Véletlen közegű kizárási folyamat, hidrodinamikai határátmenet

Diplomamunka

Írta

Horváth Ajna

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Nagy Katalin

Egyetemi docens

Differenciálegyenletek Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetõmnek, Nagy Katalinnak a sok segítségért, türelemért és észrevételért, amit a dolgozatom elkészítéséhez nyújtott. Külön köszönettel tartozom Besenyei Ádámnak a LaTeX programban nyújtott segítségéért.

Valamint hálás vagyok mindazoknak, akik a dolgozatom elkészültéhez még hozzájárultak.

1. Bevezetés

Diplomamunkám témája az operátorfélcsoportok elmélete és annak alkalmazása egydimenziós véletlen közegű bolyongásra vonatkozó centrális határeloszlás tétel és egydimenziós véletlen közegű kizárási folyamat hidrodinamikai limeszének bizonyítására.

Dolgozatom második fejezetében alapvető fogalmak és tételek szerepelnek az operátorfélcsoportok elméletéből. A fejezet két fő tétele a *Hille-Yosida* és a *Trotter-Kurtz tétel*. A dolgozat harmadik fejezetében megmutatom, hogy a *Trotter-Kurtz tétel* felhasználható egydimenziós egyszerű szimmetrikus véletlen közegű bolyongásra vonatkozó centrális határeloszlástétel bizonyítására, és ezt felhasználva az egydimenziós egyszerű szimmetrikus véletlen közegű kizárási folyamat hidrodinamikai limeszét is bizonyíthatom. A kizárási folyamat hidrodinamikai limesze a sztochasztikus folyamatok, a parciális differenciálegyenletek és a statisztikus fizika elméletének határterületéhez tartozik. A fejezetben bizonyított tétel szerint megfelelő feltételek mellett az egydimenziós egyszerű szimmetrikus véletlen közegű kizárási folyamat diffúzív módon átskálázott sűrűségi mezőjének makroszkopikus viselkedését egy lineáris hővezetési egyenlettel lehet leírni. A harmadik fejezetben az operátorfélcsoportok elméletének fogalmai és tételei mellett felhasználok alapvető fogalmakat és tételeket a sztochasztikus folyamatok elméletéből is. A második fejezet megírásához főként a [3] könyv első fejezetét használtam, a harmadik fejezet eredményei a [7] cikkből valók. A dolgozatomban szereplő bizonyítások sok esetben részletesebbek, mint a [3] könyv és a [7] cikk bizonyításai.

A [7] cikk és dolgozatom harmadik fejezetének érdekessége, hogy egydimenziós esetben, ha a közeg független azonos eloszlású, a félcsoport elméletet - azon belül is a *Trotter-Kurtz tételt* felhasználva - elemi módon bizonyítható a diffúzív módon átskálázott véletlen közegű bolyongás konvergenciája egy megfelelő Wiener folyamathoz. E folyamat konvergenciája korábban is ismert volt (lásd pl. [1] és [4] cikkeket). Azonban az ott szereplő bizonyítások jóval bonyolultabbak, az előbbi perturbáció elméletet használ, az utóbbiban pedig általános invarianciaelv bizonyítása történik reverzibilis Markov folyamatok függvényeinek integráljaira, a bolyongás konvergenciája ebből adódik.

2. Operátorfélcsoportok, elméleti háttér

Ebben a fejezetben alapvető fogalmak és tételek szerepelnek az operátor félcsoportok elméletéből a tételek java részének bizonyításaival együtt. A fejezet két fő tétele a *Hille-Yosida* és a *Trotter-Kurtz tétel.* Az előbbi szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy Banach téren értelmezett lineáris operátor valamely erősen folytonos kontrakció félcsoport generátora legyen. Az utóbbi pedig egy approximációs tétel, amely szerint erősen folytonos kontrakció félcsoportok konvergenciájának bizonyításához elég a generátorok konvergenciáját bizonyítani megfelelő közelítő függvénysorozat mentén. E fejezet megírásához főként a [3] könyv első fejezetét használtam.

2.1. Alapfogalmak

2.1.1. Definíció. *Legyen $\boldsymbol{L}$ valós Banach tér $\|\cdot\|$ normával. $\{T(t) : t \geq 0\}$ korlátos lineáris operátorok egy-paraméteres családját $\boldsymbol{L}$-en félcsoportnak nevezzük, ha $T(0) = I$ és $T(s+t) = T(s)T(t)$ minden $s, t \geq 0$ esetén.*

2.1.2. Definíció. *Az $\boldsymbol{L}$ Banach téren értelmezett $\{T(t)\}$ félcsoportot erősen folytonosnak nevezzük, ha*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} T(t)f = f \qquad \forall f \in \boldsymbol{L}. \tag{1}$$

2.1.3. Definíció. *A $\{T(t) : t \geq 0\}$ korlátos lineáris operátorok egy-paraméteres családját az $\boldsymbol{L}$ Banach téren erősen folytonos kontrakció félcsoportnak nevezzük, ha igazak rá az előbbi tulajdonságok és $\|T(t)\| \leq 1$ minden $t \geq 0$ esetén.*

2.1.4. Definíció. *Legyen $B \in \boldsymbol{L}$ korlátos, lineáris operátor és*

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k B^k, \qquad t \geq 0. \tag{2}$$

Egy egyszerű számításból adódik, hogy $e^{(s+t)B} = e^{sB}e^{tB}$ minden $s, t \geq 0$-ra, másrészt $e^{t0} = I$. Ezért $\{e^{tB}\}$ félcsoport, amiről belátható, hogy erősen folytonos. Felírható ugyanis, hogy

$$\|e^{tB}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \|B^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \|B\|^k = e^{t\|B\|}, \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

amiből

$$\|(e^{tB} - I)\| \leq e^{t\|B\|} - 1 \xrightarrow{t \to 0} 0$$

Így $\{e^{tB}\}$ valóban erősen folytonos félcsoport.

2.1.5. Állítás. *Legyen $\{T(t)\}$ erősen folytonos félcsoport az $\boldsymbol{L}$ téren. Ekkor létezik $M \geq 1$ konstans és $\omega \geq 0$, hogy*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t \geq 0. \tag{4}$$

Bizonyítás. /2.1.5. állítás bizonyítása/ Belátjuk először, hogy létezik $M \geq 1$ és $t_0 > 0$ úgy, hogy $\|T(t)\| \leq M$, $0 \leq t \leq t_0$ esetén. Amennyiben ez nem igaz, tudunk találni pozitív számok $\{t_n\}$ sorozatát, amely tart nullához olyan módon, hogy $\|T(t_n)\| \longrightarrow \infty$.

Azonban ekkor az *Egyenletes korlátosság tétele* szerint létezik $f \in \mathbf{L}$, melyre $\sup_n \|T(t_n)f\| = \infty$. Ez viszont ellentmond az erős folytonosság feltevésének.

Legyen $\omega = t_0^{-1} \ln M$ és legyen $t \geq 0$. Ekkor $t = kt_0 + s$ alakban írható, ahol k nemnegatív egész, $0 \leq s < t_0$. Így

$$\|T(t)\| = \|T(s)T(t_0)^k\| \leq MM^k \leq MM^{t/t_0} = Me^{\omega t}. \tag{5}$$

□

2.1.6. Következmény. *Legyen $\{T(t)\}$ erősen folytonos félcsoport az $\boldsymbol{L}$ téren. Ekkor minden $f \in \boldsymbol{L}$-re a $t \longmapsto T(t)f$ $[0, \infty)$-ből $\boldsymbol{L}$-be képező függvény folytonos.*

Bizonyítás. /2.1.6. következmény bizonyítása/ Legyen $f \in \mathbf{L}$. Felhasználva 2.1.5 állítást a következők írhatók fel:

ha $t \geq 0$ és $h \geq 0$, akkor

$$\|T(t+h)f - T(t)f\| = \|T(t)\,[T(h)f - f]\| \leq Me^{\omega t}\,\|T(h)f - f\|, \tag{6}$$

és ha $t \geq 0$ és $0 \leq h \leq t$, akkor

$$\|T(t-h)f - T(t)f\| = \|T(t-h)\,[T(h)f - f]\| \leq Me^{\omega t}\,\|T(h)f - f\|. \tag{7}$$

Ebből adódik a folytonosság. □

2.1.7. Definíció. *Legyen A az $\boldsymbol{L}$ téren értelmezett nem feltétlenül korlátos lineáris operátor, A értelmezési tartományát jelölje $\mathcal{D}(A)$, értékkészletét $\mathcal{R}(A)$.*

Az A lineáris leképezés grafikonja:

$$\mathcal{G}(A) = \{(f, Af) : f \in \mathcal{D}(A)\} \subset \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}, \tag{8}$$

ahol $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$ maga is Banach-tér a komponensenkénti összeadással és skalárral való szorzással és az $\|(f, g)\| = \|f\| + \|g\|$ normával.

2.1.8. Definíció. *Az A operátort zártnak nevezzük, ha $\mathcal{G}(A)$ zárt részhalmaza az $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$ térnek.*

2.1.9. Definíció. *Legyen $\{T(t)\}$ félcsoport az $\boldsymbol{L}$ Banach téren, és legyen*

$$Af = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}\{T(t)f - f\}, \tag{9}$$

ahol A értelmezési tartománya $\mathcal{D}(A)$ azon $f \in \boldsymbol{L}$-ek halmaza, amelyekre ez a határérték létezik. Ekkor az A lineáris operátort a $\{T(t)\}$ félcsoport generátorának nevezzük.

2.1.1. Banach tér értékű függvények

A későbbiekben szükségünk lesz Banach tér értékű függvényekre, ezért az alábbiakban megadunk néhány ezekkel kapcsolatos definíciót és állítást.

2.1.10. Definíció. *Legyen $\Delta \subseteq (-\infty, \infty)$ zárt intervallum. Jelölje $\mathcal{C}_L(\Delta)$ a Δ-ról $\boldsymbol{L}$-be képező folytonos függvények terét. Valamint jelölje $\mathcal{C}_L^1(\Delta)$ a Δ-ról $\boldsymbol{L}$-be képező folytonosan differenciálható függvények terét.*

2.1.11. Definíció. *Ha Δ egy véges $[a, b]$ intervallum, akkor az $u : \Delta \longrightarrow \boldsymbol{L}$ függvényt (Riemann) integrálhatónak nevezzük a Δ intervallumon, ha létezik*

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} u(s_k)(t_k - t_{k-1})$$

ahol $a = t_0 \leq s_1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq s_n \leq t_n = b$ és $\delta = \max_k(t_k - t_{k-1})$, és a limesz nem függ a felosztássorozattól. A határértéket jelölje $\int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t$ vagy $\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$.

Ha $\Delta = [a, \infty)$, akkor az $u : \Delta \longrightarrow \boldsymbol{L}$ függvényt integrálhatónak nevezzük a Δ intervallumon, ha $u|_{[a,b]}$ integrálható minden $[a, b]$ intervallumon, ahol $b \geq a$, és ha létezik

$$\lim_{b \longrightarrow \infty} \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t.$$

A határértéket jelölje ismét $\int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t$ vagy $\int_a^\infty u(t)\,\mathrm{d}t$.

2.1.12. Lemma. *(i) Ha $u \in \mathcal{C}_L(\Delta)$ és $\int_\Delta \|u(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty$, akkor u integrálható az egész Δ intervallumon és*

$$\left\| \int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_\Delta \|u(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Speciálisan, ha Δ egy véges $[a, b]$ intervallum, akkor minden $\mathcal{C}_L(\Delta)$-beli függvény integrálható a Δ intervallumon.

(ii) Legyen B egy zárt lineáris operátor az $\boldsymbol{L}$ téren. Tegyük fel, hogy $u \in \mathcal{C}_L(\Delta)$, $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ minden $t \in \Delta$ esetén, $Bu \in \mathcal{C}_L(\Delta)$ és u és Bu is integrálható a Δ intervallumon. Ekkor $\int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{D}(B)$ és

$$B \int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Delta Bu(t)\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

(iii) Ha $u \in \mathcal{C}_L^1[a,b]$, akkor

$$\int_a^b \frac{d}{dt}u(t)\,\mathrm{d}t = u(b) - u(a). \tag{12}$$

Bizonyítás. Ezt a lemmát nem bizonyítjuk. □

2.1.2. Generátorok tulajdonságai

2.1.13. Állítás. *Legyen $\{T(t)\}$ egy erősen folytonos félcsoport az $\boldsymbol{L}$ Banach téren A generátorral.*

(i) Ha $f \in \boldsymbol{L}$ és $t \geq 0$, akkor $\int_0^t T(s)f ds \in \mathcal{D}(A)$ és

$$T(t)f - f = A \int_0^t T(s)f\,\mathrm{d}s. \tag{13}$$

(ii) Ha $f \in \mathcal{D}(A)$ és $t \geq 0$, akkor $T(t)f \in \mathcal{D}(A)$ és

$$\frac{d}{dt}T(t)f = AT(t)f = T(t)Af. \tag{14}$$

(iii) Ha $f \in \mathcal{D}(A)$ és $t \geq 0$, akkor

$$T(t)f - f = \int_0^t AT(s)f\,\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)Af\,\mathrm{d}s. \tag{15}$$

Bizonyítás. /2.1.13. lemma bizonyítása/

(i)

$$\frac{1}{h}\left[T(h) - I\right] \int_0^t T(s)f\,\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_0^t [T(s+h)f - T(s)f]\,\mathrm{d}s = \tag{16}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(s)f\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)f\,\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) f \, \mathrm{d}s - \frac{1}{h} \int_0^h T(s) f \, \mathrm{d}s$$

teljesül minden $h > 0$-ra, $h \longrightarrow 0+$ esetén az utolsó különbség $T(t)f - f$-hez konvergál, mivel $\{T(t)\}$ erősen folytonos félcsoport, így a legelső kifejezés határértéke is létezik. Tehát $\int_0^t T(s) f \, \mathrm{d}s \in \mathcal{D}(A)$ és a (13) egyenlőség teljesül.

(ii) Felírható, hogy

$$\frac{1}{h} \left[T(t+h)f - T(t)f \right] = A_h T(t) f = T(t) A_h f \qquad \forall h > 0, \tag{17}$$

ahol $A_h = h^{-1}[T(h) - I]$. Így, mivel $f \in \mathcal{D}(A)$, ezért $T(t)f \in \mathcal{D}(A)$ és

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^+ T(t) f = A T(t) f = T(t) A f$$

is teljesül. Így elegendő már csak azt belátni, hogy

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^- T(t) f = A T(t) f = T(t) A f$$

feltéve, hogy $t > 0$.

Az előző összefüggéshez hasonlóan felírható, hogy

$$\frac{1}{-h} \left[T(t-h)f - T(t)f \right] - T(t)Af = T(t-h) A_h f - T(t) A f = \tag{18}$$

$$= T(t-h) A_h f - T(t-h) A f + T(t-h) A f - T(t) A f =$$

$$T(t-h) \left[A_h - A \right] f + \left[T(t-h) - T(t) \right] A f$$

minden $0 < h \leq t$ esetén. Látható, hogy $h \longrightarrow 0$ esetén az utolsó két tag összege 0-hoz konvergál, és így készen vagyunk.

(iii) Ez (ii)-nak és a 2.1.12. (iii) részének következménye lesz.

