| 6.028 | 0,756 | 0,041 | 6,023 | 0,757 | 0,041 | 1,151 | -0,244 | 0,041 | 1,146 | -0,243 | 0,041 |
| 6.031 | 0,755 | 0,041 | 6,026 | 0,756 | 0,041 | 1,154 | -0,245 | 0,041 | 1,149 | -0,244 | 0,041 |
| 6.033 | 0,755 | 0,041 | 6,028 | 0,756 | 0,041 | 1,156 | -0,245 | 0,041 | 1,151 | -0,244 | 0,041 |
| 6.031 | 0,755 | 0,041 | 6,026 | 0,756 | 0,041 | 1,154 | -0,245 | 0,041 | 1,149 | -0,244 | 0,041 |
| 6.035 | 0,755 | 0,041 | 6,029 | 0,756 | 0,041 | 1,157 | -0,245 | 0,041 | 1,152 | -0,244 | 0,041 |
| 6.052 | 0,754 | 0,041 | 6,047 | 0,755 | 0,041 | 1,175 | -0,246 | 0,041 | 1,170 | -0,245 | 0,041 |

3.4. ábra. **GBP árfolyamára a Black-Scholes és Heston-Nandi-féle eredmények összehasonlító táblázatának folytatása.** A kétféle módszer eredményei a call és put opciók árára, illetve külön-külön a kapott gammák, és delták.

| BS.call.ár | BS.call.del | BS.call.ga | HN.call.ár | HN.call.del | HN.call.ga | BS.put.ár | BS.put.del | BS.put.ga | HN.put.ár | HN.put.del | HN.put.ga |
|------------|-------------|------------|------------|-------------|------------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|
| 7,065 | 0,698 | 0,032 | 7,058 | 0,699 | 0,033 | 2,188 | -0,302 | 0,032 | 2,181 | -0,301 | 0,033 |
| 7,042 | 0,699 | 0,033 | 7,035 | 0,700 | 0,033 | 2,165 | -0,301 | 0,033 | 2,158 | -0,300 | 0,033 |
| 7,052 | 0,699 | 0,033 | 7,045 | 0,700 | 0,033 | 2,175 | -0,301 | 0,033 | 2,168 | -0,300 | 0,033 |
| 7,051 | 0,699 | 0,033 | 7,043 | 0,700 | 0,033 | 2,174 | -0,301 | 0,033 | 2,166 | -0,300 | 0,033 |
| 7,057 | 0,698 | 0,032 | 7,049 | 0,700 | 0,033 | 2,179 | -0,302 | 0,032 | 2,172 | -0,300 | 0,033 |
| 7,055 | 0,698 | 0,033 | 7,047 | 0,700 | 0,033 | 2,178 | -0,302 | 0,033 | 2,170 | -0,300 | 0,033 |
| 7,069 | 0,698 | 0,032 | 7,062 | 0,699 | 0,033 | 2,192 | -0,302 | 0,032 | 2,185 | -0,301 | 0,033 |
| 7,169 | 0,694 | 0,032 | 7,162 | 0,696 | 0,032 | 2,292 | -0,306 | 0,032 | 2,285 | -0,304 | 0,032 |
| 7,042 | 0,699 | 0,033 | 7,035 | 0,700 | 0,033 | 2,165 | -0,301 | 0,033 | 2,158 | -0,300 | 0,033 |
| 7,046 | 0,699 | 0,033 | 7,039 | 0,700 | 0,033 | 2,169 | -0,301 | 0,033 | 2,161 | -0,300 | 0,033 |
