

Diplomamunka
3-dimenziós VLSI huzalozási algoritmusok.

Írta: Kiss Attila

Alkalmazott Matematikus MSc szak,
Operációkutatás szakirány

Témavezető: Dr. Recski András
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar



Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
2. A huzalozási probléma	5
2.1. A probléma meghatározása	5
2.2. A megoldás fázisai	6
2.3. Áramkör partícionálása	7
2.4. Elhelyezés	8
2.5. Globális huzalozás	9
3. Részletes huzalozás	11
3.1. A Switchbox huzalozási feladat	12
3.2. Soros huzalozás	14
3.3. Switchbox huzalozás	16
3.4. Gamma huzalozás	18
4. Átmenet a 2-dimenzióból a 3-dimenzióba	20
5. A 3-dimenziós huzalozásról	22
5.1. A 3-dimenziós csatornahuzalozás	22
5.2. A 3-dimenziós gamma huzalozás	24
5.2.1. A kétszattú $3D\Gamma RP$ feladat	28
5.2.2. A megszorítás nélküli $3D\Gamma RP$ feladat	33
6. További lehetőségek	36

1. fejezet

Bevezető

A VLSI (*Very Large Scale Integrated*) áramkörök tervezése olyan gyakorlati területe a modern matematika alkalmazásának, amelyben a kombinatorikus optimalizálás módszereit igen széles körben alkalmazhatjuk. Rengeteg érdekes eredmény van ebből a témakörből az elmúlt évtizedekből, gondolhatunk akár csak egy adott huzalozás megvalósítására, akár egy feladat bonyolultságának vizsgálatára. Annak ellenére, hogy egyre több problémáról látják be ezen a területen, hogy NP-teljes, rengeteg heurisztikus megoldással rendelkezünk, melyek egész jó eredménnyel közelítik ezek megoldásait is.

Ez a diplomamunka egyfajta folytatásaként is tekinthető a korábbi, az alapképzés elvégzésekor megíródott szakdolgozatnak, melyet a 3-dimenziós VLSI huzalozás kombinatorikai problémáiról írtam. Ez a dolgozat a szintén a részletes huzalozásra helyezi a hangsúlyt, a tervezési folyamat egyik utolsó fázisára. A különbség a korábbi dolgozathoz képest az, hogy amíg a korábbi szakdolgozatom egy áttekintése volt az eddigi eredményeknek, illetve megmutatta, hogy egy speciális 3-dimenziós huzalozási feladatnak $3D\Gamma RP$ kellően nagy területen mindig létezik megoldása, addig ez a dolgozat megmutatja, hogy a feladat megoldható sokkal kisebb területen is, és ezt algoritmikusan bizonyítom, tehát egy eljárást is leírok, hogy hogyan is lehet megoldani az említett 3-dimenziós huzalozási feladatot.

Figyelembe kell vennünk, hogy egy elektromos eszköz részeinek megtervezése négy határ közé van szorítva egy négyzetes áramkörlapon. A részletes huzalozási problémában a feladatunk összekötni vezetékekkel ezeket az eszközök csúcsainak (vagy *termináljainak*) az egyértelműen meghatározott részhalmazait (vagy *netjeit*). A különböző netekhez tartozó vezetékek sosem kerülhetnek egy meghatározott távolságnál közelebb egymáshoz. Ebből kifolyólag a vezetékek gyakran egy kockarácsra illeszkednek. Mivel ez a rács nem egyetlen sík (ez ugyanis a legtöbb problémát megoldhatatlanná tenné), ezért több sík rétegből áll, amelyek párhuzamosak az áramkörlappal. A vezetékekkel bármely rácspontban tudunk váltani a szomszédos rétegek között. Gráfelméleti szempontból összefoglalva, a részletes huzalozási probléma pont-diszjunkt Steiner-fák (fák

megadott terminálpontokat tartalmazó halmazokkal) megkereséséből áll, egy 3-dimenziós kockarácson. A Steiner-fa keresés problémája precízebben le van írva a 4. Fejezetben.

A három dimenziós problémák közül, mint például a csatorna huzalozás általánosításaként tekinthető 3DCRP (*3-Dimensional Channel Routing Problem*), mi most szeretnénk egyet kiemelni, amit jelöljünk 3D Γ RP (*3-Dimensional Γ Routing Problem*) jelöléssel. Ezen diplomamunka célja a 3D Γ RP probléma bemutatása, annak általános esetben vett megoldhatatlanságáról, illetve egy speciális esetének egy kis méretű megoldásáról. A méret minimalizálása az elektronikában általában fontos szempont, mert ez általában teljesítménynövekedéssel, vagy valamilyen más pozitív hatással jár.

Hagyományosan a részletes huzalozást 2-dimenziós problémának tartották, mivel a rétegek száma sokkal kisebb volt a lap hosszához (*length*) és szélességéhez (*width*) képest. (Eredetileg a nyomtatott áramkörös technológia hőskorában csak két réteg volt: a lap két oldala. Később a rétegek száma fokozatosan kiterjedt 3-ra, 4-re. . .) Mivel a jelenlegi technológia egyre több réteget enged meg (6,8 vagy akár még több) egy „valódi” 3-dimenziós megközelítés vált indokolttá. Ezért rövid 2-dimenziós bevezetés után a 3-dimenziós huzalozás problémakörének kifejtését célozzuk meg, valamint az ezen területen elért saját eredmények is tárgyalásra kerülnek közben.

Az 5.1 Fejezetben a 3DCRP problémakörét tárgyaljuk. Bemutatunk két eredményt, amelyet Reiss Attila és Szeszlér Dávid cikke [26] segítségével ismertetünk.

Ezt követően az 5.2-es fejezetben a 3D Γ RP témakörére helyezzük a hangsúlyt. Ismertetünk benne egy negatív eredményt, amely megmutatja, hogy ha nem teszünk semmilyen korlátot a feladat méreteire, akkor kellően nagy méretű feladatokhoz találhatunk olyan 3D Γ RP problémát amelyhez nem létezik huzalozás. Majd az 5.2.1 Fejezetben ismertetünk egy algoritmust ami megoldja a 3D Γ RP problémának egy úgy nevezett "bipartite" esetét, abban az esetben, amennyiben a feladat méretei minden dimenzióban megegyeznek (tehát egy kocka két szomszédos lapján helyezkednek el a terminálok). Az algoritmus nehézségének vizsgálatához megemlíteném, hogy a helyességének bizonyításánál látni fogjuk, hogy részfeladatként egy k -reguláris páros gráfban kell k db éldiszjunkt teljes párosítást megtalálnunk.

Ezt követően az 5.2.2 Fejezetben az általános esetre is mutatunk egy megoldó algoritmust a kockán, melynek a magját az 5.2.1 Fejezetben ismertetett algoritmus képezi.

Végül a 6. Fejezetben megemlítünk pár problémát, amit esetleg érdemes megvizsgálni a jövőben, melyekre létezhet hasonlóan működő megoldó algoritmus.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni hálás köszönetemet a témavezetőmnek Dr. Recski Andrásnak, aki sok cikkel és segítséggel járult hozzá a diplomamunkám megvalósulásához, valamint köszönöm türelmét, amit a diplomamunka elkészülése közben mutatott. A mester képzésem két évében is bármikor fordulhattam hozzá bizalommal, mindig készséggel válaszolt a kérdéseimre miközben az algoritmusaimon dolgoztam, valamint mindig fordított időt bizonyításaim helyességének ellenőrzésére, valamint a diplomamunkám tartalmi és stilisztikai hibáinak a korrigálására. Valamint szeretném megköszönni Szeszlér Dávidnak is, hogy doktori disszertációjának [29] egy példányát megosztotta velem még amikor az alapképzéses szakdolgozatomat írtam, ezzel is segítve a munkámat, melyet a mester képzés idején folytattam. Az ő segítsége is elengedhetetlen volt ehhez a diplomamunkához. Valamint köszönettel tartozom még édesapámnak Kiss Istvánnak, aki lehetővé tette, hogy ez a diplomamunka zavartalanul megvalósulhasson, és mindig támogatott, hogy elkészüljön ez az írás. Valamint szeretném megköszönni a barátaimnak a sok támogatást, és az elgondolkodtató beszélgetéseket, amikkel újabb és újabb problémák megoldása felé terelték a gondolataimat.

2. fejezet

A huzalozási probléma

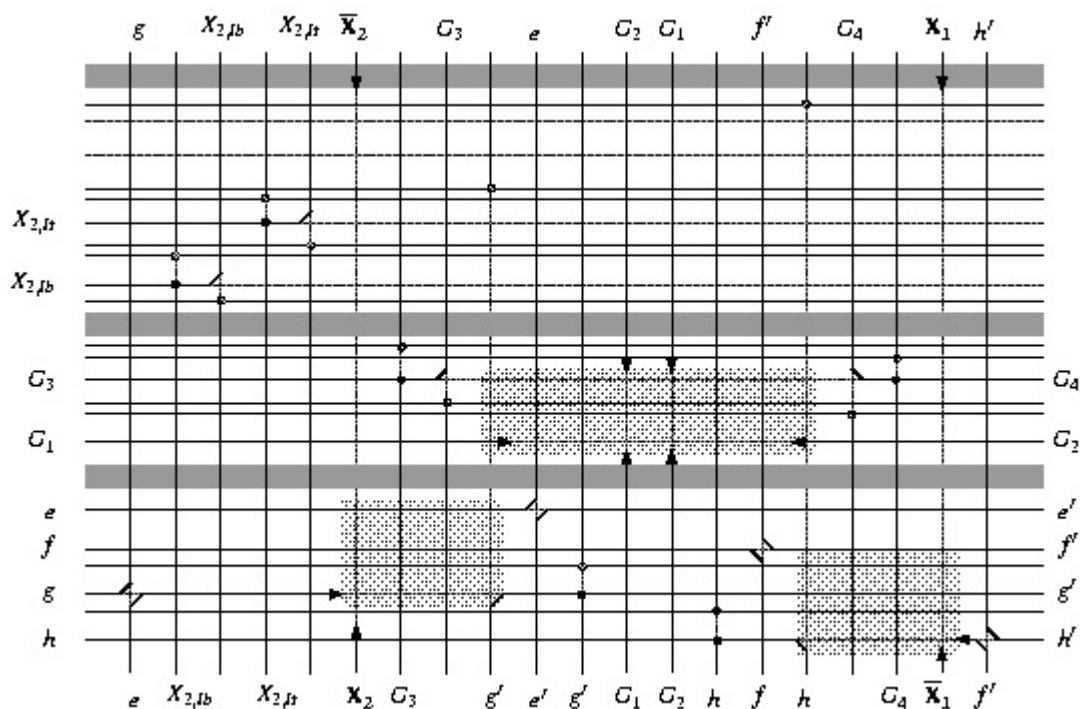
2.1. A probléma meghatározása

Amikor integrált áramköröket tervezünk rengeteg különböző részproblémát figyelembe kell venni, amelyek lényegesen különböző megközelítési módot és megoldási technikákat igényelnek. Éppen ezért ha teljes általánosságban próbálnánk meg definiálni a huzalozási problémát akkor elég nehéz feladatba fogunk, mivel még egy definíciónak is olyan technikainak kellene lennie, hogy használhatatlan lenne minden gyakorlati szempontból.

Mégis egy elég nyers megfogalmazása a problémának lehetne a következő: Adott áramköri elemek egy halmaza. Minden áramköri elemnek van pár terminálja (vagy csúcsa). Továbbá, a megtervezendő áramkör egy leírása is adott, ami nem más, mint egy a terminálok páronként pontdiszjunkt részhalmazait tartalmazó lista. Ezeket a részhalmazokat nevezzük neteknek. Az egyes netekhez tartozó terminálokat szeretnénk összekötni síkba ágyazott, vagy sokkal inkább néhány párhuzamos síkba ágyazott vezetékekkel. Ugyanakkor, a megvalósításkor a felhasznált technológia természetes követelményeit is figyelembe kell venni. A leglényegesebb követelmény ezek közül az, hogy valamekkora távolságot kell tartani két különböző vezeték között, hiszen ha túl közel futnának egymáshoz a vezetékek, akkor a rajtuk keresztül folyó áram hibás működést idézhetne elő. A legkönnyebb és legáltalánosabban használt módszer erre, hogy a vezetékeknek illeszkedniük kell egy adott kockarácsra.

Rengeteg költségfüggvény van amit minimalizálni kell (együttesen, vagy egy prioritási sort követve) a különböző részfeladatokban. A legfontosabb ezek közül a terület (*area*), ami a rácspontok száma egy rétegen. (Ismert tény, hogy a miniatürizálás fontos a számítógépes chipek tervezésében mert alaposan megváltoztatja a gép teljesítményét.) Egyéb költségfüggvények, mint a teljes huzalhossz, a leghosszabb huzalrész, vagy a rétegek közötti összeköttetésekre szol-

gáló huzalrészek (*via*) száma, szintén fontosak lehetnek. Természetesen, a fenti meghatározás csak egyfajta keretnek tekinthető. Sokféleképpen javítható, módosítható, ahogy a huzalozási problémának a különböző részfeladatait vizsgáljuk.



