Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Matroidok alkalmazása rúdszerkezetek merevségével kapcsolatos kérdésekben

Szakdolgozat

Kézér Tamás Gábor

Alkalmazott Matematika MSc, Számítástudomány szakirány

Témavezető: Recski András, egyetemi tanár

ELTE Természettudományi Kar

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm az érdekes témajavaslatot témavezetőmnek, Recski Andrásnak, valamint azt is, hogy rengeteg elfoglaltsága mellett is tudott időt szakítani rám és ötleteivel, javaslataival, minden részletre kiterjedő hasznos megjegyzéseivel és észrevételeivel segítette a szakdolgozatom elkészültét. Köszönettel tartozom továbbá családomnak és szeretteimnek támogatásukért és erőt adó biztatásukért.

1. fejezet

Bevezetés

Mindannyiunknak van intuitív képe arról, hogy egy rúdszerkezet mikor merev. Ugyanakkor, ha ezt megpróbáljuk konkretizálni, hamar problémákba ütközünk. Ez nem túl meglepő, hiszen a háttérben sokszor nehéz matematikai tételek állnak. Már egy szerkezet merevségének a definiálása sem egyértelmű, jópár, fontos részletekben különböző definíció létezik. Az eredményeket tekintve pedig elmondható, hogy a dimenziószám növekedésével egyre kevesebbet tudunk. Valójában persze gyakorlati szempontból a háromnál magasabb dimenziós esetek nem túl lényegesek, de már épp a legfontosabb, térbeli esetben is rengeteg a nyitott kérdés a témakörben.

Szakdolgozatom második fejezetében összefoglalom a legfontosabb ismert, egy- és kétdimenziós esetre vonatkozó eredményeket, illetve kitérek a háromdimenziós esetre is, megmutatva, hogy egyes szép, a síkbeli esetre vonatkozó eredmények általánosítása ott miért nem igaz. Mivel - mint látni fogjuk - egy szerkezet matematikai értelemben minden további nélkül lehet úgy merev, hogy szabad mozgása nincs korlátozva a térben, érdemes megvizsgálni, hogy a merevséget hogyan befolyásolja, ha bizonyos csuklókat rögzítünk, fixálva ezzel a szerkezet térbeli helyét. Fontos kérdés az is, hogy hány csuklóját kell rögzítenünk egy adott szerkezetnek ahhoz, hogy az statikai értelemben merev legyen. Ezekkel a kérdésekkel foglalkozom a harmadik fejezetben. A negyedik fejezet azon merev szerkezetekről szól, melyek minimálisak abban az értelemben, hogy minden rúdjuk kritikus, azaz bármely rúdjuk elhagyásával nem merev szerkezethez jutunk. Az utolsó, ötödik fejezetben az egyszintes, négyzethálós szerkezetek átlós rudakkal történő merevítésével kapcsolatos eredményeket foglalom össze.

2. fejezet

Merev szerkezetek jellemzése

2.1. A merevség definíciói és összehasonlításuk

A szakdolgozat egészében szerkezet alatt rudakból és csuklókból álló szerkezetet értünk, ahol a rudak tökéletesen merevek, a csuklók pedig szabadon forgathatóak.

2.1.1. Definíció. *A d-dimenziós térben szerkezet alatt egy $S = (G, p)$ párt értünk, ahol $G = (V, E)$ a szerkezet gráfja, p pedig a gráf pontjainak egy leképezése a d dimenziós térbe, $p : V \longrightarrow \mathbb{R}^d$. G pontjai a szerkezet csuklóinak, élei a rúdjainak felelnek meg, azaz két pontot pontosan akkor köt össze él a gráfban, ha a pontok által reprezentált csuklók között vezet rúd.*

Egy, az előző definícióban szereplő S szerkezetet más néven a G gráf egy, a p leképezés által meghatározott realizációjának nevezzük.

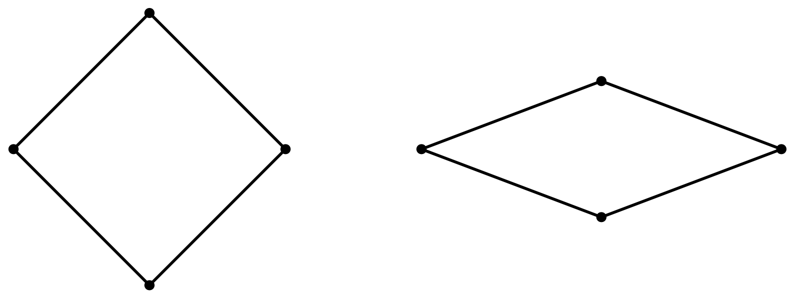
Vagyis a szerkezet gráfja meghatározza, hogy pontosan mely csuklókat köti össze rúd, a p leképezés pedig a csuklók d-dimenziós térbeli helyét adja meg, rögzítve ezzel a rudak hosszát. Fontos tisztázni, hogy mikor tekintünk két szerkezetet azonosnak. Alapfeltétel, hogy gráfjuk megegyezzen, azaz hogy ugyanannyi csuklóból és rúdból álljanak, és a rudak ugyanazon csuklókat kössék össze mindkét esetben.

Tekintsünk két szerkezetet: $K = (G, f)$, $L = (G, p)$, ahol $G = (V, E)$.

2.1.2. Definíció. *A K és L szerkezetek ekvivalensek, ha $\forall\ ij \in E$ él esetén $|f(i) - f(j)| = |p(i) - p(j)|$, vagyis ha a rúdhosszak megegyeznek.*

2.1.3. Definíció. *A K és L szerkezetek kongruensek, ha $\forall\ (i, j)$ pontpárra nézve $|f(i) - f(j)| = |p(i) - p(j)|$, vagyis ha a csuklók páronként vett távolsága megegyezik.*

Világos, hogy ha két szerkezet kongruens, akkor ekvivalensek is.
Az állítás megfordítása tetszőleges szerkezetre nem igaz, egy ellenpéldát mutat az alábbi ábra:



2.1. ábra. Ekvivalens, de nem kongruens szerkezetek

Egy merev szerkezettől intuitíven azt várjuk, hogy csuklói minden pillanatban azonos távolságra legyenek egymástól, azaz azt, hogy ne deformálódjon. Ez akkor teljesül, ha a szerkezet minden ekvivalens realizációja kongruens is vele. Ilyenkor globálisan merev szerkezetről beszélünk, míg ha csak egy megfelelően kis környezeten belüli mozgatás esetén áll fenn a kongruencia, úgy lokálisan merev szerkezetről:

2.1.4. Definíció. *Egy G gráf két realizációjára, (G, p)-re és (G, q)-ra azt mondjuk, hogy ϵ-közeliek, ha $|p(v) - q(v)| < \epsilon$ fennáll $\forall\ v \in V(G)$-re.*

2.1.5. Definíció. *Az $S = (G, p)$ szerkezet globálisan merev, ha S minden (G, q) ekvivalens realizációjára (G, q) kongruens (G, p)-vel.*

2.1.6. Definíció. *Az $S = (G, p)$ szerkezet lokálisan merev, ha $\exists \epsilon > 0$, melyre teljesül, hogy S minden olyan (G, q) ekvivalens realizációjára, melyre (G, p) és (G, q) ϵ-közeliek, következik, hogy (G, q) kongruens (G, p)-vel.*

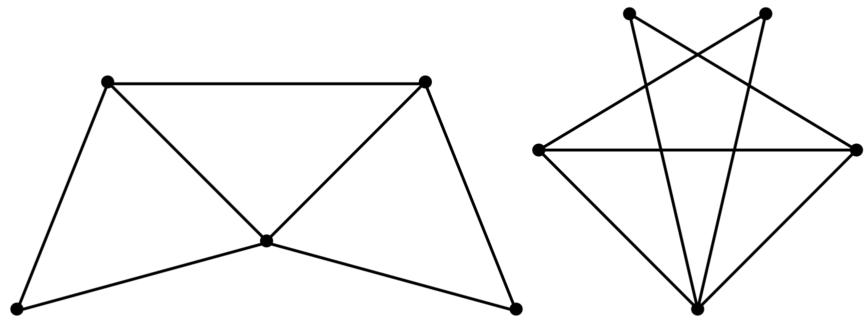
Megfogalmazhatjuk a lokális merevség definícióját másképpen is:

2.1.7. Definíció. *A (G, p) szerkezet (G, q) szerkezetbe való folytonos mozgása alatt egy olyan $f : [0, 1] \times V \longrightarrow \mathbb{R}^d$ leképezést értünk, melyre:*

- $f[0, v] = p(v)\ \forall v \in V(G)$
- $f[1, v] = q(v)\ \forall v \in V(G)$
- $|f[t, v] - f[t, u]| = |f[0, v] - f[0, u]|\ \forall t \in [0, 1] \forall u, v \in E(G)$
- $f[t, v]$ *folytonos* t*-ben* $\forall v \in V(G)$ *esetén*

2.1.8. Definíció. *Az $S = (G, p)$ szerkezet lokálisan merev, ha minden folytonos mozgása kongruens szerkezetbe viszi.*

2.1.9. Megjegyzés. *Belátható, hogy a lokális merevség fenti két definíciója ekvivalens.*



2.2. ábra. Lokálisan merev, de nem globálisan merev szerkezet

Világos, hogy minden globálisan merev szerkezet lokálisan is merev, fordítva ez azonban nem igaz. Egy síkbeli ellenpéldát mutat a 2.2 ábra. Az ábra bal oldalán látható szerkezet lokálisan merev, hiszen a csuklók folytonos mozgatásával egyáltalán nem jutunk másik ekvivalens szerkezetbe, így olyanba sem, mely ekvivalens, de nem kongruens. Ugyanakkor a jobb oldali realizáció ekvivalens a baloldalival, hiszen megkapható belőle a két szélső háromszög középsővel megegyező oldalára való tükrözéssel. Mivel azonban a bal és a jobb alsó csukló távolsága megváltozott, a két realizáció nem kongruens, így a szerkezet nem globálisan merev.

Legyen S egy v csuklóból és e élből álló szerkezet, melyre $p(i) = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(d)})$ $\forall\, i \in V(G)$-re.

2.1.10. Definíció. *Tekintsük azt az $e \times dv$ méretű M mátrixot, melynek minden sora a szerkezet egy rúdjához tartozik, és az a_{kl} elem értéke akkor és csak akkor $x_i^{(b)} - x_j^{(b)}$, ha a k-adik rúd épp az i-edik és a j-edik csukló között fut és $l = bv + i$, ahol b egész és $0 \leq b < d$. Az M mátrixot az S szerkezet merevségi mátrixának nevezzük.*

Tegyük most fel, hogy az S szerkezetre különböző erőhatások hatnak. Ezek hatására a szerkezet csuklói elmozdulhatnak kiindulási helyzetükből. Mivel azonban a szerkezet rúdjai feltevésünk értelmében tökéletesen merevek, egyik rúd hossza sem változhat a mozgás során. Ha ezt a felismerést felhasználva felírjuk a szerkezet rúdjai hosszának állandóságát kifejező egyenleteket, egy e darab egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk, ahol a változók, azaz a csuklók sebességvektorainak komponensei mind az idő függvényei. Az egyes egyenletek azt fejezik ki, hogy a rudak iránya merőleges a végpontjaik elmozdulásvektorainak különbségére. Intuitívan érezhető, hogy ha lenne rúd, melyre ez nem teljesülne, annak a hossza valóban változna.