| 7,054 | 0,698 | 0,033 | 7,047 | 0,700 | 0,033 | 2,177 | -0,302 | 0,033 | 2,170 | -0,300 | 0,033 |
| 7,045 | 0,699 | 0,033 | 7,038 | 0,700 | 0,033 | 2,168 | -0,301 | 0,033 | 2,161 | -0,300 | 0,033 |
| 7,054 | 0,698 | 0,033 | 7,047 | 0,700 | 0,033 | 2,177 | -0,302 | 0,033 | 2,170 | -0,300 | 0,033 |
| 7,059 | 0,698 | 0,032 | 7,052 | 0,700 | 0,033 | 2,182 | -0,302 | 0,032 | 2,174 | -0,300 | 0,033 |
| 7,038 | 0,699 | 0,033 | 7,031 | 0,700 | 0,033 | 2,161 | -0,301 | 0,033 | 2,154 | -0,300 | 0,033 |
| 7,037 | 0,699 | 0,033 | 7,030 | 0,700 | 0,033 | 2,160 | -0,301 | 0,033 | 2,153 | -0,300 | 0,033 |
| 7,032 | 0,699 | 0,033 | 7,024 | 0,701 | 0,033 | 2,155 | -0,301 | 0,033 | 2,147 | -0,299 | 0,033 |
| 7,034 | 0,699 | 0,033 | 7,026 | 0,701 | 0,033 | 2,157 | -0,301 | 0,033 | 2,149 | -0,299 | 0,033 |
| 7,040 | 0,699 | 0,033 | 7,032 | 0,700 | 0,033 | 2,162 | -0,301 | 0,033 | 2,155 | -0,300 | 0,033 |
| 7,046 | 0,699 | 0,033 | 7,039 | 0,700 | 0,033 | 2,169 | -0,301 | 0,033 | 2,162 | -0,300 | 0,033 |
| 7,049 | 0,699 | 0,033 | 7,042 | 0,700 | 0,033 | 2,172 | -0,301 | 0,033 | 2,165 | -0,300 | 0,033 |
| 7,040 | 0,699 | 0,033 | 7,032 | 0,700 | 0,033 | 2,162 | -0,301 | 0,033 | 2,155 | -0,300 | 0,033 |
| 7,039 | 0,699 | 0,033 | 7,032 | 0,700 | 0,033 | 2,162 | -0,301 | 0,033 | 2,155 | -0,300 | 0,033 |
| 7,036 | 0,699 | 0,033 | 7,029 | 0,700 | 0,033 | 2,159 | -0,301 | 0,033 | 2,152 | -0,300 | 0,033 |
| 7,040 | 0,699 | 0,033 | 7,033 | 0,700 | 0,033 | 2,163 | -0,301 | 0,033 | 2,156 | -0,300 | 0,033 |
| 7,037 | 0,699 | 0,033 | 7,030 | 0,700 | 0,033 | 2,160 | -0,301 | 0,033 | 2,153 | -0,300 | 0,033 |
| 7,040 | 0,699 | 0,033 | 7,032 | 0,700 | 0,033 | 2,163 | -0,301 | 0,033 | 2,155 | -0,300 | 0,033 |
| 7,038 | 0,699 | 0,033 | 7,030 | 0,700 | 0,033 | 2,161 | -0,301 | 0,033 | 2,153 | -0,300 | 0,033 |
| 7,041 | 0,699 | 0,033 | 7,034 | 0,700 | 0,033 | 2,164 | -0,301 | 0,033 | 2,157 | -0,300 | 0,033 |
| 7,050 | 0,699 | 0,033 | 7,043 | 0,700 | 0,033 | 2,173 | -0,301 | 0,033 | 2,166 | -0,300 | 0,033 |
| 7,052 | 0,699 | 0,033 | 7,045 | 0,700 | 0,033 | 2,175 | -0,301 | 0,033 | 2,168 | -0,300 | 0,033 |
| 7,043 | 0,699 | 0,033 | 7,036 | 0,700 | 0,033 | 2,166 | -0,301 | 0,033 | 2,159 | -0,300 | 0,033 |