□

2.1.14. Megjegyzés. *Legyen az A operátor az $\boldsymbol{L}$ Banach téren értelmezett $\{T(t)\}$ erősen folytonos félcsoport generátora, ekkor*

(i) $\mathcal{D}(A)$ sűrű részhalmaza $\boldsymbol{L}$-nek,

(ii) az A generátor zárt.

Bizonyítás. /2.1.14. megjegyzés bizonyítása/ $\{T(t)\}$ erősen folytonos félcsoport, így

(i)

$$\lim_{t\longrightarrow 0+}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)f\,\mathrm{d}s = f \qquad \forall f\in \mathbf{L}$$

Másrészt a 2.1.13. állítás (i) része miatt $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)f\,\mathrm{d}s \in \mathcal{D}(A)$, így $\mathbf{L}$ tetszőleges eleméhez lehet $\mathcal{D}(A)$-beli elemekkel tartani, tehát $\mathcal{D}(A)\subseteq \mathbf{L}$ sűrű.

(ii) Ahhoz, hogy megmutassuk az A zártságát, a következőkre lesz szükség: legyen $\{f_n\}\subset \mathcal{D}(A)$ sorozat, amelyre $f_n \longrightarrow f$ és $Af_n \longrightarrow g$. Igazolnunk kell, hogy $f\in\mathcal{D}(A)$, és $Af = g$. Az 2.1.13. állítás (iii) részéből adódóan felírható, hogy

$$T(t)f_n - f_n = \int_0^t T(s)Af_n\,\mathrm{d}s$$

minden $t>0$ esetén. Ebből a kifejezésből ha $n\longrightarrow\infty$, akkor

$$T(t)f - f = \int_0^t T(s)g\,\mathrm{d}s$$

adódik. Amennyiben leosztjuk t-vel és $t\longrightarrow 0$, azt kapjuk, hogy $f\in\mathcal{D}(A)$ és $Af = g$, azaz A valóban zárt operátor.

□

2.2. Hille - Yoshida tétel

2.2.1. Definíció. *Legyen A zárt lineáris operátor az $\boldsymbol{L}$ Banach-téren. Ha valamely valós λ-ra*

(i) $\lambda - A(\equiv \lambda I - A)$ *injektív,*

(ii) $\mathcal{R}(\lambda - A) = \boldsymbol{L}$,

(iii) és $(\lambda - A)^{-1}$ *korlátos lineáris operátor* $\boldsymbol{L}$ *téren,*

akkor azt mondjuk, hogy λ eleme az A rezolvens halmazának, $\rho(A)$-nak, és $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ operátort az A operátor λ-hoz tartozó rezolvensének nevezzük.

2.2.2. Állítás. *Legyen $\{T(t)\}$ erősen folytonos kontrakció félcsoport az $\boldsymbol{L}$ Banach téren A generátorral. Ekkor $(0,\infty)\subset\rho(A)$,*

$$R_\lambda g = (\lambda - A)^{-1}g = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)g\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

minden $g\in\boldsymbol{L}$ és $\lambda>0$ esetén, és $\|R_\lambda\|\le\lambda^{-1}$ minden $\lambda>0$ esetén.

Bizonyítás. /2.2.2. bizonyítása/ Legyen $\lambda > 0$ tetszőleges. Definiáljuk az $\mathbf{L}$ téren értelmezett U_λ-t a következő összefüggéssel:

$$U_\lambda g = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t$$

Ekkor

$$\|U_\lambda g\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)g\| \, \mathrm{d}t \leq \lambda^{-1} \|g\| \tag{20}$$

minden $g \in \mathbf{L}$ esetén. Így U_λ korlátos lineáris operátor az $\mathbf{L}$ Banach téren. Most adott $g \in \mathbf{L}$-re

$$\frac{1}{h} \left[T(h) - I\right] U_\lambda g = \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[T(t+h)g - T(t)g\right] \mathrm{d}t = \tag{21}$$

$$= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t$$

minden $h > 0$ esetén. Ha $h \longrightarrow 0$, akkor $U_\lambda g \in \mathcal{D}(A)$ és

$$A U_\lambda g = \lambda U_\lambda g - g$$

adódik, azaz

$$(\lambda - A) U_\lambda g = g, \qquad g \in L. \tag{22}$$

Ezenkívül, ha $g \in \mathcal{D}(A)$, akkor (felhasználva a 2.1.12. lemma (ii) részét)

$$U_\lambda A g = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) A g \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty A(e^{-\lambda t} T(t) g) \, \mathrm{d}t = \tag{23}$$

$$= A \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t = A U_\lambda g$$

Emiatt a (22) egyenlet átírható úgy, hogy

$$U_\lambda (\lambda - A) g = g, \qquad g \in \mathcal{D}(A). \tag{24}$$

Tegyük fel, hogy $(\lambda - A) f = (\lambda - A) g$, ekkor $U_\lambda(\lambda - A) f = U_\lambda(\lambda - A) g$, és így (24) miatt $f = g$, tehát $\lambda - A$ injektív.

A (22) egyenlőség azt eredményezi, hogy $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathbf{L}$. A (22) és (24) összefüggésekből látható, hogy $(\lambda - A)^{-1} = U_\lambda$, így $\lambda \in \rho(A)$. Mivel a bizonyítást tetszőleges $\lambda > 0$-ra vezettük le, így készen vagyunk. $\square$

2.2.3. Definíció. *Legyen A zárt lineáris operátor az $\boldsymbol{L}$ Banach téren. Mivel teljesül a kommutatívitás a következőkre: $(\lambda - A)(\mu - A) = (\mu - A)(\lambda - A)$ minden $\lambda, \mu \in \rho(A)$ esetén, így $(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$ is felírható. Ezekből egy egyszerű számolással kapható meg a rezolvens azonosság:*

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda = (\lambda - \mu)^{-1}(R_\mu - R_\lambda), \qquad \lambda, \mu \in \rho(A). \tag{25}$$

Ugyanis

$$R_\lambda R_\mu = (\lambda - \mu)^{-1}(\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu =$$
$$= (\lambda - \mu)^{-1}[(\lambda - A) - (\mu - A)] R_\lambda R_\mu = (\lambda - \mu)^{-1}(R_\mu - R_\lambda).$$

Ha $\lambda \in \rho(A)$ és $\mid \lambda - \mu \mid < \|R_\lambda\|^{-1}$ teljesül, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_\lambda^{n+1} \tag{26}$$

egy korlátos lineáris operátort definiál, ami valójában a $(\mu - A)^{-1}$, hiszen

$$(\mu - A) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_\lambda^{n+1} = [(\lambda - A) - (\lambda - \mu)] R_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_\lambda^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_\lambda^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^{n+1} R_\lambda^{n+1} = I.$$

Ebből, többek között, következik az, hogy $\rho(A) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz.

2.2.4. Definíció. *Legyen A lineáris operátor az $\boldsymbol{L}$ téren. A-t disszipatívnak nevezzük, ha $\|\lambda f - Af\| \geq \lambda \|f\|$ minden $f \in \mathcal{D}(A)$ és $\lambda > 0$ esetén.*

2.2.5. Lemma. *Legyen az A operátor egy erősen folytonos kontrakció félcsoport generátora az $\boldsymbol{L}$ Banach téren, ekkor A disszipatív.*

Bizonyítás. /2.2.5. lemma bizonyítása/ Legyen $f \in \mathcal{D}(A)$ és $\lambda > 0$. Ekkor a 2.2.2. állítás szerint $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ létezik, $\|R_\lambda\| \leq \lambda^{-1}$, és így

$$\|f\| = \|(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)f\| \leq \lambda^{-1}\|(\lambda - A)f\|,$$

tehát A disszipatív. $\square$

2.2.6. Lemma. *Legyen A disszipatív lineáris operátor az $\boldsymbol{L}$ Banach téren és legyen $\lambda > 0$. Ekkor A akkor és csak akkor zárt, ha $\mathcal{R}(\lambda - A)$ zárt.*

Bizonyítás. /2.2.6. lemma bizonyítása/ A bizonyítás egyik irányánál tegyük fel, hogy az A operátor zárt. Ha $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ sorozat és $(\lambda - A)f_n \longrightarrow h$, akkor A disszipatívitása miatt

$$\frac{1}{\lambda}\|(\lambda - A)(f_n - f_m)\| \geq \|f_n - f_m\|$$

minden $\lambda > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ esetén. Tekintve, hogy $(\lambda - A)f_n \longrightarrow h$ és $(\lambda - A)f_m \longrightarrow h$, az egyenlet bal oldala 0-hoz tart, ami a jobb oldal 0-hoz tartását okozza. Azaz $\{f_n\}$ Cauchy-sorozat, és mivel $\mathbf{L}$ teljes, ezért létezik $f \in \mathbf{L}$, hogy $f_n \longrightarrow f$, és így

$$\lim_{n \longrightarrow \infty}(\lambda f - Af_n) = h$$

tehát

$$Af_n \longrightarrow \lambda f - h$$

Mivel A operátor zárt, $f_n \longrightarrow f$ és $Af_n \longrightarrow \lambda f - h$, ezért $f \in \mathcal{D}(A)$ és $Af = \lambda f - h$, tehát $h = (\lambda - A)f$. Ez pedig azt eredményezi, hogy $\mathcal{R}(\lambda - A)$ zárt.

A bizonyítás másik irányánál induljunk ki abból, hogy $\mathcal{R}(\lambda - A)$ zárt. Ha $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ sorozat, $f_n \longrightarrow f$ és $Af_n \longrightarrow g$, akkor $(\lambda - A)f_n \longrightarrow \lambda f - g$. Így, mivel $\mathcal{R}(\lambda - A)$ zárt, létezik olyan $f_0 \in \mathcal{D}(A)$, hogy

$$\lambda f - g = (\lambda - A)f_0 \tag{27}$$

Az A operátor disszipatívitásából következik, hogy $f_n \longrightarrow f_0$, hiszen

$$(\lambda - A)(f_n - f_0) \longrightarrow 0$$

és

$$\|(\lambda - A)(f_n - f_0)\| \geq \lambda \|f_n - f_0\|$$

Az egyenlet bal oldalának 0-hoz tartása miatt látható, hogy a jobb oldal is tart 0-hoz. Így $f = f_0$. Ezt a (27) egyenlőségbe helyettesítve, majd azt átrendezve kapjuk, hogy $Af = g$. Tehát az A operátor zárt. □

2.2.7. Lemma. *Legyen A disszipatív zárt lineáris operátor az $\boldsymbol{L}$ Banach téren, és legyen $\rho^+(A) = \rho(A) \cap (0, \infty)$. Ha $\rho^+(A)$ nem üres, akkor $\rho^+(A) = (0, \infty)$.*

Bizonyítás. /2.2.7. lemma bizonyítása/ Elegendő azt megmutatni, hogy $\rho^+(A)$ nyílt és zárt is $(0, \infty)$-ben. Azt már láttuk, hogy $\rho(A)$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, így $\rho^+(A)$ is nyílt a $(0, \infty)$-ben. Tegyük fel, hogy $\{\lambda_n\} \subset \rho^+(A)$ és $\lambda_n \longrightarrow \lambda > 0$. Legyen $g \in \mathbf{L}$, ekkor $g = (\lambda_n - A)(\lambda_n - A)^{-1}g$, és legyen $g_n = (\lambda - A)(\lambda_n - A)^{-1}g$ minden n esetén. Belátható A disszipativitása segítségével, hogy $g_n \longrightarrow g$ úgy, hogy

$$\lim_{n \longrightarrow \infty}\|g_n - g\| = \lim_{n \longrightarrow \infty}\|(\lambda - A)(\lambda_n - A)^{-1}g - (\lambda_n - A)(\lambda_n - A)^{-1}g\| = \tag{28}$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1} g\| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{|\lambda - \lambda_n|}{\lambda_n} \|g\| = 0.$$

Mivel $g \in \mathbf{L}$ tetszőleges, és $g_n \in \mathcal{R}(\lambda - A)$, így $\mathcal{R}(\lambda - A)$ sűrű $\mathbf{L}$-ben. Másrészt az A operátor zárt és disszipatív, így a 2.2.6. lemma miatt $\mathcal{R}(\lambda - A)$ zárt is. Ennek következtében $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathbf{L}$. Még egyszer kihasználva A disszipativitását arra jutunk, hogy $\lambda - A$ injektív és $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$. Ugyanis ha $(\lambda - A)f = (\lambda - A)g$, akkor $0 = (\lambda - A)(f - g)$, valamint A disszipatív, így $0 = \|(\lambda - A)(f - g)\| \geq \lambda\|f - g\|$. Tehát $\|f - g\| = 0$, azaz $f = g$, és így $(\lambda - A)$ injektív. Másrészt A disszipativitása miatt

$$\lambda^{-1}\|f\| \geq \|(\lambda - A)^{-1} f\| \qquad \forall f \in \mathbf{L}.$$

Így $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$. Emiatt $\lambda \in \rho^+(A)$, tehát $\rho^+(A)$ zárt a $(0, \infty)$ intervallumban.

□

2.2.8. Lemma. *Legyen A disszipatív zárt lineáris operátor az $\boldsymbol{L}$ Banach téren. Tegyük fel, hogy $\mathcal{D}(A)$ sűrű $\boldsymbol{L}$-ben és $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Ekkor az A operátor Yosida-approximációját, A_λ-t minden $\lambda > 0$ esetén az $A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1}$ összefüggéssel definiáljuk. Ez a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

(i) Minden $\lambda > 0$ esetén A_λ korlátos lineáris operátor az $\boldsymbol{L}$ téren és $\{e^{tA_\lambda}\}$ egy erősen folytonos kontrakció félcsoport $\boldsymbol{L}$-en.

(ii) $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ minden $\lambda, \mu > 0$ esetén.

(iii) $\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} A_\lambda f = Af$ minden $f \in \mathcal{D}(A)$ esetén.

Bizonyítás. /2.2.8. lemma bizonyítása/ Legyen $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ minden $\lambda > 0$ esetén és mivel A disszipatív, ezért $\|(\lambda - A)^{-1}\| = \|R_\lambda\| \leq \lambda^{-1}$. Másrészt $(\lambda - A)R_\lambda = I$ az $\mathbf{L}$ téren és $R_\lambda(\lambda - A) = I$ a $\mathcal{D}(A)$ tartományon, ezért felírható egy a későbbiekben igen fontos összefüggés:

$$A_\lambda = \lambda^2 R_\lambda - \lambda I \tag{29}$$

az $\mathbf{L}$ téren minden $\lambda > 0$ esetén. Ez a *Yosida - approximáció* definíciójából vezethető le a következőképpen:

$$A_\lambda = \lambda(\lambda - (\lambda - A))(\lambda - A)^{-1} = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} = \lambda^2 R_\lambda - \lambda I.$$

Másrészt

$$A_\lambda = \lambda R_\lambda A \tag{30}$$

a $\mathcal{D}(A)$ tartományon, $\lambda > 0$ esetén.

A (29) egyenlőségből látható, hogy $\lambda > 0$ esetén A_λ korlátos és így $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$ erősen folytonos, másrészt

$$\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-t\lambda} \|e^{t\lambda^2 R_\lambda}\| \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R_\lambda\|} \leq 1, \tag{31}$$

hiszen $\|R_\lambda\| \leq \lambda^{-1}$, és így

$$t\lambda^2\|R_\lambda\| \leq t\lambda$$

minden $t \geq 0$ esetén. Ezzel igazoltuk az (i) tulajdonságot.

