Villamos hálózatok ″terminal solvability″ tulajdonságának vizsgálata

Szakdolgozat

Írta: Hammer Gergő

Alkalmazott Matematikus MSc

Számítástudomány szakirány

Témavezető:

Recski András

egyetemi tanár

Számítógéptudományi tanszék

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

2013

Tartalomjegyzék

Bevezető **5**

1. Matroid algoritmusok **7**

1.1. Összeg, direkt összeg 7

1.2. Matroid patríciós probléma, matroid metszet probléma 8

1.3. Polimatroid metszet probléma 10

2. Villamos hálózatok **11**

2.1. A hálózatanalízis alapfeladata 11

2.2. Kondenzátor, tekercs 14

2.3. Transzformátor 15

2.4. Girátor 18

2.5. n-kapuk 19

3. Terminal solvability **22**

3.1. Egy n-kapu hibrid immitancia jellemzése 22

3.2. Hibrid immitancia tetszőleges n-kapukból álló hálózaton . . . 24

3.3. Terminal solvability 27

3.4. Algoritmus terminal solvabilityre 29

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Recski Andrásnak, aki mindig azonnal szakított rám időt, nagyon megértő volt és tanácsaival, észrevételeivel segített a szakdolgozatom elkészítésében.
Köszönöttel tartozom családomnak, akik lehetővé tették számomra a tanulást, és mindenben támogattak.

Bevezető

Napjainkban számtalan elektromos árammal működő eszközt használunk. Ezek az eszközök mindennapi életünk részévé váltak, ám hosszú út vezetett idáig.
Először meg kellett érteni az elektromos áram fogalmát, miként tudjuk azt felhasználni, mit jelent az áramerősség, feszültség, ellenállás stb. Ilyen eszközökből áramköröket tervezhetünk melyek könnyebbé teszik az életünket, de ezek biztonságos használatához szükségessé válik, hogy ki tudjuk számolni hol mennyi áram folyik, mennyi lesz a feszültség, azaz mi fog történni ha egy ilyen eszközt áram alá helyezünk.
A villamos hálózatok analízisével először Kirchhoff foglalkozott matematikai alapossággal. Bár még csak viszonylag egyszerű áramkörökkel foglalkozott, ő adott először jó karakterizációt arra, hogy mikor lehet ilyen hálózat egyértelműen megoldani, és a megoldást is megadta. Egyben ez volt a gráfelmélet első valódi alkalmazása is.
Szakdolgozatomat először matroid algoritmusokkal kapcsolatos összefoglalóval kezdem — feltételezve, hogy az olvasó tisztában van az alapfogalmakkal —melyek későbbi bonyolultabb hálózatok kiszámításánál elengedhetetlenek lesznek. Ezután megismerkedünk a villamos áramkörök fogalmával, a legegyszerűbb eszközöktől kezdve a bonyolultabb matematikai modellekig. Ismertetem Kirchhoff eredményeit, majd a bonyolultabb hálózatok kiszámítására vonatkozó tételeket és ezek algoritmikus megoldásait.
Végül megismerkedünk a teljesen általános n-kapu fogalmával, mely villamos hálózati eszközök általános modellje. Ilyen eszközökből álló hálózatok megoldhatóságára adunk először feltételek, majd áttérünk a hibrid immintancia fogalmára. Szemléletesen ez azt fogja jelenteni, hogy nem totálisan akarjuk kiszámítani a hálózat összes paraméterét, hanem csak bizonyos terminálokon érdekelnek minket az értékek. Más-más feltételezésekkel különböző nehézségű kérdésekhez jutunk majd. A terminal solvability kérdése tulajdonképpen annak eldöntése, hogy létezik-e hibrid immitancia jellemzése egy hálózatnak, azaz van-e egyértelmű megoldása a hálózatnak a számunkra érdekes helyeken, ha ott mi adjuk meg a bementet. Ezek létezésére

adunk szükséges és elégséges feltételeket — sok helyen bizonyítással együtt — majd hatékony matroidokat használó algoritmusokat adunk ezen feltételek ellenőrzésére.

1. fejezet

Matroid algoritmusok

1.1. Összeg, direkt összeg

Mielőtt belekezdenénk a villamos hálózatok elméletébe, először néhány matroiddal kapcsolatos definíciót és matroid partíciós algoritmust ismertetünk. Ezek az algoritmusok nemcsak felhasználhatóak lesznek a villamos hálózataknál, de csak ezekkel tudjuk hatékony megoldani az adott problémát. Feltételezem, hogy az olvasó tisztában van a matroid alapfogalmakkal, így a direkt összeg és összeg fogalmával kezdjük.

1.1.1. Definíció. *Adott egy $\mathcal{M}_1 = (E_1, \mathcal{F}_1)$ és egy $\mathcal{M}_2 = (E_2, \mathcal{F}_2)$ matroid úgy, hogy $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Ekkor a két matroid direkt összege egy matroid: $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = (E_1 \cup E_2, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$. $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$ alatt azt értjük, hogy egy $X \subseteq E_1 \cup E_2$ halmaz független, pontosan akkor ha $X \cap E_1 \in \mathcal{F}_1$ és $X \cap E_2 \in \mathcal{F}_2$, azaz X E_1-be eső része független $\mathcal{M}_1$ szerint, és E_2-be eső része $\mathcal{M}_2$ szerint.*

Könnyen láthatóan körmatroidok direkt összege nem mást, mint a két egymás mellé lerajzolt gráf által meghatározott körmatroid. Egy másik, kissé nehezebb művelet az összeg:

1.1.2. Definíció. *Legyen $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ és egy $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ matroid adva. A két matroid összege $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$, ahol egy $X \subseteq E$ független, ha X előáll $X = X_1 \cup X_2$ alakban úgy, hogy $X_1 \in \mathcal{F}_1$ és $X_2 \in \mathcal{F}_2$.*

Már az sem triviális, hogy ez a művelet valóban matroidot ad, de a bizonyítást most nem részletezzük. Szerencsére az összegmatroid kiszámítására hatékony algoritmusaink vannak.