Az e darab egyenlet mátrixos formában is felírható: $\mathbf{M}u = 0$, ahol $\mathbf{M}$ a fent definiált merevségi mátrix, u pedig az egyes csuklók sebességvektorainak komponensei alkotta vektor:

$$u = (\dot{x_1}^{(1)}, \dot{x_2}^{(1)}, \ldots, \dot{x_v}^{(1)}, \dot{x_1}^{(2)}, \dot{x_2}^{(2)}, \ldots, \dot{x_v}^{(2)}, \dot{x_1}^{(d)}, \dot{x_2}^{(d)}, \ldots, \dot{x_v}^{(d)})$$

Az egyenletrendszernek mindig megoldása az $u \equiv 0$, azaz ha a szerkezet nyugalomban marad. Léteznek ugyanakkor nemtriviális megoldások is, mégpedig a szerkezet merevtestszerű mozgásai, azaz például az eltolások és a forgatások. Ezek a mozgások a d dimenziós térben $\binom{d+1}{2}$ dimenziós alteret határoznak meg. A csuklók bármely egyéb, az egyenletrendszert kielégítő mozgatása a szerkezet olyan realizációjához vezet, mely ugyan ekvivalens az eredetivel, de nem kongruens vele. Tehát ha lehetséges a csuklók ilyen elmozdulása, akkor a szerkezet nem merev. Ez motiválja a korábban látott merevség definíció módosítását:

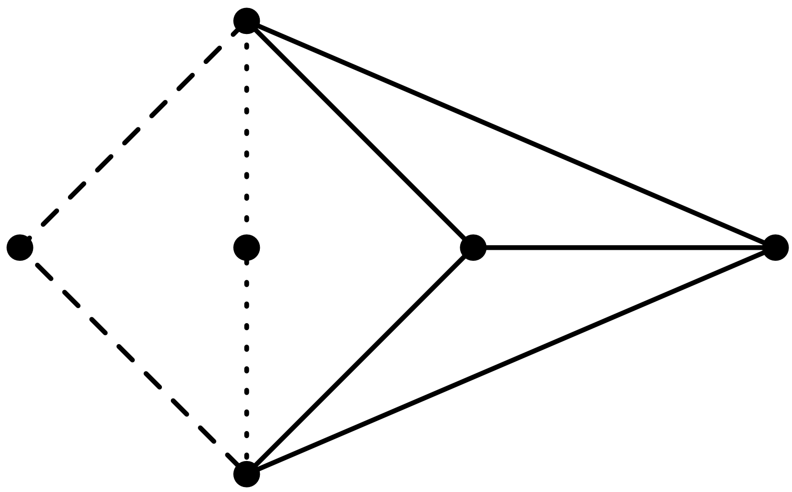
2.1.11. Definíció. *Egy $p' : V \longrightarrow \mathbb{R}^d$ leképezést a d-dimenziós szerkezet infinitezimális mozgásának nevezünk, ha $(p'_i - p'_j)(p_i - p_j) = 0$ fennáll $\forall\ v_i v_j \in E$ esetén.*

A fenti egyenletrendszer statikai értelemben vett triviális megoldásai a d-dimenziós tér kongruenciái, azaz a forgatások illetve eltolások és ezek kombinációi. Az ilyen mozgások mind infinitezimális mozgásnak tekinthetőek és felírhatóak $p' = Tp + t$ alakban, ahol T egy ferdén szimmetrikus, $d \times d$ méretű mátrix, t pedig d dimenziós vektor.

2.1.12. Definíció. *Egy d-dimenziós, legalább $d + 1$ csuklóval rendelkező szerkezet infinitezimálisan merev, ha $r(M) = dv - \binom{d+1}{2}$, ahol $r(M)$ a szerkezet merevségi mátrixának rangját jelöli. Speciálisan, egy 2, illetve 3 dimenziós szerkezet infinitezimálisan merev, ha $r(M) = 2v - 3$, illetve ha $r(M) = 3v - 6$.*

2.1.13. Állítás. *Ha egy szerkezet infinitezimálisan merev, akkor lokálisan is merev.*

2.1.14. Megjegyzés. *A 2.1.13 Állítás megfordítása nem igaz! Egy síkbeli ellenpéldát mutat a 2.3 ábra.*



2.3. ábra. Lokálisan merev, de nem infinitezimálisan merev szerkezet

Az ábrán ugyanazon gráf két realizációját ábrázoltuk. A folytonos élek mindkét szerkezethez hozzátartoznak, ám azokat az egyik esetben a szaggatott, másik esetben a pontozott élek egészítik ki. Mindkét realizáció lokálisan merev szerkezethez vezet, ám csak a szaggatott kiegészítő éleknek megfelelő szerkezet lesz infinitezimálisan merev. Ugyanakkor amennyiben a szerkezet csuklói speciális helyzetűek (generikusak), igaz a 2.1.13 Állítás megfordítása is:

2.1.15. Definíció. *Egy szerkezet generikus, ha csuklóinak koordinátái algebrailag függetlenek a racionális számok teste fölött.*

2.1.16. Megjegyzés. *Ha egy szerkezet generikus, úgy pontosan akkor infinitezimálisan merev, ha lokálisan merev.*

Sajnos a globális-, illetve a lokális merevség eldöntésére általában nincsenek polinomiális idejű algoritmusok. Matematikai szempontból sokkal jobban kezelhető az infinitezimális merevség, illetve sokkal többet tudunk a szerkezetek infinitezimális merevségéről, mint a globális merevségéről. Mint azt a következő alfejezetben látni fogjuk, a szerkezetek globális merevségének eldöntése már az egydimenziós esetben is **NP**-teljes. Ugyanakkor még az infinitezimális merevség esetében is fontos korlát a dimenzió. Magasabb dimenzióban sokkal nehezebb a merevség jellemzése. Látni fogjuk, hogy míg a síkbeli szerkezetek esetén sok szép eredmény ismert, a 3-dimenziós esetben az analóg problémák sokszor nyitottak. A további, még magasabb dimenziós esetekről még kevesebbet tudunk, de gyakorlati szempontból ezek egyébként is kevésbé érdekesek. A továbbiakban ezért csak 1-, 2-, vagy 3-dimenziós szerkezetekkel fogunk foglalkozni, a merevségen pedig - ha mást nem mondunk - mindig az infinitezimális merevséget fogjuk érteni.

2.2. Globális merevség egy dimenzióban

2.2.1. Tétel. *A globális merevség eldöntése egydimenziós szerkezetek esetében NP-teljes.*

Bizonyítás. Legyenek adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok. Jelölje az összegüket A. Ismert NP-teljes probléma annak eldöntése, hogy az $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ halmaz partícionálható-e úgy két részre, hogy a két rész elemeinek összege megegyezzen. Tekintsünk most olyan egydimenziós szerkezeteket, melyekhez tartozó gráf egy $n+2$ élből álló kör, továbbá a szerkezetek ezen kör olyan relaizációi, ahol az egymást követő élek hossza rendre $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \frac{A}{2}, \frac{A}{2}$. Az utolsó két rudat jelöljük r_1-gyel illetve r_2-vel.
Tekintsük a szerkezet legkisebb koordinátájú csuklóját. Ha innen indulva végigmegyünk a szerkezet élein, végül visszajutunk ehhez a csuklóhoz, mivel G kör. Tehát ugyanannyit, $\frac{A}{2}$-t kell jobbra és balra is haladnunk. Tekintsük először azt az esetet, ahol először csak jobbra lépegetünk, majd csak balra, míg visszaérünk a kiindulási pontba. Ezt a két, a bejárás során érintett, rudak alkotta egyenes szakaszt a szerkezet jobb, illetve bal oldalának fogjuk nevezni. Világos, hogy létezik a fentieknek megfelelő relaizációja a gráfnak (még ebben a speciális esetben is), például megfelelő szerkezethez jutunk, ha a jobb oldal az r_1 és az r_2 rudakból áll , míg a bal oldal az összes többiből. Nevezzük az így kapott szerkezetet S_1-nek. Ugyanakkor ha r_1 és r_2 ellentétes oldalra kerül, úgy azon múlik, hogy megfelelő realizációt kapunk-e, hogy két egyenlő összhosszúságú részre tudjuk-e osztani a maradék rudakat. Ez a szétosztási probléma viszont épp az előbb említett NP-teljes feladat. Amennyiben létezik megfelelő kettéosztás, úgy a gráf egy másik, S_2 realizációját kapjuk, mely ekvivalens S_1-el, hiszen a rúdhosszakat megtartottuk. Ugyanakkor világos, hogy a két szerkezet nem kongruens, hiszen r_1 és r_2 nem azonos csuklói az egyik esetben A, a másikban 0 távolságra vannak egymástól.
Ha megengedjük, hogy egynél többször is irányt váltsunk a bejárás során, akkor csak az az S_2-vel analóg eset fordulhat elő, ahol r_1 és r_2 csuklóinak koordinátái páronként megegyeznek, a többi rúd pedig kettéosztható két egyenlő részre. Ebben az esetben tehát egy $\frac{A}{2}$ hosszúságú szerkezetet kapunk a fenti A hosszúságú esetekkel szemben, de S_2-höz hasonlóan a szétosztási problémán múlik, hogy megfelelő realizációhoz jutunk-e. Hasonlóan látható, hogy ezen esetben is csak olyan ekvivalens realizációt kaphatunk, mely nem kongruens S_1-gyel.
Azt kaptuk tehát, hogy pontosan akkor globálisan merev a szerkezet, ha szét tudjuk osztani két egyenlő összhosszúságú részre az első n rudat. Ezáltal a szétosztási problémát visszavezettük a globális merevség eldöntésének problémájára, így utóbbi is

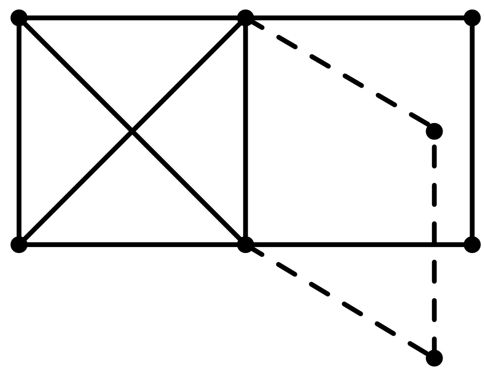
szükségszerűen **NP**-teljes. ∎

2.3. Laman tétel

A következőkben arra koncentrálunk, hogy a két- és háromdimenziós szerkezetek merevségét a gráfelmélet és a matroidelmélet eszközeit felhasználva jellemezzük. Mivel a merevségi mátrixnak pont e db sora van, a 2.1.12 Definícióból azonnal adódik az alábbi következmény:

2.3.1. Következmény (Maxwell). *Ha egy 3-dimenziós, v csuklóból és e rúdból álló szerkezet merev, akkor $e \geq 3v - 6$.*
Ha egy 2-dimenziós, v csuklóból és e rúdból álló szerkezet merev, akkor $e \geq 2v - 3$.

A Maxwell-féle következményben szereplő feltétel kétségtelenül szükséges a szerkezetek merevségéhez, de nem mindig elegendő. Tekintsük ugyanis az alábbi ellenpéldát a síkban (szaggatottal ábrázoltuk egy ekvivalens, de nem kongruens szerkezet eredetitől különböző részét):



2.4. ábra. Maxwell ellenpélda

2.3.2. Definíció. *Egy szerkezetet minimálisan merevnek nevezünk, ha merev és pontosan $r(M)$ rúdja van. Speciálisan egy síkbeli szerkezet minimálisan merev, ha merev és $2v - 3$ rúdja van.*

Másképp megfogalmazva egy merev szerkezet akkor minimálisan merev, ha bármely rúdját elhagyva már nem merev.