A (ii) tulajdonság a (29) és (25) egyenletek következményeképpen kapható meg. A (iii) tulajdonsághoz először belátjuk, hogy

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda R_\lambda f = f, \qquad \forall f \in \mathbf{L}. \tag{32}$$

Vegyük észre, hogy

$$\|\lambda R_\lambda f - f\| = \| \left(\lambda(\lambda - A)^{-1} - I\right) f\| = \|(\lambda - A)^{-1}[\lambda - (\lambda - A)]f\| =$$

$$= \|(\lambda - A)^{-1}Af\| = \|R_\lambda Af\| \leq \lambda^{-1}\|Af\| \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

minden $f \in \mathcal{D}(A)$ esetén. Mivel $\mathcal{D}(A)$ sűrű $\mathbf{L}$-ben, és $\|\lambda R_\lambda - I\| \leq 2$, így (32) minden $f \in \mathbf{L}$ esetén teljesül.

Végezetül a (iii) tulajdonság a (30) és (32) egyenlőségek következménye. □

2.2.9. Lemma. *Ha B és C korlátos lineáris operátorok az $\boldsymbol{L}$ téren úgy, hogy $BC = CB$, $\|e^{tB}\| \leq 1$ és $\|e^{tC}\| \leq 1$ minden $t \geq 0$ esetén, akkor*

$$\|e^{tB}f - e^{tC}f\| \leq t\|Bf - Cf\| \tag{33}$$

minden $f \in \boldsymbol{L}$ és $t \geq 0$ esetén.

Bizonyítás. /2.2.9. lemma bizonyítása/ A lemma összefüggése a következő azonosságból következik:

$$e^{tB}f - e^{tC}f = \int_0^t \frac{d}{ds}\left[e^{sB}e^{(t-s)C}\right] f \,\mathrm{d}s = \int_0^t e^{sB}Be^{(t-s)C} - e^{sB}Ce^{(t-s)C}f \,\mathrm{d}s = \tag{34}$$

$$= \int_0^t e^{sB}(B - C)e^{(t-s)C}f \,\mathrm{d}s = \int_0^t e^{sB}e^{(t-s)C}(B - C)f \,\mathrm{d}s$$

Az utolsó egyenlőségnél B és C kommutativitását használtuk ki. □

Ezek után már minden előzménnyel rendelkezünk ahhoz, hogy kimondhassuk és beláthassuk a *Hille - Yosida tételt.*

2.2.10. Tétel (Hille - Yosida tétel). *Legyen A lineáris operátor az $\boldsymbol{L}$ Banach téren. Ekkor A egy $\boldsymbol{L}$-en értelmezett erősen folytonos kontrakció félcsoport generátora akkor és csak akkor, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:*

(i) $\mathcal{D}(A)$ sűrű $\boldsymbol{L}$-ben,

(ii) A disszipatív,

(iii) létezik olyan $\lambda > 0$, amelyre $\mathcal{R}(\lambda - A) = L$.

Bizonyítás. /2.2.10. tétel bizonyítása/ A tulajdonságok szükségessége a 2.1.14. megjegyzésből, a 2.2.2. állításból és a 2.2.5. lemmából következik. Ezért elég csak az elégségességet igazolnunk.

Ennek igazolásához tegyük fel, hogy (i), (ii) és (iii) teljesül. A (ii) és (iii) tulajdonságból, valamint a 2.2.6. lemmából következik, hogy A zárt operátor és $\rho(A) \cap (0, \infty)$ nem üres (a disszipatívságból adódik, hogy $(\lambda - A)$ injektív, és $(\lambda - A)^{-1}$ korlátos). Így a 2.2.7. lemma alapján látható, hogy $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Használjuk a 2.2.8. lemma jelölését, így definiálhatunk minden $\lambda > 0$ esetén egy erősen folytonos kontrakció félcsoportot $\{T_\lambda(t)\}$-t az $\mathbf{L}$ téren, ahol legyen $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$. A 2.2.8. lemma (ii) tulajdonságát, valamint a 2.2.9. lemmát felhasználva felírható, hogy

$$\|T_\lambda(t)f - T_\mu(t)f\| \leq t\,\|A_\lambda f - A_\mu f\| \tag{35}$$

minden $f \in \mathbf{L}$, $t \geq 0$ és $\lambda, \mu > 0$ esetén.

A 2.2.8. lemma (iii) része miatt $A_\lambda f$ Cauchy sorozat, így (35) miatt rögzített t-re, $T_\lambda(t)f$ is Cauchy sorozat, és így $\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} T_\lambda(t)f$ létezik minden $f \in \mathcal{D}(A)$ és $t \geq 0$ esetén, és korlátos idő intervallumon egyenletesen konvergens. És így minden $f \in \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathbf{L}$ esetén is.

Jelöljük az előző kifejezés határértékét $T(t)f$-fel. Mivel $\|T_\lambda(t)\| \leq 1$ minden $\lambda > 0$ és $t \geq 0$ esetén, így $T(t)$ is kontrakció minden $t \geq 0$-ra. Másrészt

$$\|T(t)f - f\| \leq \|T(t)f - T_\lambda(t)f\| + \|T_\lambda(t)f - f\|$$

minden $f \in \mathbf{L}$ és $\lambda > 0$ esetén. Legyen $T > 0$. Mivel $T_\lambda(t)f \longrightarrow T(t)f$ $0 \leq t \leq T$ intervallumon egyenletesen, ezért $\forall \epsilon > 0$ $\exists \lambda_0 > 0$, hogy $\|T_{\lambda_0}(t)f - T(t)f\| < \frac{\epsilon}{2}$ minden $0 \leq t \leq T$ esetén. Másrészt $T_{\lambda_0}(t)$ erősen folytonos, így létezik $0 \leq t_0 \leq T$, hogy $0 \leq t \leq t_0$ esetén $\|T_{\lambda_0}(t)f - f\| < \frac{\epsilon}{2}$. Így $0 \leq t \leq t_0$ esetén $\|T(t)f - f\| < \epsilon$, tehát $T(t)$ erősen folytonos.

Felhasználva a következő azonosságot

$$\begin{gathered} T(s+t)f - T(s)T(t)f = [T(s+t) - T_\lambda(s+t)]f + \\ + T_\lambda(s)[T_\lambda(t) - T(t)]f + [T_\lambda(s) - T(s)]T(t)f, \end{gathered} \tag{36}$$

arra jutunk, hogy $\{T(t)\}$ erősen folytonos kontrakció félcsoport az $\mathbf{L}$ téren.

Ezek után már csak az maradt, hogy megmutassuk, hogy az A operátor a $\{T(t)\}$ kontrakció félcsoport generátora. Felhasználva az 2.1.13. állítás (iii) részét, felírható, hogy

$$T_\lambda(t)f - f = \int_0^t A_\lambda T_\lambda(s)f\,\mathrm{d}s = \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda f\,\mathrm{d}s \tag{37}$$

minden $f \in \mathbf{L}$, $t \geq 0$ és $\lambda > 0$ esetén. Minden $f \in \mathcal{D}(A)$ és $t \geq 0$ esetén felírható a következő azonosság:

$$T_\lambda(s)A_\lambda f - T(s)Af = T_\lambda(s)(A_\lambda f - Af) + [T_\lambda(s) - T(s)]\,Af \tag{38}$$

Az előbbi egyenlőségben $\lambda \longrightarrow \infty$ esetén a jobboldal első tagja tart 0-hoz, mivel $\|T_\lambda(s)\| \leq 1$ és $A_\lambda f \longrightarrow Af$, és a jobboldal második tagja is tart 0-hoz, mivel $T_\lambda(s)Af \longrightarrow T(s)Af$. Így

$$T_\lambda(s)A_\lambda f \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} T(s)Af,$$

mitöbb $0 \leq s \leq t$ esetén egyenletesen. Ezt a (37) egyenlőségre alkalmazva a következő adódik:

$$T(t)f - f = \int_0^t T(s)Af\,\mathrm{d}s \tag{39}$$

minden $f \in \mathcal{D}(A)$ és $t \geq 0$ esetén. Felhasználva a (39)-et és azt, hogy $T(t)$ erősen folytonos

$$\lim_{t\longrightarrow 0+} \frac{T(t)f - f}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0+} \frac{\int_0^t T(s)Af\,\mathrm{d}s}{t} = Af$$

minden $f \in \mathcal{D}(A)$ esetén. Így a $\{T(t)\}$ kontrakció félcsoport generátora, B az A operátor kiterjesztése. Így, ha belátjuk, hogy $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A)$, akkor $A = B$ adódik.

Legyen $f \in \mathcal{D}(B)$, és legyen $\lambda > 0$ olyan, hogy $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathbf{L}$, a (iii) feltevés miatt ilyen λ létezik.

Legyen $g = (\lambda - B)f$. Ekkor $g \in \mathbf{L} = \mathcal{R}(\lambda - A)$, azaz létezik $h \in \mathcal{D}_A$, hogy $g = (\lambda - A)h$. Mivel B az A kiterjesztése, így $h \in \mathcal{D}(B)$ is igaz, és $g = (\lambda - B)h$. Azonban mivel B egy erősen folytonos kontrakció félcsoport generátora, így $(\lambda - B)$ injektív, tehát $f = h$, és így $f \in \mathcal{D}(A)$. Ezzel a tételt bizonyítottuk. □

A következő állítás az előbbi bizonyítás és a lentebbi 2.2.12. megjegyzés együttes következménye.

2.2.11. Állítás. *Legyenek $\{T(t)\}$ erősen folytonos kontrakció félcsoport az $\boldsymbol{L}$ téren A generátorral. Legyen A_λ az A operátor Yosida-approximációja, ahogy már korábban, a 2.2.8. lemmában szerepelt. Ekkor*

$$\|e^{tA_\lambda}f - T(t)f\| \leq t\,\|A_\lambda f - Af\|, \qquad f \in \mathcal{D}(A),\, t \geq 0, \lambda > 0, \tag{40}$$

és így minden $f \in \boldsymbol{L}$-re $\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} e^{tA_\lambda}f = T(t)f$ minden $t \geq 0$ esetén és korlátos idő intervallumokon egyenletesen.

2.2.12. Megjegyzés. *Legyen $\{T(t)\}$ és $\{S(t)\}$ erősen folytonos kontrakció félcsoportok $\boldsymbol{L}$ téren A és B generátorokkal. Abban az esetben, ha $A = B$, akkor $T(t) = S(t)$ minden $t \geq 0$ esetén.*

Bizonyítás. Ezt a megjegyzést nem bizonyítjuk. □

Sok alkalmazásban a *Hille - Yosida tétel* egy alternatív formáját használják. Ahhoz, hogy ezt kimondhassuk, szükségünk lesz egy lemmára és két definícióra.

2.2.13. Definíció. *Egy $\boldsymbol{L}$ térbeli A lineáris operátort lezárhatónak nevezünk, ha létezik zárt lineáris kiterjesztése.*

2.2.14. Definíció. *Ha az $\boldsymbol{L}$ térbeli A lineáris operátor lezárható, akkor lezárása $\bar{A}$ az A legszűkebb zárt kiterjesztése. Még konkrétabban, ez az a zárt lineáris operátor, amelynek az $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$ térbeli grafikonja A grafikonjának lezárása.*

2.2.15. Lemma. *Legyen A egy disszipatív lineáris operátor $\boldsymbol{L}$ téren $\mathcal{D}(A)$ értelmezési tartománnyal, amely sűrű $\boldsymbol{L}$-ben. Ekkor a következő két tulajdonság teljesül:*

(i) az A operátor lezárható,

(ii) $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ minden $\lambda > 0$ esetén.

Bizonyítás. /2.2.15. lemma bizonyítása/

(i) Elegendő csak azt megmutatni, hogy ha létezik $\{f_n\}$ sorozat úgy, hogy $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, $f_n \longrightarrow 0$ és $Af_n \longrightarrow g \in \mathbf{L}$, akkor $g = 0$. Válasszunk egy $\{g_m\} \subset \mathcal{D}(A)$ sorozatot úgy, hogy $g_m \longrightarrow g$. Az A operátor disszipatívsága miatt felírható, hogy

$$\|(\lambda - A)g_m - \lambda g\| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|(\lambda - A)(g_m + \lambda f_n)\| \geq \tag{41}$$

$$\geq \lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda \|g_m + \lambda f_n\| = \lambda \|g_m\|$$

minden $\lambda > 0$ és minden m esetén. Leosztva a kifejezés két végét λ-val és feltéve, hogy $\lambda \longrightarrow \infty$, azt kapjuk, hogy

$$\|g_m - g\| \geq \|g_m\|$$

minden m esetén. Ebből $m \longrightarrow \infty$-re, $g = 0$ adódik.

(ii) Legyen $\lambda > 0$. Az, hogy $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \supset \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ nyilvánvaló, ezért az egyenlőség igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ zárt. Azonban ez a 2.2.6. lemma közvetlen következménye, hiszen ott már beláttuk, hogy $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ zárt.

□

2.2.16. Tétel (Hille - Yosida tétel alternatív formája). *Tegyük fel, hogy az $\boldsymbol{L}$ Banach téren értelmezett A lineáris operátor lezárható. Az A operátor $\bar{A}$ lezártja egy erősen folytonos kontrakció félcsoport generátora az $\boldsymbol{L}$ téren akkor és csak akkor, ha* *(i)* $\mathcal{D}(A)$ *sűrű* $\boldsymbol{L}$*-ben,*

(ii) az A *operátor disszipatív, és*

(iii) létezik olyan $\lambda > 0$*, amelyre* $\mathcal{R}(\lambda - A)$ *sűrű az* $\boldsymbol{L}$ *térben.*

Bizonyítás. /2.2.16. tétel bizonyítása/ Tegyük fel először, hogy A lezárható és $\bar{A}$ egy erősen folytonos kontrakció félcsoport generátora. Ekkor a 2.2.10. tétel miatt $\mathcal{D}(\bar{A})$ sűrű $\mathbf{L}$-ben, $\bar{A}$ disszipatív és $\mathcal{R}(\lambda-\bar{A}) = \mathbf{L}$ valamely $\lambda > 0$-ra. De ekkor $\mathcal{D}(A)$ sűrű $\mathbf{L}$-ben, A disszipatív és a 2.2.15. lemma miatt $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) = \mathbf{L}$, és így $\mathcal{R}(\lambda - A)$ sűrű $\mathbf{L}$-ben.