1.2. Matroid patríciós probléma, matroid metszet probléma

Feladatunk a következő: Adott k darab matroid ugyanazon az E alaphalmazon. Kérdés, hogy létezik-e az E alaphalmaznak $E = \dot\cup E_i$ diszjunk felbontása úgy, hogy $E_i \in \mathcal{F}_i \quad \forall i = 1 \dots k$. Ez a probléma a k-matroid partíciós probléma ($k - MPP$). Tudjuk, hogy $k - MMP \in P$, azaz létezik polinomális algoritmus ilyen megtalálására, vagy nemleges válasz esetén találunk sértő halmazt.
Ez a probléma speciális esete Jack–Edmonds tételének:

1.2.1. Tétel (Jack-Edmonds). *Adott k darab matroid az E alaphalmazon rangfüggvényükkel. Ekkor*

$$max\{| \cup_{i=1}^{k} F_i| : F_i \textit{ független } \mathcal{M}_i\textit{-ben } \} = min_{\forall X \subseteq E}\{\sum_{i=1}^{k} r_i(X) + |E - X|\}$$

A bizonyítást nem részletezzük, azonban megjegyezzük, hogy algoritmikus: egy segédgráfot készítünk, kezdetben minden F_i legyen üres. Minden F_i halmazhoz felveszünk egy t_i segédpontot, és jelöle Z azon pontok halmazát, melyek még nincsenek besorolva valamely F_i-be. Kétféle él van a segédgráfunkban:

1. $z \in E - F_i$-beli pontból t_i-be, ha az a pont hozzávehető F_i-hez, hogy az független marad.

2. ha egy $z \in E - F_i$-beli pont olyan, hogy $z + F_i$ nem független, akkor minden x-re $F_i + z$ alapköréből zx él.

Szemléletesen az a tervünk, hogy belökdössük az egyes elemeket F_i-kbe úgy, hogy azok függetlenek maradjanak. Ha ilyet nem tudunk, belökjük olyan F_i-be ahonnan valakit odébb lehet lökni másik F_i-be. Ha Z-ből legrövidebb utat keresünk $T = \{t_1 \dots t_k\}$ halmazba, akkor ez szerencsére polinomiális időben lefut, vagy találunk egy sértő halmazt A lépésszám cn^3 ha $|E| = n$-nel, ugyanis $c(n+k)^2$ lépésben meg tudom konstruálni a segédgráfot, ugyanennyi lépésben legrövidebb utat kereshetek, és a lökdösődés legfeljebb cn lépés. Ezeket legfeljebb n-szer kell végrehajtani, így adódik a cn^3 lépésszám.

A $k-MPP$ ennek speciális esete, hiszen $|E|$ particionálható pontosan akkor, ha a $max = |E| \Leftrightarrow min = |E|$. Persze $min \leq |E|$ automatikus, tehát csak az kell, hogy $min \geq |E|$, azaz $\sum r_i(X) + |E-X| \geq |E|$. Ha $\sum r_i(X) \geq |X| \quad \forall X \subseteq E$ akkor ez teljeseül. Tehát pontosan ekkor oldható meg a k–matroid partíciós probléma, és a fenti algoritmus megadja a felbontást.

Egy másik probléma a matroid metszet probléma. Itt adott k matroid E alaphalmazon, és egy t szám. Kérdés, hogy létezik-e egy legalább t elemszámú X halmaz, mely független minden matroidban? Ha $k \geq 3$ akkor ez a probléma sajnos NP-nehéz. Könnyen visszavezethető Hamilton út keresésére.

Azonban a $k = 2$ esetben létezik polinomiális algoritmus. Első esetben tegyük fel, hogy $r_1(E) = r_2(E) = t$. Ekkor könnyű meggondolni, hogy pontosan akkor van a két matroidnak közös bázisa, ha $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^* = (E, 2^E)$. Ezt pedig a matroid partíciós probléma algoritmusával el tudjuk dönteni.

Ha $t > r_1(E)$ vagy $t > r_2(E)$ akkor nyilván nincs megoldás. Ha pedig nagyobb valamelyik rangja mint t akkor azt a matroidot lecsonkoljuk t rangúra (hiszen ha például $t = 8$ akkor és a matroid rangja 10, akkor minket nem érdekelnek a 9,10 elemű függetlenek. Ezzel visszavezettük a problémát az első esetre.

1.3. Polimatroid metszet probléma

Egy definícióval kezdünk:

1.3.1. Definíció. *Adott E, $f : 2^E \to \mathbb{Z}_0^+$ függvény az alábbi tulajdonságokkal:*

1. $f(\emptyset) = 0$
2. *Ha* $Y \subseteq X \Rightarrow f(Y) \leq f(X)$
3. f *szubmoduláris*
4. $\forall x \in E$*-re* $f(\{x\}) \leq k$.

Ekkor az f függvény k–polimatroid–rangfüggvény.

Megjegyzések:

1. Ha 4) helyett $f(X) \leq |X|$-et írnánk akkor ez rangfüggvény lenne.
2. $X \subseteq E \Rightarrow f(X) \leq k|X|$.

1.3.2. Definíció. *Egy f k–polimatoroid–rangfüggvény esetén $X \subseteq E$-re ha $f(X) = k|X|$, akkor X-et k-matchingnek hívjuk.*

Ezen definíciókkal megfogalmazható a k-polimatroid-metszet probléma: Adott egy f k-polimatorid-rangfüggvény és egy t szám. Létezik-e egy $X \subseteq E$, hogy $|X| \geq t$ és X egy k-matching?
Ez általában NP-nehéz, azonban egy speciális esetre Lovász adott polinomiális algoritmust $2 - PMMP$-re: Legyen $\mathcal{M}$ egy olyan a matroid, hogy az alaphalmaz elemei párba vannak állítva, azaz $E = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k\}$. $I = \{1, 2, \ldots k\}$ indexhalmaz. Legyen f függvény úgy definiálva, hogy $J \subseteq I$ halmazon $f(J) = r(\cup_{i \in J}\{x_i, y_i\})$. Ekkor f 2-polimatroid-rangfüggvény.

1.3.1. Tétel (Lovász). *Ha $\mathcal{M}$ egy $\mathbb{R}$ felett kordinátázott matroid (ismerjük a konkrét valós mátrixot), akkor ilyen f-ekre* $2 - PMMP \in P$.

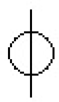
A bizonyítás és az algoritmus nehéz és bonyolult. Itt nem térünk ki rá.