2.1. ábra. egy általános switchbox huzalozási feladat

(forrás: <http://www3.math.tu-berlin.de/coga/research/vlsi/>)

2.2. A megoldás fázisai

A gyakorlatban ha a huzalozási problémát a fent vázoltak szerinti általánosságban próbáljuk megfogalmazni akkor egy NP-nehéz feladatot kapunk. Ennek ellenér, vagy talán éppen ezért az integrált áramkörök tervezésének sokáig tartó kutatásának eredményeként kifejlesztettek egy széleskörűen elfogadott megoldási sémát amellyel a feladat mégis jól kezelhetővé vált. Ezt a sémát használva a probléma több kisebb fázisra lett bontható.

Az első az elhelyezési (*placement*) fázis, amikor a megtervezendő áramkör elemeit elhelyezzük a lapon. A globális huzalozási (*global routing*) fázisban a meghatározott eszközök összeköttetésére szolgáló vezetőkek útvonalát tervezük meg, de csak nagyjából próbáljuk meg ezeket meghatározni, a végleges

elhelyezkedésük a következő fázisban alakul ki. A vezetékek végleges helyzetét a részletes huzalozás (*detailed routing*) fázisában határozzuk meg. Mind a globális mind a részletes huzalozás fázisát követheti egy tömörítő (*compaction*) fázis, hogy csökkentjük a huzalozáshoz szükséges területet ami egy minimalizálható költségfüggvény lehet a huzalozási feladatnál, ahogyan azt már korábban megemlítettük.

Egy másik, széles körűen alkalmazott eljárás, hogy felbontjuk az áramkört több apró részre (mielőtt megkezdénénk a huzalozást, vagy egy fázison belül), és a részeket külön-külön vizsgáljuk. Erre több különböző úgy nevezett áramkör partícionáló (*circuit partitioning*) algoritmusok léteznek. (Ezekről egy rövid összefoglalót olvashatunk Frank M. Johannes cikkében [15])

A következő részekben egy rövid betekintést szeretnénk nyújtani különböző optimalizálási feladatokra, amelyek az eltérő huzalozási fázisok közben merülnek fel.

2.3. Áramkör partícionálása

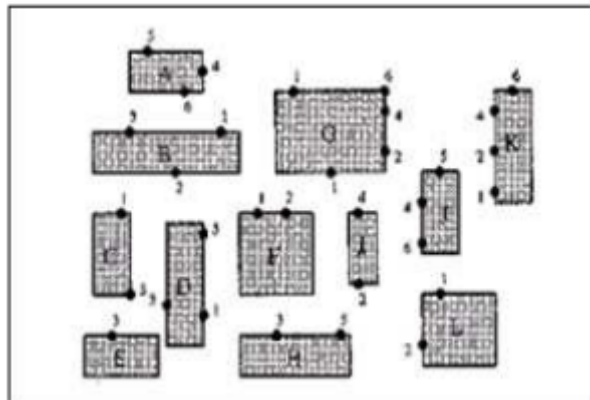
Nézzünk egy tipikus partícionálási feladatot. Adott egy hipergráf $H=(V, E)$, aminek a pontjain értelmezve van egy $w : V \mapsto \mathbf{N}$ súlyfüggvény, az élein pedig egy $c : E \mapsto \mathbf{N}$ költségfüggvény, a partíció osztályok (*partition class*) kívánt száma $r \in \mathbf{N}$, valamint a partíció osztályok minimális és maximális súlya $b(i) \in \mathbf{N}$ és $B(i) \in \mathbf{N}$, $i = 1, \dots, r$. A V halmaz egy $\bigcup_{i=1}^r V_i$ partícióját keressük, amelyre $b(i) \leq w(V_i) \leq B(i)$ teljesül minden $i = 1, \dots, r$ -re és minimalizálható az olyan hiperélek összköltsége, melyek több partíciót kötnek össze. (A probléma NP-nehéz, még akkor is ha r -et fixen $r = 2$ -nek választjuk, és csak gráfokra szorítkozunk hipergráfok helyett [5])

Ennek a problémának egy lehetséges alkalmazása (vagyis egy heurisztikus algoritmus, ami megoldja a feladatot) az, hogy felbontjuk az áramkört nagyon kis részekre, először ezeket kiosztjuk, majd ezeket összekombináljuk, hogy nagyobbakat nyerjünk hasonló eljárásokkal, stb. Rengeteg alkalmazás van arra az esetre ahol r kicsi (például $r = 2$) többek közt azért, hogy legyen eszközünk az elhelyezési fázishoz. Részletesebben egy partícionáló algoritmusról Cheng és Wei cikkében [6] olvashatunk

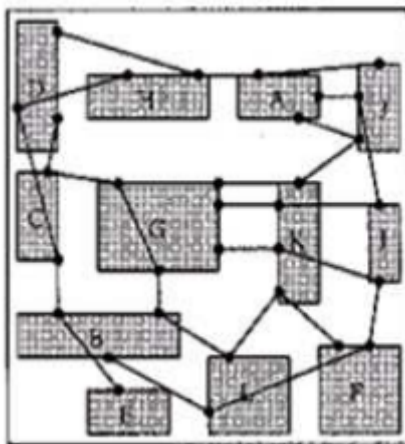
2.4. Elhelyezés

Az elhelyezési feladat definiálásának nehézségei abban rejlenek, hogy amikor elhelyezzük az áramkör elemeit a lapon, lényegében még semmit nem tudunk az őket összekötő huzalok útvjáról. Éppen ezért elég nehéz megfelelő optimalizációs kritériumot találni. Az egyetlen használható megközelítés, hogy hozzárendelünk egy költséget minden egyes elhelyezéshez, ami valószínűleg többé kevésbé jellemzi annak a helyigényét, és aztán minimalizálunk arra a költségfüggvényre.

Összhangban az előzőkkel, egy tipikus elhelyezési feladat a következő. Ismét adott egy hipergráf $H=(V, E)$, valamint $r, s \in \mathbf{N}$ egészek, amik az áramkör lapjának dimenzióit adják meg. Egy elhelyezésen (*placement*) egy $p : V \mapsto \{1, 2, \dots, r\} \times \{1, 2, \dots, s\}$ injektív függvényt értünk. Tetszőleges adott p elhelyezésnél, megfeleltetünk minden H -beli e élhez a legkisebb olyan téglalapnak a $c(e, p)$ félkerületét, amely tartalmazza az összes $p(v)$ -t minden e -hez tartozó v -re. Definiáljuk a p elhelyezés $c(p)$ költségét a következőképpen: $c(p) = \sum_{e \in E} c(e, p)$. Most már tudunk minimális költségű elhelyezést keresni. (Természetesen ez a probléma is NP-nehéz. [12]) Természetesen, a különböző alkalmazásoktól függően teljesen különböző költségfüggvények is előtérbe kerülhetnek. Egy elhelyezési feladatot megoldó algoritmus olvasható a [16] cikkben.



2.2. ábra. példa elhelyezési feladatra



2.3. ábra. az elhelyezési feladat megoldása

(forrás: Johar, Farhana és Shahrudin, Salleh cikke [16] 101. oldal)

Egy másik teljesen különböző típusa az elhelyezési problémának a parkettázás (*floorplanning*). Ez olyankor merül fel, amikor az áramkör blokkokra van osztva, amelyeket külön-külön kell huzalozni. Először ezeket a blokkokat szeretnénk elhelyezni az áramkörbe. Tegyük fel, hogy mindegyik blokk egy téglalap alakú területet foglal el. Ezután mindegyik blokkhoz rendeljük hozzá egy függvényt, ami egy felső korlát a téglalap hosszára, és a blokkot a téglalap szélességének egy függvényének értelmezzük. Úgy szeretnénk megválasztani a blokkok dimenzióit, és aztán elhelyezni őket a lapon, hogy a felhasznált terület minimális legyen.

2.5. Globális huzalozás

Ez a huzalozási fázis azoknál a technológiáknál hasznos, amelyeknél az áramkörlap könnyen felbontható kisebb részekre (például az elhelyezési fázisban). Ezekben az esetekben a globális huzalozás csak annyit határoz meg, hogy milyen irányba kell a huzaloknak manőverezni ezek között a részek között (például egy főleg vízszintes hosszabb huzalrész felfelé vagy lefelé kerüljön ki egy akadályt.) A végső útirányt a huzaloknál majd a részletes huzalozási fázisban határozzuk meg.

Egy tipikus globális huzalozási probléma formalizálásánál adott egy $G = (V, E)$ gráf, amelynek a pontjai az áramkör kisebb részeit reprezentálják, az élei pedig az ezen részek közötti összeköttetést. (Azaz G a síkbeli duálisa az áramkör kisebb részeit reprezentáló gráfnak; lásd[23]) Adott egy $c : E \mapsto \mathbf{R}_+$ kapacitásfüggvény, valamint egy $N \subseteq 2^V$ halmazrendszer a netekhez tartozó elemekből.

Úgy keresünk Steiner-fákat a netekhez, hogy minden e élre G -ből az e -t tartalmazó Steiner-fák száma nem éri el az e él $c(e)$ kapacitását. Sőt, általában az adott költségfüggvények minimalizálása is követelmény, de a részletekre most nem térnénk ki. (Az eldönthetősége a feladatnak azaz a minimalizálási előírások nélküli verziója szintén NP-teljes[19]) Az alkalmazásoknál az élkapacitásokat az alapján számítják, hogy hány huzal keresztezheti a következő területet.

3. fejezet

Részletes huzalozás

A részletes huzalozási fázisban az áramköri elemek már megkapták végleges helyüket a lapon, és az őket összekötő huzalok útját kell meghatározni. Mivel a szakdolgozatom ezzel a fázissal szeretne foglalkozni bővebben, ezért ezt a fázist részletesebben tárgyalnám.

Definíció 1: Tegyük fel, hogy adott egy G gráf (általában huzalozási gráfnak (*routing graph*) szokás nevezni). Egy net legyen a G gráf pontjainak egy halmaza (legalább kételemű). A részletes huzalozási feladat páronként diszjunkt netek egy $N = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$ családjá. Az N_i netek pontjait termináloknak nevezzük.

A huzalozási gráf egy 3-dimenziós kockarácsból nyerhető kisebb módosításokkal (például hagynak helyet az áramköri elemeknek vagy bármely rétegből elérhetőnek hagyják a terminálokat; részletesebben lásd a 3. definícióban)

Definíció 2: Egy $N = \{N_1, \dots, N_t\}$ huzalozási feladat megoldása (vagy huzalozása (*routing*), vagy kiosztása (*layout*)) a G huzalozási gráf páronként pontdiszjunkt összefüggő részgráfjainak $H = \{H_1, \dots, H_t\}$ halmaza, ahol $N_i \subset V(H_i)$ ha H_i összeköti N_i pontjait. A H_i részgráfokat huzaloknak hívjuk.

Ahogy már említettük, a huzalokat általában minimálisnak választják, ezért is a Steiner-fákkal jól lehet modellezni a feladatot. A fenti definícióval ellentétben, néhány esetben a huzaloktól csak az éldiszjunktságot követeljük meg.

A második definíció szerint, a részletes huzalozási feladat egy döntési feladat. Ennek ellenére, ahogy látni fogjuk a következő részekben, a különböző részfeladatai gyakran minimalizálási feladatként vannak megadva. Ezt úgy érik el, hogy a készülő G huzalozási gráfot egy paraméter függvényében keresik (például a rétegek számától, vagy a rácsban lévő sorok számától esetleg a huzalok összhosszától teszik függővé), és erre a paraméterre keresünk egy optimális értéket úgy, hogy a szóban forgó részletes huzalozási feladat megoldható legyen.

3.1. A Switchbox huzalozási feladat

Említettük, hogy a huzalozási gráf struktúrája sokkal bonyolultabb lehet egy 3-dimenziós rácsnál. Továbbá gyakorlati alkalmazásokban a huzalozási terület gyakran felbomlik kisebb részekre amelyeket egymás után kell huzalozni meghatározott sorrendben. Ezek a kisebb részek sokkal egyszerűbb struktúrák (gyakran úgy nevezett switchboxok). Ezzel az eljárással egy nagyon speciális esetre egyszerűsíthető a feladat, amikor a terminálok egy téglalap alakú terület határán helyezkednek el.

A következő definíciókat a már korábban említett, és az alábbi technikai követelmények figyelembe vételével alkották. Egy ilyen követelmény, hogy nincsenek terminálok a lap „sarkain”, és a huzalok sem használhatják azokat. A másik, hogy a huzalok hozzáférhetnek a terminálokhoz akármelyik rétegről. A k -rétegű kockarács gráf (k -layer rectangular grid graph) definíciója így szükségessé vált.