Tegyük fel most, hogy az A lineáris operátor lezárható és (i), (ii), (iii) teljesül A-ra. Ekkor $\bar{A}$ is lineáris operátor, $\mathcal{D}(\bar{A})$ sűrű $\mathbf{L}$-ben, $\bar{A}$ is disszipatív és (iii) miatt $\mathbf{L} = \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$, a 2.2.15. lemma miatt $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$, és így $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) = \mathbf{L}$ valamely $\lambda > 0$-ra. Ezzel a 2.2.10. tétel miatt A egy erősen folytonos kontrakció félcsoport generátora. □

2.3. Trotter - Kurtz tétel

Legyenek $(\mathbf{L}, \|\cdot\|)$, $(L_n, \|\cdot\|_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Banach terek. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért $\|\cdot\|_n$-et is $\|\cdot\|$-val jelöljük. Legyenek $\pi_n : L \longrightarrow L_n$, $n = 1, 2, \ldots$ korlátos lineáris transzformációk. Tegyük fel, hogy $\sup_n \|\pi_n\| < \infty$. A továbbiakban azt írjuk, hogy $f_n \longrightarrow f$, ha $f_n \in L_n$, $f \in \mathbf{L}$ és

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - \pi_n f\| = 0. \tag{42}$$

2.3.1. Definíció. *Legyen* A *egy zárt lineáris operátor az* $\boldsymbol{L}$ *téren.* $\mathcal{D}(A)$ *egy* D *alterét az* A *operátor magjának nevezünk, ha* $\overline{A|_D} = A$*.*

2.3.2. Tétel (Trotter - Kurtz tétel). *Legyenek* $\{T_n(t)\}$ *és* $\{T(t)\}$ *erősen folytonos kontrakció félcsoportok* L_n *és* $\boldsymbol{L}$ *tereken* A_n *és* A *generátorokkal. Legyen* D *az* A *operátor magja. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) Minden $f \in \boldsymbol{L}$ *esetén* $T_n(t)\pi_n f \longrightarrow T(t)f$ *minden* $t \geq 0$*-ra, korlátos idő intervallumon egyenletesen.*

(ii) Minden $f \in \boldsymbol{L}$ *esetén* $T_n(t)\pi_n f \longrightarrow T(t)f$ *minden* $t \geq 0$*-ra.*

(iii) Minden $f \in D$ *esetén létezik* $f_n \in \mathcal{D}(A_n)$ *sorozat, hogy* $f_n \longrightarrow f$ *és* $A_n f_n \longrightarrow Af$*.*

Ahhoz, hogy ezt az eredményt igazolni tudjuk, szükségünk lesz a következő két lemmára. Ezek közül a 2.3.3. lemma a korábban szerepelt 2.2.9. lemma általánosítása.

2.3.3. Lemma. *Rögzítsünk egy n pozitív egész számot. Legyenek $\{S_n(t)\}$ és $\{S(t)\}$ erősen folytonos kontrakció félcsoportok az L_n és $\boldsymbol{L}$ tereken B_n és B generátorokkal. Legyen $f \in \mathcal{D}(B)$ és tegyük fel, hogy $\pi_n S(s)f \in \mathcal{D}(B_n)$ minden $s \geq 0$ esetén, és tegyük fel, hogy $B_n \pi_n S(\cdot)f : [0, \infty) \longrightarrow L_n$ folytonos. Ekkor minden $t \geq 0$ esetén*

$$S_n(t)\pi_n f - \pi_n S(t)f = \int_0^t S_n(t-s)(B_n\pi_n - \pi_n B)S(s)f \,\mathrm{d}s, \tag{43}$$

és így, mivel $S_n(t-s)$ kontrakció

$$\|S_n(t)\pi_n f - \pi_n S(t)f\| \leq \int_0^t \|(B_n\pi_n - \pi_n B)S(s)f\| \,\mathrm{d}s. \tag{44}$$

Bizonyítás. /2.3.3. lemma bizonyítása/ Elegendő azt észrevenni, hogy a (43) egyenlőségben az integrandus a $-S_n(t-s)\pi_n S(s)f$ kifejezés s-szerinti deriváltja. Hiszen

$$-\frac{d}{ds} S_n(t-s)\pi_n S(s)f = S_n(t-s)B_n\pi_n S(s)f - S_n(t-s)\pi_n BS(s)f,$$

amely pont a (43) egyenlőség integrandusa. A félcsoport deriválását a 2.1.13. állítás (ii) része szerint végeztük. □

2.3.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy a 2.3.2. tétel hipotézisei és a tétel (iii) állítása teljesül. Legyen $n = 1, 2, \ldots$ és $\lambda > 0$ esetén $A_{n,\lambda}$ és A_λ az A_n és A generátorok Yosida-approximációja (mint a 2.2.8. lemmában). Ekkor*

$$A_{n,\lambda}\pi_n f \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A_\lambda f$$

minden $f \in \boldsymbol{L}$ és $\lambda > 0$ esetén.

Bizonyítás. /2.3.4. lemma bizonyítása/ Rögzítsük $\lambda > 0$-t. Legyen $f \in D$ és $g = (\lambda - A)f$. Feltétel szerint létezik $f_n \in \mathcal{D}(A_n)$ sorozat, amelyre $f_n \longrightarrow f$ és $A_n f_n \longrightarrow Af$, és így $(\lambda - A_n)f_n \longrightarrow g$. Most nézzük a következő kifejezést:

$$\|A_{n,\lambda}\pi_n g - \pi_n A_\lambda g\| = \tag{45}$$

$$\overset{(I)}{=} \|[\lambda^2(\lambda - A_n)^{-1} - \lambda I]\pi_n g - \pi_n[\lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I]g\| =$$

$$\overset{(II)}{=} \lambda^2\|(\lambda - A_n)^{-1}\pi_n g - \pi_n(\lambda - A)^{-1}g\| \leq$$

$$\overset{(III)}{\leq} \lambda^2\|(\lambda - A_n)^{-1}\pi_n g - f_n\| + \lambda^2\|f_n - \pi_n(\lambda - A)^{-1}g\| \leq$$

$$\overset{(IV)}{\leq} \lambda\|\pi_n g - (\lambda - A_n)f_n\| + \lambda^2\|f_n - \pi_n f\|$$

minden $n \geq 1$ esetén. Itt a (29) egyenlet miatt $A_\lambda = \lambda^2 R_\lambda - \lambda I = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I$ és hasonlóan $A_{n,\lambda} = \lambda^2(\lambda - A_n)^{-1} - \lambda I$, így adódott az (I) egyenlőség. A (IV) egyenlőtlenségben kiemeltük $(\lambda - A_n)^{-1}$-t, illetve $(\lambda - A)^{-1}$-t és felhasználtuk azt a korábbi becslést, miszerint $\|(\lambda - A_n)^{-1}\| = \|R_{n,\lambda}\| \leq \lambda^{-1}$. Feltétel szerint $f_n \longrightarrow f$, és láttuk, hogy $(\lambda - A_n)f_n \longrightarrow g$, amellyek a (42) összefüggés szerint azt jelentik, hogy

$$\|(\lambda - A_n)f_n - \pi_n g\| \longrightarrow 0 \quad \text{és} \quad \|f_n - \pi_n f\| \longrightarrow 0.$$

Következésképpen $\|A_{n,\lambda}\pi_n g - \pi_n A_\lambda g\| \longrightarrow 0$ minden $g \in \mathcal{R}(\lambda - A|_D)$ esetén. Azonban $\mathcal{R}(\lambda - A|_D)$ sűrű az $\mathbf{L}$ térben, és az $A_{n,\lambda}\pi_n - \pi_n A_\lambda$, $n = 1, 2, \ldots$ lineáris transzformációk egyenletesen korlátosak. Így $\|A_{n,\lambda}\pi_n f - \pi_n A_\lambda f\| \longrightarrow 0$, azaz $A_{n,\lambda}\pi_n f \longrightarrow A_\lambda f$ minden $f \in \mathbf{L}$ és $\lambda > 0$ esetén teljesül. □

Bizonyítás. /Trotter - Kurtz tétel bizonyítása/
$(i \Longrightarrow ii)$ Automatikusan következik.
$(ii \Longrightarrow iii)$ Legyen $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{D}(A)$ és $g = (\lambda - A)f$, ekkor $f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)g\,\mathrm{d}t$. $n \geq 1$ esetén legyen

$$f_n = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T_n(t)\pi_n g\,\mathrm{d}t \in \mathcal{D}(A_n).$$

A (ii) állítás és a *Dominált konvergencia tétel* miatt $f_n \longrightarrow f$. Másrészt $(\lambda - A_n)f_n = \pi_n g$, és $\pi_n g \longrightarrow g$ (hiszen ez azt jelenti, hogy $\|\pi_n g - g\| \longrightarrow 0$), így

$$(\lambda - A_n)f_n \longrightarrow (\lambda - A)f, \text{ tehát } A_n f_n \longrightarrow Af.$$

$(iii \Longrightarrow i)$ $n = 1, 2, \ldots$ és $\lambda > 0$ esetén legyenek $\{T_{n,\lambda}(t)\}$ és $\{T_\lambda(t)\}$ az $A_{n,\lambda}$ és A_λ Yosida-approximációkhoz tartozó erősen folytonos kontrakció félcsoportok az L_n és $\mathbf{L}$ tereken. Legyen $f \in D$, ekkor a (iii) állítás szerint létezik $\{f_n\}$ sorozat, melyre $f_n \in \mathcal{D}(A_n)$, $f_n \longrightarrow f$ és $A_n f_n \longrightarrow Af$. Vizsgáljuk a következőt:

$$T_n(t)\pi_n f - \pi_n T(t)f = T_n(t)(\pi_n f - f_n) + [T_n(t)f_n - T_{n,\lambda}(t)f_n] + \tag{46}$$

$$+ T_{n,\lambda}(t)(f_n - \pi_n f) + [T_{n,\lambda}(t)\pi_n f - \pi_n T_\lambda(t)f] + \pi_n[T_\lambda(t)f - T(t)f]$$

minden $n \geq 1$ és $t \geq 0$ esetén. A jobboldal első és harmadik tagja a (42) összefüggés miatt tart 0-hoz, az ötödik tagot pedig a (40) összefüggés miatt felülről lehet becsülni $Kt\|A_\lambda f - Af\|$-val. Így elég csak a többi tagot vizsgálni.

Rögzítsünk egy $t_0 \geq 0$ küszöböt. A 2.2.11. állítás miatt az (46) jobb oldalának második tagjára felírható a következő:

$$\overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} \sup_{0\leq t\leq t_0} \|T_n(t)f_n - T_{n,\lambda}(t)f_n\| \leq \overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} t_0 \|A_nf_n - A_{n,\lambda}f_n\| \leq \qquad (47)$$

$$\leq \overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} t_0\{\|A_nf_n - \pi_nAf\| + \|\pi_n(Af - A_\lambda f)\| + \|\pi_nA_\lambda f - A_{n,\lambda}\pi_nf\| + \|A_{n,\lambda}(\pi_nf - f_n)\|\} \leq$$

$$\leq Kt_0 \|Af - A_\lambda f\|,$$

ahol $K = \sup_n \|\pi_n\|$. Ugyanis $n \longrightarrow \infty$ esetén $A_nf_n \longrightarrow Af$, így az első tag tart a 0-hoz, a 2.3.4. lemma miatt a harmadik tag is tart a 0-hoz, a második tag $Kt_0\|Af - A_\lambda f\|$-val becsülhető, végül a negyedik tagban a (29) egyenlőség miatt

$$\|A_{n\lambda}\| \leq \|\lambda^2R_{n,\lambda} - \lambda I\| \leq \lambda^2\lambda^{-1} + \lambda = 2\lambda,$$

és $\|\pi_nf - f_n\| \longrightarrow 0$, így a negyedik tag is tart a 0-hoz.

Felhasználva a 2.3.3. és a 2.3.4. lemmát, valamint a *Dominált konvergencia tételt*, a (46) jobb oldalának negyedik tagjára felírható, hogy

$$\overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} \sup_{0\leq t\leq t_0} \|T_{n,\lambda}(t)\pi_nf - \pi_nT_\lambda(t)f\| \leq \overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} \int_0^{t_0} \|(A_{n,\lambda}\pi_n - \pi_nA_\lambda)T_\lambda(s)f\| \,\mathrm{d}s = 0. \qquad (48)$$

Így a (46) egyenlőséget, a (47) és (48) becslések eredményét, és az egyéb megjegyzéseinket felhasználva a következő adódik:

$$\overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} \sup_{0\leq t\leq t_0} \|T_n(t)\pi_nf - \pi_nT(t)f\| \leq 2Kt_0 \|A_\lambda f - Af\|. \qquad (49)$$

λ tetszőleges volt, így a 2.2.8. lemma (*iii*) része miatt a (49) jobb oldala tart a 0-hoz $\lambda \longrightarrow \infty$ esetén, és így a (49) egyenlet bal oldala 0. Ez érvényes minden $f \in D$-re, azonban D sűrű az $\mathbf{L}$ térben, és $T_n(t)$, $T(t)$ kontrakció, így minden $f \in \mathbf{L}$ esetén is érvényes. $\square$

3. Egyszerű szimmetrikus véletlen közegű bolyongás és egyszerű szimmetrikus véletlen közegű kizárási folyamat egy dimenzióban, a Trotter-Kurtz tétel alkalmazása

Ebben a fejezetben az előző fejezetben szereplő *Trotter-Kurtz féle approximációs tétel* alkalmazására látunk példát. Megmutatjuk, hogyan használható ez az egydimenziós véletlen közegű szimmetrikus bolyongás esetén *Centrális határeloszlás tétel* bizonyítására. Belátjuk, hogy a diffúzív módon átskálázott bolyongás generátora megfelelő közelítő függvénysorozat mentén konvergál, és ezt felhasználva a félcsoport és a folyamat konvergenciáját is bizonyítjuk. Ezután az egydimenziós véletlen közegű egyszerű szimmetrikus kizárási folyamat hidrodinamikai limeszével foglalkozunk, és az átskálázott sűrűségi mező sztochasztikus konvergenciáját bizonyítjuk. Ennek a mezőnek a makroszkópikus viselkedését egy lineáris hővezetési egyenlet adja meg. A diffúziós együttható megegyezik a megfelelő véletlen közegű bolyongás diffúziós együtthatójával.

Az itt bemutatott eredmények a [7] cikk eredményei.

3.1. Véletlen közegű bolyongás

Az alábbiakban definiáljuk az egydimenziós véletlen közegű egyszerű szimmetrikus bolyongást.

3.1.1. Definíció. *Minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén a $\{k, k+1\}$ élhez rendeljünk hozzá egy c_k valószínűségi változót, Tegyük fel, hogy ezek független azonos eloszlásúak, pozitívak és korlátosak (azaz $\exists b > 0$, hogy $0 < c_k < b$, $\forall k \in \mathbb{Z}$-re). Ez a $\{c_k\}$ sorozat adja meg a véletlen közeget. Gondolhatunk c_k-ra úgy, mint a $\{k, k+1\}$ él vezetőképességére. Rögzítsük a véletlen közeget, azaz c_k-k értékét. Tekintsük ezután azt a folytonos idejű szimmetrikus bolyongást, amely bármely $k \in \mathbb{Z}$ rácspontból szomszédos rácspontokba ugorhat c_k illetve c_{k-1} rátával. Jelölje B_1 a $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvények Banach terét a szuprémum normával. Ekkor a bolyongás generátorát a következő összefüggés definiálja:*

$$G_1\varphi(k) = c_k(\varphi(k+1) - \varphi(k)) + c_{k-1}(\varphi(k-1) - \varphi(k)), \qquad \varphi \in B_1,\ k \in \mathbb{Z}. \quad (50)$$

Ez azt jelenti, hogy a részecske a k helyen $c_{k-1}+c_k$ paraméterű exponenciális eloszlású ideig várakozik, majd $\frac{c_{k-1}}{c_{k-1}+c_k}$ valószínűséggel a $k-1$ helyre, $\frac{c_k}{c_{k-1}+c_k}$ valószínűséggel a $k+1$. helyre ugrik. Ez ekvivalens azzal, hogy a $\{k, k+1\}$ élekre független c_k paraméterű exponenciális eloszlású órákat helyezünk, és ha a részecske k-ban van, akkor megvárja, hogy a $\{k-1, k\}$, $\{k, k+1\}$ élekre szerelt órák valamelyike megszólaljon, *s akkor a megfelelő, $k-1$ illetve $k+1$, szomszédos rácspontba ugrik. Ha egy óra csörgött, utána újra indul.*

Jelölje $X(t)$ a bolyongó részecske helyét a t időpillanatban. Ismeretes, hogy nem véletlen, homogén közegű szimmetrikus bolyongás esetén diffúzív skálázásra van szükségünk a *Centrális határeloszlás tétel* bizonyításához. Most is ez a helyzet, jelölje tehát

$$X_n(t) = \frac{1}{n} X(tn^2)$$

a részecske átskálázott tartózkodási helyét a t időpillanatban, azaz a rács beosztását $1/n$ nagyságra összehúzzuk, az időt pedig n^2 szeresére gyorsítjuk. Ez utóbbira gondolhatunk úgy is, hogy az ugrási rátákat n^2-tel szorozzuk.