3.5. ábra. AUD árfolyamára a Black-Scholes és Heston-Nandi-féle eredmények összehasonlítása. A kétféle módszer eredményei a call és put opciók árára, illetve külön-külön a kapott gammák, és delták.

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|
| 7,040 | 0,699 | 0,033 | 7,033 | 0,700 | 0,033 | 2,163 | -0,301 | 0,033 | 2,156 | -0,300 | 0,033 |
| 7,041 | 0,699 | 0,033 | 7,033 | 0,700 | 0,033 | 2,164 | -0,301 | 0,033 | 2,156 | -0,300 | 0,033 |
| 7,056 | 0,698 | 0,032 | 7,048 | 0,700 | 0,033 | 2,179 | -0,302 | 0,032 | 2,171 | -0,300 | 0,033 |
| 7,041 | 0,699 | 0,033 | 7,034 | 0,700 | 0,033 | 2,164 | -0,301 | 0,033 | 2,157 | -0,300 | 0,033 |
| 7,040 | 0,699 | 0,033 | 7,033 | 0,700 | 0,033 | 2,163 | -0,301 | 0,033 | 2,156 | -0,300 | 0,033 |
| 7,044 | 0,699 | 0,033 | 7,036 | 0,700 | 0,033 | 2,167 | -0,301 | 0,033 | 2,159 | -0,300 | 0,033 |
| 7,049 | 0,699 | 0,033 | 7,042 | 0,700 | 0,033 | 2,172 | -0,301 | 0,033 | 2,165 | -0,300 | 0,033 |
| 7,056 | 0,698 | 0,032 | 7,048 | 0,700 | 0,033 | 2,178 | -0,302 | 0,032 | 2,171 | -0,300 | 0,033 |
| 7,042 | 0,699 | 0,033 | 7,035 | 0,700 | 0,033 | 2,165 | -0,301 | 0,033 | 2,158 | -0,300 | 0,033 |
| 7,051 | 0,699 | 0,033 | 7,044 | 0,700 | 0,033 | 2,174 | -0,301 | 0,033 | 2,167 | -0,300 | 0,033 |
| 7,049 | 0,699 | 0,033 | 7,042 | 0,700 | 0,033 | 2,172 | -0,301 | 0,033 | 2,165 | -0,300 | 0,033 |
| 7,075 | 0,698 | 0,032 | 7,068 | 0,699 | 0,033 | 2,198 | -0,302 | 0,032 | 2,191 | -0,301 | 0,033 |
| 7,049 | 0,699 | 0,033 | 7,042 | 0,700 | 0,033 | 2,172 | -0,301 | 0,033 | 2,165 | -0,300 | 0,033 |
| 7,055 | 0,698 | 0,033 | 7,048 | 0,700 | 0,033 | 2,178 | -0,302 | 0,033 | 2,170 | -0,300 | 0,033 |
| 7,044 | 0,699 | 0,033 | 7,037 | 0,700 | 0,033 | 2,167 | -0,301 | 0,033 | 2,160 | -0,300 | 0,033 |
| 7,047 | 0,699 | 0,033 | 7,039 | 0,700 | 0,033 | 2,170 | -0,301 | 0,033 | 2,162 | -0,300 | 0,033 |
| 7,047 | 0,699 | 0,033 | 7,040 | 0,700 | 0,033 | 2,170 | -0,301 | 0,033 | 2,163 | -0,300 | 0,033 |
| 7,055 | 0,698 | 0,033 | 7,048 | 0,700 | 0,033 | 2,178 | -0,302 | 0,033 | 2,170 | -0,300 | 0,033 |
| 7,060 | 0,698 | 0,032 | 7,053 | 0,700 | 0,033 | 2,183 | -0,302 | 0,032 | 2,176 | -0,300 | 0,033 |
| 7,053 | 0,698 | 0,033 | 7,046 | 0,700 | 0,033 | 2,176 | -0,302 | 0,033 | 2,169 | -0,300 | 0,033 |
| 7,049 | 0,699 | 0,033 | 7,042 | 0,700 | 0,033 | 2,172 | -0,301 | 0,033 | 2,164 | -0,300 | 0,033 |
| 7,054 | 0,698 | 0,033 | 7,046 | 0,700 | 0,033 | 2,177 | -0,302 | 0,033 | 2,169 | -0,300 | 0,033 |
| 7,051 | 0,699 | 0,033 | 7,044 | 0,700 | 0,033 | 2,174 | -0,301 | 0,033 | 2,167 | -0,300 | 0,033 |
| 7,053 | 0,699 | 0,033 | 7,046 | 0,700 | 0,033 | 2,176 | -0,301 | 0,033 | 2,169 | -0,300 | 0,033 |
| 7,050 | 0,699 | 0,033 | 7,043 | 0,700 | 0,033 | 2,173 | -0,301 | 0,033 | 2,166 | -0,300 | 0,033 |
| 7,068 | 0,698 | 0,032 | 7,060 | 0,699 | 0,033 | 2,191 | -0,302 | 0,032 | 2,183 | -0,301 | 0,033 |