2.3.3. Definíció. *Tekintsük az S szerkezet M merevségi mátrixát. A mátrix sorai által a valós számok teste fölött meghatározott lineáris matroidot (mátrixmatroidot) az S szerkezet merevségi matroidjának nevezzük.*

2.3.4. Következmény. *Egy merev szerkezet pontosan akkor minimálisan merev, ha a mátrixa sorai a merevségi matroidja egy bázisát alkotják.*

Láttuk, hogy egy szerkezet gráfja hiába elégíti ki az $e \geq dv - \binom{d+1}{2}$ feltételt, ha egyes részgráfjai önmagukban nem teljesítik, túl sok pontjuk van a köztük futó élek számához viszonyítva. Tekintsünk egy síkbeli S szerkezetet, melynek G gráfja v pontból és e élből áll. Kezdjük el felépíteni a szerkezetet, elhelyezni a csuklók közé a rudakat. Kezdetben minden csuklónak két szabadsági foka van, tetszőleges mértékben elmozdulhat x illetve y irányban. Ha egy rudat illesztünk két csukló közé, azzal rögzítjük a távolságukat, maximum eggyel csökkentve ezzel a szabadsági fokot. Egy síkbeli merev szerkezetnek három szabadsági foka van (például egy pontjának a két koordinátája és a szerkezet ezen pont körüli forgatásának szöge), így a kezdeti $2v$ szabadsági fokot $2v-3$-mal kell csökkentenünk. Ezzel az intuitív érveléssel is alátámasztottuk tehát, hogy egy kétdimenziós merev szerkezetnek legalább $2v-3$ éle van. Az is világos, hogy ha két olyan csukló közé illesztünk rudat, melyek távolsága már fix, azaz melyek már részei a gráf egy merev részgráfjának, azzal nem csökkentjük a szerkezet szabadsági fokát. Vagyis minden új rúdnak olyan csuklókat kell összekötnie, melyek távolsága még változhat. Ezáltal egyik részgráfba sem kerül túl sok él. Ez a gondolatmenet vezet el minket a síkbeli minimálisan merev szerkezetek jellemzéséhez:

2.3.5. Állítás. *Legyen $S = (G, p)$ egy 2-dimenziós, v csuklóból és $e = 2v-3$ rúdból álló szerkezet és legyen G' egy tetszőleges, $v' \geq 2$ csúcsból és e' élből álló részgráfja G-nek. Ha S merev, akkor $e' \leq 2v' - 3$.*

Az előbbi állítás intuitíven azt jelenti, hogy egy minimálisan merev kétdimenziós szerkezet gráfja sehol sem túl sűrű. Ugyanakkor a fenti feltétel nem csak szükséges, de generikus szerkezet esetén elégséges is:

2.3.6. Tétel (Laman). *Ha egy síkbeli $S = (G, p)$ generikus szerkezet v csuklóból és $2v-3$ rúdból áll, úgy pontosan akkor merev, ha $e' \leq 2v' - 3$ teljesül G bármely e' élű és $v' \geq 2$ pontú részgráfjára.*

A Laman Tétel bizonyításához szükségünk van némi előkészületre.

2.3.7. Definíció. *Azt a (G^*, q) szerkezetet, melyet a (G, p) szerkezetből úgy kapunk, hogy G-hez hozzávesszük az új v_0 pontot és a v_0v_i, v_0v_j éleket, $q(v)$-t pedig $p(v)$-nek definiáljuk G minden v pontjára, v_0-ra pedig valamely $q(v_0) \in \mathbb{R}^2$-nek, a (G, p) szerkezet (v_i, v_j) pontpáron vett, v_0 ponttal való másodfokú kiterjesztésének nevezzük.*

2.3.8. Definíció. *Azt a (G^*, q) szerkezetet, melyet a (G, p) szerkezetből úgy kapunk, hogy G-hez hozzávesszük az új v_0 pontot és a v_0v_i, v_0v_j, v_0v_k éleket, valamint töröljük a v_iv_j élt, $q(v)$-t pedig $p(v)$-nek definiáljuk G minden v pontjára, v_0-ra pedig valamely $q(v_0) \in \mathbb{R}^2$-nek, a (G, p) szerkezet v_iv_j élen és v_k ponton vett, v_0 ponttal való harmadfokú kiterjesztésének nevezzük.*

2.3.9. Definíció. *A G gráf merev, ha létezik olyan $p : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ hozzárendelés, hogy (G, p) merev.*

2.3.10. Megjegyzés. *A G gráf tehát pontosan akkor merev, ha van olyan realizációja, melynek merevségi mátrixában van $2|V| - 3$ lineárisan független sor.*

2.3.11. Definíció. *A (G, p) szerkezet független, ha merevségi mátrixának sorai lineárisan függetlenek. A $G = (V, E)$ gráf egy $F \subseteq E$ élhalmaza független, ha a $G^* = (V, F)$ részgráfnak van független (G^*, p) realizációja. A G gráf független, ha az élhalmaza független.*

2.3.12. Lemma. *Legyen (G^*, q) a (G, p) független szerkezet egy olyan, a (v_i, v_j) pontpáron vett, v_0 ponttal való másodfokú kiterjesztése, melyre a $q(v_i), q(v_j), q(v_0)$ ponthármas nem kollineáris. Ekkor a (G^*, q) szerkezet is független.*

Bizonyítás. Rendezzük a (G^*, q) szerkezet $R(G^*, q)$ merevségi mátrixának sorait és oszlopait úgy, hogy a v_0-hoz tartozó két oszlop kerüljön az első két oszlop helyére, az utolsó két sor pedig a v_iv_0 és v_jv_0 élekhez tartozzon. Indirekt tegyük fel, hogy a (G^*, q) szerkezet nem független, azaz létezik a merevségi mátrixa sorainak olyan, azonosan nullát adó lineáris kombinációja, melyben nem minden együttható nulla. Tekintsünk egy ilyen kombinációt és legyenek a sorok együtthatói rendre $\alpha_{e_1}, \alpha_{e_2}, \ldots, \alpha_{v_iv_0}, \alpha_{v_jv_0}$.

Tekintsük a mátrix első két oszlopát. A lineáris kombináció csak úgy adhat nullát az első két oszlopra, ha $\alpha_{v_iv_0}(q(v_i) - q(v_0)) + \alpha_{v_jv_0}(q(v_j) - q(v_0)) = 0$. Mivel feltettük, hogy a $q(v_i), q(v_j), q(v_0)$ ponthármas nem kollineáris, ebből $\alpha_{v_iv_0} = \alpha_{v_jv_0} = 0$ következik. Vegyük észre, hogy $R(G^*, q)$-ból az első két oszlop és az utolsó két sor törlésével kapott mátrix épp $R(G, p)$. Ezáltal, mivel az $R(G^*, q)$ utolsó két sorához tartozó együttható nulla, a többi sor együtthatója épp $R(G, p)$ sorainak adja egy olyan nemtriviális lineáris kombinációját, melyre a nullvektort kapjuk. Ez azonban ellentmondás, hiszen feltettük, hogy (G, p) független. ∎

2.3.13. Lemma. *Legyen (G^*, q) a (G, p) független szerkezet egy olyan, a v_iv_j élen és a v_k ponton vett, v_0 ponttal való harmadfokú kiterjesztése, melyre $q(v_0)$ a $q(v_i)$*

és $q(v_j)$ pontok által meghatározott egyenes $q(v_i)$-től és $q(v_j)$-től különböző pontja. Amennyiben a $p(v_i), p(v_j), p(v_k)$ ponthármas nem kollineáris, úgy a (G^*, q) szerkezet is független.

Bizonyítás. Rendezzük a (G^*, q) szerkezet $R(G^*, q)$ merevségi mátrixának sorait és oszlopait úgy, hogy rendre a v_0, v_i, valamint a v_j pontokhoz tartozó hat oszlop kerüljön az első hat oszlop helyére, az utolsó három sor pedig a v_iv_0, a v_jv_0 és a v_kv_0 élekhez tartozzon. Indirekt tegyük fel, hogy a (G^*, q) szerkezet nem független, azaz létezik a merevségi mátrixa sorainak olyan, azonosan nullát adó lineáris kombinációja, melyben nem minden együttható nulla. Tekintsünk egy ilyen kombinációt és legyenek a sorok együtthatói rendre $\alpha_{e_1}, \alpha_{e_2}, \ldots, \alpha_{v_iv_0}, \alpha_{v_jv_0}, \alpha_{v_kv_0}$.

Tekintsük a mátrix első két oszlopát. A lineáris kombináció csak úgy adhat nullát az első két oszlopra, ha $\alpha_{v_iv_0}(q(v_i)-q(v_0))+\alpha_{v_jv_0}(q(v_j)-q(v_0))+\alpha_{v_kv_0}(q(v_k)-q(v_0)) = 0$. Mivel feltettük, hogy a $q(v_i), q(v_j), q(v_k)$ ponthármas nem kollineáris, továbbá $q(v_0)$-t a v_i és v_j pontok egyeneséről választottuk, az egyenlőség csak $\alpha_{v_kv_0} = 0$ esetén teljesülhet. Ekkor azonban $\alpha_{v_iv_0}(q(v_i) - q(v_0)) = -\alpha_{v_jv_0}(q(v_j) - q(v_0)) = \alpha_{v_iv_j}(q(v_i) - q(v_j))$ is fennáll alkalmas $\alpha_{v_iv_j}$-vel. Töröljük $R(G^*, q)$ utolsó sorát és első két oszlopát, majd egészítsük ki a kapott mátrixot a harmadfokú kiterjesztés során törölt v_iv_j élhez tartozó sorral és rendeljük ehhez hozzá a kapott $\alpha_{v_iv_j}$ együtthatót. Ezáltal előállítottuk az $R(G, p)$ merevségi mátrixot. A fenti egyenlőség miatt ekkor épp $R(G, p)$ sorainak egy olyan lineáris kombinációját kapjuk, mely a nullvektort adja. Mivel a kezdeti lineáris kombinációban legalább egy együttható nemnulla volt, ez csak akkor nem mond ellent (G, p) függetlenségének, ha $\alpha_{v_iv_0}$ vagy $\alpha_{v_jv_0}$ nemnulla. Azonban az $R(G, p)$ soraira kapott lineáris kombináció minden együtthatója szükségszerűen nulla, így speciálisan $\alpha_{v_iv_j}$ is, ez pedig $q(v_0)$ választása miatt maga után vonja $\alpha_{v_iv_0}$ és $\alpha_{v_jv_0}$ zérus voltát is. ■

2.3.14. Definíció. *Jelölje $i(X)$ a G gráf ponthalmazának X részhalmaza által feszített élek számát. Egy $G = (V, E)$ gráf ritka, ha minden $X \subseteq V, |X| \geq 2$ ponthalmazra $i(X) \leq 2|X| - 3$. Egy $X \subseteq V, |X| \geq 2$ ponthalmazt kritikusnak nevezünk, ha $i(X) = 2|X| - 3$.*

2.3.15. Állítás. *Tekintsük az X, Y, Z kritikus halmazokat a G ritka gráfban. Ha $|X \cap Y| \geq 2$, akkor $X \cup Y$ is kritikus. Ha $|X \cap Y| = |X \cap Z| = |Y \cap Z| = 1$ és $X \cap Y \cap Z = \emptyset$, akkor $X \cup Y \cup Z$ is kritikus.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $|X \cap Y| \geq 2$. Mivel az X ponthalmaz által feszített élek számát visszaadó $i(X)$ függvény szupermoduláris, írhatjuk, hogy $2|X| - 3 +$

$2|Y|-3 = i(X)+i(Y) \leq i(X\cap Y)+i(X\cup Y) \leq 2|X\cap Y|-3+2|X\cup Y|-3$, vagyis mindenhol egyenlőség áll, így $X \cup Y$ is kritikus.
Most tegyük fel, hogy $|X\cap Y| = |X\cap Z| = |Y\cap Z| = 1$ és $X\cap Y\cap Z = \emptyset$. Ekkor fennáll, hogy $i(X\cup Y\cup Z) \geq i(X)+i(Y)+i(Z) = 2|X|-3+2|Y|-3+2|Z|-3 = 2|X\cup Y\cup Z|-3$. Mivel azonban G ritka, és így $i(X \cup Y \cup Z) \leq 2|X \cup Y \cup Z| - 3$, azt kapjuk, hogy $i(X \cup Y \cup Z) = 2|X \cup Y \cup Z| - 3$, vagyis $X \cup Y \cup Z$ is kritikus. ∎