Megfelelő momentum feltétel mellett bizonyítani fogjuk, hogya a közeg majdnem minden realizációja esetén az átskálázott bolyongás, $X_n(t)$ egy $\frac{2t}{E(c_1^{-1})}$ szórásnégyzetű Wiener folyamathoz konvergál.

Következő lépésként definiáljuk az egyszerű szimmetrikus véletlen közegű kizárási folyamatot $\mathbb{Z}$-n.

3.2. Véletlen közegű kizárási folyamat

Legyen most több részecskénk $\mathbb{Z}$ rácspontjain úgy, hogy minden helyen egy időben legfeljebb egy részecske tartózkodhat. A folyamat állapottere a $2^{\mathbb{Z}} := \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tér, amelynek elemei az $\eta = (\eta_k : k \in \mathbb{Z})$ alakú $0-1$ sorozatok, azaz $\eta_k \in \{0,1\}$, minden $k \in \mathbb{Z}$-re. $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$-t a szorzattopológiával látjuk el. $\eta_k = 1$ azt jelenti, hogy a k helyen van részecske, míg $\eta_k = 0$ jelentése az, hogy a k hely üres. A rendszer egy csere mechanizmussal fejlődik a következőképpen:

3.2.1. Definíció. *Legyen $\eta \in 2^{\mathbb{Z}}$ és $k \in \mathbb{Z}$ ekkor definiáljuk $\mathcal{C}_k\eta \in 2^{\mathbb{Z}}$-t úgy, hogy*

$$(\mathcal{C}_k\eta)_i = \begin{cases} \eta_i & \text{ha } i \neq k, \text{ és } i \neq k+1, \\ \eta_{k+1} & \text{ha } i = k, \\ \eta_k & \text{ha } i = k+1. \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{C}_k$ operátor η k. és $k+1$. koordinátáját felcseréli.

3.2.2. Definíció. *Legyen φ $\eta \in 2^{\mathbb{Z}}$ olyan függvénye, ami csak véges sok koordinátától függ, azaz φ cilinder függvény. Ekkor legyen*

$$\mathcal{D}_k\varphi(\eta) := \varphi(\mathcal{C}_k\eta) - \varphi(\eta), \tag{51}$$

és tekintsük azt a Markov ugrófolyamatot, amelynek pregenerátora

$$\mathcal{G}\varphi = \sum_{k\in Z} c_k \mathcal{D}_k \varphi, \tag{52}$$

ahol $\varphi : 2^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *cilinderfüggvény.*

3.2.3. Definíció. *Legyen X kompakt metrikus tér. Egy lineáris $C(X)$-en értelmezett $\mathcal{A}$ operátort $D(\mathcal{A})$ értelmezési tartománnyal Markov pregenerátornak nevezünk, ha teljesíti az alábbi feltételeket:*

1. $1 \in D(\mathcal{A})$ *és* $\mathcal{A}1 = 0$,
2. $D(\mathcal{A})$ *sűrű* $C(X)$*-ben,*
3. *ha* $\varphi \in D(\mathcal{A})$, $\lambda \geq 0$ *és* $\varphi - \lambda\mathcal{A}(\varphi) = \psi$, *akkor*

$$\min_{x\in X} \varphi(x) \geq \min_{x\in X} \psi(x)$$

Igazoljuk azt, hogy a fent definiált $\mathcal{G}$ operátor Markov pregenerátor. Ehhez belátjuk, hogy a definícióban szereplő három tulajdonságot kielégíti. $X = 2^{\mathbb{Z}}$ a szorzattopológiával kompakt metrikus tér.

$\mathcal{D}(G) = \{\varphi : 2^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}$, ami csak véges sok koordinátától függ, azaz φ cilinder függvény$\}$

1. Triviálisan teljesül, hogy $1 \in \mathcal{D}(G)$. A $G1 = 0$ összefüggés igazolásához helyettesítsünk be az (51) kifejezésbe. Látható, hogy $\varphi = 1$ esetén a régi és az új állapot megegyezik, így $\mathcal{D}_k 1 = 0$. Ezt beírva az (52) egyenletbe:

$$G1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k 0 = 0.$$

2. Ismeretes, hogy a cilinder függvények halmaza sűrű $C(2^{\mathbb{Z}})$-ben.

3. Legyen $\eta^* \in X$ olyan, hogy $\varphi(\eta^*) := \min_{\eta\in X} \varphi(\eta)$. Ennek a tulajdonságnak az igazolásához elég belátni azt, hogy ekkor $(\mathcal{G}\varphi)(\eta^*) \geq 0$. Ugyanis ilyenkor

$$\min_{\eta\in X} \psi(\eta) \leq \psi(\eta^*) = \varphi(\eta^*) - \lambda\mathcal{G}\varphi(\eta^*) \leq \varphi(\eta^*) = \min_{\eta\in X} \varphi(\eta).$$

Tehát a bizonyítandó összefüggés felírható úgy, hogy

$$\mathcal{G}\varphi(\eta^*) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \left[\varphi(\mathcal{C}_k\eta^*) - \varphi(\eta^*)\right] \geq 0.$$

Ez azonban triviálisan teljesül, hiszen $c_k > 0$, és $\varphi(\mathcal{C}_k\eta^*) - \varphi(\eta^*) \geq 0$, ugyanis η^* a φ minimum helye.

Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{G}$ Markov pregenerátor a $C(2^{\mathbb{Z}})$-n.

A Markov pregenerátorok lezárható operátorok, de lezárásuk nem feltétlenül generátor. [5] első fejezetének 3.9. tétele biztosítja, hogy a $\mathcal{G}$ operátor lezártja egy Markov folyamat generátora, mivel a c_k ugrási ráták korlátosak, és csak szomszédos rácspontokba lehet ugrani.

A 3.4.3. részben megkonstruálunk egy olyan folyamatot, amelynek generátora $\mathcal{G}$ lezártja. Jelölje $\eta(t)$ ezt a folyamatot.

Az egyszerű szimmetrikus véletlen közegű kizárási folyamat hidrodinamikai limeszét úgy kaphatjuk meg, ha ezt a folyamatot is diffúzív módon átskálázzuk, majd n-nel a végtelenbe tartunk. A formális definícióhoz szükségünk lesz a következő átskálázott sűrűségi mezőre minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén:

$$N_n(t, \varphi) := \sum_{k \in Z} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \eta_k(tn^2), \tag{53}$$

ha $\varphi \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, ahol $B = C_0(\mathbb{R})$ a végtelenben eltűnő folytonos függvények Banach terét jelöli a szuprémum normával.

Az $N_n(t, \varphi)$ sűrűségi mező $\varphi : \{\frac{k}{n}, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\frac{k}{n}) \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \pm\infty)$ esetén a következő alakban is felírható:

$$N_n(t, \varphi) = \int \varphi(x) \, \mu_n(\mathrm{d}x),$$

ahol

$$\mu_n(\mathrm{d}x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \delta_{\frac{k}{n}}(\mathrm{d}x) \eta_k(tn^2),$$

ahol $\delta_{\frac{k}{n}}(\mathrm{d}x)$ a $\frac{k}{n}$ pontra koncentrált Dirac mérték. Az átskálázott sűrűségi mező tehát a $\frac{k}{n}$ pontnak $\frac{1}{n}$ súlyt ad, ha k-ban van részecske, és 0 súlyt, ha k-ban nincs részecske a tn^2 időpontban.

A 3.4.3. részben be fogjuk látni ennek a mennyiségnek a konvergenciáját a c_k-ra vonatkozó megfelelő momentum feltétel és a folyamat kezdeti értékre vonatkozó megfelelő feltevés mellett, azaz $\eta(0)$-ra is teszünk majd kikötéseket.

3.3. Fő tételek

Ebben a fejezetben formálisan is megfogalmazzuk a bizonyítandó tételeket. Ehhez vezessük be a következőkben használt jelöléseket:
Legyen $B = C_0(\mathbb{R})$ a valós értékű, végtelenben eltűnő folytonos függvények Banach

tere a $\|\varphi\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$ normával. Legyen B_n a $\varphi = \{\frac{k}{n}, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvények Banach tere ugyancsak a szupremum normával. Jelölje $C_c(\mathbb{R})$ a kompakt tartójú folytonos függvények terét és $C_b(\mathbb{R})$ a korlátos folytonos függvények terét. Tegyük fel, hogy $E(c_1^{-1}) < \infty$. Legyen $W(t)$, $t \geq 0$, $D^2(W(t)) = \frac{2t}{E(c_1^{-1})}$ szórásnégyzetű Wiener folyamat.

Ha $c_k = \frac{1}{2}$ lenne minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén, azaz az élekre szerelt órák átlagosan 2 percenként csörögnének, akkor a standard Brown mozgást kapnánk az átskálázott bolyongás határértékeként.

Most az élekre szerelt órák átlagosan $E(c_1^{-1})$ időközönként csörögnek, ezért nem meglepő, hogy a $D^2(W(t)) = \frac{2t}{E(c_1^{-1})}$ szórásnégyzetű Wiener folyamat lesz most a határérték.

3.3.1. Definíció. *Minden $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ esetén legyen*

$$P_n^t\varphi(k/n) := E(\varphi(X_n(t)) \,|\, X_n(0) = k/n)$$

és

$$P^t\varphi(x) := E(\varphi(W(t)) \,|\, W(0) = x).$$

Természetesen $P_n^t\varphi$ definiálható B_n-beli függvényekre is. P_n^t és P^t az $X_n(t)$ és $W(t)$ folyamatokhoz tartozó erősen folytonos kontrakció félcsoportok.

3.3.2. Állítás. *Legyen Y metrikus tér, X_t, $t \geq 0$ pedig időben homogén Markov folyamat, melynek állapottere Y részhalmaza, azaz $X_t(\omega) \in Y$, minden $\omega \in \Omega$ és $t \geq 0$ esetén. Ha $\varphi \in C_b(Y)$, azaz $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény, akkor legyen $P^t\varphi(x) := E(\varphi(X_t)|X_0 = x)$, ha $x \in Y$. Tegyük fel, hogy X_t Feller folyamat, ami azt jelenti, hogy, ha $\varphi \in C_b(Y)$, akkor $P^t\varphi \in C_b(Y)$ minden $t \geq 0$-ra. Ekkor $\{P^t,\ t \geq 0\}$ kontrakció félcsoport a $C_b(Y)$ téren.*

Bizonyítás. /3.3.2. állítás bizonyítása/

1. P^t félcsoport tulajdonságának igazolásához, $P^0 = I$ és $P^{t+s} = P^tP^s$ összefüggéseket kell belátnunk.

   - Helyettesítsünk a definícióba $t = 0$-t.

     $$(P^0\varphi)(x) = E(\varphi(X_0)|X_0 = x) = \varphi(x)$$

     Ebből az következik, hogy $P^0\varphi = \varphi$, tehát $P^0 = I$.

   - Tagonként kifejtve a jobb oldalt, a következőképpen írható fel:

     $$P^t\varphi(x) = E(\varphi(X_t)|X_0 = x) = \int_X p_t(x, dy)\varphi(y),$$

$$P^s\varphi(x) = E(\varphi(X_s)|X_0 = x) = \int_X p_s(x, dy)\varphi(y),$$

ahol $p_t(x, \mathrm{d}y)$ az X_t Markov folyamat átmenetvalószínűségi mértéke. A bal oldalt hasonlóan felírva látható, hogy

$$P^{t+s}\varphi(x) = E(\varphi(X_{t+s})|X_0 = x) = \int_X p_{t+s}(x, dy)\varphi(y) =$$

$$= \int_X \int_X p_t(x, dz)p_s(z, dy)\varphi(y) = \int_X \left(\int_X p_s(z, dy)\varphi(y)\right) p_t(x, dz) =$$

$$= \int_X P^s\varphi(z)p_t(x, dz) = P^tP^s\varphi(x)$$

A harmadik egyenlőségnél a Chapman - Kolmogorov egyenletet használtuk. Ezzel beláttuk, hogy $\{P^t,\ t \geq 0\}$ félcsoport.

2. A kontrakció tulajdonság igazolásához a $\|P^t\varphi\| \leq \|\varphi\|$ összefüggést kell belátnunk, ahol $\|P^t\varphi\| = \sup_{x\in Y} |P^t\varphi(x)|$.

$$|P^t\varphi(x)| = |E(\varphi(X_t)|X_0 = x)| \leq E(|\varphi(X_t)| \mid X_0 = x) \leq \|\varphi\|,$$

mert $|\varphi(X_t)| \leq \|\varphi\| = \sup_{y\in Y} |\varphi(y)|$. Tehát

$$\|P^t\varphi\| = \sup_{x\in Y} |P^t\varphi(x)| \leq \|\varphi\|.$$

Ezzel beláttuk, hogy P^t kontrakció félcsoport.

□

3.3.3. Állítás. *A $W(t)$ Wiener folyamat Feller folyamat, és a hozzá tartozó P^t félcsoport erősen folytonos, azaz*

$$\lim_{t\longrightarrow 0+} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|P^t\varphi(x) - \varphi(x)\right| = 0,$$

ha $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$.

Bizonyítás. /3.3.3 állítás bizonyítása/ Mivel $W(t)$ $D^2(W(t)) = \frac{2t}{E(c_1^{-1})}$ szórásnégyzetű Wiener folyamat, ezért

$$(P^t\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{2ta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi ta}}\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

ahol $a = \frac{2}{E(c_1^{-1})}$ és $f(y) = e^{\frac{-(x-y)^2}{2ta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi ta}}$ az x várható értékű, ta szórásnégyzetű $N(x, ta)$ normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Ekkor, ha $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, akkor a *Dominált konvergencia tétel* segítségével könnyen látható, hogy $(P^t\varphi)(x)$ x-nek folytonos függvénye. Az is világos, hogy ha φ korlátos, akkor $P^t\varphi$ is korlátos, hiszen P^t kontrakció. Így $W(t)$ Feller folyamat. Azt, hogy P^t erősen folytonos hosszadalmasabb igazolni. Azon múlik, hogy $t \longrightarrow 0+$ esetén $N(x, ta)$ tart gyengén az x-re koncentrált Dirac mértékhez. □

3.3.4. Állítás. *Az $X_n(t)$ Markov folyamat Feller folyamat, és a hozzá tartozó P_n^t félcsoport erősen folytonos, azaz*

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| P_n^t \varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| = 0,$$

ha $\varphi \in B_n$.