3.6. ábra. AUD árfolyamára a Black-Scholes és Heston-Nandi-féle eredmények összehasonlító táblázatának folytatása. A kétféle módszer eredményei a call és put opciók árára, illetve külön-külön a kapott gammák, és delták.

| BS.call.ár | BS.call.del | BS.call.ga | HN.call.ár | HN.call.del | HN.call.ga | BS.put.ár | BS.put.del | BS.put.ga | HN.put.ár | HN.put.del | HN.put.ga |
|------------|-------------|------------|------------|-------------|------------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|
| 7,074 | 0,698 | 0,032 | 7,068 | 0,699 | 0,032 | 2,197 | -0,302 | 0,032 | 2,191 | -0,301 | 0,032 |
| 7,052 | 0,699 | 0,033 | 7,046 | 0,700 | 0,033 | 2,175 | -0,301 | 0,033 | 2,169 | -0,300 | 0,033 |
| 7,045 | 0,699 | 0,033 | 7,040 | 0,700 | 0,033 | 2,168 | -0,301 | 0,032 | 2,162 | -0,300 | 0,033 |
| 7,058 | 0,698 | 0,032 | 7,052 | 0,700 | 0,033 | 2,180 | -0,302 | 0,032 | 2,174 | -0,300 | 0,033 |
| 7,050 | 0,699 | 0,033 | 7,044 | 0,700 | 0,033 | 2,173 | -0,301 | 0,033 | 2,167 | -0,300 | 0,033 |
| 7,049 | 0,699 | 0,033 | 7,043 | 0,700 | 0,033 | 2,172 | -0,301 | 0,033 | 2,166 | -0,300 | 0,033 |
| 7,055 | 0,698 | 0,032 | 7,049 | 0,700 | 0,033 | 2,178 | -0,302 | 0,032 | 2,172 | -0,300 | 0,033 |
| 7,103 | 0,697 | 0,032 | 7,097 | 0,698 | 0,032 | 2,226 | -0,303 | 0,032 | 2,220 | -0,302 | 0,032 |
| 7,090 | 0,697 | 0,032 | 7,084 | 0,698 | 0,032 | 2,213 | -0,303 | 0,032 | 2,207 | -0,302 | 0,032 |
| 7,043 | 0,699 | 0,033 | 7,038 | 0,700 | 0,033 | 2,166 | -0,301 | 0,033 | 2,161 | -0,300 | 0,033 |
| 7,049 | 0,699 | 0,033 | 7,043 | 0,700 | 0,033 | 2,172 | -0,301 | 0,033 | 2,166 | -0,300 | 0,033 |
| 7,046 | 0,699 | 0,033 | 7,040 | 0,700 | 0,033 | 2,169 | -0,301 | 0,033 | 2,163 | -0,300 | 0,033 |
| 7,056 | 0,698 | 0,032 | 7,050 | 0,700 | 0,033 | 2,179 | -0,302 | 0,032 | 2,173 | -0,300 | 0,033 |
| 7,037 | 0,699 | 0,033 | 7,031 | 0,700 | 0,033 | 2,160 | -0,301 | 0,033 | 2,154 | -0,300 | 0,033 |
| 7,040 | 0,699 | 0,033 | 7,034 | 0,700 | 0,033 | 2,163 | -0,301 | 0,033 | 2,157 | -0,300 | 0,033 |
| 7,038 | 0,699 | 0,033 | 7,032 | 0,700 | 0,033 | 2,161 | -0,301 | 0,033 | 2,155 | -0,300 | 0,033 |
| 7,029 | 0,699 | 0,033 | 7,023 | 0,701 | 0,033 | 2,152 | -0,301 | 0,033 | 2,146 | -0,299 | 0,033 |
| 7,034 | 0,699 | 0,033 | 7,028 | 0,701 | 0,033 | 2,157 | -0,301 | 0,033 | 2,151 | -0,299 | 0,033 |
| 7,027 | 0,700 | 0,033 | 7,021 | 0,701 | 0,033 | 2,150 | -0,300 | 0,033 | 2,144 | -0,299 | 0,033 |
| 7,033 | 0,699 | 0,033 | 7,027 | 0,701 | 0,033 | 2,156 | -0,301 | 0,033 | 2,150 | -0,299 | 0,033 |
| 7,041 | 0,699 | 0,033 | 7,035 | 0,700 | 0,033 | 2,164 | -0,301 | 0,033 | 2,158 | -0,300 | 0,033 |
| 7,040 | 0,699 | 0,033 | 7,034 | 0,700 | 0,033 | 2,163 | -0,301 | 0,033 | 2,157 | -0,300 | 0,033 |
| 7,046 | 0,699 | 0,033 | 7,040 | 0,700 | 0,033 | 2,169 | -0,301 | 0,033 | 2,163 | -0,300 | 0,033 |
| 7,039 | 0,699 | 0,033 | 7,033 | 0,700 | 0,033 | 2,162 | -0,301 | 0,033 | 2,156 | -0,300 | 0,033 |
| 7,039 | 0,699 | 0,033 | 7,034 | 0,700 | 0,033 | 2,162 | -0,301 | 0,033 | 2,156 | -0,300 | 0,033 |
| 7,042 | 0,699 | 0,033 | 7,037 | 0,700 | 0,033 | 2,165 | -0,301 | 0,033 | 2,159 | -0,300 | 0,033 |
| 7,032 | 0,699 | 0,033 | 7,026 | 0,701 | 0,033 | 2,155 | -0,301 | 0,033 | 2,149 | -0,299 | 0,033 |
| 7,031 | 0,699 | 0,033 | 7,025 | 0,701 | 0,033 | 2,154 | -0,301 | 0,033 | 2,148 | -0,299 | 0,033 |
| 7,029 | 0,699 | 0,033 | 7,023 | 0,701 | 0,033 | 2,152 | -0,301 | 0,033 | 2,146 | -0,299 | 0,033 |
| 7,037 | 0,699 | 0,033 | 7,031 | 0,700 | 0,033 | 2,160 | -0,301 | 0,033 | 2,154 | -0,300 | 0,033 |
| 7,036 | 0,699 | 0,033 | 7,030 | 0,700 | 0,033 | 2,159 | -0,301 | 0,033 | 2,153 | -0,300 | 0,033 |
| 7,043 | 0,699 | 0,033 | 7,037 | 0,700 | 0,033 | 2,166 | -0,301 | 0,033 | 2,160 | -0,300 | 0,033 |
| 7,038 | 0,699 | 0,033 | 7,032 | 0,700 | 0,033 | 2,161 | -0,301 | 0,033 | 2,155 | -0,300 | 0,033 |
| 7,031 | 0,699 | 0,033 | 7,025 | 0,701 | 0,033 | 2,154 | -0,301 | 0,033 | 2,148 | -0,299 | 0,033 |

3.7. ábra. CAD árfolyamára a Black-Scholes és Heston-Nandi-féle eredmények összehasonlítása. A kétféle módszer eredményei a call és put opciók árára, illetve külön-külön a kapott gammák, és delták.