2.3.16. Definíció. *A G gráf egy harmadfokú pontjának két nem szomszédos u, v szomszédjára történő leemelésén azt értjük, hogy a pontot töröljük a gráfból és behúzzuk az uv élt.*

2.3.17. Lemma. *Tekintsünk egy legalább három pontú ritka $G = (V, E)$ gráfot és egy v másod-, vagy harmadfokú pontját. Ha v másodfokú, akkor $G - v$ is ritka. Ha v harmadfokú, akkor v-t le tudjuk úgy emelni, hogy a leemelés után kapott gráf is ritka.*

Bizonyítás. A másodfokú eset a 2.3.14 Definícióból azonnal következik. A harmadfokú eset bizonyításához jelöljük v szomszédait x, y, z-vel. Ha v-nek például az (x, y) párra történő leemelése nem ad ritka gráfot, akkor van olyan $X \subseteq V - v$ kritikus halmaz, melyre $x, y \in X$. Így tehát ha indirekt feltesszük, hogy a v harmadfokú pontnál nincs jó leemelés, akkor léteznek olyan $X, Y, Z \subseteq V - v$ kritikus halmazok, melyekre $x, y \in X$, $x, z \in Y$, illetve $y, z \in Z$. Mivel egy él két végpontja kritikus halmazt alkot, akkor is létezik három ilyen kritikus halmaz, ha v szomszédai közt vannak szomszédosak, így bizonyos pontpárokra nem tudjuk elvégezni a leemelést. Ha az X, Y, Z halmazok közül bármely kettő metszete legalább kételemű, úgy a 2.3.15 Állítás értelmében az uniójuk is kritikus. Viszont a két halmaz uniója v minden szomszédját tartalmazza, így ahhoz v-t hozzávéve egy, a ritkasági feltételt sértő V-beli halmazt kapnánk, ez pedig ellentmondás. Ebből következik, hogy $|X \cap Y| = |X \cap Z| = |Y \cap Z| = 1$ és $X \cap Y \cap Z = \emptyset$. Ekkor viszont a 2.3.15 Állítás alapján $X \cup Y \cup Z$ kritikus, azaz $X \cup Y \cup Z \cup v$ sértené a ritkasági feltételt G-ben. Tehát biztosan van legalább egy megfelelő leemelés a v harmadfokú pontnál. ∎

Bizonyítás. [Laman Tétel] [4, 5] A feltétel szükségességét már korábban láttuk, így csak az elégségességet kell bizonyítanunk. Azt fogjuk belátni, hogy amennyiben teljesül a feltétel (azaz ha a G gráf ritka), akkor G független, vagyis létezik olyan realizációja, melynek merevségi mátrixában a sorok lineárisan függetlenek. Ebből következik, hogy a (G, p) generikus szerkezet merev, mivel könnyen belátható, hogy ha egy gráfnak létezik merev realizációja, akkor minden generikus realizációja merev. A függetlenségnél egy kicsit többet látunk be: pontszámra vonatkozó indukcióval megmutatjuk, hogy a feltétel teljesülése mellett G-nek van olyan realizációja, ahol a pontok általános helyzetűek.

Ha G-nek csak egy pontja van, akkor bármely realizációja általános helyzetű. Ha G-nek két pontja van, u és v, akkor tekintsünk egy olyan (G, p) realizációt, melyre $p(u) \neq p(v)$. Ez nyilván általános helyzetű, továbbá független, hiszen $R(G, p)$-nek legfeljebb egy sora van. Ha G-nek legalább három pontja van, a ritkasági feltétel miatt biztosan van legfeljebb harmadfokú v pontja. Most tegyük fel, hogy az állításunkat már minden k-nál kevesebb pontú ritka gráfra beláttuk. Tekintsünk egy tetszőleges k pontú G ritka gráfot és egy legfeljebb harmadfokú v pontját.

Amennyiben $d(v) = 2$, akkor a 2.3.17 Lemma miatt $G - v$ is ritka. Mivel $G - v$ G-nél kevesebb pontú gráf, az indukciós feltevés miatt létezik olyan $(G - v, p)$ független realizációja, mely általános helyzetű is. Legyen v két G-beli szomszédja u és w. A 2.3.12 Lemma alapján ekkor $(G - v, p)$-nek van olyan, az (u, w) pontpáron vett, v ponttal való (G, q) másodfokú kiterjesztése, mely független. Mivel itt csak azt kell biztosítanunk, hogy a $q(u), q(w), q(v)$ ponthármas ne essen egy egyenesre, végtelen sok megfelelő kiterjesztés létezik, így biztosan van közöttük olyan is, melyre a kapott szerkezet általános helyzetű is.

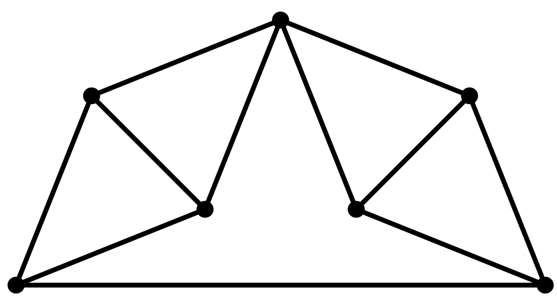
Ha $d(v) \leq 2$, illesszünk be a gráfba annyi v-re illeszkedő élt, hogy a foka 2 legyen. Ekkor megismételhető az előző eset érvelése, így ekkor is kapunk egy független és általános helyzetű realizációt, mely nyilvánvaló módon a beillesztett élek törlése után is független és általános helyzetű marad.

Végül, ha $d(v) = 3$, akkor a 2.3.17 Lemma miatt létezik olyan leemelés v-nél, melyre a kapott G^* gráf is ritka. Tekintsünk egy ilyen leemelést és nevezzük x-nek és y-nak v azon szomszédait, melyekre a leemelés történt, továbbá legyen v harmadik szomszédja z. Mivel G^* G-nél kevesebb pontú gráf, az indukciós feltevés miatt létezik olyan (G^*, p) független realizációja, mely általános helyzetű is. Tekintve, hogy (G^*, p) általános helyzetű, a $p(x), p(y), p(z)$ ponthármas nem esik egy egyenesre. Így alkalmazhatjuk a 2.3.13 Lemmát, mely alapján (G^*, p)-nek van olyan, az xy élen és z ponton vett, v ponttal való (G, q) harmadfokú kiterjesztése, mely független. Mivel itt csak azt kell biztosítanunk, hogy a $q(x), q(y), q(v)$ ponthármas egy egyenesre essen, végtelen sok megfelelő kiterjesztés létezik, így biztosan van közöttük olyan is, melyre csak a $q(x), q(y), q(v)$ ponthármas kollineáris. Válasszunk egy ilyen harmadfokú kiterjesztést és hajtsuk végre. Az általános helyzet eléréséhez el fogjuk tolni a

$q(x)$ pontot vízszintesen úgy, hogy a függetlenség is megőrződjön. (Amennyiben a $q(x), q(y), q(v)$ ponthármas egyenese vízszintes, akkor függőlegesen toljuk el $q(x)$-et és a bizonyítás hasonlóan megy.) Tekintsük a (G, q) szerkezet merevségi mátrixának egy olyan $E(G) \times E(G)$ méretű részmátrixát, melynek determinánsa nem nulla. Ha ebben a részmátrixban nem szerepel a $q(x)$ pont x koordinátája, akkor a $q(x)$ bármilyen vízszintes eltolása mellett sem változik a determináns, így a szerkezet független marad. Ekkor, mivel végtelen sok megfelelő helyre tolhatjuk el $q(x)$-et, ponthármasból pedig csak véges sok van a gráfban, meg tudjuk választani $q(x)$ új x koordinátáját úgy, hogy a kapott szerkezet független és általános helyzetű legyen. Ha az $E(G) \times E(G)$ méretű részmátrixban előfordul $q(x)$ x koordinátája, akkor a determinánst ezen változó polinomjaként felírva egy legfeljebb $|V(G)| - 1$-edfokú nem azonosan nulla polinomot kapunk. Arra kell csak figyelnünk, hogy $q(x)$ x koordinátáját úgy válasszuk meg, hogy a részmátrix determinánsa ne tűnjön el, azaz úgy, hogy az a polinomnak ne legyen gyöke. Mivel G véges, ezt végtelen sok féleképpen megtehetjük, és így az előző esethez hasonlóan megválaszthatjuk úgy $q(x)$ x koordinátáját, hogy a kapott szerkezet független és általános helyzetű legyen. ∎

Gerard Laman ezen híres eredményére a később róla elnevezett Laman-gráfok vizsgálatával jutott:

2.3.18. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot Laman gráfnak nevezünk, ha bármely legalább két pontú $G' = (V', E')$ részgráfjára fennáll, hogy $|E'| \leq 2|V'| - 3$.*



2.5. ábra. Laman gráf

Egy Laman gráfot láthatunk a 2.5 ábrán (az úgynevezett Moser gráfot), de léteznek síkba nem rajzolható Laman gráfok is, például a $K_{3,3}$ gráf. A fentiek értelmében tehát egy síkbeli, generikus szerkezet pontosan akkor merev, ha gráfjának van olyan Laman részgráfja, mely minden pontját feszíti. Az is adódik, hogy egy síkbeli, generikus, minimálisan merev szerkezet gráfja Laman gráf, így a szerkezet merevségi matroidjának bázisait épp a Laman gráfok definiálják.

2.4. Lovász-Yemini tétel

A Laman tétel jellemzi ugyan a kétdimenziós generikus merevséget, de nem ad módszert annak gyors eldöntésére. A tétel feltételének ellenőrzése ugyanis exponenciálisan sok részgráf vizsgálatát jelenti. Az alábbi eredmény segítségével ugyanakkor polinomiális időben is eldönthető, hogy egy síkbeli, generikus szerkezet merev-e.

2.4.1. Tétel (Lovász és Yemini). *Ha egy síkbeli $S = (G, E)$ generikus szerkezet v csuklóból és $2v - 3$ rúdból áll, úgy pontosan akkor merev, ha a gráfja bármely x élének megduplázásával kapott G_x gráf lefedhető két feszítőfával.*