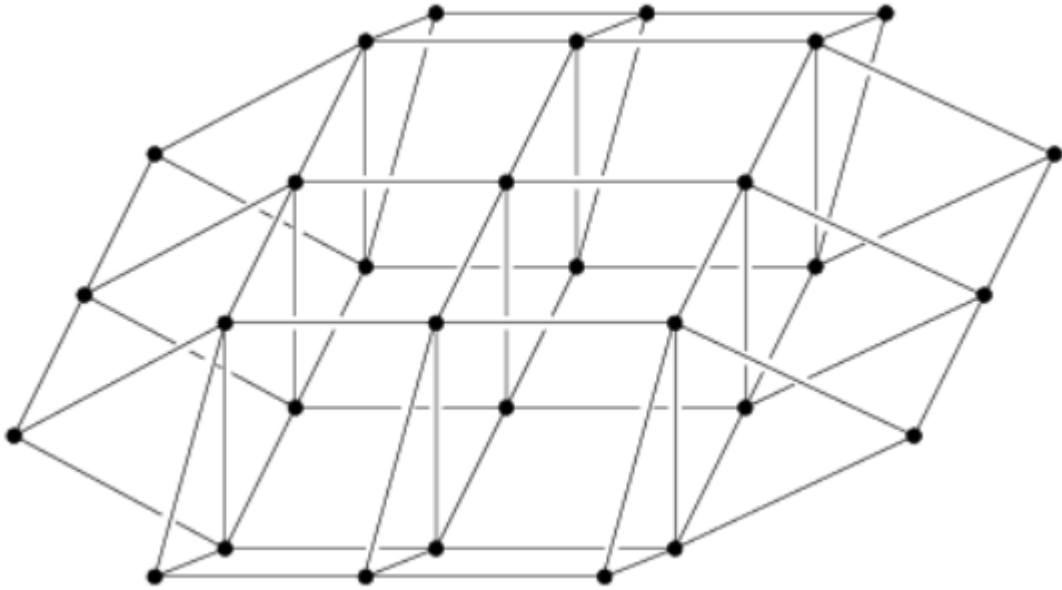
Definíció 3: Legyen a $\{0, \dots, n+1\} \times \{0, \dots, w+1\} \times \{1, \dots, k\}$ ponthalmaz pontjainak a halmaza egy gráf. Legyen két pont szomszédos akkor és csak akkor, ha pontosan egy koordinátában különböznek és pontosan eggyel. Töröljük a gráf „sarok” pontjait, azaz a $(0, 0, l)$, $(n+1, 0, l)$, $(0, w+1, l)$, és az $(n+1, w+1, l)$ pontokat, ahol $l = 1, \dots, k$. Aztán a maradék gráfban húzzuk össze az $\{(i, j, l) : l = 1, \dots, k\}$ részhalmaz pontjait egyetlen pontba, ahol

- $i = 0$ vagy $i = n+1$ és $j = 1, \dots, w$; vagy
- $j = 0$ vagy $j = w+1$ és $i = 1, \dots, n$.

Az így meghatározott G_k gráfot nevezzük k -rétegű kockarács gráfnak. w és n rendre a rács szélessége és hosszúsága. Jelöljük az összehúzott $\{(i, j, l) : l = 1, \dots, k\}$ halmaz pontjait $t_{i,j}$ -vel. A $t_{i,j}$ pontokat nevezzük termináloknak. A $t_{i,j}$ terminál lehet:

- északi, ha $j = w+1$;
- déli, ha $j = 0$;
- nyugati, ha $i = 0$;
- keleti, ha $i = n+1$.

Az összes közös z -koordinátájú nem-terminál pontok halmazát nevezzük rétegnek. Az összes közös x -koordinátával vagy y -koordinátával rendelkező pontot rendre oszlopnak illetve sornak nevezzük.



3.1. ábra. 2-rétegű négyzetrács $w = n = 3$ paraméterekkel

(forrás: Jordán Tibor, Recski András, Szeszlér Dávid: Rendszeroptimalizálás, Typotex Kiadó, Budapest, 2004, 141. oldal, 6.3 ábra)

Definíció 4: Egy switchbox huzalozási feladat speciális esete a részletes huzalozási feladatnak (lásd az 1. definíciónál) ahol a huzalozási gráf egy k -rétegű kockarács gráf (valamilyen k értékre) és minden egyes net részhalmaza a $t_{i,j}$ terminálok halmazának. (lásd a 3. definíciónál).

Sok megszorítása ismert a fent definiált problémának a szakirodalomban, amiket huzalozási modelleknek (*routing model*) nevezünk. Ha nincs semmi megszorítás megkövetelve a switchbox huzalozási feladat megoldásától, akkor azt megszorítás nélküli (*unconstrained*) modellnek nevezzük.

Definíció 5: Azt mondjuk, hogy egy switchbox huzalozási probléma egy megoldása a Manhattan model szerinti, ha a szomszédos rétegek különböző irányítású huzalrészeket tartalmaznak. Azaz a vízszintes (kelet-nyugati) és a függőleges (észak-déli) huzalrészt tartalmazó rétegek váltakoznak. (Az elnevezés onnan ered, hogy Manhattan utcái a Broadwaytől eltekintve lényegében derékszögű rácsot határoznak meg. Ráadásul az észak-déli irányú utakat *avenue*-nak, a kelet-nyugati irányúakat *street*-nek nevezik; ez pedig azzal analóg, hogy a Manhattan modellben a függőleges és vízszintes irányú huzalok más-más rétegre kerülnek.[18])

3.2. Soros huzalozás

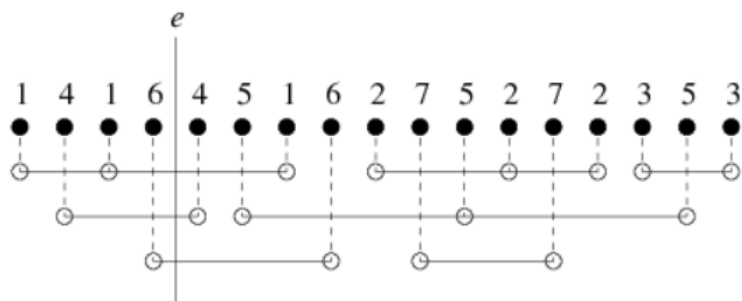
Soros huzalozási problémán (*single row routing problem*) a switchbox huzalozás egy olyan speciális esetét értjük, amikor minden egyes net összes terminálja mondjuk északi. Ebben az esetben a huzalozási feladat specifikációja csak a hosszúságot (n) rögzíti. Emellett általában a probléma felírása a rétegek számát is rögzíti, és a huzalozás minimális szélességét keressük.

A VLSI huzalozás első klasszikus eredménye feltehetően Gallai Tibor lineáris idejű algoritmus volt, ami a soros huzalozási problémát optimális szélességgel oldja meg a 2-rétegű Manhattan modellben. Minden függőleges e egyenesre, amely kettévágja a rácsot, definiáljuk a $c(e)$ terhelést (*congestion*): azaz az e által kettévágott netek számát (azaz az olyan netek száma, amelyeknek vannak termináljai e bal illetve jobb oldalán is). Például az e egyenes terhelése a 3.2 ábrán $c(e) = 3$. Az összes a rácsot ketté vágó függőleges egyenes maximális terhelését a feladat sűrűségének (*density*) nevezzük. A sűrűség egyébként egy alsó korlát bármely huzalozási feladat szélességére (részletesebben a 2-rétegű Manhattan modellben).

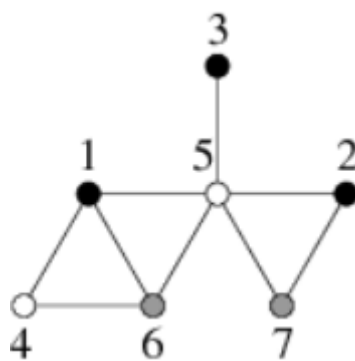
Tétel 1: [10] Egy soros huzalozási feladat megoldásának minimális szélessége a 2-rétegű Manhattan modellben megegyezik a feladat sűrűségével. Sőt egy ilyen minimális szélességű huzalozás lineáris időben megtalálható.

Bizonyítás: A bizonyítás kihasználja azt, hogy az intervallumgráfok perfekt gráfok. Egy vízszintes intervallumot feleltetünk meg minden egyes netnek, a leginkább balra lévő termináljától a leginkább jobbra lévőig. A hozzájuk tartozó intervallumgráfot a következőképpen definiáljuk: a pontthalmaz intervallumaihoz tartozó két pont akkor és csak akkor szomszédos ha a hozzájuk tartozó intervallumok metszik egymást. Ennek a gráfnak a klikkszáma megegyezik a huzalozási feladat sűrűségével. Az ugyanennyi színnel való színezhetőség az intervallumgráfok perfektségén múlik. Egy színezés könnyedén transzformálható át egy optimális szélességű huzalozássá: egy azonos színosztályhoz tartozó neteket meg lehet huzalozni ugyanazon sorban.

Egy példa látható a 3.2 és 3.3-as ábrákon. A 3.3-as ábra intervallumgráfja, ami a 3.2 ábra huzalozási feladatához tartozik, három színnel ki lett színezve; a huzalozási feladat megoldása, amit ebből a színezésből olvastunk ki a 3.2 ábrán látható. (A 3.2 ábra sötét pontjai felelnek meg a termináloknak és a közös számmal jelzett terminálok halmazai a netek. A két réteg huzalrészeit rendre folytonos illetve szaggatott vonalakkal jelöljük. Az üres pontok a két réteg közötti átvezetéseknek (*via*) felelnek meg. Hasonló jelöléseket használunk a későbbi fejezetek ábráinál is.)



3.2. ábra. példa terhelésre soros huzalozásnál



3.3. ábra. a fenti huzalozási feladathoz tartozó intervallum gráf

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a fent leírt huzalozás megvalósítható lineáris időben, csak le kell ellenőriznünk, hogy a hozzá tartozó intervallumgráf optimális színezése lineáris időben megtalálható, azaz $O(n)$ lépésben, ahol n az adott feladat hosszúságát jelöli. (A munka többi része konstans időt igényel minden egyes terminálhoz, ha a huzalrészek a végpontok koordinátáiból adódnak.) Tegyük fel, hogy az intervallumgráf, amit ki kell színezni, adott úgy, hogy egy rendezett L lista tartalmazza az intervallumok összes végpontjának a helyzetét. (Azaz mind a bal mind a jobb oldali végpontok egy közös L listában.) L -t triviálisan nyerhetjük a soros huzalozási feladat specifikációjából végigolvasva a terminálok sorát. Az intervallumgráf egy színezését úgy kapjuk, hogy végigolvassuk L elemeit. Pozitív egész számokkal jelöljük a színeket. Elkészítünk egy (C) listát a szabad színekből, valamint hozzáadjuk azt a legnagyobb M szint, ami már használva volt. Kezdetben $C = \emptyset$ és $M = 0$. Ha L végigolvasása közben elérjük egy I intervallum bal végpontját, és $C = \emptyset$, akkor vesszük az új $M + 1$ szint, hozzárendeljük I -hez, és megnöveljük M értékét $M + 1$ -re. Ha elérünk egy balvégpontot, és $C \neq \emptyset$ akkor kiválasztunk egy k szint C -ből, hozzárendeljük k -t I -hez, és töröljük k -t C -ből. Másrészről, ha elérjük az I intervallum egy jobb végpontját, akkor egyszerűen belerakjuk I színét C -be. Könnyű belátni, hogy az így kapott színezés optimális: azt a függőleges egyenest, amely átmegy annak az intervallumnak bal végpontján, amelyhez a legnagyobb M szint legelőször használtuk, M darab intervallum metszi, valamint az intervallumgráf klikkszáma szintén M . \square

Megjegyezzük, hogy a megszorítás nélküli 2-rétegű modellben nem ismert polinomiális idejű algoritmus, ami megoldja a soros huzalozási feladatot optimális szélességgel.

3.3. Switchbox huzalozás

Ebben a részben az általános switchbox huzalozási feladatra helyezzük a hangsúlyt, azaz amelyben a terminálok a rácsnak mind a négy oldalán helyezkednek el. (A szakirodalomban általában csak erre az általános esetre használják a switchbox huzalozás kifejezést.)

Ellentétben a soros illetve a csatornahuzalozással, itt mind az n hosszúság, mind a w szélesség fix, a probléma specifikációja miatt. Ezért a cél a szükséges rétegek számának minimalizálása. (Vagy eldönteni egy feladatról, hogy megoldható-e adott számú rétegen.)