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|
| 7,040 | 0,699 | 0,033 | 7,034 | 0,700 | 0,033 | 2,163 | -0,301 | 0,033 | 2,157 | -0,300 | 0,033 |
| 7,048 | 0,699 | 0,033 | 7,042 | 0,700 | 0,033 | 2,171 | -0,301 | 0,033 | 2,165 | -0,300 | 0,033 |
| 7,054 | 0,698 | 0,033 | 7,048 | 0,700 | 0,033 | 2,177 | -0,302 | 0,033 | 2,171 | -0,300 | 0,033 |
| 7,045 | 0,699 | 0,033 | 7,039 | 0,700 | 0,033 | 2,168 | -0,301 | 0,033 | 2,162 | -0,300 | 0,033 |
| 7,054 | 0,698 | 0,033 | 7,048 | 0,700 | 0,033 | 2,177 | -0,302 | 0,033 | 2,171 | -0,300 | 0,033 |
| 7,054 | 0,698 | 0,033 | 7,048 | 0,700 | 0,033 | 2,177 | -0,302 | 0,033 | 2,171 | -0,300 | 0,033 |
| 7,056 | 0,698 | 0,032 | 7,050 | 0,700 | 0,033 | 2,179 | -0,302 | 0,032 | 2,173 | -0,300 | 0,033 |
| 7,030 | 0,699 | 0,033 | 7,024 | 0,701 | 0,033 | 2,153 | -0,301 | 0,033 | 2,147 | -0,299 | 0,033 |
| 7,040 | 0,699 | 0,033 | 7,035 | 0,700 | 0,033 | 2,163 | -0,301 | 0,033 | 2,158 | -0,300 | 0,033 |
| 7,043 | 0,699 | 0,033 | 7,037 | 0,700 | 0,033 | 2,166 | -0,301 | 0,033 | 2,160 | -0,300 | 0,033 |
| 7,053 | 0,699 | 0,033 | 7,047 | 0,700 | 0,033 | 2,176 | -0,301 | 0,033 | 2,170 | -0,300 | 0,033 |
| 7,060 | 0,698 | 0,032 | 7,053 | 0,700 | 0,033 | 2,182 | -0,302 | 0,032 | 2,176 | -0,300 | 0,033 |
| 7,050 | 0,699 | 0,033 | 7,044 | 0,700 | 0,033 | 2,173 | -0,301 | 0,033 | 2,167 | -0,300 | 0,033 |
| 7,062 | 0,698 | 0,032 | 7,056 | 0,699 | 0,033 | 2,185 | -0,302 | 0,032 | 2,179 | -0,301 | 0,033 |
| 7,076 | 0,698 | 0,032 | 7,070 | 0,699 | 0,032 | 2,199 | -0,302 | 0,032 | 2,193 | -0,301 | 0,032 |
| 7,089 | 0,697 | 0,032 | 7,083 | 0,698 | 0,032 | 2,212 | -0,303 | 0,032 | 2,206 | -0,302 | 0,032 |
| 7,064 | 0,698 | 0,032 | 7,058 | 0,699 | 0,033 | 2,187 | -0,302 | 0,032 | 2,181 | -0,301 | 0,033 |
| 7,069 | 0,698 | 0,032 | 7,063 | 0,699 | 0,033 | 2,192 | -0,302 | 0,032 | 2,186 | -0,301 | 0,033 |
| 7,066 | 0,698 | 0,032 | 7,060 | 0,699 | 0,033 | 2,189 | -0,302 | 0,032 | 2,183 | -0,301 | 0,033 |
| 7,053 | 0,699 | 0,033 | 7,047 | 0,700 | 0,033 | 2,176 | -0,301 | 0,033 | 2,170 | -0,300 | 0,033 |
| 7,054 | 0,698 | 0,033 | 7,048 | 0,700 | 0,033 | 2,177 | -0,302 | 0,033 | 2,171 | -0,300 | 0,033 |
| 7,065 | 0,698 | 0,032 | 7,059 | 0,699 | 0,033 | 2,188 | -0,302 | 0,032 | 2,182 | -0,301 | 0,033 |
| 7,043 | 0,699 | 0,033 | 7,037 | 0,700 | 0,033 | 2,166 | -0,301 | 0,033 | 2,160 | -0,300 | 0,033 |
| 7,045 | 0,699 | 0,033 | 7,039 | 0,700 | 0,033 | 2,168 | -0,301 | 0,033 | 2,162 | -0,300 | 0,033 |
| 7,076 | 0,698 | 0,032 | 7,070 | 0,699 | 0,032 | 2,199 | -0,302 | 0,032 | 2,193 | -0,301 | 0,032 |

3.8. ábra. CAD árfolyamára a Black-Scholes és Heston-Nandi-féle eredmények összehasonlító táblázatának összehasonlítása. A kétféle módszer eredményei a call és put opciók árára, illetve külön-külön a kapott gammák, és delták.

4. fejezet

Stratonovich integrál

4.1. Stratonovich integrál

Próbáljuk meg a modellünket úgy vizsgálni, hogy az analízisében az Itô-integrál helyett a Stratonovich-féle integrált alkalmazzuk. Erre a megközelítésre jobban illeszkednek az elemi analízisbeli tulajdonságok, ezért érdemes megnézni, mit kapunk belőle. Először következzenek a kétféle megközelítés analízisbeli háttérének leírása.

Tekintsük a Langevin egyenletet:

$$\dot{X} = f(X) + g(X)\xi(t), \quad (4.1)$$

ahol f és g adott függvények, $\xi(t)$ Gauss fehér zaj (stacionárius Gauss folyamat, 0 várható értékkel, delta korrelációval). Átírhatjuk:

$$dX = f(X)dt + g(X)dW(t), \quad (4.2)$$

ahol $dW(t) = \xi(t)dt$, és $W(t)$ Wiener-folyamat. A különbség a kétféle interpretáció között X értékének megválasztásában van. Itô szerint X értéke az infinitézimális dt lépés kiindulási értéke, azaz $X = X(t)$, míg Stratonovich

szerint a lépés közepe: $X = X(t + dt/2) = X(t) + dX(t)/2$. Egy véletlen folyamat differenciálja: $dX(t) = X(t + dt) - X(t)$. Tehát a szorzatra:

$$d(XY) = ((X + dX)(Y + dY)) - XY, \quad (4.3)$$

azaz

$$d(XY) = XdY + YdX + dXdY. \quad (4.4)$$

Ezért a Stratonovich interpretáció szerint:

$$d(XY) = X_S dY + Y_S dX, \quad (4.5)$$

ahol $X_S(t) = X(t + dt/2) = X(t) + dX(t)/2$.