Bizonyítás. /3.3.4. állítás bizonyítása/ $\{\frac{k}{n},\ k \in \mathbb{Z}\}$ a diszkrét topológiával van ellátva, így $P_n^t\varphi(\frac{k}{n})$ a $\frac{k}{n}$-nek folytonos függvénye. Mivel φ korlátos és P_n^t kontrakció, így $P_n^t\varphi$ is korlátos, tehát $X_n(t)$ Feller folyamat.

Belátjuk, hogy P_n^t erősen folytonos. Ehhoz legyen $k \in \mathbb{Z}$, T_1 c_{k-1} paraméterű és T_2 c_k paraméterű egymástól független exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $T = \min(T_1, T_2)$. Ekkor T $c_k + c_{k-1}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Emlékeztetőül: $P_n^t\varphi(\frac{k}{n}) := E(\varphi(X_n(t))|X_n(0) = \frac{k}{n})$, ha $k \in \mathbb{Z}$ és $\varphi \in B_n$. Így

$$\left|(P_n^t\varphi)\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|E\left(\varphi(X_n(t)) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right| X_0 = \frac{k}{n}\right)\right| \leq$$

$$\leq E\left(\left|\varphi(X_n(t)) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right|\middle| X_0 = \frac{k}{n}\right) \leq 0 + 2\|\varphi\|\, P(T < t)$$

ahol a 0 értéket akkor kapjuk, ha nem történik ugrás, ugrás esetén pedig

$$\left|\varphi(X_n(t)) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq 2\|\varphi\|.$$

Másrészt

$$P(T < t) = 1 - e^{-(c_k + c_{k+1})t} < 1 - e^{-2bt} \xrightarrow{t \to 0} 0.$$

Ezzel egy k-tól független felső becslést kaptunk. Így

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| P_n^t \varphi\left(\frac{k}{n}\right) - P^t\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| = 0,$$

ha $\varphi \in B_n$. Így P_n^t erősen folytonos. □

3.3.5. Tétel (Az átskálázott véletlen közegű bolyongás félcsoportjának konvergenciája). *Tegyük fel, hogy teljesül egy momentum feltétel,* $E(c_1^{-4}) < \infty$. *Legyen* $0 < c_1 < b$ *valamely* b *konstans esetén. Ekkor minden* $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ *esetén*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| P_n^t \varphi\left(\frac{k}{n}\right) - P^t \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{54}$$

1 valószínűséggel, azaz a közeg majdnem minden realizációjára.

A 3.3.5. tételt később bizonyítjuk, előbb fogalmazzunk meg még két fő tételt. A következő tétel a 3.3.5. tétel következménye.

3.3.6. Tétel (Az átskálázott véletlen közegű bolyongás konvergenciája). *Tegyük fel ismét az előbbi momentum feltételt,* $E(c_1^{-4}) < \infty$, *és tegyük fel, hogy* $0 < c_1 < b$ *valamely* b *konstans esetén. Ekkor a közeg majdnem minden realizációjára teljesül, hogy a bolyongó részecske átskálázott pozíciója* $X_n(t)$, $t \geq 0$ *gyengén konvergál a* $D^2(W(t)) = 2t/E(c_1^{-1})$ *szórásnégyzetű* $W(t)$ *Wiener folyamathoz a* $D([0,\infty))$ *térben.*

3.3.7. Tétel (A véletlen közegű kizárási folyamat hidrodinamikai limesze). *Tegyük fel, hogy* $E(c_1^{-4}) < \infty$, $0 < c_1 < b$ *valamely* b *konstans, és a kizárási folyamat kezdeti konfigurációjára minden* $\varphi \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ *esetén*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{j}{n}\right) \eta_j(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\rho_0(x)\,\mathrm{d}x \tag{55}$$

sztochasztikusan, ahol $\rho_0(x)$ *egy korlátos, folytonos függvény (ami nem függ* φ*-től). Ekkor*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} N_n(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\rho(t,x)\,\mathrm{d}x \tag{56}$$

sztochasztikusan minden $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ *esetén, ahol* ρ *a* $\partial_t \rho = \frac{1}{E(c_1^{-1})}\partial_x^2 \rho$ *hővezetési egyenlet* ρ_0 *kezdeti feltételhez tartozó megoldása, azaz*

$$\rho(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, x-y)\rho_0(y)\,\mathrm{d}y \tag{57}$$

ahol $p(t,x)$ *jelöli az* $N(0,ta)$ *paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvényét, ahol* $a = \frac{2}{E(c_1^{-1})}$ *úgy, mint korábban.*

3.3.8. Megjegyzés.

$$\left(P^t \rho_0\right)(x) = E\left(\rho_0(W(t)) | W(0) = x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(y) f_{t,x}(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(y) p(t, x-y)\,\mathrm{d}y = \rho(t,x)$$

ahol $W(t)$ olyan Wiener folyamat, melyre $D^2(W(t)) = 2t/E(c_1^{-1}) = ta$ és $W(0) = x$, így $W(t) \sim N(x, ta)$. Ez utóbbi sűrűségfüggvényét jelölje $f_{t,x}(y)$.

Hasonlóan felírható, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^t\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) f_{t,x}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \int_{-\infty}^{\infty} f_{t,x}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

ahol $\varphi(y) \geq 0$, így az integrálás sorrendjét felcserélhetjük. Az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert $\int_{-\infty}^{\infty} f_{t,x}(y)\,\mathrm{d}x = 1$.

3.4. Fő tételek bizonyítása

3.4.1. Az átskálázott bolyongás generátorának és félcsoportjának konvergenciája

A 3.3.5. tételt a *Trotter - Kurtz tétel* segítségével bizonyítjuk.

Bizonyítás. /3.3.5. tétel bizonyítása/ Emlékeztetőül $P^t\varphi(x) = E(\varphi(W(t))|W(0) = x)$, ha $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ $(x \in \mathbb{R})$, azaz P^t-vel jelöljük a $W(t)$ Wiener folyamathoz tartozó erősen folytonos kontrakció félcsoportot, $D^2(W(t)) = 2ta$, ahol $a = \frac{1}{E(c_1^{-1})}$.

3.4.1. Lemma. *A $P^t : C_b(\mathbb{R}) \longrightarrow C_b(\mathbb{R})$ félcsoport generátorát jelölje G. Legyen $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R})$, azaz kompakt tartójú, kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, és $G\varphi = \frac{1}{E(c_1^{-1})}\varphi'' = \frac{a}{2}\varphi''$.*

Bizonyítás. /3.4.1. lemma bizonyítása/

$$P^t\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi a t}} e^{\frac{-(y-x)^2}{2at}}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sqrt{at}z + x) \frac{1}{\sqrt{2\pi a t}} e^{\frac{-z^2}{2}} \sqrt{at}\,\mathrm{d}z,$$

ahol új változót vezettünk be, $z = \frac{y-x}{\sqrt{at}}$, $y = \sqrt{at}z + x$, és $\frac{dy}{dz} = \sqrt{at}$. Mivel G a P^t félcsoport generátora, így

$$G\varphi = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{P^t\varphi - \varphi}{t}, \tag{58}$$

ha $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, és $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, ha ez a limesz létezik. A számláló értéke $x \in \mathbb{R}$ helyen:

$$P^t\varphi(x) - \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(\sqrt{at}z + x) - \varphi(x)\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,\mathrm{d}z. \tag{59}$$

A folytatáshoz Taylor - közelítést használunk:

$$\varphi(\sqrt{at}z + x) - \varphi(x) = \varphi'(x)\sqrt{at}z + \frac{1}{2}\varphi''(\tilde{x})(\sqrt{at}z)^2, \tag{60}$$

ahol a kifejezés jobb oldalának második tagja a Lagrange - maradéktag és $\tilde{x}$ egy x és $\sqrt{at}z + x$ közti szám. Ekkor a (60) kifejezést behelyettesítve a (59) egyenletbe:

$$P^t\varphi(x) - \varphi(x) = \varphi'(x)\sqrt{at}\int_{-\infty}^{\infty} z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}\,\mathrm{d}z + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\varphi''(\tilde{x})atz^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}\,\mathrm{d}z, \tag{61}$$

ahol $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}} = f(z)$, a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. $\int_{-\infty}^{\infty} zf(z) = 0$, mivel ez az integrál a standard normális eloszlás várható értéke (ami 0), így a (61) egyenlőség jobb oldalán az első tag nulla. Így

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{P^t\varphi(x) - \varphi(x)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\varphi''(\tilde{x})az^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{a}{2}\varphi''(x), \tag{62}$$

mivel $\varphi''(\tilde{x}) \longrightarrow \varphi''(x)$, hiszen $\varphi \in C_c^2$, $\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z)\,\mathrm{d}z = 1$, ugyanis ha $Z \sim N(0,1)$, akkor $\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z)\,\mathrm{d}z = E(Z^2) = D^2(Z) + (EZ)^2 = 1 + 0 = 1$, emellett a *Dominált konvergencia tételt* használjuk.

A (62) egyenlőségben a konvergencia x-ben egyenletes, mivel $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R})$, és így φ'' egyenletesen folytonos. Így

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{P^t\varphi - \varphi}{t} = \frac{a}{2}\varphi''$$

is teljesül. □

Az $X_n(t)$ átskálázott bolyongáshoz tartozó P_n^t erősen folytonos kontrakció félcsoport generátorát jelölje G_n. Ekkor $\mathcal{D}(G_n) = B_n$, a $\{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z}\}$ rácson korlátos függvények halmaza, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$G_n\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = n^2c_k\left(\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right) + n^2c_{k-1}\left(\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right) \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{63}$$

Mivel $0 < c_k < b$ minden $k \in \mathbb{Z}$-re, így $G_n\varphi$ is korlátos.

A továbbiakban a bizonyítás a 2.3.2. tételen, azaz a *Trotter - Kurtz tételen* fog alapulni. Definiálni fogjuk a G generátornak egy D magját, amely kielégíti a következő tulajdonságot:

⊛ *Minden $\varphi \in D$ esetén létezik egy $\varphi_n \in B_n$ sorozat úgy, hogy $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ és $G_n\varphi_n \longrightarrow G\varphi$ a közeg majdnem minden realizációjára.*

Ez a tulajdonság megfelel a 2.3.2. tétel (*iii*) részének, ahol φ_n megfelel a tételbeli f_n-nek, φ az f-nek, G_n és G pedig A_n és A generátoroknak.

A D mag megadásával később foglalkozunk. Most lássuk be, hogy $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$, azaz az $\mathbb{R}$-en kétszer folytonosan differenciálható kompakt tartójú függvények tere rendelkezik az előbbi $\circledast$-gal jelölt tulajdonsággal. Erről szól a következő lemma.

3.4.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy $E(c_1^{-4}) < \infty$ és hogy $0 < c_1 < b < \infty$, ahol b konstans. Ekkor minden $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$ esetén létezik $\varphi_n \in B_n$ sorozat úgy, hogy*

1. *$G_n\varphi_n \longrightarrow G\varphi$ és*

2. *$\varphi_n \longrightarrow \varphi$ a közeg majdnem minden realizációjára.*

Bizonyítás. /3.4.2. lemma bizonyítása/

1. Legyen $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$ tetszőleges. Ekkor $\varphi_n(k/n)$-et a következőképpen definiáljuk:

$$\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right) = \begin{cases} \varphi(0) + \dfrac{1}{E(c_1^{-1})}\left[\dfrac{\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0)}{c_0} + \cdots + \dfrac{\varphi(\frac{k}{n}) - \varphi(\frac{k-1}{n})}{c_{k-1}}\right] & \text{ha } k \in \mathbb{Z}^+, \\ \varphi(0) & \text{ha } k = 0, \\ \varphi(0) + \dfrac{1}{E(c_1^{-1})}\left[\dfrac{\varphi(\frac{-1}{n}) - \varphi(0)}{c_0} + \cdots + \dfrac{\varphi(\frac{k}{n}) - \varphi(\frac{k+1}{n})}{c_k}\right] & \text{ha } k \in \mathbb{Z}^-. \end{cases} \tag{64}$$

Ekkor $\varphi_n \in B_n$, és

$$G_n\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right) = n^2c_k\left(\varphi_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\right) + n^2c_{k-1}\left(\varphi_n\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \tag{65}$$

$$= \frac{1}{E(c_1^{-1})}\frac{\left[\varphi(\frac{k+1}{n}) - \varphi(\frac{k}{n}) + \varphi(\frac{k-1}{n}) - \varphi(\frac{k}{n})\right]}{\frac{1}{n^2}}.$$

A számlálóban megjelent a diszkrét Laplace - operátor. Ismét Taylor közelítést használva

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) + \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - 2\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\varphi'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{-1}{n}\varphi'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\varphi''(\tilde{x_1}) + \frac{1}{2n^2}\varphi''(\tilde{x_2}) =$$

$$= \frac{1}{2n^2}[\varphi''(\tilde{x_1}) + \varphi''(\tilde{x_2})],$$

ahol $\frac{k}{n} \leq \tilde{x_1} \leq \frac{k+1}{n}$, $\frac{k-1}{n} \leq \tilde{x_2} \leq \frac{k}{n}$. Így

$$\left|G_n\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)E(c_1^{-1}) - \varphi''\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\varphi''(\tilde{x_1}) + \frac{1}{2}\varphi''(\tilde{x_2}) - \varphi''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{|x-y|\leq \frac{1}{n}} \left|\varphi''(x) - \varphi''(y)\right|.$$

Így, figyelembe véve, hogy φ'' folytonos és kompakt tartójú, tehát egyenletesen folytonos, azt kapjuk, hogy

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|G_n\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{E(c_1^{-1})}\varphi''\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|G_n\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right) - G\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{66}$$

k-ban egyenletesen. Ezzel beláttuk, hogy

$$G_n\varphi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} G\varphi$$

a közeg minden realizációjára.

2. Most a $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ tulajdonságot igazoljuk. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \left[\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)\right)(c_0^{-1} - E(c_0^{-1})) + \dots \right. \tag{67}$$

$$\left. \dots + \left(\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)(c_{k-1}^{-1} - E(c_{k-1}^{-1}))\right] / E(c_1^{-1}).$$

A $(c_i^{-1} - E(c_i^{-1}))$ különbségek független, azonos eloszlásúak, 0 várható értékűek, így (67) jobb oldalán az összeg minden tagja független és 0 várható értékű. Így $\varphi_n(\frac{k}{n}) - \varphi(\frac{k}{n})$ $k \in \mathbb{N}$ esetén martingál az $\mathcal{F}_k = \sigma(c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$ filtrációra nézve (ezt generálják a valószínűségi változók) tetszőleges rögzített n esetén. $(\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\})$

Mivel $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R})$ kompakt tartójú, létezik T pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy $supp\,\varphi \subseteq [-T, T]$.

$\varphi_n((\frac{k}{n}) - \varphi(\frac{k}{n}))^4$ szubmartingál, hiszen $E(X_n^4|\mathcal{F}_k) \geq [E(X_n|\mathcal{F}_k)]^4 = X_k^4 \quad n \geq k$, ha $n \geq k$. Az egyenlőtlenségben a Jensen-egyenlőtlenséget használtuk fel. Így alkalmazható rá egy közismert tétel (lsd. pl. [2]):

3.4.3. Tétel (Doob-féle maximál egyenlőtlenség). *Legyen X_n $n = 1, \dots, N$ valószínűségi változók sorozata, $\mathcal{F}_t$ $n = 1, \dots, N$ σ-algebrák monoton növekvő sorozata, $(X_n, \mathcal{F}_n)$ $1 \leq n \leq N$ szubmartingál, $\lambda > 0$, és jelölje $X_N^* := \max_{1\leq n\leq N} X_n$. Ekkor*

$$P(X_N^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}E(X_N^+ \mathbf{1}_{X_N^*\geq\lambda}) \leq \frac{1}{\lambda}E(X_N^+),$$

ahol $a^+ = \max\{a, 0\}$.