2. fejezet

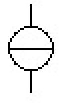
Villamos hálózatok

2.1. A hálózatanalízis alapfeladata

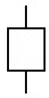
Mint már említettem, először Kirchhoff foglalkozott áramkörök, vagy villamos hálózatok matematikai analízisével. De mit is jelent az, hogy villamos hálózat? Legegyszerűbben azt mondhatjuk, hogy áramforrásokat, feszültségforrásokat és ellenállásokat összekötünk vezetékekkel, az így kapott rendszer a villamos hálózat.
A feszültségforrás olyan eszköz, melyen a feszültség (u) adott, az áramerősség (i) pedig tetszőleges (például akkumlátor). Rajzban a következőképp szoktuk jelölni:



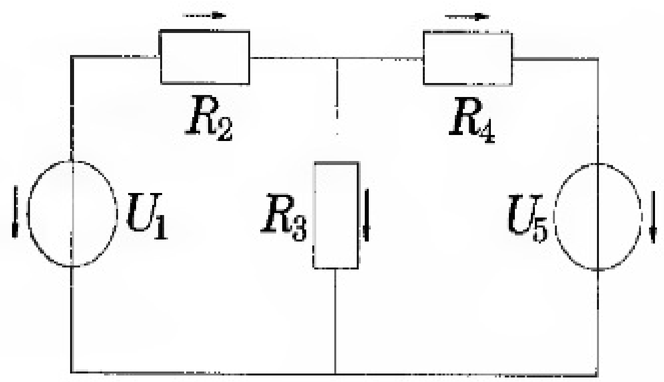
Az árramforrásnál pont fordítva, i van megadva, és u tetszőleges. Rajzban:



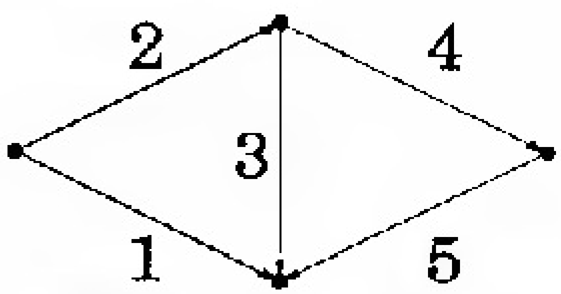
Az ellenállás (R) valamilyen anyag "elektromos ellenállása". Az anyagon átfolyó áram egyenesen arányos a feszültséggel, ez az ellenállás, kiszámításának módja pedig az Ohm-törvény: $u = Ri$ (például vasaló). Rajzban:



Ezeket sorosan, és párhazumason összeköthetjük vezetékekkel, így kapunk egy áramkört. Például az alábbi ábra ilyen áramkört mutat:



Kirchhoff használt először gráfelméleti fogalmakat áramkörök leírására. Minden eszköznek megfeleltetett egy élt, és ezen éleknek van közös csúcsa, ha ezek össze vannak kötve. Az előbbi áramkör gráfja a következő lenne:



Tehát a feladatunk az lesz, hogy egy ilyen hálózaton számítsuk ki minden eszköznél az u, i, R értékeket, ez a **hálózatanalízis alapfeladata**. De mielőtt ennek nekiesnénk, felvetődik az a kérdés, hogy ha bármilyen módon felrajzolunk egy gráfot, akkor az egyáltalán értelmes lesz?
Természtesen nem, Kirchhoff két törvénye adja meg erre a választ:

1. A hálózat gráfjában egy kör mentén a feszültségek összege 0 kell legyen, vagyis nem létezhet kör a gráfban csupa feszültségforrásból. Persze, mivel u tetszőleges a feszültségforrásokon, miért lenne ezek összege éppen 0, és ha még véletlen annyi is lenne miért ne lehetne a kör mentén az áramerősséget növelni ugyanazzal az értékkel mindenhol (azaz nem egyértelmű a megoldás). Ezt szokás huroktörvénynek hívni.

2. A hálózat gráfjának bármely vágása mentén az áramerősségek összege 0 kell legyen, azaz nem lehet vágás csupa áramforrásból, hasonló meggondolás miatt. Ezt csomóponti törvénynek szokás hívni.

Láthatjuk, hogy az Ohm-, és Kirchhoff-törvények lineárisak, ezért a hálózatanalízis alapfeladata nem más, mint egy lineáris egyenletrendszer megoldása. Azonban az egyértelmű megoldhatóság nem teljesen triviális, a következő tétel ad rá választ:

2.1.1. Tétel (Egyértelmű megoldhatóság). *Egy villamos hálózat — mely csupa áramforrásokból, feszültségforrásokból és ellenállásokból áll (UIR hálózat) — egyértelműen megoldható*

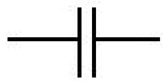
$$\Updownarrow$$

ha minden $R > 0$ és teljesülnek Kirchhoff–törvényei, azaz nincs kör a gráfban csupa feszültségforrásból, és nincs vágás csupa áramforrásból.

A szükségesség nyilvánvaló, a nehezebb irányra most nem térünk ki.

2.2. Kondenzátor, tekercs

Egy hálózat természetesen nem csak ellenállásból, áram-, és feszültségforrásból állhat, sőt mi több a legtöbb mai áramkör sok, ezeknél bonyolultabb eszközöket is használ. Ilyen eszköz például a kondenzátor és a tekercs.
A kondenzátort — az Ohm–törvényhez hasonlóan – lineáris egyenlet írja le: $i = C\frac{du}{dt}$, ahol C-t a kondenzátor kapacitásának nevezzük. Rajzban:



A tekercset az $u = L\frac{du}{dt}$ lineáris egyenlet írja le, ahol L a tekercs induktivitása. Rajzban:

Persze itt feltesszük, hogy a feszültségek és áramok nem konstansok, hanem időben változó mennyiségek, azaz úgy gondolunk rájuk, mint $u(t)$, $i(t)$ függvények. Egy ilyen hálózat persze, a differenciálegyenletek megoldása után nem más, mint egy hálózatanalízisbeli alapfeladat.
Egy hálózatot melyben kondenzátorok és tekercsek is vannak UCRLI–hálózatnak hívjuk. Itt is hasonló tétel fogalmazható meg:

2.2.1. Tétel. *Egy UCRLI–hálózat egyértelműen megoldható*

$$\Updownarrow$$

ha $\forall R, C, L > 0$ *és teljesülnek a Kirchhoff–törvények.*

Ha még véletlen az is igaz, hogy a feszültséggforrásokhoz és kondenzátorokhoz tartozó élek együtt körmentesek, és nem létezik vágás az áramforrásokhoz és tekercsekhez tartozó éleken együttesen, akkor minden kondenzátor kezdeti feszültsége és minden tekercs kezdeti áramerősségge tetszőlegesen megadható (hiszen a kondenzátor a bekapcsolás pillanatában

úgy viselkedik, mint egy feszültségforrás, és a tekercs pedig úgy, mint egy áramerősség, így egyértelmű a megoldás).
Ez persze nem feltétlenül teljesül, ekkor a következő tétel használható:

2.2.2. Tétel. *Adott egy UCRLI–hálózat. Tegyük fel, hogy* $\forall R, C, L > 0$ *és teljesülnek Kirchhoff törvényei. Legyen* F *egy olyan fa, mely minden feszültségforráshoz tartozó élet* (E_U) *tartalmaz, semely áramforráshoz tartozó élet* (E_I) *sem tartalmaz, továbbá a lehető legtöbb kondenzátor élet tartalmazza* (E_C) *és a lehető legkevesebb tekercs élet* (E_L)*, azaz legyen* $|F \cap E_C| + |E_L - F|$ *maximális. Ekkor* $|F \cap E_C| + |E_L - F|$ *értéke a hálózatot leíró differenciálegyenlet szabadsági foka és az* F*-beli kondenzátor éleken a kezdeti feszültségek, és az* F*-ből kimaradó tekercs éleken a kezdeti áramerősségek egymástól függetlenül előírhatók.*

Hogyan találunk ilyen fát a gráfban? Egyszerűen az U,C,R,L,I élekre rendre a következő súlyokat írjuk: 5,4,3,2,1. Ezen súlyozással a gráfon keresünk egy maximális súlyú feszítő fát. Ez persze minden E_U élet beválaszt (hiszen nincs kör E_U élekből), egyetlen E_I élet sem fog választani, hiszen nincs vágás E_I élekből, így minden csúcsot 1-nél nagyobb súllyal fog bekötni. Továbbá könnyen láthatóan a lehető legtöbb E_C élet fogja használni, és a lehető legkevesebb E_L élet.

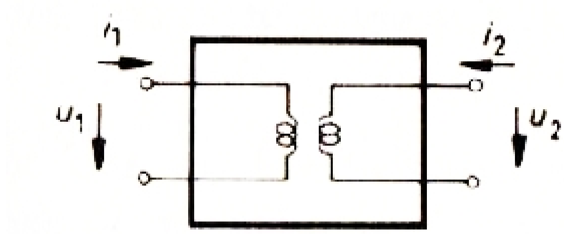
2.3. Transzformátor

Eddig megismerkedtünk áramforrásokkal, feszültségforrásokkal, ellenállásokkal, kondenzátorokkal és tekercsekkel. Azonban az életünkben használatos praktikus áramkörök gyakran használnak olyan eszközöket, melyeknek nem csak 2 terminálјuk van. Iyen eszköz például a transzformátor és a girátor.
Megyjegyezzük, hogy több terminállal rendelkező multiterminálokat később általánosabban fogjuk bevezetni. Ebből azonnal látszik, hogy az eddigi gráf reprezentációs megközelítést nem lehet használni. Azonban a fent említett két új eszköz még kezelhető marad gráfelméleti módszerekkel, ezért

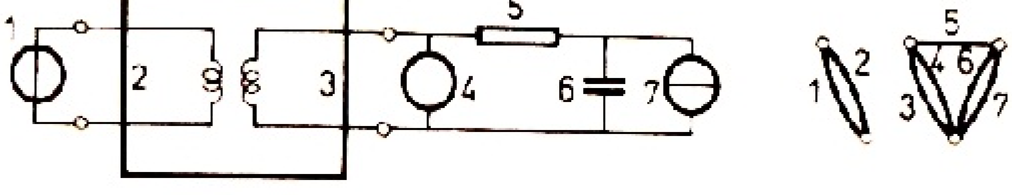
tárgyaljuk ezeket először.
Az ideális transzformátor egy 4 terminálos eszköz. Ezek közül 2-2 párba van rendezve, ezért szokás 2-kapunak is hívni. A transzformátor egyik kapujának feszültségét a másik kapu feszültségének konstans számszorosává transzformálja és hasonlóan az áramerősséget is áttranszformálja. Az alábbi lineáris egyenletek írják le a működését:

$$u_2 = ku_1; \quad i_1 = -ki_2$$

Rajzban a következőképp szokás ábrázolni:



A legfontosabb tulajdonsága az ideális transzformátornak, hogy ha egy u feszültségforrást kapcsolunk az első kapura, akkor a második kapu ku értékű feszültségforrásként fog viselkedni. Ebből látszik, hogy nem lehet mindkét kapuhoz feszültségforrásokat kapcsolni (mint ahogy párhuzamosan sem köthetünk két feszültség forrást).
Most vegyünk egy URLCI–áramkört, melyben transzformátor is szerepel. Az eddigiektől eltérően, a transzformátornak két él fog megfelelni a hálózat gráfjában (mindkét kapujának 1-1). Az alábbi egy ilyen példa:



Ha itt a 4-es helyére egy feszültségforrást tennénk, akkor az előbbiek alapján természetesen nem lenne megoldás, mégis a gráfban lenne olyan feszítő erdő amilyet az 1.2.2 tétel megkíván. Ez mutatja, hogy itt általában nem elég ilyen F fát keresni.
A megoldás olyan F fa keresése, melyre még az is igaz, hogy minden transzformátort reprezentáló két élből pontosan az egyiket tartalmazza. Egy ilyen feszítő erdőt normálisnak hívunk, és ezzel kizárjuk, hogy egy transzformátor két kapujára két feszültségforrás legyen kötve.

2.3.1. Tétel. *Ha egy áramkör gráfjában — mely feszültségforrásokat, áramforrásokat, ellenállásokat, kondenzátorokat, tekercseket és tranzisztorokat tartalmaz — létezik normális feszítő erdő, akkor egyértelmű megoldhatóság van.*

A bizonyítást nem részletezzük. Adódik a kérdés, hogy hogyan találunk ilyen normális fát egy gráfban? Ha van egy transzformátorunk, akkor ki kell próbálni, hogy a transzformátor egyik vagy másik élének bevételével kívánt fát kapunk-e, azaz kétszereződik a futásidő. Ha n darab transzformátorunk van, akkor 2^n- szeresére növekszik a futásidő, ami már exponenciális, így nem praktikus.
A megoldást a matroid partíciós probléma adja. Inputként adott nekünk egy hálózat G gráfja, és $(x_1, y_1), \ldots (x_k, y_k)$ élpárok, melyek az egyes transzformátoroknak megfelelő élpároknak felelnek meg. A feladat találni egy olyan F feszítő erdőt, mely minden transzformátor két éléből pontosan egyet tartalmaz, azaz $|F \cup (x_i, y_i)| = 1 \quad \forall i = 1 \ldots k$.
Legyen most $\mathcal{M}_1$ a G gráf körmatroidja. Legyen $T_i \quad \forall i = 1 \ldots k$ két — egy-egy transzformátornak megfelelő — párhuzamos élekből álló gráf (vagyis T_1 x_1 és y_1 párhuzamos élekből áll). Legyen G gráf élszáma e. Legyen $\mathcal{M}_2$ matroid a következő:

$$\mathcal{M}_2 = \oplus_{i=1}^{k} T_i \oplus \mathcal{U}_{e-2k,e-2k},$$

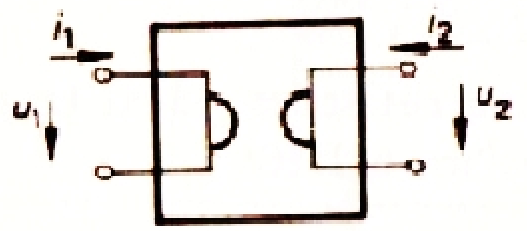
ahol $\mathcal{U}_{e-2k,e-2k}$ a maradék (nem transzformátor) éleken vett szabad matroidot jelenti. $\mathcal{M}_2$ olyan, hogy minden független ami a transzformátor élekből pontosan egyet tartalmaz, és bármi mást. Így ha $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$-n keresünk egy közös bázist, akkor pontosan egy olyan feszítő erdőt kapunk, mely minden transzformátorhoz tartozó két élből pontosan az egyiket tartalmazza. A $2 - MMP$ algoritmus pont ilyet szolgáltat nekünk.