Itô interpretáció esetén:

$$d(XY) = X_I dY + Y_I dX + dXdY, \quad (4.6)$$

ahol $X_I(t) = X(t)$.

És most lássuk a legfőbb különbséget a kétféle interpretáció között! Legyen $h(X, t)$ egy tetszőleges függvény, ennek differenciáltja Itô szerint:

$$dh = \frac{\partial h(X, t)}{\partial X} dX + \left[\frac{\partial h(X, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} g^2(X, t) \frac{\partial^2 h(X, t)}{\partial X^2} \right] dt, \quad (4.7)$$

ez az Itô lemma. h differenciáltja Stratonovich értelemben:

$$dh = \frac{\partial h(X_S, t)}{\partial X_S} dX + \frac{\partial h(X_S, t)}{\partial t} dt, \quad (4.8)$$

ahol $\frac{\partial h(X_S, t)}{\partial X_S} = \frac{\partial h(X, t)}{\partial X} \Big|_{X=X_S}$, X_S pedig a fentebb definiált. Ez hasonlít ahhoz, amit várnánk, azaz az összetett függvény differenciálási szabályához.

4.2. Black-Scholes egyenlet Stratonovich integrállal

És most nézzük a Black-Scholes-Merton egyenletet. Írjuk a call opció árát most a következőképp:

$$C = \alpha_n X + \beta_n B, \quad (4.9)$$

ahol α_n a részvények számának és call-oknak az aránya, β_n pedig a kötvények per call-ok (ezek a részvényárfolyamatnak nem jósolható függvényei), B a kötvényárfolyamat, míg X a részvényár véletlen folyamata.

Tehát akkor nézzük a Black-Scholes egyenlet származását, először Itô esetben! A (4.9)-es egyenletből (4.6)-os alapján kapjuk:

$$\begin{aligned} dC = [\alpha_n(X, t) + d\alpha_n(X, t)]dX + [\beta_n(X, t) + d\beta_n(X, t)]dB + \\ + X(t)d\alpha_n(X, t) + B(t)d\beta_n(X, t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Mielőtt ezt tovább alakítjuk, nézzük meg α_n -et át tudjuk-e írni. Itô esetben a t előtti időpillanat számít, nem függ $X(t)$ -től, csak $X(t-dt) = X - dX$ -től. Tehát így írhatjuk fel: $\alpha_n(X, t) = \alpha(X - dX, t)$, és ugyanez elmondható β_n esetére is. Innen $\alpha_n(X, t) = \alpha(X, t) - \frac{\partial \alpha(X, t)}{\partial X} dX + O(dt)$. Az Itô lemmából viszont azt látjuk, hogy $\frac{\partial \alpha(X, t)}{\partial X} dX = d\alpha(X, t) + O(dt)$, így ebből a kettő egyenletből végül azt kapjuk, hogy

$$\alpha(X, t) = \alpha_n(X, t) + d\alpha_n(X, t) + O(dt), \quad (4.11)$$

és ugyanez fennáll $\beta(X, t)$ -re. Visszatérve dC -re, és felhasználva az előbbit (α felírását) is, kapjuk, hogy:

$$dC = \alpha dX + \beta dB + X d\alpha_n + B d\beta_n + O(dt^{\frac{3}{2}}). \quad (4.12)$$

Az önfinszírozás miatt teljesülnie kell, hogy:

$$Xd\alpha_n = -Bd\beta_n, \quad (4.13)$$

így

$$dC = \alpha dX + \beta dB. \quad (4.14)$$

Továbbá szintén (4.9)-ből:

$$\beta dB = r(C - \alpha X)dt + O(dt^{\frac{3}{2}}). \quad (4.15)$$

Ezért

$$dC = \alpha dX + r(C - \alpha X)dt + O(dt^{\frac{3}{2}}). \quad (4.16)$$

Az Itô lemmából, alkalmazva a részvényárfolyam dinamikáját (jelen esetben: $dX = X \left[\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t) \right]$) kapjuk, hogy:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial X} dX. \quad (4.17)$$

Ebbe (4.16)-ot helyettesítve:

$$\left(\alpha - \frac{\partial C}{\partial X} \right) dX = \left[\frac{\partial C}{\partial t} - r(C - \alpha X) + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \right] dt. \quad (4.18)$$

Legyen $\alpha = \frac{\partial C(x, t)}{\partial x}$, és akkor már csak ezt kell behelyettesíteni az előző egyenletbe, és kapjuk a Black-Scholes egyenletet:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC - rx \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{1}{2} (\sigma x)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (4.19)$$

Most pedig következék a Stratonovich interpretációhoz tartozó Black-Scholes egyenlet! Ekkor X teljesíti a következő sztochasztikus differenciál-egyenletet: $dX = \mu X_S dt + \sigma X_S dW(t)$. Mivel $X = X_S - dX/2$, így $\alpha(X, t) = \alpha(X_S - dX/2, t)$, ahonnan

$$\alpha(X, t) = \alpha(X_S, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(X_S, t)}{\partial X_S} dX + O(dX^2). \quad (4.20)$$

Hasonlóan $C(X, t) = C(X_S, t) + O(dX)$. Ezért

$$dC = \alpha(X_S, t)dX + \left[rC(X_S, t) - rX_S\alpha(X_S, t) - \frac{1}{2}\sigma^2 X_S^2 \frac{\partial \alpha(X_S, t)}{\partial X_S} \right] dt + O(dt^{\frac{3}{2}}). \quad (4.21)$$