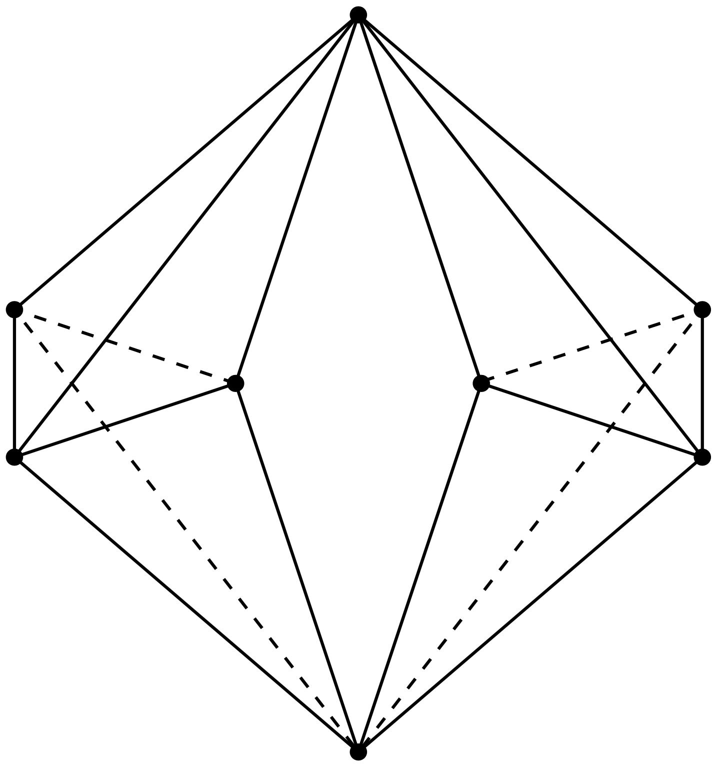
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S merev. Ekkor a Laman tétel értelmében G bármely legalább két pontú $G' = (V', E')$ részgráfjára $|E'| \leq 2|V'| - 3$. Mivel az új él hozzáadása egy részgráf pontjainak számán nem változtat, az élek számát pedig legfeljebb eggyel növeli, G_x bármely legalább két pontú $G^* = (V^*, E^*)$ részgráfjára teljesül $|E^*| \leq 2|V^*| - 2$. A Nash-Williams tétel értelmében ekkor G_x lefedhető két fával. Mivel azonban $|E(G_x)| = 2|(V(G_x)| - 2$, ez csak két diszjunkt feszítőfával lehetséges.
Megfordítva, indirekt tegyük fel, hogy bármely x él választása mellett G_x lefedhető két diszjunkt feszítőfával, de S nem merev. Ismét Laman tételét felhasználva azt kapjuk, hogy ekkor létezik olyan, legalább két pontú $G' = (V', E')$ részgráfja G-nek, melyre $|E'| > 2|V'| - 3$. Tekintsük most azt a $G^* = (V^*, E^*)$ részgráfját G_x-nek, melyet G'-ből egy tetszőleges $x \in E(G')$ él megduplázásával kapunk. Könnyen látható, hogy ekkor fennáll $|E^*| > 2|V^*| - 2$. Ez azonban azt jelenti, hogy G^* nem fedhető két fával, így G_x sem. ∎

2.4.2. Megjegyzés. *A feltétel szükségességének bizonyítása során a Laman tételre hivatkoztunk, de valójában az már az 2.3.5 Állításból is következik. A generikus szerkezet kitételt csak a feltétel elégségességének belátásánál használtuk, így ez a feltétel a nem generikus szerkezetek merevségéhez is szükséges:*

2.4.3. Következmény. *Ha egy síkbeli $S = (G, E)$ szerkezet minimálisan merev, akkor a gráfja bármely x élének megduplázásával kapott G_x gráf lefedhető két feszítőfával.*

A Lovász-Yemini tétel fontosságát az adja, hogy segítségével polinomiális időben eldönthetjük egy síkbeli szerkezetről, hogy merev-e. Ugyanis a tétel alapján azt kell ellenőriznünk minden x élre, hogy $M(G_x) \vee M(G_x) = (S, 2^S)$ teljesül-e. Ez azonban egy 2-matroid partíciós probléma, így az ellenőrzés polinomiális időben megtehető.

A térbeli szerkezetek esetében egyelőre nem ismertek ilyen szép eredmények. Sem a 2.4.3 Következmény, sem a 2.3.6 Tétel háromdimenziós általánosítása nem igaz. Utóbbira nevezetes ellenpélda az úgynevezett dupla banán gráf, mely az 2.6 ábrán látható.



2.6. ábra. Dupla banán gráf

Ez a gráf teljesíti a Laman tételben szereplő feltételeknek megfelelő térbeli feltételeket, azaz bármely $v \geq 3$ pontú részgráfjának legfeljebb $3v - 6$ éle van, élei száma pedig $18 = 3 \cdot 8 - 6$. Ugyanakkor nyilván nem merev a térben, hiszen a két hatodfokú pontját összekötő képzeletbeli egyenes, mint tengely körül a szerkezet attól jobbra illetve balra eső fele akadálytalanul, egymástól függetlenül elfordulhat.

Kis szigorítás mellett igaz a 2.4.3 Következmény térbeli általánosítása:

2.4.4. Állítás. *Ha egy térbeli $S = (G, E)$ szerkezet minimálisan merev, akkor bárhogy adva a gráfjához három olyan élt, melyek nem mind párhuzamosak, a kapott G' gráf lefedhető három feszítőfával.*

Belátható a Lovász-Yemini tétel alábbi, alternatív változata:

2.4.5. Tétel (Recski). *Egy síkbeli $S = (G, E)$ generikus szerkezet pontosan akkor minimálisan merev, ha bárhogy adva a gráfjához egy új x élt, a kapott G_x gráf lefedhető két feszítőfával.*

3. fejezet

Rögzítési struktúrák

3.1. Statikai merevség

A valóságban szerkezeteinket nem tekintjük merevnek minden esetben, ha a fenti definíciók teljesülnek. Ezek ugyanis megengedik, hogy a szerkezet triviális mozgásokat végezzen a síkban, illetve a térben. Az eddig látott merevség definíciók értelmében a szerkezetet eltolhatjuk tetszőleges mértékben és irányban, illetve elforgathatjuk tetszőleges mértékben bármely pont körül, mégis merev marad. Akkor fogunk statikai értelemben merevnek tekinteni egy szerkezetet, ha a csuklók egyáltalán nem tudnak elmozdulni. Ebben az esetben tehát még a triviális mozgásokat (a tér kongruenciáit) sem engedjük meg. Ebben a fejezetben merevségen a statikai értelemben vett merevséget értjük majd.

A triviális mozgások megakadályozása érdekében a szerkezetet támaszokkal rögzítjük a síkban, illetve a térben. A támaszokat a csuklóknál helyezhetjük el. A síkbeli esetben ezek lehetnek görgős támaszok, melyek csak horizontális, vagy vertikális elmozdulást engednek meg, vagy olyanok, melyek egyiket sem teszik lehetővé. Utóbbi esetünkben jellemzően úgynevezett fix csuklós támasz lesz, de létezik merev befogás is, mely nem csak elmozdulni, de elfordulni sem hagyja a befogott rudat. A fix csuklós támasz nevéből is kikövetkeztethetően olyan támasz, mely nem hagyja elmozdulni a rögzített csuklót, de az elfordulást nem akadályozza meg. A csuklók ilyen rögzítését fix rögzítésnek fogjuk nevezni. A görgős támaszok helyettesíthetőek rudakkal is. Használhatunk továbbá helyettük köteleket/láncokat valamint oszlopokat, ezek azonban csak húzóerőt illetve nyomóerőt képesek felvenni. Szakdolgozatomban kötelekkel/láncokkal, illetve oszlopokkal nem fogok foglalkozni.

Meg kell tiltanunk tehát a triviális mozgásokat. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{M}u = 0$

egyenletrendszernek nem lehet az $u = \mathbf{0}$ triviális megoldás mellett más megoldása, azaz a szerkezet minden egyes csuklójának helyben kell maradnia. Ekkor azonban a csuklók nem rögzített irányaihoz tartozó oszlopoknak lineárisan függetlennek kell lennie, máskülönben nem lehetne egyértelmű a megoldás. Tehát igaz az alábbi állítás:

3.1.1. Állítás. *Tekintsünk egy néhány csuklójánál a síkhoz/térhez rögzített S szerkezetet. Töröljük a szerkezet merevségi mátrixából azokat az oszlopokat, melyek a lerögzített csuklók rögzített irányaihoz tartoznak. A rögzített szerkezet pontosan akkor merev, ha az oszlopok törlésével kapott módosított merevségi mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.*

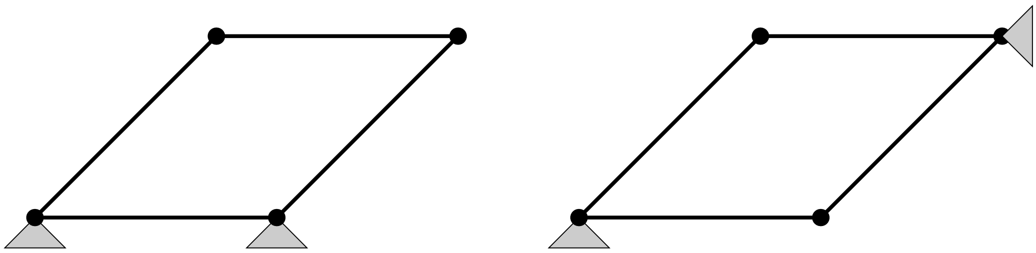
Legyen M_S az a matroid, melynek elemei az S szerkezet merevségi mátrixának oszlopai, függetlenjei pedig a valós számok teste felett lineárisan független oszlopok. Az előző állítást így a matroidok nyelvén is megfogalmazhatjuk.

3.1.2. Állítás. *Az S szerkezet néhány csuklójának fix rögzítésével kapott rendszer pontosan akkor merev, ha a rögzített csuklókhoz tartozó 2-2 oszlopot törölve a merevségi mátrixból, a megmaradt oszlopok halmaza független M_S-ben.*

Amennyiben görgős támaszokat is használunk, a következő általánosítást fogalmazhatjuk meg:

3.1.3. Állítás. *Tekintsük az S síkbeli szerkezetet. Rögzítsük az $\{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ csuklókat fixen, a $\{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ illetve a $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ csuklókat pedig olyan görgős támasszal, melyek rendre a vízszintes, illetve a függőleges elmozdulást akadályozzák meg. A l, m, n értékek bármelyike lehet nulla, de egyik csuklót sem rögzíthetjük két támasszal. Az így kapott rendszer pontosan akkor merev, ha az $\{\dot{x_{i_1}}^{(1)}, \dot{x_{i_2}}^{(1)}, \dots, \dot{x_{i_l}}^{(1)}, \dot{x_{j_1}}^{(1)}, \dot{x_{j_2}}^{(1)}, \dots, \dot{x_{j_m}}^{(1)}, \dot{x_{i_1}}^{(2)}, \dot{x_{i_2}}^{(2)}, \dots, \dot{x_{i_l}}^{(2)}, \dot{x_{k_1}}^{(2)}, \dot{x_{k_2}}^{(2)}, \dots, \dot{x_{k_n}}^{(2)}\}$ halmaz u-beli komplementeréhez tartozó oszlopok halmaza független M_S-ben.*

Támaszok alkalmazásával nem csak a már eleve infinitezimálisan merev szerkezeteket, hanem eredendően nem merev rúdszerkezeteket is merevvé tehetünk. Tekintsünk egy olyan $S = (G, p)$ síkbeli rúdszerkezetet, melyre G négy hosszú kör, így S nem lehet infinitezimálisan merev. Rögzítsük fixen a szerkezet két csuklóját! A 3.1 ábrán láthatjuk, hogy a szerkezet statikai értelemben vett merevsége szempontjából egyáltalán nem mindegy, hogy melyik két csuklót fixáljuk. Amennyiben egymás melletti csuklókat rögzítünk fixen, például a bal oldali rajzon látható módon, akkor a szerkezet nem lesz merev. Azonban ha átellenes csuklókat rögzítünk (jobb oldali rajz), úgy az összes csuklónál megtiltjuk az elmozdulásokat, így merevvé téve a szerkezetet.



3.1. ábra. Fix rögzítéssel merevvé tett szerkezet

3.2. A fixen rögzítendő csuklók minimális száma

Nem csak az lehet érdekes kérdés, hogy adott csuklókat fixen és/vagy görgős támasszal rögzítve merev lesz-e a szerkezet, hanem az is, hogy legalább hány csuklót kell rögzítenünk ahhoz, hogy a szerkezet merev legyen. A következőkben röviden áttekintjük a síkbeli, illetve térbeli esetre vonatkozó eredményeket.