2.4. Girátor

Egy másik 2-kapus eszköz a girátor. A következő egyeneletek határozzák meg:

$$u_1 = -Ri_2; \quad u_2 = Ri_1$$

Hasonlóan, ha egy u értékű feszültségforrást kapcsolunk az egyik kapura, akkor a másik kapu $-u/R$ értékű áramforrásként fog viselkedni. Ebből persze látszik, hogy most nem legális a girátor egyik kapujára áramforrást a másikra feszültségforrást kötni (és fordítva). Rajzban:



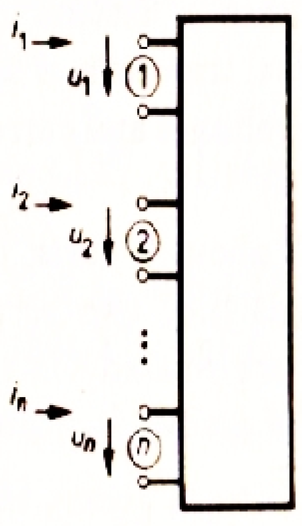
Annyi a változás a transzformátorhoz képest, hogy most egy girátornak megfelelő két élből vagy pontosan egyet sem, vagy mindkettőt be kell választani a fába (hiszen vagy két feszültségforrást kötünk a kapukhoz – amikor mindkettő kell a fába – vagy két áramforrást, amikor egyik sem). Ezt is szokás normális fának nevezni. Hasonló tétel igaz:

2.4.1. Tétel. *Ha egy áramkör gráfjában — mely feszültségforrásokat, áramforrásokat, ellenállásokat, kondenzátorokat, tekercseket és girátorokat tartalmaz — létezik normális feszítő erdő, akkor egyértelmű megoldhatóság van.*

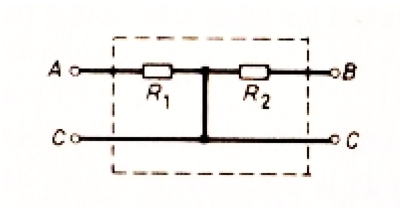
Hogyan találunk ilyen feszítő fát? Itt is adott G gráf, $(x_1, y_1) \ldots (x_k, y_k)$ girátoroknak megfelelő élek. Keresünk F feszítő erdőt, melyre $|F \cup (x_i, y_i)| \neq 1$. Az 1.3.1-es Lovász tétel pontosan ebben az esetben ad polinomiális algoritmust.

2.5. n-kapuk

Az előző részben láthattunk olyan eszközöket, melyeknek 2-nél több terminálja van, ezeket 2-kapuknak hívtuk. Általánosabban is beszélhetünk 2-kapukról: olyan absztrakt hálózati eszközök, melyeknek két terminálpárja van (azaz két kapuja), és a két-két feszültség- és áramértéke között valamilyen lineáris összefüggés áll fent. Formálisan az u_1, u_2, i_1, i_2 között $\mathbf{A}\binom{u_1}{u_2} + \mathbf{B}\binom{i_1}{i_2} = \mathbf{0}$ lineáris összefüggés áll fent, ahol $\mathbf{M} = (\mathbf{A}|\mathbf{B})$ rangja 2.
Ezt a fogalmat tovább általánosíthatjuk az n-kapuk fogalmára. Az n-kapu olyan hálózati eszköz, melynek n darab terminálpárja van, és n darab lineárisan független egyenlet adható meg a kapuk feszültségei és áramai közt. Az egyeneleteket $\mathbf{Au} + \mathbf{Bi} = \mathbf{0}$ alakban szokás írni, ahol $u = (u_1, u_2 \ldots, u_n)^T$ és $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)^T$ és **A**,**B** valós nxn-es mátrixok, $r(\mathbf{A|B}) = n$. Ha az n szám nem játszik semmilyen szerepet, akkor szokás az n-kaput multipornak hívni. Rajzban:



Ezek nem valódi eszközök, csak egy lehetséges modelljei bizonyos — számunkra hasznos tulajdonsággal bíró — eszközöknek. Tekintsük a következő áramkört:



Ezt a 2-kaput (A,C és A,B kapukkal) a nyilván a következő egyenletek írják le:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Jobban megvizsgálva látszik, hogy tulajdonképpen két ellenállás van sorosan kötve, melyekre felírtuk az Ohm-törvényeket. Két ilyen sorosan kötött ellenállás úgy viselkedik, mint egy $R_1 + R_2$ nagyságú ellenállás. Így ez az áramkör valójában nem más, mint egy ellenállás, C nem is létezik. Ha mégis 3 terminállal írjuk fel C-t is használva, akkor modelleztünk egy 3 terminálos áramkört egy 2-kapuval.
Ez általában is igaz: egy k terminált tartalmazó eszköz, mindig reprezentálható egy $(k-1)$-kapuval. Az egyik terminált kiválasztjuk referencia kapunak, és az összes többi terminál vele van párban. A referencia kapu választásától függően, természetesen más és más $(k-1)$-kapukat kapunk.