Ezt alkalmazva a $\left(\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right)^4$ $k=0,1,\ldots,nT$ szubmartingálra

$$P\left(\max_{0\leq k\leq Tn}\left|\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right|>\epsilon\right)\leq\frac{E\left[(\varphi_n(T)-\varphi(T))^4\right]}{\epsilon^4}. \tag{68}$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalán lévő $\varphi_n(T)-\varphi(T)$ kifejezés független, 0 várható értékű valószínűségi változók szummája. Így felírható, hogy

$$E(\varphi_n(T)-\varphi(T))^4=\frac{1}{E^4(c_1^{-1})}\left[E(c_1^{-1}-E(c_1^{-1}))^4\sum_{k=1}^{nT}\left(\varphi\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^4+\right. \tag{69}$$

$$\left.+D^4(c_1^{-1})\sum_{k=1}^{nT}\sum_{l=1,l\neq k}^{nT}\left(\varphi\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2\left(\varphi\left(\frac{l}{n}\right)-\varphi\left(\frac{l-1}{n}\right)\right)^2\right]3\leq$$

$$\leq C\left(\sum_{k=1}^{nT}\left(\varphi\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2\right)^2$$

valamely n-től független C konstans esetén. Itt

$$\varphi\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\varphi'(u_{k,n})$$

alakba írható át, ahol $\frac{k-1}{n}\leq u_{k,n}\leq\frac{k}{n}$ minden $1\leq k\leq NT$ esetén. Mivel $\varphi'\in C_c(\mathbb{R})$ korlátos operátor, így

$$\sum_{k=1}^{nT}\left(\varphi\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{nT}(\varphi'(u_{k,n}))^2\leq\frac{KT}{n} \tag{70}$$

valamely n-től független $K>0$ konstans esetén. Hiszen $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{nT}(\varphi'(u_{k,n}))^2\longrightarrow\int_0^T(\varphi'(x))^2\,\mathrm{d}x\leq KT$.

Ezek alapján

$$E(\varphi_n(T)-\varphi(T))^4\leq\frac{C(KT)^2}{n^2}. \tag{71}$$

Ezt behelyettesítve a (68) egyenlőtlenségbe azt kapjuk, hogy

$$P\left(\max_{0\leq k\leq Tn}\left|\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right|>\epsilon\right)\leq\frac{C(KT)^2}{n^2\epsilon^4}. \tag{72}$$

Így

$$\max_{0\leq k\leq Tn}\left|\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right|\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{73}$$

a közeg majdnem minden realizációjára. Ezt a Borel - Cantelli lemma biztosítja, amely szerint, ha A_n eseményekre $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, akkor 1 valószínűséggel A_n-ek közül csak véges sok teljesül. Esetünkben legyen rögzített $\epsilon > 0$ esetén

$$A_n := \left\{ \max_{0 \le k \le Tn} \left| \varphi_n \left(\frac{k}{n} \right) - \varphi \left(\frac{k}{n} \right) \right| > \epsilon \right\}.$$

Mivel minden $\epsilon > 0$-ra 1 valószínűséggel véges sok A_n teljesül, így (73) 1 valószínűséggel igaz, azaz a közeg majdnem minden realizációjára.

Mivel $\varphi(\frac{k}{n}) = \varphi(T)$ és $\varphi_n(\frac{k}{n}) = \varphi_n(T)$ minden $k > nT$ esetén, ezért felírható az is, hogy

$$\max_{k \ge 0} \left| \varphi_n \left(\frac{k}{n} \right) - \varphi \left(\frac{k}{n} \right) \right| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

a közeg majdnem minden realizációjára.

A maximum konvergenciája negatív k-kra hasonlóképpen bizonyítható. Ezzel beláttuk $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ feltételt is a közeg majdnem minden realizációjára. Jegyezzük meg, hogy nem használtuk ki azt, hogy $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R})$, mindössze φ'' egyenletes folytonosságát és $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\varphi'(u_{k,n}))^2 = \mathbf{O}(n)$ nagyságrendjét használtuk fel.

□

A következőkben meg kell adnunk a G operátornak egy D magját, amely kielégíti a fent említett ⊛ tulajdonságot. A P_n^t erősen folytonos kontrakció félcsoport konvergenciájának bizonyításához szükségünk van a *Trotter - Kurtz approximációs tételre*, valamint arra, hogy D értékkészlete megszámlálható legyen. A következő lemma arra szolgál, hogy egy megfelelő magot konstruálhassunk.

3.4.4. Lemma. *Legyen egy $(B, \|\cdot\|)$ Banach téren értelmezett G operátor egy erősen folytonos kontrakció félcsoport generátora, és legyen $D_0 \subsetneq B$ sűrű. Ekkor minden rögzített $z > 0$ esetén $D = R_z D_0$ a G generátor magja.*

Bizonyítás. /3.4.4. lemma bizonyítása/ Azt kell belátnunk, hogy minden $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ esetén létezik olyan $\varphi_n \in D$ sorozat, amelyre teljesül, hogy $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ és $G\varphi_n \longrightarrow G\varphi$. Rögzítsünk egy $\varphi \in \mathcal{D}(G)$-t. Felírható, hogy $\mathcal{R}(R_z) = \mathcal{D}(G)$, ahol R_z az operátor minden z-re vett rezolvense. Így létezik $\psi \in B$, amelyre $\varphi = R_z \psi$. Mivel $D_0 \subsetneq B$ sűrű, ezért létezik $\psi_n \in D_0$ sorozat úgy, hogy $\psi_n \longrightarrow \psi$. Legyen $\varphi_n = R_z \psi_n$. Mivel R_z egy korlátos operátor, így $R_z \psi_n \longrightarrow R_z \psi$, azaz $\varphi_n \longrightarrow \varphi$. Ekkor a rezolvens egyenletek úgy írhatók fel, hogy

$$zR_z\psi_n - GR_z\psi_n = (z - G)R_z\psi_n = \psi_n \text{ és } zR_z\psi - GR_z\psi = (z - G)R_z\psi = \psi$$

hiszen $(z - G)R_z = I$. Felhasználva, hogy $\psi_n \longrightarrow \psi$ a rezolvens egyenletekből következik, hogy $GR_z\psi_n \longrightarrow GR_z\psi$, tehát $G\varphi_n \longrightarrow G\varphi$. Ezzel bebizonyítottuk a lemmát. $\square$

Tekintve a 3.4.4. lemmát már csak találnunk kell egy alkalmas $B = C_0(\mathbb{R})$-ben sűrű és megszámlálható D_0 részhalmazt, amelyre teljesül, hogy $D := R_z D_0$ kielégíti a $\circledast$ tulajdonságot.

A következő, 3.4.5. lemmával szeretnénk belátni, hogy $R_z C_c^2(\mathbb{R})$ kielégíti a $\circledast$ tulajdonságot. Most megmutatjuk, hogy hogyan lehet olyan D_0-t előállítani, amelyre D_0 a $C_c^2(\mathbb{R})$ tér megszámlálható részhalmaza és a $C_0(\mathbb{R})$ térben sűrű. A 3.4.4. és 3.4.5. lemmákat tekintve erre a D_0-ra, a $D = R_z D_0$ egy megszámlálható magja lesz G-nek, amely a $\circledast$ tulajdonságot is kielégíti.

Legyen $\tilde{D_0}$ azon függvények halmaza, amelyek felírhatók egy racionális együtthatós polinomfüggvény és egy racionális végpontú intervallum indikátorfüggvényének szorzataként. Azaz

$$\tilde{D_0} := \{p(x) \cdot \mathbf{1}_{[a,b]}(x) : p(x)\text{racionális együtthatós polinom}, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Jegyezzük meg, hogy mindkét függvényből csak megszámlálhatóan sok létezik, így $\tilde{D_0}$ megszámlálható. Legyen

$$\eta(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & ,\text{ha } |x| < 1, \\ 0 & ,\text{ha } |x| \geq 1, \end{cases}$$

ekkor $\eta(x)$ végtelenszer differenciálható, kompakt tartójú függvény. Legyen az $\epsilon > 0$-ra $\eta_\epsilon := c_\epsilon \eta(\frac{x}{\epsilon})$, ahol $c_\epsilon > 0$ konstans, melyre $\int \eta_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Ekkor $\eta, \eta_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Legyen D_0 a $\tilde{D_0}$ elemeinek és az $\eta_{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$ függényeknek konvolúcióiból álló halmaz. Ezekkel a konvolúciókkal a $\tilde{D_0}$ elemeinek simításait adjuk meg. Minél kisebb $\epsilon = \frac{1}{n}$ értéke, azaz minél nagyobb n, annál közelebb van a simított $f * \eta_\epsilon$ függvény az eredeti $f \in \tilde{D_0}$-hoz. Ha $f(x) \in \tilde{D_0}$, akkor az $f(x)$ függvény simítása az $f(x)$ és η_ϵ konvolúciója:

$$(f * \eta_\epsilon)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\eta_\epsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(y)\eta_\epsilon(y-x)\,\mathrm{d}y = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x+z)\eta_\epsilon(z)\,\mathrm{d}z$$

A második egyenlőség azért írható fel, mert $\eta_\epsilon(x-y) > 0 \Leftrightarrow |x-y| < \epsilon \Leftrightarrow x - \epsilon < y < x + \epsilon$. Az utolsó egyenlőségben pedig mindössze egy változó cserét hajtottunk végre. Ezzel $D_0 \subseteq C_c^\infty$ megszámlálható sűrű részhalmaza $C_0(\mathbb{R})$-nek.

3.4.5. Lemma. *Rögzítsünk egy $z > 0$-t és legyen R_z a P^t félcsoport rezolvense. Tegyük fel ismét, hogy $E(c_1^{-4}) < \infty$ és $0 < c_1 < b < \infty$. Ekkor minden $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R})$ esetén létezik $\psi_n \in B_n$ sorozat olyan módon, hogy $\psi_n \longrightarrow \psi := R_z\varphi$ és $G_n\psi_n \longrightarrow G\psi$ a közeg majdnem minden realizációjára.*

Bizonyítás. /3.4.5. lemma bizonyítása/ Minden $\psi = R_z\varphi$ esetén definiálható a ψ_n közelítő sorozat úgy, ahogyan φ_n-et difiniáltuk φ-re a 3.4.2. lemma (64) képletében. A két konvergencia bizonyítása nagyon hasonlóan végezhető el. A $G_n\psi_n$ konvergenciájához azt kell belátni, hogy ψ'' egyenletesen folytonos. ψ_n konvergenciájához elegendő azt belátni, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\psi'(u_{k,n}))^2 = \mathbf{O}(n) \tag{74}$$

minden $u_{k,n}$ sorozatra, amelyre teljesül, hogy $\frac{k-1}{n} \leq u_{k,n} \leq \frac{k}{n}$.

Ehhez az adott folyamathoz tartozó rezolvens a következőképpen írható fel:

$$R_z\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-zt}[P^t\varphi](x)\,\mathrm{d}t$$

Ezt és a korábban bevezetett $a = \frac{2}{E(c_1^{-1})}$ jelölést felhasználva, ahol a a $W(1)$ szórásnégyzete, felírható, hogy

$$\psi = R_z\varphi(x) = \frac{1}{a\sqrt{2z/a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{2z/a}|x-y|}\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a\sqrt{2z/a}}\int_{T}^{T} e^{-\sqrt{2z/a}|x-y|}\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

mert φ kompakt tartójú. Így $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ és minden $x > T$-re illetve minden $x < -T$-re $|x-y|$ előjele azonos. Hiszen ha $x > T$ és $-T < y < T$, akkor $|x-y| = x-y$, ami mindig pozitív, ha pedig $x < -T$ és $-T < y < T$, akkor $|x-y| = -x-y$, ami mindig negatív. Tehát bármely ilyen x-re

$$|\psi'(x)| = \left|\frac{1}{a}\int_{-T}^{T} e^{-\sqrt{2z/a}|x-y|}\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq Ke^{-c(|x|-T)},$$

ahol $c = \sqrt{\frac{2z}{a}}$ és K x-től és n-től nem függő pozitív konstansok. Az egyenlőtlenség teljesül, mivel $|x-y| > |x| - T$, így $e^{-c|x-y|} < e^{-c(|x|-T)}$.

Másrészt ψ' folytonos és korlátos a $[-T, T]$-n, azaz létezik $L > 0$, hogy $|\psi'(x)| < L$ ezen az intervallumon. Következésképp felírható, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\psi'(u_{k,n}))^2 = \sum_{k=-nT}^{nT} (\psi'(u_{k,n}))^2 + \sum_{|k|>nT} (\psi'(u_{k,n}))^2 \leq$$

$$\leq (2nT+1)L^2 + 2K^2\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2c\frac{k}{n}} = \mathbf{O}(n) + \frac{2K^2}{1-e^{-2c/n}} = \mathbf{O}(n),$$

mert felírható az a felső becslés, miszerint

$$\sum_{k>nT} (\psi'(u_{k,n}))^2 \le \sum_{k>nT} K^2 e^{-2c(\frac{k}{n}-T)}.$$

Végezetül létezik $c_1, c_2 > 0$, hogy $c_1\frac{1}{n} < 1 - e^{-2c/n} < c_2\frac{1}{n}$. Így $\frac{2K^2}{1-e^{-2c/n}} = \mathbf{O}(n)$. Ezzel beláttuk a kívánt (74) összefüggést.

A ψ'' folytonossága evidens. Az egyenletes folytonosság pedig közvetlen következménye annak, hogy minden $x > T$-re és $x < -T$-re felírható, hogy

$$|\psi''(x)| = \left| \frac{\sqrt{2z/a}}{a} \int_{-T}^{T} e^{-\sqrt{2z/a}|x-y|} \varphi(y)\, \mathrm{d}y \right| \le K e^{-c(|x|-T)},$$

ahol c és K x-től és n-től nem függő pozitív konstansok. Ez azt jelenti, hogy $\psi'' \in C_0$. Tehát teljesül, hogy $G_n\psi_n \longrightarrow G\psi$ 1 valószínűséggel. □

Mivel G magja $D = R_z D_0$ megszámlálható és minden $\varphi \in D$ esetén létezik $\varphi_n \in B_n$ sorozat oly módon, hogy $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ és $G_n\varphi_n \longrightarrow G\varphi$ a közeg majdnem minden realizációjára, így felírható a következő állítás:

3.4.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy $E(c_1^{-4}) < \infty$ és valamely b esetén $0 < c_1 < b < \infty$. Ekkor létezik $\Omega_0 \subseteq \Omega$ részhalmaza a valószínűségi térnek, melyre $P(\Omega_0) = 1$, és emellett minden $\omega \in \Omega_0$ esetén a közeg ($\{c_k(\omega); k \in \mathbb{N}\}$) realizációjára igaz az, hogy a megfelelő átskálázott bolyongás generátora rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden $\varphi \in D$ esetén létezik $\varphi_n \in B_n$ sorozat úgy, hogy $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ és $G_n\varphi_n \longrightarrow G\varphi$.*

A 3.4.6. állítás és a 2.3.2. tétel megmutatja, hogy a közeg azon realizációira, melyek megfelelnek az Ω_0 elemeinek minden $\varphi \in B = C_0(\mathbb{R})$ esetén $P_n^t\varphi \longrightarrow P^t\varphi$. Ezzel a 3.3.5. tételt bizonyítottuk. □

3.4.2. Az átskálázott bolyongás konvergenciája

Bizonyítás. /3.3.6. tétel bizonyítása/ Felhasználjuk a [3] könyv egyik tételét, amelyhez először vezessünk be néhány jelölést.