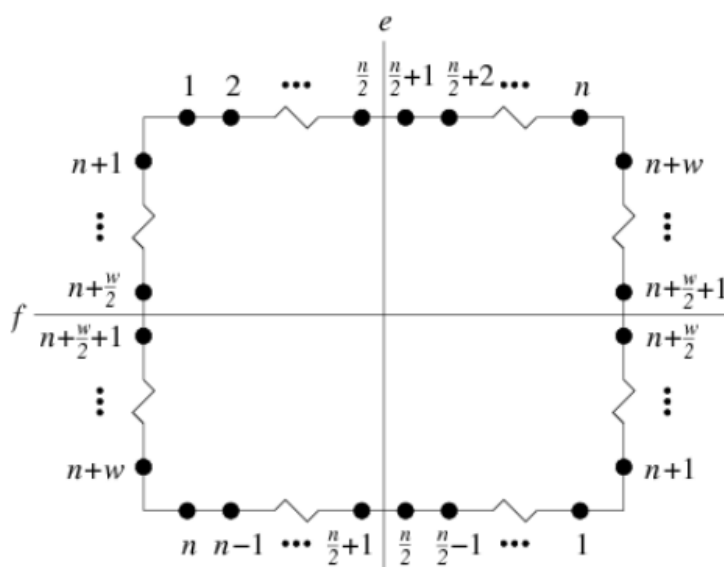
Mivel a switchbox huzalozás a csatornahuzalozás egy általánosítása, ezért a megoldhatósága a 2-rétegű Manhattan modellben NP-teljes, hiszen a csatornahuzalozásról ezt Szymanski megmutatta egy cikkében [31]. Itt is rengeteg heurisztika készült el jó teljesítménnyel, példákért lásd [7, 13, 17, 24].

Láttuk, hogy soros és csatornahuzalozás esetében két réteg bármilyen probléma

megoldásához elégséges volt (Ha megszorítottuk magunkat a Manhattan modelre, akkor a csatornahuzalozás esetében három rétegre volt szükségünk.) Ez sajnos nem igaz az általános switchbox huzalozási feladatra. Sőt, nincs fixen elégséges száma a rétegeknek, amit a következő tétel is mutat:

Tétel 2: [14] Minden pozitív egész k -ra létezik olyan switchbox huzalozási feladat, ami nem oldható meg k rétegen a megszorítás nélküli modellben.

Bizonyítás: Tekintsük a 3.8 ábra switchbox huzalozási feladatát. Az e egyenes terhelése $n + w$, azaz mind az $n + w$ netnek van terminálja az e két oldalán. Ebből következne, hogy ha létezne huzalozás k rétegen, akkor $n + w \leq kw$ mivel w sor van minden rétegen. Ebből kapjuk, hogy $\frac{n}{w} + 1 \leq k$. Az n és w paraméterek értéke választható úgy, hogy ez az egyenlőtlenség ne legyen igaz, ami igazolja a fenti tételt. \square



3.4. ábra. példa Hambrusch tételéhez

(forrás: [29], 31. oldal, 8. ábra)

Természetesen kellően nagy k -ra a gyakorlatban szinte mindig megoldható lesz a feladat, mivel alkalmazásokban általában nem szokott túl nagy különbség lenni w és n között. Másfelől az $m = \max \left[\frac{w}{n}, \frac{n}{w} \right]$ hányados segítségével elég jó becsléseket lehet adni, hogy mekkora rétegszámon lehet megoldani a feladatot. Erről részletesebben Szeszler Dávid munkájában olvashatunk [29]

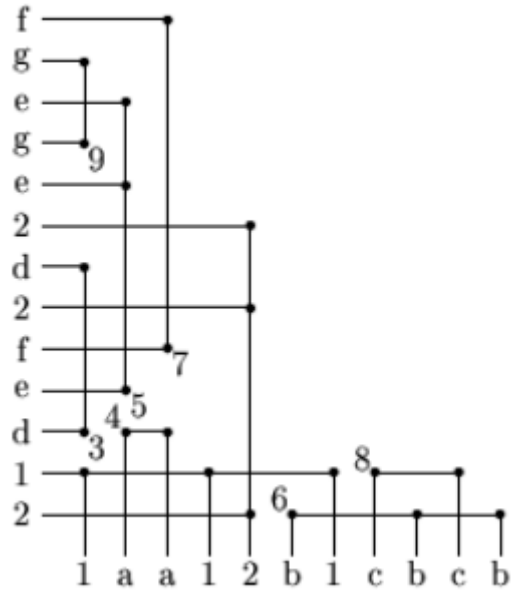
3.4. Gamma huzalozás

A switchbox huzalozási feladatnak azon speciális esetét, ahol minden egyes net termináljai a rács két szomszédos szélén helyezkednek el (mondjuk mind északi vagy nyugati) gamma huzalozásnak (*gamma routing*) nevezzük. A gamma huzalozási feladatban a cél ismét a szükséges rétegek számának minimalizálása (mivel mind az n hosszúság, mind a w szélesség fix)

Annak ellenére, hogy a gamma huzalozási feladat bonyolultsága nem ismert, lényegesen egyszerűbbnek tűnik az általános switchbox huzalozásnál és léteznek speciális esetei, amelyek köztudottan polinomiálisan megoldhatók. Például a következő megfigyelés triviális: ha minden egyes netnek legalább egy terminálja van mind az északi mind a nyugati oldalon, akkor az adott feladat megoldható a 2-rétegű Manhattan modelben.

A gamma huzalozási feladat teljesen megoldottnak tűnik, a 2-rétegű Manhattan modelben, ha minden egyes net csak két terminált tartalmaz: S. A. Wu és J. Jája [32] adott egy algoritmust, hogy egy adott probléma megoldható-e, és konstruál egy megoldást, ha ez lehetséges. Az algoritmusuk futásideje lineáris a netek számában, valamint minimális számú utat használ. Az algoritmus magja Gallai eljárásának (1. tétel) egy kiterjesztése.

Boros Endre, Recski András, Szkaliczki Tibor és Wettl Ferenc [4] megoldást adtak részben általánosabb feltételekre: megengedték, hogy minden egyes netnek egynél több terminálja legyen az északi vagy a nyugati oldalán (de nem mindkettőn). Másrészt a huzalozási modellt megszorították a 2-rétegű „*dogleg free*” Manhattan modellre, ahol a huzalozás egy *dogleg free* megoldása azt jelenti, hogy egy k terminálú net $k - 1$ utat használ. Adtak egy algoritmust, ami eldönti egy feladat megoldhatóságát, és ha lehet, konstruál rá egy megoldást. Az algoritmusuk futásideje $O(nwt)$, ahol n és w a lap hossza illetve szélessége, és t a netek száma. Az eljárásuk leegyszerűsítve, és kevésbé részletesen kifejtve a [30]-ben található.



3.5. ábra. példa Γ huzalozási feladatra 2 dimenzióban

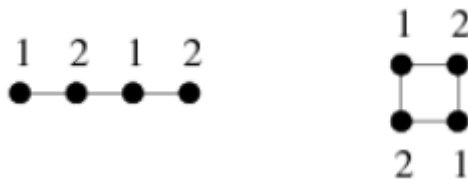
A Γ huzalozás egyfajta 3 dimenziós általánosításáról fog szólni a szakdolgozatom új eredménye. Éppen ezért térjünk át az úgy nevezett 3 dimenziós huzalozásra.

4. fejezet

Átmenet a 2-dimenzióból a 3-dimenzióba

A huzalozási technológiák gyors fejlődésének köszönhetően, a kutatások átfordultak a *valódi* 3-dimenziós problémák felé. Rengeteg mély eredmény van erről a területről, például [1, 2, 8, 9, 11, 20, 21, 22, 27, 28]. Legtöbbjük „univerzális-célú” („*universal-purpose*”) gráfokat használnak (*n-permuters*, *n-rearrangeable permutation networks*, *shuffle-exchange graphs*) 3-dimenziós rácsként, biztosítva azt, hogy a terminálpárok összeköthetők legyenek, sőt, néhány cikkben éldiszjunkt utakat is megengednek. Valamint ismert olyan eredmény is, ahol egyfajta automatizált huzalozási rendszer előállítása volt a motiváció [10]. Ebben a fejezetben többterminálos netek (*multiterminal nets*) is lesznek, és pontdiszjunkt utak (vagy Steiner-fák) biztosítják az összeköttetést az egyes netek termináljai között.

Az egyetlen aktív réteg (*single active layer*) huzalozási feladatban az összeköttetésre váró terminálok egy $n \times w$ méretű téglalap alakú síkrácson helyezkednek el, és a huzalozást egy h magasságú kocka rácson kell megvalósítani, a terminálokat tartalmazó eredeti rács fölött. Evidens, hogy a h magasságot szeretnénk optimalizálni. A ’függőleges irány’ kifejezést a h irányára fogjuk használni (azaz az $n \times w$ négyszögre merőleges irányra) és nem pedig w irányára. Az aktív réteg problémáról bővebben olvashatunk Szeszler Dávid munkájában [29]. Már egészen kis feladatoknál is mint a 4×1 , 2×2 is könnyen látható (lásd 4.2 ábra), hogy egy átlagos huzalozási feladat általában megoldhatatlan, anélkül hogy az n hosszúságot és a w szélességet ki ne terjesztenénk extra sorok és oszlopok bevezetésével. Ezek az extra sorok és oszlopok az eredeti rács sorai és oszlopai között kell hogy elhelyezkedjenek. Úgy látszik a huzalozási feladatok viselkedése nagyban függ attól, hogy az n és w dimenziók közül csak az egyiket, vagy mindkettőt kiterjesztjük egy konstans szorzó segítségével.



4.1. ábra. példa minimális, extra sorok nélkül megoldhatatlan feladatokra

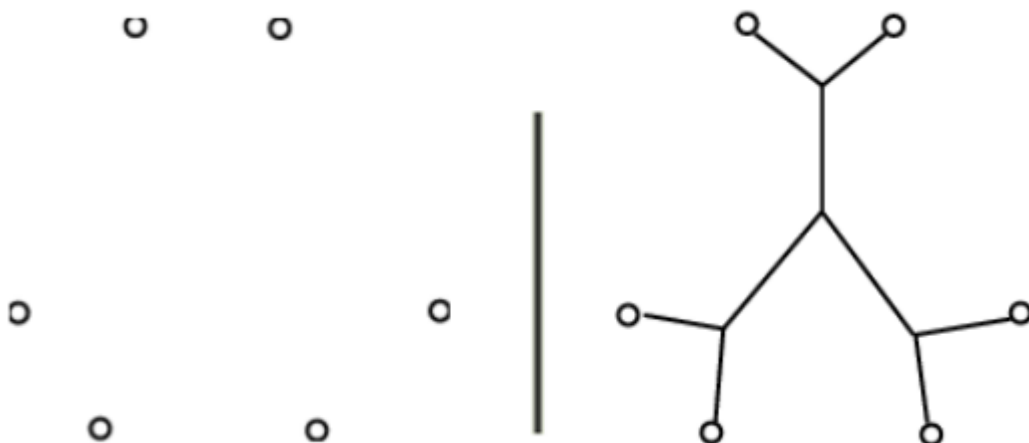
De még mielőtt áttérnénk a valódi 3-dimenziós feladatokra, leírnánk pontosabban, hogy mit jelent a Steiner-fa keresési feladat:

Definíció 6: A Steiner-fa feladat a minimális költségű feszítőfa keresésének általánosítása.

Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan, összefüggő gráf, és a terminál pontjainak egy T halmaza (V része), továbbá minden élhez hozzárendelünk egy költséget (például az azonosan 1-et). Keressünk egy minimális költségű fát, amely az összes T -beli pontot tartalmazza. $T = V$ esetén nyilván a minimális költségű feszítőfa feladatot kapjuk, egyébként pedig egy jóval nehezebb problémához jutunk, amelyben a T -beli pontokhoz további „köztes” pontokat (ún. Steiner-pontokat) hozzávéve csökkenthetjük a feszítőfa költségét.

A feladat általános esetben NP-teljes. Megoldására számos approximációs és heurisztikus algoritmust dolgoztak ki, továbbá néhány speciális változatára egzakt polinomiális módszerek is ismertek.

A probléma általánosítása a Steiner-hálózat feladat.



4.2. ábra. példa Steiner-fára

5. fejezet

A 3-dimenziós huzalozásról

5.1. A 3-dimenziós csatornahuzalozás

Képzeljünk el két párhuzamos $w \times n$ méretű síkrácsot. Meg szeretnénk huzalozni az összes netet a két réteg között egy kockarácson, a terminálok megtartásával. Ezt a feladatot fogjuk 3-dimenziós csatornahuzalozási feladatnak (vagy 3DCRP-nek az angol nyelvű rövidítésből) nevezni. Az elnevezés valószínűleg a 2-dimenziós csatorna huzalozási esetből származik, amikor a switchbox huzalozási feladat minden terminálja két szemközti, mondjuk az északi és a déli oldalon vannak. A megoldhatóság biztosítására meg szokták engedni, hogy bevezessünk egy extra sort/oszlopot minden két terminálokot tartalmazó sor/oszlop közé (mindkét rácson). Jegyezzük meg, hogy a huzalozást egy $2n \times 2w \times h$ méretű kockarácson kell megvalósítanunk. A célunk, hogy minimalizáljuk a h magasságot. Recski András és Szeszlér Dávid korábbi eredményét [25] általánosítva, Reiss Attila és Szeszlér Dávid megmutatta, hogy minden ilyen probléma megoldható polinomiális időben, $h = O(\max(n, w))$ magassággal. Ez a lineáris korlát a lehető legjobb (egy konstans szorzótól eltekintve.)