2.5.1. Definíció. *Ha egy multiport terminálpárjait tetszőlegesen áramforrásokkal és feszültségforrásokkal összekötünk, akkor ezt a választást inputnak hívjuk.*

2.5.2. Definíció. *Egy ilyen inputot megengedett inputnak nevezünk, ha ezzel az inputtal kapott áramkör egyértelműen megoldható.*

Természetesen 2^n féle input képzelhető el egy n-kapunál, hogy ezek közül mennyi megengedhető az függ az n-kaputól. Tegyük fel, hogy egy n-kaput az $\mathbf{Au} + \mathbf{Bi} = \mathbf{0}$ rendszer írja le. Tegyük fel, hogy az első k kaput feszültségforrással, a többi áramforrással terminál. Ez az input pontosan

akkor megengedhető, ha az $a_{k+1}, \dots a_n, b_1, \dots, b_k$ által alkotott mátrix determinánsa nem 0 (ahol a_i-k **A** oszlopait jelölik, b_j-k pedig **B** oszlopait).
Ha az első n oszlop lineáris független, vagy a második n oszlop lineáris független az (**A**|**B**) mátrixból, akkor az n-kaput egy $\mathbf{u} = \mathbf{Zi}$ vagy $\mathbf{i} = \mathbf{Yu}$ összefüggés jellemzi. Ezt szokás **Z**− vagy **Y**− jellemzésnek hívni.
Természetesen nem létezik minden n-kapunak **Z**− vagy **Y**− jellemzése, de néhány áramforrás és néhány feszültségforrás megválasztható egymástól függetlenül. Azaz — esetleg a portok újraszámozásával — az n-kapu leírása átírható

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_k \\ i_{k+1} \\ \dots \\ i_n \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_k \\ u_{k+1} \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

alakban. Egy ilyen leírást **hibrid immitancia** leírásnak hívunk. Természetesen egyáltalán nem biztos, hogy egy n-kapunak létezik hibrid immatancia jellemzése.

3. fejezet

Terminal solvability

3.1. Egy n-kapu hibrid immitancia jellemzése

Természetesen adódik egy fontos kérdés: létezik-e egy n-kapukból álló hálózatnak (mely n-kapuk össze vannak kötve egymással, és ezek közül k terminál kitüntett) hibrid immitancia leírása? A kérdés egyáltalán nem triviális, 3 különböző "nehézséget" szokás megkülönböztetni:

1. Fel lehet-e bontani a $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ kapukat két $P = P_1 \cup P_2$ halmazra, hogy a P_1-en adott inputként megadott áramok egyértelműen meghatározzák a feszültségeket, és a P_2 inputként megadott feszültségek meghatározzák egyértelműen az ide eső áramokat (az inputok függhetnek egymástól).

2. Valamivel erősebb kérdés, hogy tudunk-e függetlenül áram- és feszültségforrásokat inputként P_1, P_2-re, hogy ezek egyértelműen meghatározzák az itt fellépő feszültségeket és áramokat. Általában erre a kérdésre keressük a választ.

3. Tudunk-e találni hibrid immitanciát úgy, hogy a bementek függetlenek, és nem csak k kapun, de az összes belső kapun egyértelműen meghatározott legyen az áram és a feszültség (totális megoldhatóság).

A harmadik kérdés feleslegesen erős kívánalmakat kér, de még ez sem triviális tetszőleges — multiterminálokat tartalmazó — hálózatok esetén.

Ezért először foglalkozzunk azzal az esettel, amikor a hálózat csak egy n-kapuból áll. Ebben az esetben a 2) és 3) kérdés nyilván ugyanaz.
Ennek megválaszolására már matroidokra van szükségünk. Adott tehát egy n-kapu N, melyet az $\mathbf{Au}+\mathbf{Bi} = \mathbf{0}$ összefüggések írnak le. Legyen M_N az a matroid, melyet az $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ mátrix határoz meg. Legyen $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ halmaz, és definiáljunk egy $\mathbf{B}_n = (S, \mathcal{F})$ matroidot úgy, hogy egy $X \subseteq S$ független pontosan akkor, ha egy kapuhoz tartozó áramerősségből és feszültségből legfeljebb az egyiket tartalmazza, azaz $|X \cap \{u_k, i_k\}| \leq 1|$. Ekkor a következő tétel igaz:

3.1.1. Tétel. *Egy n-kapu N adott $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ mátrixálval, vagy M_N matroiddal. Ennek létezik legalább egy hibrid immitancia leírása $\Leftrightarrow$ ha $r(M_N) = n$ és $M_N \vee \boldsymbol{B}_n = (S, 2^S)$.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$ Ha N-nek van egy hibrid immitancia leírása, akkor $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ mátrixban van n darab független oszlop, azaz M_N-nek létezik egy X bázisa, melyre $|X \cap \{u_k, i_k\}| = 1$ minden k-ra. Természetesen $X - S$ bázisa $\mathbf{B}_n$-nek, így a két matroid összege a szabad matroid.
$\Leftarrow$ Ha $M_N \vee \mathbf{B}_n$ a szabad matroid, akkor minden függetlennek létezik felbontása a két matroid szerint, így S-nek is. $S = S_1 \cup S_2$, hogy S_1 M_N-ben független, de mivel M_N rangja most n, ezért ez az S_1 halmaz éppen egy jó hibrid immittancia jellemzés.

∎

A tételből azonnal látszik, hogy hatékony algoritmust is kaptunk a hibrid immittancia jellemzés eldöntésére. Az első fejezetben ismertetett matroid partíciós algoritmussal könnyen eldönthető polinom időben ez a feltétel, és találunk is egy ilyen leírást.

3.2. Hibrid immitancia tetszőleges n-kapukból álló hálózaton

A hibrid immittancia kérdését megválaszoltuk egy n-kapura, és hatékony algoritmusunk is van annak megtalálására. Most olyan hálózatot képzeljünk el, melyben n-kapuk, áramforrások és feszültségforrások vannak összekötve egymással tetszőlegesen, és k kapu ki van tüntetve. Most egy ilyen hálózaton fogjuk megválaszolni a 3)-as kérdést.
Ehhez bevezetünk pár jelölést: Legyen a H — tetszőleges nk-kapukból álló — áramkör hálózati gráfja G. Legyen G élhalmaza E, $|E| = h$ és jelölje $\mathcal{M}(G)$ a G gráf körmatroidját. Az E halmazból két diszjunk másolatot készítünk: E^i, E^u, az éleknek megfelelő kapun átfolyó áramerősségnek és feszültségnek megfeleltetve. Legyen $S = E^i \cup E^u$ és egy $x \in E$-re i_x és i_u jelölje x-nek megfelelő élet E^i-ben és E^u-ben. Hasonlóan $T \subseteq E$-re

$$T^i = \{i_x : x \in T\} \quad \text{és} \quad T^u = \{u_x : x \in T\}.$$

Definiáljuk a következő matroidot:

$$\mathcal{G} = (E^u, \mathcal{M}^*(G)) \oplus (E^i, \mathcal{M}(G)).$$

Persze $\mathcal{G}$ választása nem véletlen, könnyen láthatóan a Kirchhoff–törvényeket tartjuk szem előtt a definíció bevezetésekor. Most legyen $z = (u_1, u_2, \ldots, u_h, i_1, i_2, \ldots, i_h)^T$ vektor, összhangban S elemeivel. Ha az összes n-kaput leíró egyeneletet egy nagy $\mathbf{A}$ mátrixban akkor hálózatot leíró összefüggéseket $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$ alakban írhatjuk.
Legyen $\mathcal{A}$ a következő matroid: S alaphalmazon értelmezzük, és $X \subseteq S$ független pontosan akkor, ha az X-nek megfelelő oszlopok $\mathbf{A}$-ban lineáris függetlenek.