Másrésről viszont (4.8)-as szerint:

$$dC = \frac{\partial C(X_S, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial C(X_S, t)}{\partial X_S} dX. \quad (4.22)$$

Ebből a két egyenletből kapjuk, hogy:

$$\left[\alpha(X_S, t) - \frac{\partial C(X_S, t)}{\partial X_S} \right] dX = \left[\frac{\partial C(X_S, t)}{\partial t} - rC(X_S, t) + rX_S\alpha(X_S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_S^2 \frac{\partial \alpha(X_S, t)}{\partial X_S} \right] dt. \quad (4.23)$$

Megint α előbbi választásával: $\alpha(X_S, t) = \frac{\partial C(X_S, t)}{\partial X_S}$, ugyanazt kapjuk, mint Itô esetében. Tehát a Stratonovich analízis is ugyanazt a formulát eredményezi, mint az Itô.

5. fejezet

Az opcióárazás, mint hullámmodell

5.1. A Schrödinger-egyenletek

Egy új megközelítése lehet az opció árazásának a hullám modellek alkalmazása, így a nemlineáris Schrödinger-egyenletek illesztése, ami alternatívát szolgáltat a Black-Scholes-Merton modellre. A modell formálisan úgy definiált, mint egy komplex értékű, nemlineáris Schrödinger-egyenlet, s részvényárral, σ volatilitással, r kamatlábbal. Legyen $\psi = \psi(s, t)$ az időfüggő opcióár-hullámfüggvény, mely abszolútértékének négyzete, $|\psi(s, t)|^2$ az opcióár valószínűség-sűrűség funkcionálja a részvényárra, és időre nézve. A nemlineáris Schrödinger-egyenlet a következőképp néz ki:

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\sigma\partial_{ss}\psi - \beta|\psi|^2\psi, \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (5.1)$$

A Landau-együttható, β mutatja a piaci potenciált, a legegyszerűbb esetben ez r -rel egyezik meg, egyébként pedig az állítható w_i paraméterektől függ. A $V(\psi) = -\beta|\psi|^2$ tag a ψ -függő potenciálmező. Tehát a ψ hullámfüggvény-

ben a térnek megfelelő paramétert a részvényár játsza.

Alacsony kamatláb esetén, azaz ha $r \ll 1$, akkor $\beta(r) \ll 1$, így $V(\psi) \rightarrow 0$. Ekkor (5.1)-et approximálhatjuk "kvantum-szerű opció hullámcsomaggal", kapcsolatban az egységnyi tömegű szabad kvantumrészecskével. Ez a lineáris hullámcsomag a lineáris Schrödinger-egyenlet megoldása:

$$i\sigma\partial_t\psi = \hat{H}\psi, \quad (5.2)$$

ahol $\hat{H} = -\frac{\sigma^2}{2}\partial_{ss}$, a Hamilton-operátor, és a volatilitás játsza a Planck-konstans szerepét. Ennek az általános megoldása a de Broglie-féle opciós síkhullámok lineáris kombinációja, ahol k a hullámok száma, $p = \sigma k$ lineáris momentum, $\lambda_k = 2\pi/k$ a hullámhossz, $\omega_k = \sigma k^2/2$ a szögfrekvencia, az oszcilláció periódusa pedig $T = 2\pi/\omega_k = 4\pi/\sigma k^2$. Ekkor az opciós hullámcsomag:

$$\psi_1(s, t) = \sum_{i=0}^n c_i A e^{i(ks - \omega_k t)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Itt A az amplitudó, és a ψ_k hullámfázisnak a szöge $(ks - \omega_k t)$. Ezt megmutatták (Ivancevic 2010), hogy sikeresen illeszthető a Black-Scholes call, és put opciós adatokra.

5.2. Schrödinger-egyenletek megoldása

Most tekintsük az általános esetet! Az (5.1)-nek létezik megoldása a Jacobi elliptikus funkcionál segítségével. A két legfontosabb megoldás ezen a megoldás sorozaton belül:

-A burok "sokk-hullám" megoldás (*envelope shock-wave, dark soliton*) :

$$\psi_2(s, t) = \pm \sqrt{\frac{-\sigma}{\beta}} \tanh(s - \sigma kt) e^{i[ks - \frac{1}{2}\sigma t(2+k^2)]}. \quad (5.4)$$

A "sokk-hullám" egy fajtája a gyorsan terjedő, nemlineáris diszturbanciának, energiát hordoz, és terjed a közegben. Úgy jellemezhető, mint egy hirtelen,

majdnem összefüggéstelen változás a közeg jellemzőjében. Ennek a hullámnak az energiája elég gyorsan eloszlik.