3.2.1. Tétel (Lovász). *Egy síkbeli S szerkezet merevvé tételéhez szükséges fixen rögzítendő csuklók minimális száma polinomiális időben meghatározható.*

Bizonyítás. Legyen M_S az a matroid, melynek elemei az S szerkezet merevségi mátrixának oszlopai, függetlenjei pedig a valós számok teste felett lineárisan független oszlopok. Tekintsük a $P_1 = \{\dot{x}_1, \dot{y}_1\}$, $P_2 = \{\dot{x}_2, \dot{y}_2\}$, ..., $P_v = \{\dot{x}_v, \dot{y}_v\}$ párokat. M_S egy 2-polimatroidot definiál a $T = \{P_1, P_2, \dots, P_v\}$ halmazon. Mivel itt egy maximális párosítás komplementere épp egy csuklókból álló, minimálisan rögzítendő rendszert határoz meg, Lovász polimatroid tételének értelmében készen vagyunk. ∎

3.2.2. Tétel (Mansfield). *Annak eldöntése, hogy egy 3-dimenziós szerkezet adott számú csuklójának fix rögzítésével merevvé tehető-e,* ***NP****-teljes.*

4. fejezet

Minimálisan merev szerkezetek 1- és 2-dimenzióban

A következő fejezetben tüzetesebben foglalkozunk az egy- illetve kétdimenziós, minimálisan merev szerkezetekkel. Először a gyakorlatban nem túl érdekes egydimenziós esetet járjuk körül, mely segítségünkre lesz a síkbeli szerkezetek vizsgálatakor. A mai napig a témakör egyik legfontosabb nyitott kérdése a merevség háromdimenziós jellemzése. Mint láttuk, sajnos sem a Laman, sem a Lovász-Yemini tétel általánosítása nem igaz. A következőkben az egyenesen, illetve a síkban rögzített szerkezetek merevségi mátrixának maximális rangú négyzetes részmátrixait fogjuk vizsgálni. Az ilyen részmátrixok determinánsának kifejtési tagjai közvetlen kapcsolatban állnak a szerkezet merevségével, így pontosabb megismerésük elősegítheti a háromdimenziós szerkezetek merevségével kapcsolatos ismereteink bővítését.

4.1. Minimálisan merev egydimenziós szerkezetek

Egy egydimenziós szerkezet $\mathbf{M}$ merevségi mátrixa $e \times v$ méretű, és a k-adik sor l-edik elemét az alábbi módon kaphatjuk meg:

$$m_{k,l} = \begin{cases} x_i - x_j & \text{ha a } k \text{ él az } i \text{ és a } j \text{ pontok között fut és } l = i \\ x_j - x_i & \text{ha a } k \text{ él az } i \text{ és a } j \text{ pontok között fut és } l = j \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol $k = 1, 2, \ldots, e$, $l = 1, 2, \ldots, v$ és x_i az i-edik pont helyét (vagyis az x koordinátáját) jelöli.

4.1.1. Állítás. *Egy egydimenziós S szerkezet pontosan akkor merev, ha G gráfja összefüggő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S merev. Ha a szerkezet G gráfja nem összefüggő, akkor bármely kis ϵ esetén két különböző komponenshez tartozó csuklókat ellentétes irányban mozgassunk $\epsilon/2$ távolságra. Az esetleges további komponenseket hagyjuk helyben. Ekkor a rudak hosszának megtartásával a két mozgatott komponens csuklóinak távolsága megváltozik, azaz két ϵ-közeli realizáció lehet ekvivalens úgy, hogy nem kongruensek. Ekkor viszont a szerkezet nem lokálisan merev, így infinitezimálisan sem merev.

Megfordítva, tegyük fel, hogy G összefüggő. Azt kell belátnunk, hogy ekkor S merev, azaz a szerkezethez tartozó M merevségi mátrix $r(M)$ rangja $v-1$, ahol v az S csuklóinak száma. Nyilvánvaló, hogy $r(M) \leq v$, hiszen M-nek v oszlopa van. Sőt, a rang nem lehet v sem, mivel az oszlopokat összeadva nullvektort kapunk. Belátjuk, hogy M-nek mindig van $v-1$ független oszlopvektora, sőt, bármelyik $v-1$ független rendszert alkot. A gráf összefüggő, így van feszítőfája. Tekintsünk egy tetszőleges feszítőfát és töröljük M-ből az ehhez nem tartozó élek sorait. A kapott M' mátrixnak pontosan $v-1$ sora és v oszlopa van. S egydimenziós, így a mátrix elemeinek abszolútértéke az élek hosszát mutatja.

Készítsük most el azt a segédgráfot S-hez, melyben a szomszédsági kapcsolatok az eredetivel megegyezőek, de minden távolság egységnyi. Továbbá irányítsunk meg minden élt a nagyobb koordinátájú csuklót reprezentáló végpontja irányába. Ekkor a fentihez hasonlóan kapott $e \times (v-1)$ méretű M'' mátrix épp az irányított gráf incidenciamátrixa. Ismert, hogy egy irányított gráf él-pont incidenciamátrixának sorai akkor és csak akkor összefüggőek, ha a gráfban irányítatlan értelemben van kör. Mivel esetünkben az incidenciamátrixhoz tartozó gráf feszítőfa, azt kapjuk, hogy a sorok függetlenek. Ekkor azonban M' sorai is függetlenek, hiszen azok csak konstans szorzó erejéig különböznek M'' soraitól. Ebből adódóan $r(M) \geq v-1$, tehát $r(M) = v-1$ adódik, vagyis S merev. Továbbá ebből következik az is, hogy M bármely $v-1$ oszlopa független. ∎

Az egydimenziós esetben egy minimálisan merev szerkezetnek $v-1$ db éle van, tehát az összefüggőség miatt ekkor a szerkezet T gráfja fa. Egy tetszőleges pontot rögzítve a szerkezet összes pontjának helyzete meghatározott. Ha töröljük az M mátrixból a rögzített pont oszlopát, az így kapott W mátrix oszlopai függetlenek, így W nemszinguláris. Mivel $det(W) = \pm \prod_{\{i,j\} \in T}(x_i - x_j)$, a nemnulla kifejtési tagok száma 2^{v-1}. Egy kifejtési tag általános alakja így $\pm \prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i}$, ahol I az $\{1, 2, \ldots, v\}$ részhalmaza, valamint $\sum_{i \in I} \alpha_i = v-1$. Az $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v]$ szám v-est a kifejtési tag profiljának fogjuk nevezni.

Tekintsünk egy minimálisan merev $S = (T, E)$ egydimenziós szerkezetet és egy a hozzá tartozó M merevségi mátrixból valamely oszlop törlésével kapott W mátrixot.

4.1.2. Lemma. *Legyen $A = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v]$ egy olyan nem negatív egészekből álló szám v-es, melyre $\sum_{i \in I} \alpha_i = v - 1$ teljesül. Ekkor A előáll $det(W)$ valamely kifejtési tagjának profiljaként akkor és csak akkor, ha létezik T-nek olyan irányítása, hogy a pontok kifokára teljesül, hogy $d_{ki}(x_i) = \alpha_i$ $\forall i$-re.*

4.1.3. Tétel. *Polinomiális időben eldönthető, hogy egy adott $A = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v]$ nem negatív egészekből álló szám v-es, melyre $\sum_{i \in I} \alpha_i = v - 1$ teljesül, előáll-e $det(W)$ valamely kifejtési tagjának profiljaként.*

Bizonyítás. Készítsük el a H irányított gráfot a T-fából a következőképpen: duplázzuk meg T minden élét, majd az egyiket az egyik, a másikat a másik végpont felé irányítsuk meg. Ezáltal biztosítjuk, hogy az eredeti fa éleinek megirányításával kapott bármely irányított gráf részgráfja lesz H-nak. A kapott gráf $2v - 2$ elemű élhalmazán definiáljunk két matroidot az alábbiak szerint:
Az M_1 matroid egy olyan partíciós matroid, mely v darab uniform matroid direkt összege. Az egyes uniform matroidok $\forall i \in \{1, 2, \ldots v\}$-re az i-ből kilépő élek halmazán vannak értelmezve és rangjuk α_i. Az M_2 matroid a H gráf körmatroidja.
Ekkor M_1 bázisai épp az irányított élek olyan halmazai, melyekre $\alpha_i = d_{ki}(x_i)$, M_2 bázisai pedig a feszítőfák H-ban. A két matroid közös bázisai tehát épp az általunk keresett irányítást adják, mely a 4.1.2 Lemma alapján épp azt jelenti, hogy A előáll $det(W)$ valamely kifejtési tagjának profiljaként. Azt kell tehát csak eldöntenünk, hogy van-e a két matroidnak közös bázisa. Ez viszont Edmonds matroid partíciós algoritmusával polinomiális időben eldönthető. ■

4.2. Minimálisan merev kétdimenziós szerkezetek

Egy kétdimenziós szerkezet $\mathbf{M}$ merevségi mátrixa $e \times 2v$ méretű, és a k-adik sor l-edik elemét az alábbi módon kaphatjuk meg:

$$m_{k,l} = \begin{cases} x_i - x_j & \text{ha a } k \text{ él az } i \text{ és a } j \text{ pontok között fut és } l = i \\ x_j - x_i & \text{ha a } k \text{ él az } i \text{ és a } j \text{ pontok között fut és } l = j \\ y_i - y_j & \text{ha a } k \text{ él az } i \text{ és a } j \text{ pontok között fut és } l = v + i \\ y_j - y_i & \text{ha a } k \text{ él az } i \text{ és a } j \text{ pontok között fut és } l = v + j \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol $k = 1, 2, \ldots, e$, $l = 1, 2, \ldots, 2v$ és x_i illetve y_i az i-edik pont x illetve y koordinátáját jelöli.

Korábban láttuk, hogy egy kétdimenziós szerkezet pontosan akkor merev, ha a merevségi mátrixának rangja $2v - 3$, valamint pontosan akkor minimálisan merev, ha merev, és $2v - 3$ rúdból áll. Tekintsünk egy tetszőleges S minimálisan merev kétdimenziós szerkezetet. A merevségi mátrixa $(2v - 3) \times 2v$ méretű. Az egydimenziós esethez hasonlóan vizsgáljuk meg M maximális rangú négyzetes részmátrixai determinánsának kifejtési tagjait. Mivel M első v és utolsó v oszlopának összege épp a nullvektor, akkor kapunk maximális rangú négyzetes részmátrixot, ha az első v oszlop közül $c \in \{1, 2\}$ darab tetszőleges oszlopot törlünk a mátrixból, a második v oszlop közül pedig $3 - c$ darabot. Az oszlopok törlése a megfelelő csuklók rögzítésének felel meg. Ha például töröljük az i-edik, a j-edik, valamint a k-adik oszlopot, ahol $i, j \leq v$, $k > v$ és $i \neq j$, akkor ezzel az i-edik és a j-edik csukló vízszintes, továbbá a $k - v$-edik csukló függőleges elmozdulását akadályozzuk meg. A szerkezet szempontjából az oszlopok törlése tehát vagy 3 darab görgős támasszal, vagy, amennyiben $k - v = i$ vagy $k - v = j$, egy görgős támasszal és egy fix csuklóval történő rögzítést jelent. A továbbiakban az utóbbit, vagyis a görgős támasszal és fix csuklóval történő rögzítést vizsgáljuk. Jelöljük $W_{i,j}$-vel azt a négyzetes részmátrixot, melyet a 3 választott oszlop törlésével kapunk.

4.2.1. Tétel. *Ha egy $2v-3$ élű, v pontú G gráf egy S minimálisan merev kétdimenziós szerkezet gráfja, akkor bármely két különböző $i, j \leq v$ egészre $E(G)$ felbontható egy X és egy Y élhalmazra úgy, hogy $E = X \cup Y$, X élei fát alkotnak, Y élei pedig olyan kétkomponensű erdőt, melyben az i és j csúcsok eltérő komponensben vannak.*

4.2.2. Következmény. *Ha egy $2v-3$ élű, v pontú G gráf egy S minimálisan merev kétdimenziós szerkezet gráfja, akkor bármely $f \in E(G)$ él megduplázásával kapott gráf felbontható két fára.*

A továbbiakban tekintsük azt a speciális esetet, amikor i és j szomszédosak. Húzzuk össze az $\{i, j\}$ élt. Az így kapott G' gráfnak $N = v - 1$ pontja és $2(N - 1) = 2v - 4$ éle van. A fenti módon kapott $W'_{i,j}$ mátrix determinánsának nemnulla kifejtési tagjai az $(x_i - x_j)$ tényezőt figyelmen kívül hagyva ekkor épp $E(G')$ két fára történő felbontását adják. Egy kifejtési tag általános alakja így $\pm \prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i} \prod_{j \in J} y_j^{\beta_j}$, ahol I, J az $\{1, 2, \ldots, N\}$ részhalmaza, valamint $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} \beta_j = N - 1$. Az $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N]$ szám $2N$-est egy ilyen kifejtési tag profiljának fogjuk nevezni.