Az egyetlen aktív réteg huzalozási feladatról (SALRP) azt tartják, hogy a soros huzalozási feladat egyfajta 3-dimenziós analógiája. Itt a terminálok egy $w \times n$ méretű síkgráfon helyezkednek el, és a harmadik dimenzió (a rács fölött, h magasságban) csak összekötésekre szolgál. Több terminálos netek is megengedettek és minden egyes netben a terminálok összeköttetését pont-diszjunkt utakon kell megvalósítani (vagy Steiner-fákon). Könnyen látható még egy kis 2×2 -es vagy egy 4×1 -es példán is, hogy egy huzalozás általában lehetetlen (tetszőleges magassággal, lásd 4.1 ábra). Ezért megengedett, hogy a rács hosszúságát és szélességét megnöveljük $w' = sw$ -re és $n' = sn$ -re, ahol az s felosztás egy fix egész szám. Ezt úgy csináljuk, hogy bevezetünk $s - 1$ darab üres sort és

oszlopot minden két szomszédos terminálok tartalmazó sor és oszlop közé és az utolsó terminált tartalmazó sor valamint oszlop után. A már említett SALRP feladat eredményeiből, a következőt szeretnénk megemlíteni:

Tétel 3: [25] Ha $s \geq 2$ akkor tetszőleges SALRP megoldható $h = 6 \max(n, w)$ magasságban $O(t(w + n))$ időben, ahol t a netek számát jelöli.

Lemma 4: [26] Ha $s_w \geq 2$ és $s_n \geq 4$ akkor minden 3DCRP megoldható $h = 6 \max(n, w)$ magasságban, polinomiális időben.

Bizonyítás: A bizonyításhoz szeretnénk bevezetni a h -egyenes valamint a h -huzalrész fogalmát a következőképpen:

Definíció 7: nevezzük h -egyenesnek a rács egy h magassággal párhuzamos egyenesét (Hasonlóképpen definiálhatunk w - és n -egyeneseket is).

Definíció 8: A h -huzalrész kifejezést fogjuk használni egy huzalrészre, ami a rács egy h -egyeneséhez tartozik (analog módon definiálhatunk w - és n -huzalrészeket is).

Mozgassuk a felső rács termináljait y irányába 2 egységgel, és aztán vetítsük le ezeket a terminálok az alsó rácsra. Így egy SALRP feladatot kapunk $s_w, s_n \geq 2$ paraméterekkel, ami megoldható $h = 6 \max(n, w)$ magasságban, a 3. tétel szerint. Mivel minden egyes terminál fölötti h -egyeneset lefoglal egy-egy h -huzalrész (lásd bővebben [26]), ez a megoldás módosítható az előzőképpen, hogy az eredeti 3DCRP feladat egy megoldását adja. \square

Tétel 5: [26] Minden 3-dimenziós csatornahuzalozási feladat megoldható $h = 15 \max(n, w)$ magasságban ha $s_w = s_n = 2$.

Tétel 6: [26] Minden kétoldali 3-dimenziós csatornahuzalozási feladat megoldható $h = 3 \max(n, w)$ magasságban ha $s_w = s_n = 2$.

Az 5. tétel könnyen bizonyítható a 6. tételből a következőképpen: Ehhez azonban be kell vezetnünk a h -sík fogalmát is.

Definíció 9: Tegyük fel, hogy az (x, y, z) koordinátarendszerben dolgozunk. Használjuk a $z = h_0$ h -sík kifejezést az összes $z = h_0$ koordinátájú pontra (Ez a réteg egy keresztmetszete a kockarácsnak, mégpedig egy a magasságra merőleges metszet, aminek a méretei: $(s_w \cdot w) \times (s_n \cdot n)$.) Az n -sík és a w -sík kifejezéseket analog módon definiáljuk.

Összefoglalva a $z = 0$ h -sík az alsó rács, és a $z = h$ h -sík a felső rács.

Tegyük fel, hogy adott egy (általános) 3DCRP ($s_w = s_n = 2$ paraméterekkel). Ahhoz, hogy nyerjünk ehhez egy huzalozást, először megoldjuk a felső és az alsó rácsot, mint két különálló SALRP feladatot. Ezt megcsinálhatjuk $h_1 = 6 \max(n, w)$ magassággal mind a felső, mind az alsó rácsra a 3. tétel szerint. Most vegyük például az alsó rácsot, és válasszunk egy terminált minden

egyes netből (amelynek van terminálja a felső rácson is) tetszőlegesen. Mivel az SALRP megoldásában minden egyes egy terminált metsző h -egyenest használ egy h -vezeték rész, ezért minden egyes kiválasztott terminál összeköthető a hozzá tartozó ponttal a $h = h_1$ h -síkból anélkül, hogy elrontanánk az SALRP feladatunk megoldását. Ugyanezt az eljárást ismételve a felső rácstra, egy kétoldali 3DCRP feladatot nyerünk (amit meg kell huzalozni a két SALRP között), ami megoldható $h = 3 \max(n, w)$ magasságban a 6. tétel szerint.

Vegyük észre, hogy az adott 3DCRP feladatot ezáltal megoldottuk, és a felhasznált magasság $h = 2 \cdot 6 \max(n, w) + 3 \max(n, w) = 15 \max(n, w)$, és ezt akartuk bizonyítani.

A következő lemma pedig azt mutatja meg, hogy az 5. 6. tételek korlátja a lehető legjobb egy konstans szorzótól eltekintve.

Lemma 7: [25] Tetszőleges adott n -re létezik aktív réteg huzalozási feladat ami nem oldható meg $\frac{n}{2s_w}$ -nél kisebb h magasságon.

A kétoldali 3DCRP feladat bizonyítása részletesebben megtalálható a [26] cikkben.

5.2. A 3-dimenziós gamma huzalozás

Ebben a részben a 3-dimenziós Γ huzalozási feladattal (vagy röviden 3D Γ RP a probléma angol rövidítéséből) fogunk foglalkozni, és adunk néhány algoritmust, amellyel a probléma egy bizonyos megszorításnak eleget tevő modelljének egy igen kis méretű megoldását tudjuk előállítani.

A 2-dimenziós Γ huzalozási feladatot már megemlítettük a 3.4. fejezetben, és a 3D Γ RP feladatot, mint egyfajta 3-dimenziós analogonját szeretnénk ismertetni.

Tekintsünk két egymásra merőleges síkrácsot (legyenek ezek mondjuk déli és nyugati), és ezeknek a rácsoknak a pontjait nevezzük termináloknak. Ezeket a terminálokat szeretnénk összekötni pontdiszjunkt Steiner-fák segítségével. A kétosztatú (*bipartite*) 3D Γ RP feladatban minden netnek pontosan két terminálja van (egy a déli, egy a nyugati rácson). Az előző fejezet definícióit használjuk itt is a h -egyenest, h -huzalrész, h -sík kifejezésekre. Valamint vezessük be a következő definíciókat is:

Definíció 10: Tegyük fel, hogy az (x, y, z) koordinátarendszerben dolgozunk. Nevezzük a kockarács $z = 0$ w -síkjának és $y = i$ h -síkjának metszetében lévő terminálokat n_i terminálsornak. Az n_i terminálsor elemeire hivatkozunk $n_{i,j}$ ($j = 1..n$) jelöléssel. Nevezzük a kockarács $x = 0$ n -síkjának és $y = i$ h -síkjának metszetében lévő

terminálokat h_i termináloszlopoknak. Az h_i termináloszlop elemeire hivatkozunk $h_{i,j}$ ($j = 1..h$) jelöléssel.

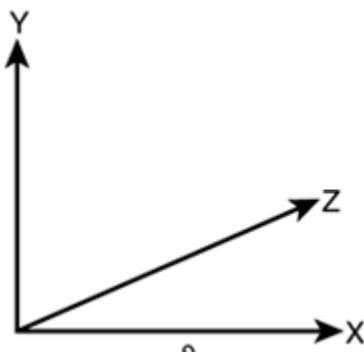
A $3D\Gamma RP$ feladatot három lépésben szeretnénk bemutatni. Először megmutatjuk, hogy teljes általánosságban nem oldható meg a $3D\Gamma RP$ feladat konstans felosztásokon, azaz ha tetszőleges konstans felosztást fixen kiválasztunk, akkor létezik olyan $3D\Gamma RP$ feladat, ami nem oldható meg ezekkel a felosztásokkal. Ez egy negatív eredmény, de ezután megmutatjuk, hogy ha viszont egy kocka két lapján helyezkednek el a terminálok, akkor a kétoldali $3D\Gamma RP$ feladat is valamint a megszorítás nélküli $3D\Gamma RP$ feladat is megoldható konstans felosztásokon, és ezekre algoritmust is mutatunk ami megoldja a feladatot.

Definíció 11: Jelöljük s_n -nel a déli sík n irányú felosztását. Azaz, azt a mennyiséget, amennyi üres oszlopot szúrunk be a déli síkra minden két, w -vel párhuzamos, terminált tartalmazó oszlop közé (valamint az 1. oszlop elé, illetve az n . oszlop után).

Hasonlóan definiáljuk s_h -t és s_w -t.

Továbbá a terminált tartalmazó oszlopokat és sorokat 1-től indexeljük. Tehát a déli sík origóhoz legközelebbi csúcsa $(1, 0, 1)$ és a nyugati sík origóhoz legközelebbi csúcsa $(0, 1, 1)$.

Definíció 12: Mostantól dolgozzunk az (x, y, z) koordináta-rendszerben, ahol x párhuzamos n -nel, y párhuzamos h -val, és z párhuzamos w -vel.



5.1. ábra.

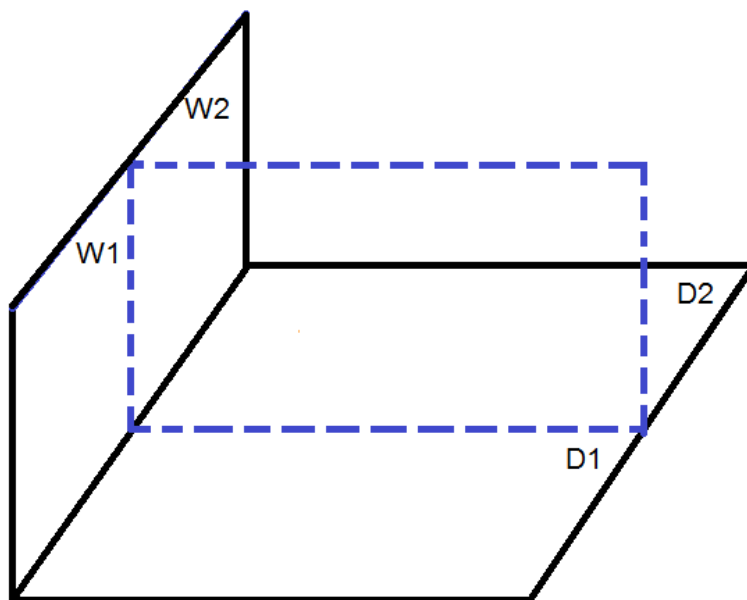
Definíció 13: Tekintsük a felosztás nélküli déli síkot. Ebben az $(i, 0, j)$ koordinátájú termináljára hivatkozunk az $s_{i,j}$ jelöléssel.

Hasonlóan a nyugati sík $(0, i, j)$ termináljaira vezessük be a $w_{i,j}$ jelölést.

Először is kitérnénk arra, hogy a 3D Γ RP feladatnak azért ezt a speciális esetét vizsgáltuk, amikor $n = h = w$, vagyis amikor a huzalozás két síkja egy kocka két szomszédos lapja, mert ahogyan azt mindjárt belátjuk, ha $n = w$ és h megválasztásaira semmilyen megkötést nem követelünk meg, akkor nem létezik mindhárom dimenzióban egy-egy univerzális konstans felosztás a terminálokat tartalmazó sorokra úgy, hogy tetszőleges feladat megoldható legyen. Nem konstans felosztásokra is létezik algoritmusunk, amely megoldja a feladatot úgy, hogy a három felosztásból kettőt konstansak, a harmadikat pedig w -től függően választjuk, de ez w kellően nagyra választása esetén túl nagyra növeli a megoldásunkat.

Állítás 8: Tetszőleges $s_n = c_1$, $s_h = c_2$, $s_w = c_3$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{Z}$ felosztásra léteznek n_0, w_0, h_0 konstansok, melyekre létezik 3D Γ RP feladat, amely nem megoldható a fenti felosztásokkal.

Bizonyítás: A bizonyításhoz vizsgáljuk meg a $z = \lfloor \frac{w}{2} \rfloor$ w -síkot (Jelöljük ezt ζ -val). Ez a sík két részre osztja a déli síkot (D_1 és D_2), valamint a nyugati síkot (W_1 és W_2). A teljesség megszorítása nélkül feltehetjük, hogy D_1 -nek nincs közös éle W_2 -vel (ellenkező esetben vegyünk hozzá még egy üres sort a déli és a nyugati síkokhoz).