-A másik burok megoldás (*envelope solitary-wave, bright soliton*):

$$\psi_3(s, t) = \pm \sqrt{\frac{-\sigma}{\beta}} \operatorname{sech}(s - \sigma kt) e^{i[k_s - \frac{1}{2}\sigma t(k^2 - 1)]}. \quad (5.5)$$

Másrészt 2 új megoldást ad a nemlineáris Schrödinger-egyenletnek a Darboux transzformáció módszere. Ezeket a hullámokat úgy is hívjuk, hogy szeszélyes, hatalmas, gyilkos, szokatlan, extrém. Ezek a következők:

- 1. extrémhullám megoldás (*one-rogon solution*):

$$\psi_4(s, t) = \alpha \sqrt{\frac{\sigma}{2\beta}} \left\{ 1 - \frac{4(1 + \sigma\alpha^2 t)}{1 + 2\alpha^2(s - \sigma kt)^2 + \sigma^2\alpha^4 t^2} \right\} e^{i[k_s + \sigma/2(\alpha^2 - k^2)t]}, \quad (5.6)$$

ahol α és β a skála és alak paraméter, $\sigma\beta > 0$.

- 2. extrémhullám megoldás (*two-rogon solution*):

$$\psi_5(s, t) = \alpha \sqrt{\frac{\sigma}{2\beta}} \left\{ 1 + \frac{P(s, t) + iQ(s, t)}{R(s, t)} \right\} e^{i[k_s + \sigma/2(\alpha^2 - k^2)t]}, \quad (5.7)$$

ahol P, Q, R bizonyos polinomfüggvénye s -nek és t -nek, $\sigma\beta > 0$.

Ezekből a megoldásokból pedig megkapjuk lineáris kombinációval az általános hullám modellt az opcióárra:

$$\begin{aligned} \psi_{alt} = & A_1 \sum_{i=0}^n c_i A e^{i(k_s - \omega_k t)} \pm \\ & \pm A_2 \sqrt{\frac{-\sigma}{\beta}} \tanh(s - \sigma kt) e^{i[k_s - \frac{1}{2}\sigma t(2 + k^2)]} \pm \\ & \pm A_3 \sqrt{\frac{-\sigma}{\beta}} \operatorname{sech}(s - \sigma kt) e^{i[k_s - \frac{1}{2}\sigma t(k^2 - 1)]} + \\ & + A_4 \alpha \sqrt{\frac{\sigma}{2\beta}} \left\{ 1 + \frac{P(s, t) + iQ(s, t)}{R(s, t)} \right\} e^{i[k_s + \sigma/2(\alpha^2 - k^2)t]} + \\ & + A_5 \alpha \sqrt{\frac{\sigma}{2\beta}} \left\{ 1 + \frac{P(s, t) + iQ(s, t)}{R(s, t)} \right\} e^{i[k_s + \sigma/2(\alpha^2 - k^2)t]}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

ahol A_i a megfelelő amplitudó ($i = 1, \dots, 5$).

5.3. Alkalmazás

Most pedig be szeretnénk illeszteni a sztochasztikus volatilitást is a jelenlegi hullám modellünkbe. Így kapunk két nemlineáris Schrödinger-egyenletet, egyik az opcióár hullámfüggvény, $\psi = \psi(s, t)$, a másik pedig a volatilitás hullámfüggvény, $\sigma = \sigma(s, t)$. Ez a két Schrödinger-egyenlet összekapcsolódik, hiszen a σ paramétere az opcióár egyenletének, és ψ pedig paraméter a volatilitás egyenletében. Továbbá mindkét folyamat közös piaci hőpotenciálból fejlődik. Tehát az egyenleteink:

$$\text{volatilitás : } i\partial_t\sigma = -\frac{1}{2}\partial_{ss}\sigma - \beta(|\sigma|^2 + |\psi|^2)\sigma, \quad (5.9)$$

$$\text{opcióár : } i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\partial_{ss}\psi - \beta(|\sigma|^2 + |\psi|^2)\psi, \quad (5.10)$$

ahol $\beta(r, w) = r \sum_{i=0}^N w_i g_i$.

Irodalomjegyzék

- [1] Steven L. Heston, Saikat Nandi: *A closed-form GARCH option pricing model*, Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper (1997)
- [2] J. Perelló, J. M. Porrá, M. Montero, J. Masoliver: *Black-Scholes option pricing within Itô and Stratonovich conventions*, Elsevier (2008)
- [3] Vladimir G. Ivancevic: *New financial research program: General option-price wave modeling*, arXiv:1001.4151v1 (2010)
- [4] Frédéric D. R. Bonnet: *Option pricing using path integrals*, The University of Adelaide (2008)
- [5] Fischer Black, Myron Scholes: *The pricing of options and corporate liabilities*, The Journal of Political Economy (1973)
- [6] [http : //sites.google.com/site/cdmurray80/optiongreeks](http://sites.google.com/site/cdmurray80/optiongreeks)
- [7] [http : //en.wikipedia.org/wiki/Greeks\(finance\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Greeks(finance)) ¹
- [8] S. I. Melnyk, I. G. Tuluzov: *Quantum analog of the Black-Scholes formula (market of financial derivatives as a continuous weak measurement)*, Electronic Journal of Theoretical Physics (2008)

¹Az említett weboldalak a dolgozat írásakor, és leadásakor elérhetőek voltak.

- [9] M. W. M. Donders, A. C. F. Vorst: *Options and earnings announcements: an empirical study for the European Options Exchange*, Statistica Neerlandica (1996)
- [10] Jin-Chuan Duan: *The garch option pricing model*, Mathematical Finance (1995)
- [11] D. G. Hobson, L. C. G. Rogers: *Complete models with stochastic volatility*, Blackwell Publishing (1998)