4.2.3. Lemma. *Legyen* $[A,B] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N]$ *egy olyan nem negatív egészekből álló szám 2N-es, melyre* $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} \beta_j = N - 1$*. Ekkor* $[A,B]$ *előáll* $det(W')$ *valamely kifejtési tagjának profiljaként akkor és csak akkor, ha* $E(G') = T_1 \cup T_2$*, ahol a* T_1*,* T_2 *fáknak létezik olyan irányítása, hogy* $d_{ki}(x_i) = \alpha_i$ $\forall i$*-re* T_1*-ben és* $d_{ki}(y_j) = \beta_j$ $\forall j$*-re* T_2*-ben.*

Vagyis a 4.1.2 Lemmának igaz a kétdimenziós megfelelője. Ugyanakkor a 4.1.3 Tétel kétdimenziós általánosítása sokáig nyitott probléma volt és egészen friss eredmény, hogy amennyiben $P \neq NP$, az alábbi sejtés nem igaz:

4.2.4. Sejtés (Recski). *Polinomiális időben eldönthető, hogy egy adott* $[A,B] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N]$ *nem negatív egészekből álló szám 2N-es, melyre* $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} \beta_j = N - 1$*, előáll-e* $det(W')$ *valamely kifejtési tagjának profiljaként.*

4.2.5. Tétel (Olivier Durand de Gevigney, 2013). *Annak eldöntése, hogy egy adott* $[A,B] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N]$ *nem negatív egészekből álló szám 2N-es, melyre* $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} \beta_j = N - 1$*, előáll-e* $det(W')$ *valamely kifejtési tagjának profiljaként,* ***NP****-teljes.*

5. fejezet

Épületek merevítése átlós rudakkal

A gyakorlatban előforduló rúdszerkezetekben rengeteg függőleges, vízszintes, illetve átlós rudat találunk. Sok olyan szerkezet épül, melyek egyes síkmetszetei (legalább részben) olyan rudakból álló négyzethálós alakzatok, melyeket néhány átlós rúd tesz merevvé. Az ilyen szerkezetek egyszerűen megépíthetőek és rengeteg helyen előfordulnak. A következő fejezetben először megvizsgáljuk, hogy egy négyzethálós rúdszerkezet merevítéséhez hány átlós rúdra van szükségünk, majd ezt felhasználva az egyszintes épületek esetét is megnézzük.

5.1. Rudakból álló négyzetháló merevítése

Tekintsünk egy olyan S kétdimenziós rúdszerkezetet, ahol a rudak szabályos $x+1 \times y+1$-es négyzethálót alkotnak. Ekkor minden rúdsorban pontosan $x+1$ csukló és x rúd és minden, rudakból álló oszlopban pontosan $y+1$ csukló és y rúd szerepel, tehát a szerkezet $(x+1)y+(y+1)x = 2xy+x+y$ rúdból és $(x+1)(y+1)$ csuklóból áll. Azt fogjuk mondani, hogy egy ilyen szerkezet x sorból és y oszlopból áll, ahol például a t-edik soron a t-edik és $t+1$-edik rúdsorokat és az őket összekapcsoló rudakat és csuklókat értjük. Az alábbiakban jellemezzük az ilyen típusú szerkezetek merevségét és megadjuk a választ arra a kérdésre, hogy legalább hány átlós rudat kell hozzátennünk a szerkezethez, hogy az merev legyen.

5.1.1. Tétel (Bolker és Crapo). *Tekintsünk egy olyan síkbeli S négyzethálós rúdszerkezetet, mely x sorból és y oszlopból áll. Merevítsük a szerkezetet néhány, az egyes négyzetekben elhelyezett átlós rúddal. A $G=(V,E)$ gráf legyen olyan, hogy $V=\{v_1,v_2,\dots,v_x,w_1,w_2,\dots,w_y\}$ és $(v_iw_j)\in E$ pontosan akkor, ha a szerkezet i-edik sorának és j-edik oszlopának metszetében lévő négyzetben van átlós merevítő rúd. A szerkezet a felhasznált átlós merevítő rudakkal akkor és csak akkor merev, ha a G gráf összefüggő.*

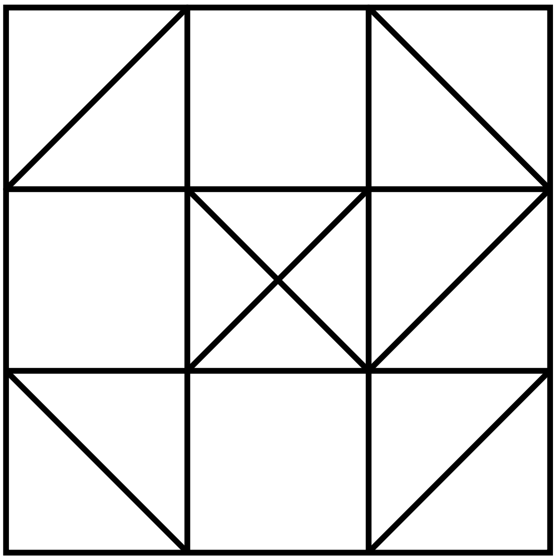
Bizonyítás. Külső erők hatására a rúdsorok elmozdulhatnak egymáshoz képest vízszintesen, az oszlopok pedig függőlegesen. A szerkezet végső deformációját jellemezhetjük az egyes szomszédos rúdosorok egymáshoz képest mért vízszintes, illetve a rudak szomszédos oszlopainak egymáshoz mért függőleges elmozdulásával, azaz $x+y$, akár páronként különböző számmal. Ha valamely négyzetben elhelyezünk egy átlós rudat, akkor a négyzet sorához tartozó két rúdsorban, illetve a négyzet oszlopához tartozó rudak oszlopaiban lévő csuklók vízszintes, illetve függőleges elmozdulása már nem lehet különböző mértékű. Ha ugyanezen sor egy másik négyzetében is elhelyezünk egy átlós rudat, akkor ezzel azon négyzet oszlopainak csuklóit is fixáltuk, azok függőleges elmozdulása is meg fog egyezni az átlós rudak sorának rúdsorai egymáshoz képest vett vízszintes elmozdulásával. Hasonlóan építkezve egyre több sor és oszlop elmozdulását kapcsoljuk össze, azaz a rudak ezen oszlopai és sorai már csak együttesen, vízszintesen, illetve függőlegesen is csak azonos mértékben, merevtestszerűen tudnak elmozdulni. Az átlós rudak a G páros gráf éleinek felelnek meg, a gráf pontjai pedig a megfelelő soroknak illetve oszlopoknak. A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy mindaddig, amíg van legalább két különböző komponense G-nek, a megfelelő komponensek pontjaihoz tartozó sorok, illetve oszlopok elmozdulása komponensenként eltérhet. Így pontosan akkor lesz merev a szerkezet, ha G összefüggő. ∎

5.1.2. Megjegyzés. *Egy síkbeli négyzethálós szerkezet átlós rúdjai által a fent ismertetett módon elkészített gráfot a négyzethálós szerkezet merevítési gráfjának nevezzük.*

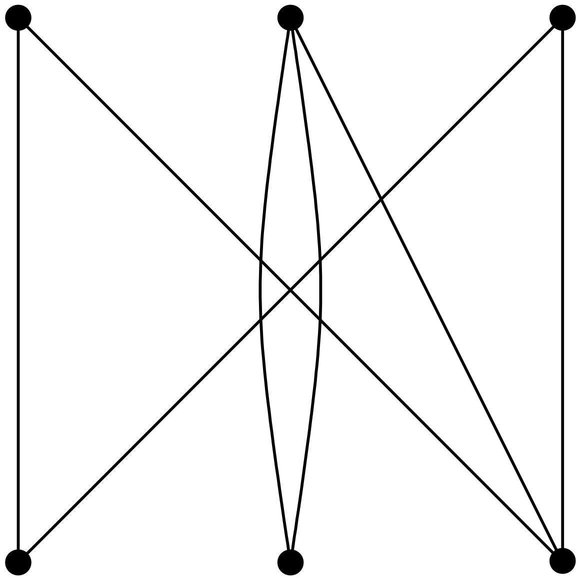
5.1.3. Következmény (Bolker és Crapo). *Egy síkbeli, x sorból és y oszlopból álló S négyzethálós rúdszerkezetet merevvé tételéhez minimum $x+y-1$ átlós rúd szükséges. Ha pontosan $x+y-1$ átlós merevítő rudat használunk, úgy a szerkezet akkor és csak akkor lesz merev, ha a szerkezethez a fenti módon hozzárendelt gráf feszítőfa.*

Tekintsük az 5.1 ábrán látható négyzethálós rúdszerkezetet, melyet néhány átlós rúddal próbáltunk merevvé tenni. Ha elkészítjük a szerkezethez tartozó gráfot (5.2 ábra), rögtön adódik az 5.1.1 tétel értelmében, hogy a szerkezet merev.

A (2,2) négyzetben (azaz a második sor és a második oszlop metszetében) két átlós rúd is szerepel, ám ez bizonyos értelemben túlzott biztonság, hiszen bármelyik elhagyása mellett is összefüggő maradna a gráf, lévén párhuzamos élekről van szó. Ugyanakkor bizonyos szempontból nem felesleges az átlós rudak duplázása.



5.1. ábra. Átlós rudakkal merevített rúdszerkezet



5.2. ábra. A szerkezet merevítési gráfja

Mivel a szerkezetet hét darab átlós rúddal merevítettük, miközben a merevítéshez szükséges minimális rudak száma az 5.1.3 Következmény értelmében öt, elhagyható két (nem tetszőleges) rúd a merevség megőrzése mellett. Ez az észrevétel egyszerűen abból következik, hogy egy összefüggő gráfból is mindaddig elhagyhatunk úgy éleket, hogy összefüggő maradjon, míg a gráf nem feszítőfa, azaz nem körmentes. Azaz bármely kör bármely élének megfelelő átlós rudat kivehetjük a szerkezetből. Az olyan éleket, melyek egyetlen körnek sem elemei, kritikus éleknek nevezzük, mivel elhagyásukkal két komponensre esne szét a gráf, illetve a hozzátartozó rúd nélkül már nem lenne merev a szerkezet. Az ábrán látható példában a (2,3) él az egyetlen kritikus él, azonban ha a (2,2) négyzetben csak egy átlós rudat helyeznénk el, az is kritikus lenne. A biztonság növelése érdekében tehát hasznos az egy négyzethez tartozó mindkét átlós rúd beépítése. Valóban, rengeteg rúdszerkezetben láthatunk egy négyzeten belül két átlós rudat is. Persze a rudak számának növelése nem csak ebből a szempontból ad fokozott biztonságot, hiszen a szerkezet teherbírását is növeli.