5.2. ábra.

Tegyük fel továbbá, hogy $n \leq h$. (Ezt is mindig megtehetjük, hiszen a feladatot elforgatva ez mindig előállítható.)

Tekintsük azt a feladatot, melyben D_1 és D_2 minden terminálja páronként különböző netekhez tartoznak. Tegyük fel továbbá, hogy D_1 minden termináljának a netjéhez tartozik terminál W_2 -ből. Ugyanígy tegyük fel, hogy D_2 minden termináljának a netjéhez tartozik terminál W_1 -ből. Ekkor szükségképpen ζ -n biztosan át kell hogy menjen $n \cdot w$ pontdiszjunkt út. De mekkora is a ζ -n átvezethető pontdiszjunkt huzalok maximális száma?

$$T_\zeta = c_1 \cdot n \cdot c_2 \cdot h$$

Ebből a képletből látszik, hogy T_ζ nem függ w -től. Ebből következik, hogy w_0 -t kellően nagynak választva $h_0 \cdot w_0 > T_\zeta$, amiből pedig egyből következik, hogy az így megadott feladat nem oldható meg az adott felosztáson. \square

5.2.1. A kétosztatú 3DΓRP feladat

A kétosztatú feladat megoldása: A feladat megoldásában adunk egy algoritmust, ami tetszőleges kétosztatú feladatot megold a 3DΓRP huzalozási problémánál. Ezt úgy tesszük meg, hogy a déli síkot, mint egy $n * n$ -es S mátrixot tekintünk, ahol a terminálokat tartalmazó sorok és oszlopok a mátrix sorai és oszlopai. A mátrix első sora, a déli sík $x = 1$ koordinátájú pontokat tartalmazó sora. Ekkor megmutatjuk, hogy létezik huzalozás mellyel a nyugati sík termináljait a diagonálemek fölé egy a déli síkra merőleges oszlopba tudjuk rendezni úgy, hogy minden oszlopban olyan termináloknak megfelelő huzalrészek vannak, amelyeknek a déli síkbeli terminálpárja az i . oszlopban van, ha a huzalrész az $S_{i,i}$ fölötti oszlopban („diagonáloszlop”) van.

Először tehát a kockán egy speciális esetet, az úgy nevezett kétosztatú esetet oldjuk meg. A kétosztatú megszorítás egyfajta analógia a párosításokkal, ugyanis azt jelenti, hogy minden netnek pontosan egy terminálja van mind a déli, mind a nyugati síkokon. Ekkor a következő eredményt tudjuk kimondani:

Állítás 9: Legyen $n = h = w$. Ekkor minden kétoldali (*bipartite*) 3DΓRP megoldható $s_h = 1$, $s_n = 2$, $s_w = 3$ felosztáson.

Bizonyítás:

A bizonyításhoz először készítsünk el egy S mátrixot a következőképpen. $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ indexpárra jelöljük a $w_{i,j}$ terminálhoz tartozó netet $N_{i,j}$ -vel. Jelöljük a déli sík $N_{i,j}$ nethez tartozó terminálját $s_{i,j}^N$ -vel. Ezután $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ indexpárra $s_{i,j} := s_{i,j}^N(z)$, vagyis az S mátrix i . sorának j . oszlopában legyen a $w_{i,j}$ terminál netjéhez tartozó déli síkon lévő terminál z koordinátája. Ekkor a következő S mátrixot kapjuk:

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1}^N(z) & s_{1,2}^N(z) & \dots & s_{1,n}^N(z) \\ s_{2,1}^N(z) & \ddots & & s_{2,n}^N(z) \\ \vdots & & & \vdots \\ s_{n,1}^N(z) & s_{n,2}^N(z) & \dots & s_{n,n}^N(z) \end{pmatrix}$$

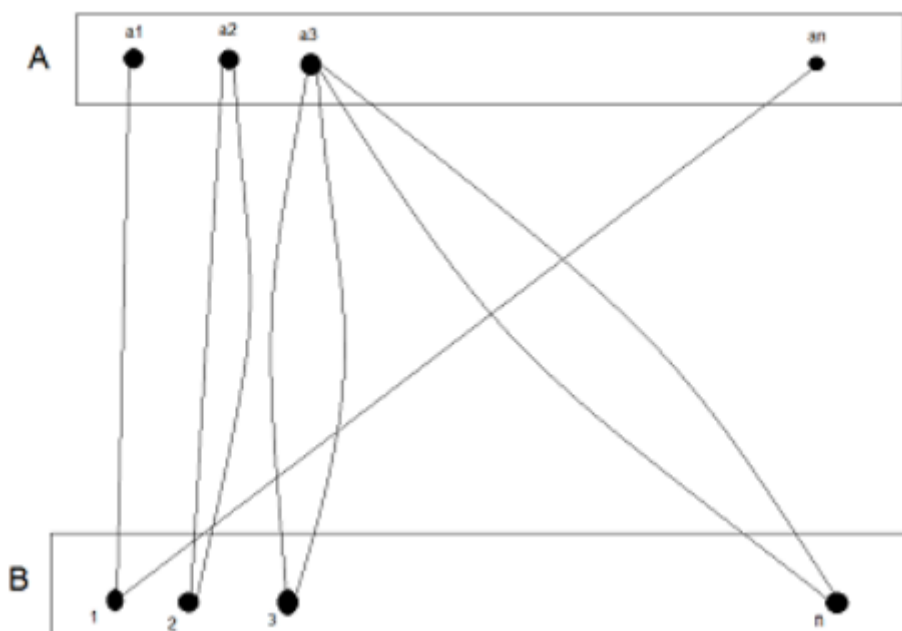
Ebből az S mátrixból szeretnénk elkészíteni a CT „koordináta-táblát” (ami szintén egy $n * n$ -es mátrix) a következőképpen. CT minden eleme egy három dimenziós vektor ahol $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ indexpárra $ct_{i,j} := (s_{i,j}^N, \pi_j(i), \varphi_j(i))$. Tehát az elemekben lévő vektorok második és harmadik koordinátája minden j oszlopban ($j = 1, 2, \dots, n$) legyen az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy „megfelelően választott” π_j illetve φ_j permutációja:

$$CT = \begin{pmatrix} (s_{1,1}^N(z), \pi_1(1), \varphi_1(1)) & \dots & (s_{1,n}^N(z), \pi_n(1), \varphi_n(1)) \\ (s_{2,1}^N(z), \pi_1(2), \varphi_1(2)) & \ddots & (s_{2,n}^N(z), \pi_n(2), \varphi_n(2)) \\ \vdots & & \vdots \\ (s_{n,1}^N(z), \pi_1(n), \varphi_1(n)) & \dots & (s_{n,n}^N(z), \pi_n(n), \varphi_n(n)) \end{pmatrix}$$

De mit jelent az, hogy megfelelően választott π_j illetve φ_j permutáció?
 Úgy szeretnénk választani ezeket a permutációkat, hogy ha vesszük azokat az elemeket CT -ben amelyeknek megegyezik az első koordinátája, akkor ezeknek a második koordinátája páronként különbözik.
 Ahhoz, hogy megmutassuk azt, hogy ilyen permutációk mindig léteznek lássuk be a következő lemmát:

Lemma 10: (Besorolási lemma) Adott n darab különböző elem. Mindegyik elemből van n darab (tehát összesen van $n * n$ db elemünk). Ekkor létezik D $n * n$ -es mátrix, amely minden oszlopára előre meg van adva, hogy melyik oszlopban melyik elemből hány darab van (az összes oszlopban együtt pontosan n darab van mindegyik elemből), és D minden sorában minden elemből pontosan 1 van.

Bizonyítás: Készítsünk el egy $G = (A, B; E)$ páros gráfot, melyre $|A| = |B| = n$ és $|E| = n * n$. Az A színosztály csúcsai $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} a_i$ feleljenek meg a D mátrix i . oszlopának. A B színosztály csúcsaira $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} b_i$ feleljenek meg az i elemnek. Ekkor minden i -re és j -re 1-től n -ig húzzunk be annyi élt a_i és b_j közé ahányszor b_j szerepel a_i oszlopában a D mátrixban.



5.3. ábra.

A feltételek átgondolása után világos, hogy egy n -reguláris páros gráfot kapunk, melynek a pontosztályai azonos méretűek, így amiben létezik n db páronként éldiszjunkt teljes párosítás. Egy ilyen teljes párosítást választva D sorainak egyszerű meggondolni, hogy a lemmában meghatározott mátrixot kapunk. \square

Alkalmazzuk ezt a lemmát a CT mátrixra. Az elemek első koordinátái pont a

fenti megkötések az oszlopokra, a második koordináták pedig azt jelölik, hogy az oszlopok elemeit melyik párosításban választottuk ki. Tehát a CT mátrix mindegyik oszlopában az $1, \dots, n$ elemek egy permutációját kapjuk, ráadásul úgy kapjuk meg ezt a permutációt, hogy minden olyan elemére CT -nek, melyeknek az első koordinátája megegyezik, a második koordinátája biztosan különböző lesz. Ezt az előző lemma bizonyításából láthatjuk, hiszen a második koordináták azt jelölik, hogy kit melyik párosításban választottunk ki, és minden párosításban mindegyik első koordináta pontosan egyszer szerepel (hiszen belőlük áll a páros gráf egyik színosztálya). Ez ahhoz kell majd, hogy amikor a nyugati sík termináljait fogjuk elvezetni, akkor a második x -szel párhuzamos huzalrész készítésénél minden olyan sor amelyik egy „diagonáloszlophoz” tartozik különböző h -síokban legyen, valamint minden w -síokban is minden sorban pontosan egy terminálhoz tartozó huzalrész legyen.

A harmadik koordinátákat pedig úgy adjuk meg, hogy oszloponként vizsgáljuk a CT mátrixot. Először a j . oszlopnak vesszük azon elemeit, melyeknek az első koordinátája egyedülálló az oszlopban (tehát nincs még egy elem az oszlopban, melynek ugyanaz az első koordinátája). Ezeknek az elemeknek a harmadik koordinátája legyen ugyanaz mint az első. Ezután nézzük azokat az elemeket az oszlopban melyek nem egyedül állók. Vegyük ezek közül a legkisebb sorindexű elemet ($ct_{i,j}$). Ennek szintén legyen a harmadik koordinátája ugyanaz mint az első. Vegyük az oszlopnak azt az elemét, melynek az első koordinátája megegyezik $ct_{i,j}$ -vel ($ct_{k,j}$). (Ha több ilyen is van, akkor ezek közül megint vegyük a legkisebb sorindexűt.) Mivel vannak nem egyedülálló elemek, ezért tudjuk, hogy van olyan eleme az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak, amely nem szerepel a j . oszlopban. Írjuk be ezt $ct_{k,j}$ harmadik koordinátájának. (Ha több ilyen elem is van, akkor tetszőlegesen válasszunk ki egyet.) Töltsük ki így a nem egyedülálló elemek harmadik koordinátáit is, azt szem előtt tartva, hogy a harmadik koordináták között nem lehet két azonos egy oszlopban.

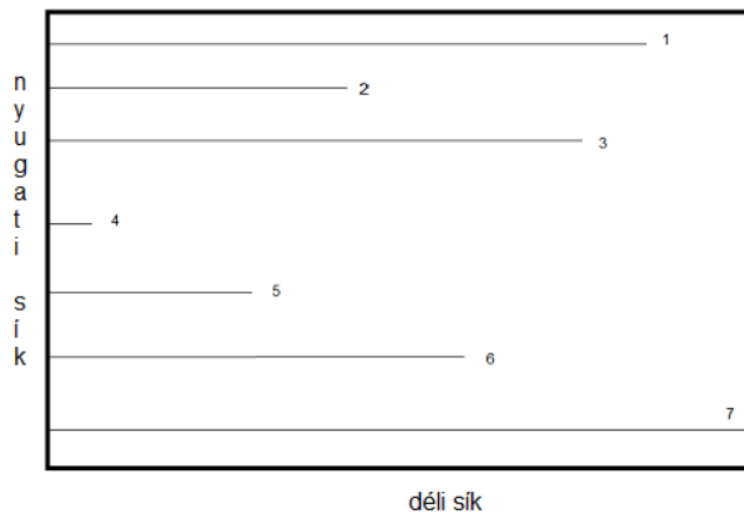
Vegyük észre, hogy mindig pontosan annyi elem nem szerepel egy oszlopban, hogy ki tudjuk választani a harmadik koordinátákat mind különbözőnek.

Megjegyzés: A harmadik koordináták fenti választása nem szükségszerű a megoldás létezéséhez. Ahhoz hogy megkapjunk egy megoldást elegendő csak egy tetszőleges permutációját venni az $1, \dots, n$ elemeknek a CT mátrix minden egyes oszlopában.