3.2.1. Definíció (él-kör illeszkedési mátrix). *Egy irányított G gráfhoz hozzárendelünk egy B mátrixot. A mátrix oszlopai a gráf éleinek felelnek meg, sorai a gráf köreinek. A mátrix egy b_{ij} helyén 0 van, ha a j-edik él nincs benne az i-edik körben. 1 van, ha a j-edik él benne van a körben, és az él iránya megegyezik a kör körbejárási irányával (ha ellenkező irányban van akkor pedig -1).*

3.2.2. Definíció (él-vágás illeszkedési mátrix). *Hasonlóan az előző definícióhoz, G irányított gráfhoz Q mátrixot rendelünk, melynek sorai a a gráf vágásainak felelnek meg. Rendre 0,1,-1 et írunk* q_{ij} *helyekre, ha az* i *él nincs benne a vágásban, benne van és a vágással egyeirányú, fordított irányú.*

Jelölje G hálózati gráf kör- és vágás illeszkedési mátrixát $\mathbf{B}, \mathbf{Q}$. Természetesen ez a két mátrix alkalmas lesz arra, hogy a Kirchhoff törvényeket hozzávegyük a hálózat összefüggéseit leíró **A** mátrixhoz. Definiáljuk tehát az **N** mátrixot a következőképpen:

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{A}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Így az $\mathbf{Nz} = \mathbf{0}$ egyenlettel, az összes hálózatot jellemző összefüggést leírjuk. Ha kitöröljük azokat az oszlopokat, melyek a hálózatban lévő áram- vagy feszültségforrásokhoz tartozó éleknek felelnek meg, akkor egy **W** mátrixot kapunk. Ez a mátrix négyzetes:
A G hálózati gráf pontjainak a száma legyen n. Mivel k kijelölt kapunk adhatunk meg függetlenül áram- és feszültségforrásokat, ezért **W**-ből k darab oszlopot törlünk ki nyilván. **A** sorainak száma ekkor $h - k$, oszlopainak száma $2h - k$. Azt állítom, hogy **Q** és **B** mátrixoknak együtt h sora van:

3.2.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy G összefüggő. A fenti* $\boldsymbol{Q}$ *és* $\boldsymbol{B}$ *mátrixoknak a rangja* $r(\boldsymbol{Q}) = n - 1$, $r(\boldsymbol{B}) = h - n + 1$.

Bizonyítás: ($\geq$) Vegyünk egy F feszítő fát G-n. Rendezzük, **Q** és **B** oszlopait úgy, hogy az első $n - 1$ oszlop az F feszítőfa éleinek feleljen meg. Mivel **B** él-kör mátrix, és mivel F-hez bármely élet hozzávéve egy kört kapunk, ezért az n-edik oszlop első helyére ± 1-et írva kapunk egy kört, az $n + 1$-edik oszlop 2-ik helyére ± 1-et írva kapunk egy második kört és így tovább. Ilyen elrendezéssel a **B** jobb felső $h - n + 1xh - n + 1$ -es részmátrixa egy diagonálmátrix, ennek rangja $h - n + 1$, így $r(\mathbf{B}) \geq h - n + 1$.

Hasonlóan elrendezve **Q** mátrixot, minden vágáshoz szükség van legalább egy fa élre, így itt a **Q** bal felső $n-1xn-1$-es részében jelenik meg egy diagonálmátrix. Ennek rangja $n-1$, így $r(\mathbf{B}) \geq n-1$.
(≤) Sylvester egy lemmája az mondja: $\forall A$ $p \times q$-as mátrixra és C $q \times r$-es mátrixra: $r(A) + r(C) \leq q + r(AC)$. Ezt felhasználva $A = \mathbf{B}$ és $C = \mathbf{Q}^T$ szereposztással kapjuk:

$$h = h - n + 1 + n - 1 \leq r(\mathbf{C}) + r(\mathbf{Q}) = r(\mathbf{C}) + r(\mathbf{Q}^T) \leq h + r(\mathbf{CQ}^T) = h$$

Ebből következik, hogy **B** rangja valóban $h-n+1$ és **Q** rangja valóban $n-1$, feltéve, hogy $r(\mathbf{CQ}^T) = 0$ fennáll. De $\mathbf{CQ}^T$ az azonosan **0** mátrix, hiszen ha egy kör egy élét tartalmazza egy vágás, akkor legalább egy másikat is tartalmazia kell ráadásul egy másik irányba menő élt, így ezek kiejtve egymást 0-t adnak mindig. ■

Megyjegyezzük, hogy G nem biztos, hogy összefüggő, az egyszerűség kedvéért tettük fel, de ugyanezzel a meggondolással kihozható hasonló állítás. **B** és **Q** mátrixoknak csak az első néhány sorát elég meghagyni, a többi nem tartalmaz új információt, így valóban azt kapjuk, hogy ezeknek együtt h sora van. Ezzel **W** $2h-k \times 2h-k$-as mátrix, azaz valóban négyzetes.
$\mathcal{N}$ legyen az a matroid az S alaphalmazon, melyet úgy kapunk **N** mátrixból, hogy pontosan azok a függetlenek, amelyeknek megfelelő oszlopok az **N**-ben lineárisan függetlenek. Nyilván pontosan akkor van egyértelmű megoldás, ha **W** nem szinguláris, azaz ha $U^u \cup I^i$ egy bázisa $\mathcal{N}^*$-nak.

Ez a feltétel azonban nem kényelmes. Ehelyett adunk egy kombinatorikus karakterizációt. Az ötlet az, hogy az $\mathcal{N}$ matroid helyett tekintsük a következőt:

$$\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{A}$$

Általában $\mathcal{M}$ különbözik $\mathcal{N}$-től, de ez is elég információt hordoz. Az $U^u \cup I^i$ bázisa $\mathcal{M}^*$-nak feltétel szükséges és elégséges feltétel marad. $\mathcal{M}$ meghatározására hatékony algoritmusaink vannak [7] [8] [9].

Most engedjük meg, hogy a hálózatban kondenzátorok és tekercsek is legyenek. Legyen L és C a tekercsek és kapacitások halmaza.