5.2. Egyszintes épületek merevítése

Tekintsünk egy egyszintes, rudakból és csuklókból álló térbeli szerkezetet, mely egy x sorból és y oszlopból álló négyzethálós rúdszerkezetetből, és minden csuklója alatt egy függőleges rúdból áll. Utóbbi rudakat fixen rögzítjük a talajhoz. Gyakorlati szempontból az ilyen típusú szerkezetek merevségének kérdése jóval fontosabb, mint a síkbeli négyzethálós szerkezeté. A merevítést ezúttal is átlós rudak hozzáadásával végezzük, de most a négyzetháló négyzeteibe helyezhető átlós rudakon túl a szomszédos függőleges rudak által meghatározott négyzetekbe is helyezhetünk merevítő rudakat. Az 5.1.1 Tétel értelmében $x+y-1$ átlós rúd megfelelő elhelyezésével merevíthetjük a sík négyzethálót, de a teljes szerkezet merevségéhez itt több kell. Nem elég csak a vízszintes négyzethálót merevíteni, hiszen a függőleges négyzetek merevítése nélkül a szerkezet könnyen elmozdulhat (eldőlhet). Ha egymás melletti függőleges négyzetek egyikében elhelyezünk egy átlós rudat, úgy az összes függőleges négyzet elmozdulását megakadályozzuk ennek az átlós rúdnak a síkjában. Ha a négy külső függőleges fal mindegyikében elhelyezünk egy átlós rudat, azzal a négy sík páronkénti metszetében lévő rudak (azaz az épület sarkainál lévő függőleges rudak) elmozdulását mindkét fal síkjában megakadályozzuk, ezáltal a síkbeli négyzethálós szerkezetünk négy sarokpontját fixáljuk a térben. Ha a négyzethálós szerkezetben az 5.1.1 Tételnek megfelelően helyezünk el $x+y-1$ merevítő rudat, úgy értelemszerűen a teljes szerkezetünk merev lesz. A következő eredmények arra a kérdésre adnak választ, hogy csökkenthető-e a rudak száma a külső falakban, illetve a négyzethálós tetőszerkezetben a merevség megtartása mellett.

5.2.1. Definíció. *Legyen egy $G = (V, E)$ páros gráf két pontosztálya V_1 és V_2. A páros gráfhoz tartozó arányon ekkor a $|V_1| : |V_2|$ arányt értjük. Egy kétkomponensű erdőt szimmetrikusnak nevezünk, ha a komponenseihez, mint páros gráfokhoz tartozó arány megegyezik. Egy kétkomponensű erdőt aszimmetrikusnak nevezünk, ha nem szimmetrikus.*

5.2.2. Tétel. *Egy, a négy sarokpontjánál a síkhoz rögzített, x sorból és y oszlopból álló négyzethálós szerkezet merevvé tételéhez legalább $x + y - 2$ átlós merevítő rúd szükséges. Egy $x + y - 2$ rúdból álló halmaz pontosan akkor merevíti a szerkezetet, ha a merevítési gráf aszimmetrikus kétkomponensű erdő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a szerkezet merev. A négyzethálós szerkezet sorai egymáshoz képest vett elmozdulásainak előjeles összege nulla kell legyen, hiszen a négy sarokpontot fixáltuk. Hasonlóan, a négyzethálós szerkezet oszlopai egymáshoz képest vett elmozdulásainak előjeles összege is nulla. Az egyes átlós rudak további

egyenleteket jelentenek: a hozzájuk tartozó sor és oszlop elmozdulását kapcsolják össze, a rúd beépítése után ezen elmozdulások egyenlőek lesznek. Mivel a szerkezet merev, a kapott egyenletrendszer egyetlen megoldása az azonosan nulla lehet, hiszen merev szerkezet esetén nem mozdulhat el egyik csukló, illetve rúd sem. Ebből következik, hogy a két, elmozdulások előjeles összegére vonatkozó egyenlet mellett legalább további $x+y-2$ egyenletre van szükségünk, ez pedig azt jelenti, hogy a szerkezetet legalább $x+y-2$, vízszintes síkbeli átlós rúddal kell merevítenünk.
Tegyük fel, hogy pontosan $x+y-2$ merevítő rudat használunk. Az előző fejezetben láttuk, hogy ha a merevítési gráf tartalmaz kört, úgy bármely, körbeli élhez tartozó átlós rúd elhagyható, azaz nem kritikus. Mivel esetünkben mind az $x+y-2$ rúd kritikus (hiszen máskülönben kevesebb rúd is elég lenne a merevség eléréséhez, ami ellentmondana az előbbieknek), a merevítési gráf körmentes, azaz kétkomponensű erdő.
Most tegyük fel, hogy az $x+y-2$ merevítő rúd kétkomponensű erdőt határoz meg a merevítési gráfban, de a kapott szerkezet nem merev. Belátjuk, hogy a kétkomponensű erdő szimmetrikus. Mivel a szerkezet nem merev, az egenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása. Tekintsük az egyenletrendszer mátrixos alakját. Rendezzük úgy az egyenleteket, hogy a két, elmozdulások előjeles összegére vonatkozó egyenlet kerüljön alulra. Az utolsó előtti sor a sorok, az utolsó az oszlopok egymáshoz képest vett elmozdulásainak előjeles összegét leíró egyenlet legyen. Az együtthatókból alkotott mátrix sorainak vegyük egy olyan lineáris kombinációját, mely a nullvektort adja. Feltehető, hogy a lineáris kombinációban a sorok együtthatói egészek. Megmutatjuk, hogy ha a merevítési gráfhoz tartozó arány $x:y$, akkor a lineáris kombinációban az utolsó két sor együtthatóinak aránya $-y:x$. Mivel az első $x+y-2$ sor mindegyikében egy darab 1-es és egy darab -1-es szerepel, ezen sorok együtthatóitól függetlenül az első $x+y-2$ sor lineáris kombinációjában az elemek összege nullát ad. Az utolsó két sor rendre x darab 1-est és y darab -1-est tartalmaz, így ha együtthatóik aránya nem $-y:x$, a lineáris kombináció által adott vektor elemeinek összege nem nulla, így az biztosan nem lehet a nullvektor. Mivel a merevítési gráf kétkomponensű erdő, az egyenletrendszer mátrixa blokkdiagonális alakra hozható, ahol az első z_1 darab sor az egyik komponenshez, a következő z_2 darab sor pedig a másik komponenshez tartozó átlós rudaknak felel meg. Az utolsó két sor továbbra is az elmozdulások előjeles összegére vonatkozó egyenletekhez tartozik. Ha valamelyik komponenshez tartozó arány $a:b$ lenne, és ez nem egyezne meg a merevítési gráf $x:y$ arányával, akkor az előző érvelést arra a komponensre elismételve, a blokkdiagonális felépítés miatt az utolsó két sor arányára azt kapnánk, hogy annak $-b:a$-nak kell lennie. Ebből adódik tehát, hogy mindkét komponens

aránya meg kell, hogy egyezzen a merevítési gráf $x : y$ arányával, azaz a merevítési gráfnak szimmetrikusnak kell lennie.
Tegyük most fel, hogy a merevítési gráf szimmetrikus. Jelölje a két komponenst G_1 és G_2. Legyen a komponensek aránya $x_1 : y_1$, illetve $x_2 : y_2$. Tegyük fel, hogy az összes, G_1-hez tartozó változó értékét c_1-re, és az összes, G_2-höz tartozó változó értékét c_2-re állítjuk. Ekkor az egyenletrendszer első $x + y - 2$ egyenlete automatikusan teljesül. Az utolsó két egyenlet akkor teljesül, ha $x_1c_1 + x_2c_2 = 0$, illetve $y_1c_1 + y_2c_2 = 0$. Átrendezés után azt kapjuk, hogy az egyenletek akkor teljesülnek, ha $x_1y_2 = y_1x_2$, azaz ha $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$. Ez viszont épp akkor teljesül, ha a merevítési gráf szimmetrikus, amit feltettünk.
Beláttuk tehát, hogy $x + y - 2$ rúd felhasználása esetén a szerkezet pontosan akkor nem merev, ha a merevítési gráf aszimmetrikus kétkomponensű erdő. Ebből következik a tétel állítása, azaz hogy a szerkezet akkor és csak akkor merev, ha a merevítési gráf szimmetrikus kétkomponensű erdő. ∎

5.2.3. Megjegyzés. *Egy x sorból és y oszlopból álló, négy sarokpontjánál rögzített négyzethálós szerkezetet matroidokkal is jellemezhetünk. Legyen $M_{x,y}$ az a matroid, melynek alaphalmaza az összes négyzet $x \cdot y$ méretű halmaza. Egy négyzethez két állapotot társítunk: vagy teszünk bele átlós merevítő rudat, vagy nem. Legyen egy $x+y-2$ négyzetből álló halmaz a matroid bázisa, ha minden négyzetbe átlós rudat helyezve a szerkezetünk merev. Az $M_{x,y}$ matroidot tehát megadhatjuk a szerkezet összes megfelelő minimális merevítőrendszerével, mint a matroid bázisaival. Ha a négy sarkot nem rögzítjük, a szerkezethez a $K_{x,y}$ teljes páros gráf körmatroidját rendelhetjük.*

5.2.4. Tétel (Whiteley). *Rögzítsük egy négyzethálós rúdszerkezet minden csuklóját függőleges rúddal a talajhoz. A kapott szerkezetet három függőleges merevítő rúd használatával akkor és csak akkor tehetjük merevvé, ha azokat nem mind párhuzamos falakban helyezzük el, továbbá a síkbeli négyzethálós szerkezetben elhelyezett átlós rudak merevítési gráfja összefüggő.*

5.2.5. Megjegyzés. *A függőleges síkokban elhelyezett merevítő rudak száma tehát csökkenthető, de ennek az az ára, hogy a vízszintes síkban lévő merevítő rudak számát meg kell növelnünk.*

5.2.6. Megjegyzés. *Minimum három, függőleges síkban elhelyezett merevítő rúd szükséges a szerkezet merevségéhez. Ha csak két rudat használunk, a szerkezet nem képes ellenállni bizonyos erőhatásoknak. Például egy olyan vízszintes erőhatás, mely a négyzethálós szerkezet egyik sarokpontjánál, az egyik átlós rúddal nem merevített fal irányában hat, a szerkezet csavarodását okozhatja.*

5.2.7. Megjegyzés. *Rögzítsük egy négyzethálós rúdszerkezet minden csuklóját függőleges rúddal a talajhoz. A kapott szerkezetet merevvé tehetjük, ha minden függőleges falban elhelyezünk egy átlós rudat. Ekkor minden csukló mindkét irányú elmozdulását megakadályozzuk, tehát a szerkezetünk valóban merev. A felhasznált átlós rudak száma legalább* $x+y+2$*, azaz a függőleges falak száma. Tehát akár vízszintes merevítő rudak nélkül is merevíthetjük az egyszintes épületet, de ekkor is ugyanúgy minimum* $x+y+2$ *átlós rúdra van szükségünk, mint a korábban látott esetekben.*

Irodalomjegyzék

[1] Recski András: *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and in Statics*, Akadémiai Kiadó, 1989

[2] Gáspár Zsolt, Tarnai Tibor: *Statika*, 2002

[3] Recski András: *Is this matrix singular? part 2*, 7th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and its Applications, Kyoto, 2011

[4] Jordán Tibor, Recski András, Szeszlér Dávid: *Rendszeroptimalizálás*, Typotex, 2004

[5] Jordán Tibor: *Kombinatorikus algoritmusok előadásjegyzet*
http://www.cs.elte.hu/ jordan/kombalg/JEGYZET2007osz.pdf, 2007

[6] B. Jackson, Jordán Tibor: *A sufficient connectivity condition for generic rigidity in the plane*, EGRES Technical Report No. 2008-01, 2008

[7] L. Lovász, Y. Yemini: On generic rigidity in the plane, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 1982

[8] G. Laman: On graphs and rigidity of plane skeletal structures, *J. Engineering Math*, 4 (1970), 331-340.

[9] B. Jackson: *Notes on the Rigidity of Graphs*, Levico Conference Notes, 2007

[10] O. D. de Gevigney: Decomposition into two trees with orientation constraints, *arXiv:1304.3613*, 2013