Ennek a CT koordináta táblának a segítségével már meg tudjuk valósítani a huzalozásunkat a fenti $s_h = 1, s_n = 2, s_w = 3$ felosztáson.

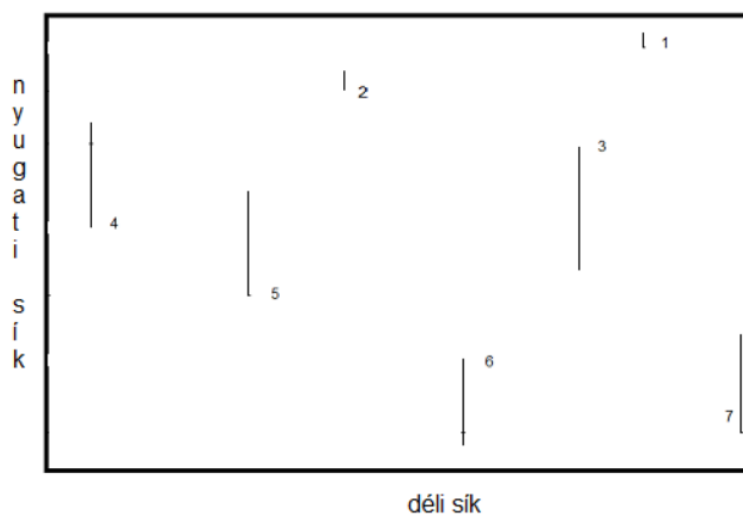
Ehhez tekintsük a nyugati sík egy terminálokat tartalmazó k oszlopát. Itt a legkisebb y koordinátájú terminál a 2. sorban van ($s_h = 1$ miatt). A bizonyítás folyamán a terminálokat azonosítsuk a felosztás nélküli koordinátáikkal. (Tehát a felosztott nyugati sík $(0, 2i, 4j)$ koordinátájú termináljára hivatkozunk $w_{i,j}$ -vel). A huzalozásunkat valósítsuk meg a következőképpen. A nyugati sík minden $w_{i,j}$ termináljából húzzunk egy huzalrészt w irányába minusz egy egységet. Utána húzzuk tovább ezeket a huzalrészeket n irányába minden huzalból pontosan $3 \cdot ct_{i,j}(3) - 2$ egységet. Vegyük észre, hogy ekkor minden a déli síkkal párhuzamos huzalrészeket tartalmazó w -síokban (ζ) nincs két olyan hu-

zalrész, melyek ζ -nak ugyanabban az oszlopában van a harmadik koordináták kiválasztási szabálya miatt. Például ekkor így nézhet ki egy tetszőleges ζ sík:



5.4. ábra.

Ezután minden huzalrészből húzzunk tovább -1 egységet w irányba. Ezután minden huzalrészből az y tengellyel párhuzamosan húzzunk tovább huzalt a $2 \cdot ct_{i,j}(2)$ magasságba. Vegyük észre, hogy ekkor minden az előző ζ $z = \zeta$ w -síkok mellett lévő $z = \zeta + 1$ w -síkokban (ζ') minden oszlopban pontosan 1 huzalrész van, és mindegyik huzalrész más y koordinátában végződik, az előző megfigyelés valamint a második koordináták kiválasztási szabálya miatt. Például ekkor így nézhet ki egy tetszőleges ζ' sík:



5.5. ábra.

Ezután minden huzalrészből húzzunk tovább 1 egységet a z tengellyel párhuzamosan negatív irányban. Ezután minden huzalrészből húzzunk tovább huzalt az x tengellyel párhuzamosan a $3 \cdot ct_{i,j}(1) - 1$ síkig. Vegyük észre, hogy ekkor minden olyan γ n -síkból amelyben végződik huzalrész, minden sorában pontosan 1 huzal végződik a második koordináták választási szabálya miatt.

Ezután minden huzalrészből húzzunk 1 egységet az y tengellyel párhuzamosan pozitív irányban. Onnan pedig a z tengellyel párhuzamosan húzzunk tovább minden huzalrészből huzalt a $z = 4 \cdot ct_{i,j}(1)$ w -síkgig. Ezután minden huzalrészből húzzunk tovább az y tengellyel párhuzamosan a déli sík irányába 1 egységnyi huzalt.

Ekkor „létrehoztunk” olyan oszlopokat az y tengellyel párhuzamosan, hogy a déli sík minden, terminált tartalmazó, x -szel párhuzamos k oszlopában pontosan 1 olyan pont van a kockarácsunkon, amely nem tartalmaz terminált, és a fölötte lévő y -nal párhuzamos oszlopban (l) huzalrész végződik. Sőt az is igaz, hogy pontosan annyi huzalrész végződik az l oszlopban ahány különböző nethez tartozó terminál van a k oszlopban. Valamint az is igaz, hogy ezek az l -ben lévő huzalrészek nemcsak hogy annyian vannak, de pontosan azokhoz a netekhez is tartoznak, amelyek a k -ban lévő különböző terminálokhoz tartoznak.

Ezután folytassuk a huzalozásunkat a déli sík termináljaival. Minden déli síkbeli terminálból húzzunk huzalrészt a z -tengellyel párhuzamosan 2 egységet negatív irányba. Utána húzzunk az y tengellyel párhuzamosan huzalt minden huzalrészről a következők szerint. Az $s_{i,j}^N$ terminálhoz tartozó huzalrészről húzzunk tovább huzalt $2 \cdot ct_{i,j}(2) + 1$ magasságig. Onnan z -vel 2 egységet, majd végül húzzunk még egy huzalrészt innen y -nal párhuzamosan -1 egységet. Ekkor az azonos nethez tartozó déli síkokhoz és nyugati síkokhoz tartozó huzalrészek végpontjai ugyanabban a w -síkból, valamint ugyanabban a h -síkból, tehát egy egyenesen vannak, és nincs az egyenest keresztező másik huzalrész, a nyugati valamint a déli sík termináljainak átvezetési szabályából adódóan. Tehát ezeket a végpontokat összeköthetjük, és ezzel megvalósítottunk egy jó huzalozást az adott bipartite feladatra. \square

5.2.2. A megszorítás nélküli 3D Γ RP feladat

Ezek után természetes igényként merülhet fel, hogy vajon általános esetben is megoldható e konstans felosztásokon a feladat egy kockán. Erre a kérdésre a válaszunk igenlő. Ennek megmutatásához először azonban ismét egy speciális esetet kell még megoldanunk.

Definíció 14: Jelölje az i . net déli síkhoz tartozó termináljainak a számát $c_s(N_i)$ -vel. Ezzel analóg módon definiáljunk a nyugati síkhoz tartozó terminálok számát is, amit jelöljünk $c_w(N_i)$ -vel.

Definíció 15: Nevezzünk egy 3D Γ RP feladatot féloldalinak (one-sided), ha $\forall i \in I, c_s(N_i) \leq c_w(N_i)$. Szimmetria okokból következik, hogy ez egy jó definíció, hiszen ha a fordított egyenlőtlenség lenne igaz minden i indexre, akkor a déli és nyugati síkok felcserélésével az első egyenlőtlenséget kapjuk.

Oldjuk meg tehát most a feladatot a kockán a féloldali feladatokra:

Állítás 11: Legyen $n = h = w$. Ekkor minden féloldali (one-sided) 3D Γ RP megoldható $s_h = 1, s_n = 4, s_w = 4$ felosztáson.

Bizonyítás: Mivel féloldali feladatról van szó, ezért könnyű átgondolni, egyszerű leszámplálási feladatként az alábbi lemma helyességét:

Lemma 12: A déli síkon a szabad rácspontok (vagyis amelyekhez nem tartozik terminál) száma legalább $\sum_{i=1}^n c_w(N_i) - c_s(N_i)$. Valamint egyenlőség áll fenn, amennyiben a nyugati sík minden rácspontja tartalmaz terminált.

Bizonyítás :

A féloldali 3D Γ RP feladat definíciója szerint minden i netre igaz a $c_w(N_i) \geq c_s(N_i)$ egyenlőtlenség. Jelölje a déli sík szabad termináljainak számát ft_s , a nyugati sík szabad termináljainak a számát ft_w . Vegyük észre, hogy $n = ft_w + \sum_{i=1}^n c_w(N_i) = ft_s + \sum_{i=1}^n c_s(N_i)$. Ezt átrendezve kapjuk a bizonyítandó állítást \square

Mivel a fenti lemma igaz, ezért gyártsunk a féloldali feladatunkból először egy kétoldalit a következők szerint. Minden netre a nyugati síkbeli termináljai és a déli síkbeli párjai között vegyünk egy maximális párosítást. Amennyiben $c_s(N_i) < c_w(N_i)$, akkor a pár nélkül maradt nyugati terminálokhoz rendeljünk hozzá a déli síkból szabad rácspontokat, amiket ezentúl hívjunk áltermináloknak. Ezt minden netre elvégezve már egy kétoldali feladatot kapunk, amire a korábban ismertett algoritmussal találhatunk egy megoldást $s_h = 1, s_n = 2, s_w = 3$ felosztáson is, nekünk pedig most ennél nagyobb felosztásunk van, amin analóg módon készíthetünk el egy megfelelő huzalozást. Az ál-kétoldali feladatban tehát ugyanazon koordináták jók lesznek mint az előző algoritmusban.

Tehát már megvan oldva egy "ál-kétoldali" feladat az álterminálok segítségével a korábban ismertett algoritmussal. De még össze kéne kötnünk a dia-

gonáloszlopok azonos netekhez tartozó elemeit. Ezért is volt szükségünk még néhány plusz felosztásra, amiket most fogunk kihasználni. A megoldó algoritmusunk tehát jelen esetben két fázisú:

1. I. fázis: Egy ál-kétoldali feladat megkonstruálása, és megoldása
(ez már kész)

2. II. fázis: A féloldali 3D Γ RP feladat megoldása a diagonáloszlopok összekötésével

Következzen tehát a II. fázis megoldása:

A terminálokra hivatkozunk most is a felosztás nélküli koordinátákkal, mint az előző algoritmusban (tehát a nyugati sík (0,4i,4j) termináljára hivatkozunk $w_{i,j}$ -vel). Valamint készítsük el a kétoldali algoritmus felhasználásakor legyártott CT koordináta tábla CT^* "kibővített koordináta tábláját". Amikor is a CT elemeiként szolgáló 3 dimenziós vektorokhoz hozzáfűzünk még két koordinátát, megemelve ezzel a dimenziójukat 5-re. CT^* elemeinek negyedik és ötödik koordinátája is egy permutáció lesz, amik létezéséről és jóságáról a besorolási lemma gondoskodik. A negyedik koordináta egy w irányú eltolási célt határoz meg, hogy azok a terminálok, melyeknek a céltermináljai azonos h -síokban vannak azok különböző w -síkokba kerüljenek az elmozgatásnál, az ötödik koordináta pedig egy n irányú eltolási célt határoz meg, hogy azok a terminálok, melyeknek a céltermináljai azonos h -síokban vannak azok különböző n -síkokba kerüljenek az elmozgatásnál. A módosított CT^* tábla tehát:

$$CT^* = ((s_{i,j}^N(z), \pi_j(i), \varphi_j(i), \sigma_j(i), \nu_j(i)))$$

A CT^* tábla plusz koordinátáinak a meghatározása ugyanúgy történik mint korábban tettük azt a besorolási lemma segítségével.

Nézzük tehát a II. fázis megoldását:

Vegyük először az $S_{1,1}$ fölötti diagonáloszlopot. Nézzük meg, hogy van e benne olyan nethez tartozó terminálnak a huzalrésze, amelyik netnek másik diagonáloszlopban is van huzalrésze. Amennyiben van, akkor vegyük ezek közül a legkisebb y koordinátáját és jelöljük őt t_α -val, valamint a vele egy nethez tartozó legkisebb x koordinátáját terminált valamelyik diagonáloszlopban jelöljük t_β -val (természetesen $t_\alpha \neq t_\beta$). Húzzunk belőle 3 egységnyi huzalt n irányába. Ezután -2 egységet w irányba, majd h irányba 1 egységet, aztán $ct_{t_\alpha}^*$ (4) koordinátára w irányban. Majd 1 egységet n irányban, és ezután $ct_{t_\alpha}^*$ (5) magasságra emeljük tovább a huzalt. Majd pedig húzzuk tovább n irányában a t_β -t tartalmazó n -síkgig. Ott engedjük lejjeb 1 egységgel h irányban, majd kössük hozzá a t_β -hoz tartozó huzalrészhez, mivel egy egyenesbe kerülnek, ahol rajtuk kívül nincs más nethez tartozó huzalrész. Ezt az átkötési eljárást végigcsinálva az összes diagonálelemre az algoritmus végén egy megoldását kapjuk a féloldali feladatnak. \square

Visszatérve a megszorítás nélküli feladathoz, ott már szinte készen is vagyunk. Hiszen az nyilvánvaló, hogy egy megszorítás nélküli feladat felbontható két féloldali részfeladatra (sőt, ha mondjuk a nyugati sík szempontjából féloldali részfeladatot kivesszük, akkor ami esetleg marad az egy szigorúan féloldali részfeladat a déli sík szempontjából, vagyis ahol szigorú egyenlőtlenség teljesül a féloldaliság definíciójában a déli sík netjeire nézve). Tehát már csak azt kell belátnunk, hogy két ilyen féloldali részfeladat "összefésülhető", és akkor készen is vagyunk. Tehát az összefésülés után igaz lesz a következő állítás:

Állítás 12: Legyen $n = h = w$. Ekkor minden $3D\Gamma RP$ megoldható $s_h = 4$, $s_n = 4$, $s_w = 9$ felosztáson.