3.2.1. Tétel. *Egy ilyen hálózatnak pontosan akkor létezik egyértelmű megoldása, ha léteznek $L_0 \subseteq L$ és $C_0 \subseteq C$ részhalmazok úgy, hogy*

$$U^u \cup I^i \cup (L - L_0)^u \cup (C - C_0)^i \cup L_0^i \cup I^i \text{ \textit{bázisa} } \mathcal{M}^*\text{\textit{-nak.}}$$

Ha olyan hálózatot tekintünk, mely csak n-kapukból áll, és k kitüntetett csúcspár alkosson egy R halmazt. Ekkor a következő tétel igaz:

3.2.2. Tétel. *Egy ilyen hálózaton a k-kapun létezik hibrid immitancia leírás ha létezik egy $R = R_1 \cup R_2$ diszjunk felbontás, hogy*

$$R_1^u \cup R_2^i \text{ \textit{bázisa} } \mathcal{M}^*\text{\textit{-nak.}}$$

3.3. Terminal solvability

Most a hálózatunk n-kapukból és k egymástól független áram- és feszültségforrásból áll (melyek össze vannak kötve egymással). Ekkor a **terminal solvability** kérdése nem más, mint, hogy egy így kapott hálózatnak van-e hibrid immitancia leírása a 2)-es értelemben.
Az előző szakasz jelöléseit használva, láttuk, hogy a totális megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy $I^i \cup U^u$ bázisa legyen $\mathcal{M}^*$-nak. Jelöljük $\mathcal{M} - X$-el az X $\mathcal{M}$-ből való elhagyásával keletkező matoridot (csonkolt matroid).

3.3.1. Definíció (Híd). *Egy X halmaz egy $\mathcal{M}$ matroid hídja, ha ezt $\mathcal{M}$ egyik köre sem tartalmazza.*

A következő tétel ad választ a terminal solvability kérdésére:

3.3.1. Tétel. *A terminal solvability kérdésére pontosan akkor igen a válasz, ha a következő két feltétel teljesül:*

A1) $I^i \cup U^u$ *nem tartalmazhat semmilyen* $\mathcal{M}$*-beli vágást (azaz független* $\mathcal{M}^*$*-ban.*

A2) $U^i \cup I^u$ *minden elemének hídnak kell lennie az* $\mathcal{M} - (I^i \cup U^u)$ *matroidban.*

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{A}x = b$ lineáris egyenletrendszer, legyen $K = \{a_1, \ldots, a_l\}$ halmaz $\mathbf{A}$ oszlopaiból. Ekkor persze a rendszer pontosan akkor oldható meg ha b benne van K kifeszített alterébe. x_j egyértelműen meghatározott, ha nincs benne $K - \{a_j\}$ kifeszített alterébe.
Ha matroidként gondolunk ezekre, ez azt jelenti, hogy a_j híd. Továbbá egy részhalmaz "kifeszíti" az egész matroidot, ha a komplementerében nincs vágás. Így a két feltétel szükségessége következik.

■

Ezen tétel segítségével könnyen megadható a válasz arra a kérdésre, hogy egy n-kapukból álló hálózatnak (k kitüntetett csucspárral) létezik-e legalább egy hibrid immitancia leírása: G hálózati gráf élhalmaza E, $P \subset E$ halmaza a k "kapu-éleknek", azaz a képzeletbeli éleknek melyek páronként összekötik a k csúcspárt. Az így kapott k-kapunak létezik legalább egy hibrid immitancia leírása ponotosan akkor, ha létezik legalább egy $P = P_1 \cup P_2$ partíció, hogy:

A1′ $P_1^u \cup P_2^i$ nem tartalmazhat $\mathcal{M}$-beli vágást

A2′ $P_1^i \cup P_2^u$ elemei hidak $\mathcal{M} - (P_1^u \cup P_2^i)$-ben.

Ezek a feltételek nem igazán praktikusak: P-nek 2^k féle partíciója lehet, a legrosszabb esetben ennyi matroid kellene megkonstruálnunk. A következő tétel k-ban polinomiálisan ellenőrizhető feltételeket ad:

3.3.2. Tétel. *Az* n*-kapuk összekapcsolására legalább egy hibrid immittancia leírás létezik* $\Leftrightarrow$ *Ha a következő feltételek fennállnak:*

B1) $r(S - (P^i \cup P^u)) = r(S) - k$

B2) $P^i \cup P^u$ *minden eleme híd az* $\mathcal{N} = \mathcal{G} \vee \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ *matroidban,*

ahol $\mathcal{B}$ *az* S *alaphalmazon van definiálva, és egy* $X \subseteq S$ *halmaz független ha* $X \subseteq P$ *és* $|X \cap \{e^i, e^u\}| \leq 1$ *fennáll minden* $e \in P$*-re.*

3.4. Algoritmus terminal solvabilityre

Hogyan tudjuk az utóbbi tétel feltételeit ellenőrizni polinomidőben? Erre a következő algoritmus adja meg a választ: ($j = 1, 2, 3$-ra)

1. $P^i \cup P^u$ elemeihez rendeljünk kis súlyokat, és a többihez nagyobbakat.
2. Keressünk a $\mathcal{G} \vee \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroidon egy maximális súlyú bázist. Ugyanakkor készítsük el a $B_0 \subseteq B$ hidak halmazát. Legyen $|B| = t$.
3. Ha $B_0 = S$-el akkor legyen $i = 4$.
4. Ha B-ben a nagy súlyú elemek száma kevesebb mint $t - n$ akkor legyen $i = 2$, különben $i = 3$.
5. A k-kapunak létezik legalább egy hibrid immitancia jellemzése a J)-edik "nehézség" szerint pontosan akkor, ha $j < i$. (Ha $i = 1$, akkor sosem létezik)

Matroid összegében maximális súlyú független halmazok megtalálására létezik polinomiális algoritmus [7]. A Knuth [9] féle algoritmus könnyen módosítható [2] úgy, hogy matroid összegében a hidak halmazát is megtalálja.

Irodalomjegyzék

[1] A. Recski, Terminal solvability and the n-PORT interconnection problem 1979

[2] A. Recski, Unique solvability and order of complexity of linear networks containing memoryless n-ports, 1979

[3] B. Petersen, Investigating solvability and complexity of linear active networks by means of matroid

[4] M. Iri - N. Tomizawa, A unifying approach to fundamental problems in network theory be means of matroid, 1975

[5] A .Recski Matroid Theory and its applications in electric network theory and in statics, Akadémia Kiadó

[6] T. Jordan - A. Recski - D. Szeszler, Rendszeroptimalizálás

[7] J. Edmonds, Matroid partition, Math. Dec. Sci. Part 1, 1968

[8] L. Lovász - A. Recski, 'On the sum of matroids', Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 329-333, 1973

[9] D.E.Knuth, Matroid partitioning, Report No. Stan-CS-73-342, 1973