Bizonyítás: Először kettévesszük a feladatot, egy féloldali feladatot kivesszünk a nyugati síkra, és egy szigorúan féloldalit a délire.

Ezután $s_h = 1$, $s_n = 4$, $s_w = 4$ felosztáson megoldjuk a nyugati síkra a féloldali feladatot.

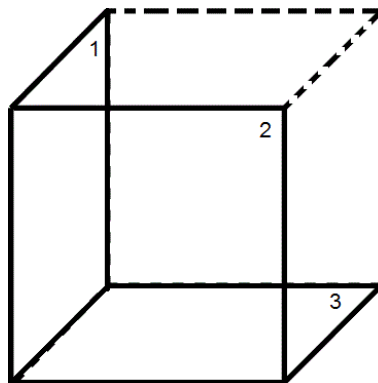
Aztán megoldjuk $s_h = 4$, $s_n = 4$, $s_w = 9$ felosztáson a déli síkra a szigorúan féloldali feladatot a fenti algoritmussal, annyi különbséggel, hogy a w irányú eltolásoknál 4-gyel nagyobb értékekkel toljuk el a huzalrészeket. Ezzel minden h -síkbán, n -síkbán, és w -síkbán a konstrukciónak és a besorolási lemmának köszönhetően csak olyan huzalrészek vannak, amelyek ugyanazon irányba mennek. Sőt, a h síkokban nincs két huzalrész amelyek ugyanazon n -egyenesbe vagy w -egyenesbe esnek, mint ahogy hasonló állítás mondható ki a n -síkok és w -síkok huzalrészeire is.

6. fejezet

További lehetőségek

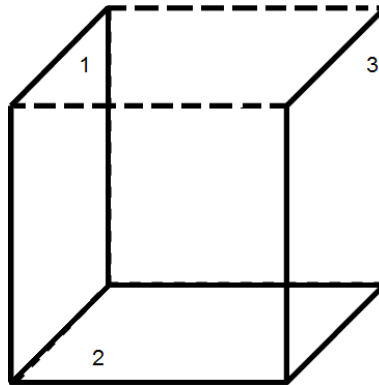
Természetes ötlet lehet a kockán való huzalozás továbbgondolása. A fent ismertetett algoritmusokból kiindulva további feladatok megoldásához találhatunk algoritmusokat. Ilyenek feladatok lehetnek a kockán:

1. Amikor egy kocka három lapján vannak terminálok, mégpedig úgy, hogy bármely két terminált tartalmazó lapnak pontosan kettő közös élük van. Ilyenkor ha létezik olyan lap, amelyen a feladat összes netjéből van legalább egy terminál, akkor a feladat gyorsan megoldható, és a megoldás alapja a fent ismertetett algoritmus.



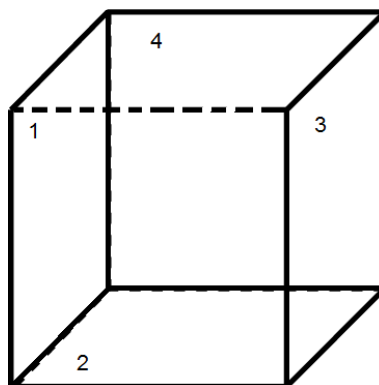
6.1. ábra.

2. Másik feladat amikor egy kocka három lapján vannak terminálok, és létezik két terminált tartalmazó lap, melyeknek nincs közös éle. Ilyenkor ha a harmadik lapon (tehát amelyiknek mindkét lappal van egy-egy közös éle) minden nethez tartozik legalább egy terminál, akkor is könnyen találunk megoldó algoritmust.



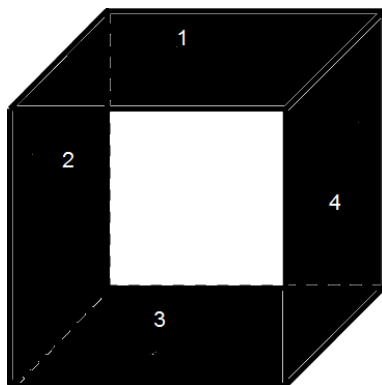
6.2. ábra.

3. Vagy például, ha egy kocka négy lapján tartalmaz terminálokat és két olyan lap létezik, amelyeknek nincs közös élük. Ekkor, ha a két "középső lapon" (vagyis azokon a lapokon, amelyeknek minden más terminált tartalmazó lappal van közös élük) az összes nethez tartozik legalább egy terminál, akkor is tudunk megoldó algoritmust találni.



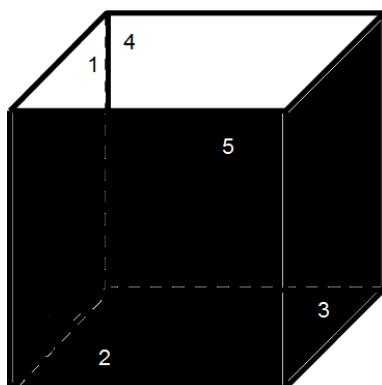
6.3. ábra.

4. Vagy például, ha egy kocka négy lapján tartalmaz terminálokat és két pár olyan lap létezik, hogy a lappároknak nincs közös élük. Akkor, ha létezik két lap, hogy az összes nethez tartozik legalább egy terminál a két lapon közösen, akkor is tudunk megoldó algoritmust találni.



6.4. ábra.

5. Vagy például, ha egy kocka öt lapján tartalmaz terminálokat. Akkor, ha a terminált nem tartalmazó lappal nem szomszédos lapon az összes nethez tartozik legalább egy terminál, akkor is tudunk megoldó algoritmust találni.



6.5. ábra.

Ábrák jegyzéke

2.1.	példa általános huzalozási feladatra	6
2.2.	példa elhelyezési feladatra	8
2.3.	az elhelyezési feladat megoldása	9
3.1.	kockarács $w=n=3$ paraméterekkel	13
3.2.	példa terhelésre soros huzalozásnál	15
3.3.	soros huzalozáshoz tartozó intervallumgráf	15
3.4.	ábra Hambrusch tételéhez	17
3.5.	példa Γ huzalozásra	19
4.1.	példák a megnövelés szükségességére	21
4.2.	példa Steiner-fára	21
5.1.	koordináta rendszer	25
5.2.	példa az általános $3D\Gamma RP$ feladat megoldhatatlanságára	26
5.3.	a besorolási lemma páros gráffal ábrázolva	29
5.4.	huzalrészek egy adott w -síkban	31
5.5.	huzalrészek egy adott w -síkban 2	31
6.1.	Lehetséges elméleti kutatási terület 1.	36
6.2.	Lehetséges elméleti kutatási terület 2.	37
6.3.	Lehetséges elméleti kutatási terület 3.	37
6.4.	Lehetséges elméleti kutatási terület 4.	38
6.5.	Lehetséges elméleti kutatási terület 5.	38

Irodalomjegyzék

- [1] Aggarwal, A., M. Klawe, D. Lichtenstein, N. Linial és A. Widgerson: A lower bound on the area of permutation layouts, *Algorithmica*, 1991 **6** 241-255.
- [2] Aggarwal, A., J. Kleinberg és D. P. Williamson: Node-disjoint paths on the mesh and a new trade-off in VLSI layout, *SIAM J. Computing*, 2000 **29** 1321-1333.
- [3] Baker, S. B., S. N. Bhatt és F. T. Leighton: An approximation algorithm for Manhattan routing, *Advances in Computing Research, Volume 2: VLSI Theory* (F. P. Preparata, ed.), JAI Press, Reading, MA, 1984 205-229.
- [4] Boros Endre, Recski András, Szkaliczki Tibor és Wettl Ferenc: Polynomial time Manhattan routing without doglegs – a generalization of Gallai’s algorithm, *Computers and Artificial Intelligence*, 1999 **18** (4) 403-413.
- [5] Bui, T. N., S. Chauduri, F. T. Leighton és M. Sipser: Graph bisection algorithms with good average case behaviour, *Combinatorica*, 1987 **7** (2) 171-191.
- [6] Cheng, C.-K. és Wei, Y.-C.A.: An improved two-way partitioning algorithm with stable performance, *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 1991, **10** (12) 1502-1511.
- [7] Cohoon, J. P. és P. L. Heck: BEAVER, a computational-geometry-based tool for switchbox routing, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst.*, 1988 **7** (6) 684-697.
- [8] Cutler, M. és Y. Shiloach: Permutation layout, *Networks*, 1978 **8** 253-278.
- [9] Enbody, R. J., G. Lynn és K. H. Tan: Routing the 3-D chip, *Proc. 28th ACM/IEEE Design Automation Conf.*, 1991 132-137.
- [10] Ergin, E., D. R. Kaeli, S. Strickland és P. Zavracky: VLSI design in the 3rd dimension, *Integration, the VLSI Journal*, 1998 **25** (1) 1-16.
- [11] Gallai Tibor: Az ő nem publikált eredményei Hajnal András és Surányi János: Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen című művükben jelent meg, *Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 1958 **1** 115-123.

- [12] Games, R. A.: Optimal book embeddings of the FFT, Benes, and barrel shifter networks, *Algorithmica*, 1986 **1** 233-250.
- [13] Garey, M. R. és D. S. Johnson: *Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1979
- [14] Hamachi, G. T. és J. K. Ousterhout: A switchbox router with obstacle avoidance, *DAC '84: Proc. 21st Conf. on Design Automation*, 1984 173-179.
- [15] Hambruch, S. E.: Channel routing in overlap models, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst.*, 1985 **CAD-4** 23-30.
- [16] Johannes, Frank M.: Partitioning of VLSI circuits and Systems, *33rd Design Automation Conference*, 1996
- [17] Johar, Farhana és Shaharuddin, Salleh: Placement and routing in VLSI design problem using single row routing technique, *Matematika*, 2007, **23** (2) 99-120.
- [18] Joobbani, R. és D. P. Siewiorek: WEAVER, a knowledge-based routing expert, *DAC '85: Proc. 22nd ACM/IEEE Conf. on Design Automation*, 1985 266-272.
- [19] Jordán Tibor, Recski András és Szeszlér Dávid: *Rendszeroptimalizálás*, Typotex, 2004 140.
- [20] Kramer, M. R. és J. van Leeuwen: The complexity of wire routing and finding minimum area layouts for arbitrary VLSI circuits, *Advances in Computing Research, Volume 2: VLSI Theory* (F. P. Preparata, ed.), JAI Press, Reading, MA, 1984 129-146.
- [21] Leighton, T.: *Complexity issues in VLSI: Optimal layouts for the shuffle-exchange graph and other networks*, The MIT Press, Cambridge, MA., 1983
- [22] Leighton, T., S. Rao és A. Srinivasan: New algorithmic aspects of the Local Lemma with applications to routing and partitioning, *Proc. 10th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms ACM/SIAM, New York and Philadelphia*, 1999 643-650.
- [23] Leighton, T. és A. L. Rosenberg: Three-dimensional circuit layouts, *SIAM J. Computing*, 1986 **15** 793-813.
- [24] Lengauer, T.: *Combinatorial algorithms for integrated circuit layout*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 1990
- [25] Luk, W. K.: A greedy switchbox router, *Integration, the VLSI Journal*, 1985 **3** 129-149.
- [26] Recski András és Szeszlér Dávid: Routing vertex disjoint Steiner-trees in a cubic grid - an application in VLSI, *Discrete Applied Math*, 2007 **155** 44-52.

- [27] Reiss Attila, Szeszlér Dávid: 3-dimensional Channel Routing, *Proc. 4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, 2005,
- [28] Rosenberg, A. L.: Three-dimensional VLSI: a case study, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1983, **30** 397-416.
- [29] Shirakawa, I.: Some comments on permutation layout, *Networks*, 1980, **10** 179-182.
- [30] Szeszlér Dávid: *Combinatorial algorithms in VLSI routing* Ph.D. Dissertation, BME, 2005,
- [31] Szkaliczki Tibor: *Polynomial Algorithms in VLSI Routing*, Ph.D. Dissertation, BME, 1996,
- [32] Szymanski, T. G.: Dogleg channel routing is NP-complete, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst.*, 1985, **CAD-4** 31-41.
- [33] Wu, S. A. és J. Jájá: Optimal algorithms for adjacent side routing, *Algorithmica*, 1991, **6 (4)** 565-578.