3.4.7. Definíció. *Legyen E egy metrikus tér, $D_E[0,\infty)$ az olyan $f : [0,\infty) \longrightarrow E$ függvények tere, amelyek jobbról folytonosak és balról határértékkel rendelkeznek.*

3.4.8. Definíció. *Egy erősen folytonos, pozitív kontrakció félcsoportot Feller félcsoportnak nevezünk, ha G generátora konzervatív, azaz létezik $\varphi_n \in \mathcal{D}(G)$ sorozat úgy, hogy $\varphi_n \longrightarrow 1$ és $G\varphi_n \longrightarrow 0$.*

Ekkor a [3] könyvben szereplő tétel, amit használni fogunk a következőt állítja:

3.4.9. Tétel. *Legyen E lokálisan kompakt és szeparábilis metrikus tér. Minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén legyen $\{T_n^t\}$ egy Feller félcsoport $C_0(E)$-n és tegyük fel, hogy X_n a $\{T_n^t\}$-nek megfelelő Markov folyamat $D_E[0, \infty)$-beli pályákkal. Tegyük fel, hogy minden $\varphi \in C_0(E)$ és $t \geq 0$ esetén*

$$T_n^t \varphi \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T^t \varphi.$$

Ha $\{X_n(0)\}$-nak létezik ν határeloszlása, akkor létezik egy $\{T^t\}$-nek megfelelő, ν kezdeti eloszlással rendelkező X Markov folyamat, amelynek trajektóriái $D_E[0, \infty)$-beliek és amelyre $X_n \longrightarrow X$ eloszlásban.

Jegyezzük meg, hogy $\mathbb{R}$ egy lokálisan kompakt, szeparábilis metrikus tér. P_n^t a $C_0(\mathbb{R})$-en definiált Feller félcsoport és X_n folyamatok trajektóriái $D_{\mathbb{R}}[0, \infty)$ beliek. Emellett, $X_n(0) \equiv 0$, és így rendelkezik határeloszlással. Így a 3.4.9. tételt felhasználva beláttuk a kívánt 3.3.6. tételt. □

3.4.3. A kizárási folyamat hidrodinamikai limesze, az átskálázott sűrűségi mező konvergenciája

Bizonyítás. /3.3.7. tétel bizonyítása/

Mindenekelőtt konstruálunk egy folyamatot, amelynek a (40) egyenletben szereplő $\mathcal{G}$ a pregenerátora. Ezt egy a közelítő eljárás segítségével tesszük meg. Legyen $(c_k : k \in \mathbb{Z})$ az élekhez rendelt paraméterek sorozata. Rögzítsük ezek értékét. Legyenek ezek után $(N_k(t) : k \in \mathbb{Z})$ független c_k paraméterű Poisson folyamatok. $N_k(t)$-t a $\{k, k+1\}$ élhez fogjuk hozzárendelni.

Első lépésként minden $N \in \mathbb{N}$-re értelmezünk egy η_N folyamatot a következőképpen:

3.4.10. Definíció. *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén η^N olyan folyamat, ahol $\eta^N(0) = \eta(0)$ egy rögzített $0-1$ sorozat. Ha valamely $|k| \leq N$ esetén N_k ugrik a t időpillanatban (most csak ezeket a Poisson folyamatokat tekintjük), akkor kicseréljük η^N két koordinátáját úgy, hogy végrehajtjuk $\mathcal{C}_k$-t. Ez felírható $\eta^N(t) := \mathcal{C}_k \eta^N(t-)$ módon, ahol $\eta^N(t-)$ az η^N értékét jelöli közvetlenül a t időpont előtt, és ezen hajtuk végre a cserét.*

Látható, hogy $\eta^N(t)$, $t \geq 0$-ra egy jól definált Markov folyamat a következő generátorral:

$$\mathcal{G}^{(N)} \varphi = \sum_{k=-N}^{N-1} c_k D_k \varphi \tag{75}$$

Másrészről $\eta^N(t)$ kielégíti a következő sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$\mathrm{d}\eta_k^N(t) = (\eta_{k+1}^N - \eta_k^N)(t-)\,\mathrm{d}N_k(t) + (\eta_{k-1}^N - \eta_k^N)(t-)\,\mathrm{d}N_{k-1}(t) \qquad -N < k < N \quad (76)$$

$$\mathrm{d}\eta_{-N}^N(t) = (\eta_{-N+1}^N - \eta_{-N}^N)(t-)\,\mathrm{d}N_{-N}(t)$$

$$\mathrm{d}\eta_N^N(t) = (\eta_{N-1}^N - \eta_N^N)(t-)\,\mathrm{d}N_{N-1}(t)$$

ahol az első egyenlőség azt mutatja, hogy $\eta_k^N(t)$ értéke akkor tud megváltozni, ha a $\{k, k+1\}$ vagy a $\{k-1, k\}$ élen történik ugrás. Az utóbbi két egyenlőség a két végpontbeli változás lehetőségét mutatja, hiszen itt csak egyik oldalon lehet ugrani. $\eta_k(t)$ trajektóriái jobbról folytonosak, balról határértékkel rendelkező függvények.

Megmutatjuk, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $\sum_N P(\eta_k^N(t) \neq \eta_k^{N+1}(t)) < \infty$ a közeg majdnem minden realizációjára. η_k^N és η_k^{N+1} ugyanonnan indul, de η_k^{N+1}-nél többféle ugrás megengedett, azaz több Poisson folyamat van bekapcsolva. Könnyen látható, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$ és $N > |k|$ esetén $\eta_k^N(t) \neq \eta_k^{N+1}(t)$ csak akkor teljesülhet, ha minden $k \leq l \leq N-1$ esetén $N_l(t) \geq 1$, vagy ha minden $-N \leq l \leq k-1$ esetén $N_l(t) \geq 1$. Így felírható, hogy

$$P(\eta_k^N(t) \neq \eta_k^{N+1}(t)) \leq \prod_{k \leq l \leq N-1} P(N_l(t) \geq 1) + \prod_{-N \leq l \leq k-1} P(N_l(t) \geq 1).$$

Így

$$\sum_{N=|k|+1}^{\infty} P(\eta_k^N(t) \neq \eta_k^{N+1}(t)) \leq \sum_{N=|k|+1}^{\infty} \left(\prod_{k \leq l \leq N-1} (1 - e^{-c_l t}) + \prod_{-N \leq l \leq k-1} (1 - e^{-c_l t}) \right).$$

A jobb oldali szumma minden rögzített k-ra véges, mivel minden $l \in \mathbb{Z}$ esetén $c_l \leq b$, tehát $1 - e^{-c_l t} \leq 1 - e^{-bt}$, és így felső becslésként két geometriai sort kapunk, amelyek szummája véges. Tehát

$$\sum_N P(\eta_k^N(t) \neq \eta_k^{N+1}(t)) < \infty.$$

Innen a Borel-Cantelli lemma miatt felírható, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$P(\{\omega : \exists N_0(\omega, k) \in \mathbb{N} \text{ küszöb, hogy } \eta_k^N(t)(\omega) = \eta_k^{N+1}(t)(\omega)\ \forall N \geq N_0(\omega, k)\}) = 1,$$

azaz 1 valószínűséggel minden k-ra létezik $N_0(\omega, k)$ index, ami után $\eta_k^N(t)$ értéke már nem változik.

Ezt felhasználva definiáljuk az $\eta(t)$ folyamatot úgy, hogy

$$\eta_k(t)(\omega) := \eta_k^N(t)(\omega) = \eta_k^{N+1}(t)(\omega) = \dots,$$

ahol $N \geq N_0(\omega, k)$. A (76) összefüggés és $\eta_k(t)$ definíciója miatt minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\mathrm{d}\eta_k(t) = (\eta_{k+1} - \eta_k)(t-)\,\mathrm{d}N_k(t) + (\eta_{k-1} - \eta_k)(t-)\,\mathrm{d}N_{k-1}(t), \tag{77}$$

és

$$\mathcal{G}\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k D_k \varphi, \tag{78}$$

ha φ az η-nak csak véges sok koordinátájától függ, azaz φ cilinder-függvény. Ezzel konstruáltunk egy folyamatot, amelynek $\mathcal{G}$ a pregenerátora.

A (77) egyenletnek fontos szerepe lesz a 3.3.7. tétel bizonyításában. (77) a következő alakban is írható

$$\mathrm{d}\eta_k(t) = c_k(\eta_{k+1} - \eta_k)(t)\,\mathrm{d}t + c_{k-1}(\eta_{k-1} - \eta_k)(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}m_k^*(t), \tag{79}$$

ahol

$$m_k^*(t) = m_k(t) - m_{k-1}(t), \tag{80}$$

ahol $m_k(0) = 0$, és

$$\mathrm{d}m_k(t) = (\eta_{k+1} - \eta_k)(t-)\,\mathrm{d}(N_k(t) - c_k t), \tag{81}$$

ahol $N_k(t) - c_k t$ egy 0 várható értékű, független növekményű martingál.

Mivel $N_k(t)$ egy Poisson folyamat, így $N_k(t) - c_k t$ és $m_k(t)$ folyamatok korlátos változásúak a közeg majdnem minden realizációjára. Ha $\eta(t)$-re úgy gondolunk, mint egy (∞ hosszú) vektorra, amely $\mathbb{Z}$-ből $\mathbb{R}$-be képez, akkor a (79) differenciálegyenlet felírható

$$\mathrm{d}\eta(t) = G_1\eta(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}m^*(t) \tag{82}$$

alakban, ahol $m^*(t)$ az $m_k^*(t)$ koordinátákból álló vektor. Mivel ez egy differenciálegyenlet, így ekvivalens egy integrálegyenlettel, amely úgy írható fel, hogy

$$\eta(t) = \eta(0) + m^*(t) + \int_0^t G_1\eta(s)\,\mathrm{d}s = \tag{83}$$

$$\stackrel{(I)}{=} \eta(0) + m^*(t) + \int_0^t G_1\left(\eta(0) + m^*(s) + \int_0^s G_1\eta(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s =$$

$$\stackrel{(II)}{=} \eta(0) + \int_0^t \mathrm{d}m^*(s) + G_1 t\eta(0) + \int_0^t G_1(t-s)\,\mathrm{d}m^*(s) + \int_0^t (t-s)G_1^2\eta(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$\stackrel{(III)}{=} \eta(0) + G_1 t\eta(0) + \dots + G_1^n\frac{t^n}{n!}\eta(0) + \int_0^t \mathrm{d}m^*(s) + \int_0^t G_1(t-s)\,\mathrm{d}m^*(s) + \dots$$

$$\dots + \int_0^t \frac{G_1^n(t-s)^n}{n!}\,\mathrm{d}m^*(s) + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}G_1^{n+1}\eta(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$\overset{(IV)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} G_1^n \frac{t^n}{n!}\eta(0) + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} G_1^n \frac{(t-s)^n}{n!}\, \mathrm{d}m^*(s) + \int_0^t G_1^{n+1} \frac{(t-s)^n}{n!}\eta(s)\, \mathrm{d}s$$

Az (I) egyenlőségnél iterációt hajtottunk végre, $\eta(s)$-re felírtuk (83) első egyenletét. (II)-ben a következő parciális integrálással adódó egyenlőséget használtuk:

$$\int_0^t 1 \cdot m^*(s)\, \mathrm{d}s = [(s-t)m^*(s)]_0^t - \int_0^t (s-t)\, \mathrm{d}m^*(s) = \int_0^t (t-s)\, \mathrm{d}m^*,$$

és azt, hogy

$$\int_0^t\int_0^s G_1^2\eta(u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}s = \int_0^t\int_u^t G_1^2\eta(u)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}u = \int_0^t (t-u)G_1^2\eta(u)\, \mathrm{d}u = \int_0^t (t-s)G_1^2\eta(s)\, \mathrm{d}s.$$

Legyen ν a $\mathbb{Z}$ részhalmazain értelmezett mérték, melyre $\nu(\{k\}) = 2^{-|k|}$. Jelölje $|m_k^*|(t)$ az $m_k^*(t)$ totális variációját a $[0,t]$ intervallumon. Tekintve a (80) és (81) összefüggéseket, ahol ez utóbbiban $|\eta_{k+1} - \eta_k| \leq 1$, felírható, hogy

$$\mathrm{d}|m_k^*|(t) \leq \mathrm{d}N_k(t) + \mathrm{d}N_{k-1}(t) + \mathrm{d}c_k t + \mathrm{d}c_{k-1} t \leq \mathrm{d}N_k(t) + \mathrm{d}N_{k-1}(t) + 2b\, \mathrm{d}t,$$

mivel $c_k \leq b$. Így

$$|m_k^*|(t) \leq N_k(t) + N_{k-1}(t) + 2bt.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$P(|m_k^*|(t) > 2bt + k^2) \leq P(N_k(t) + N_{k-1}(t) > k^2) \leq C\frac{(2bt)^{k^2}}{(k^2)!}, \tag{84}$$

valamely k-tól nem függő C esetén, ugyanis $N_k(t) \sim \text{Poisson}(c_k t)$ és $N_{k-1}(t) \sim \text{Poisson}(c_{k-1} t)$, így $N_k(t) + N_{k-1}(t) \sim \text{Poisson}(c_k t + c_{k-1} t)$, és jelölje $c_k t + c_{k-1} t =: \lambda < 2bt$, ekkor

$$P(Poisson(\lambda) > k^2) = \sum_{n=k^2+1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{\xi^{k^2+1}}{(k^2+1)!} e^{-\lambda} \leq C\frac{(2bt)^{k^2}}{(k^2)!}$$

valamely $\xi \in [0, \lambda]$ és $C < \infty$ esetén. A (84) becslést felhasználva a Borel-Cantelli lemma miatt a valószínűségi tér majdnem minden ω elemére $|m_k^*|(t)(\omega) \leq C(\omega)k^2$ minden $k \in \mathbb{Z}$-re. Így $\sum |m_k^*|(t)\nu(\{k\}) < \infty$, azaz $|m_k^*|(t) \in L^1(\mathbb{Z}, \nu)$ 1 valószínűséggel.

Másrészről G_1 korlátos operátor $L^1(\mathbb{Z}, \nu)$-n. Ekkor, mivel $P_1^t = e^{G_1 t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(G_1 t)^n}{n!}$, a (83) egyenletben szereplő összegek konvergálnak, és $n \longrightarrow \infty$ esetén

$$\eta(t) = P_1^t \eta(0) + \int_0^t P_1^{t-s}\, \mathrm{d}m^*(s) \tag{85}$$

adódik. A (83) egyenlet (IV) egyenlőségének utolsó tagja $n \longrightarrow \infty$ esetén 0-hoz konvergál.

Itt P_1^t ahhoz az $X(t)$ véletlen közegű bolyongáshoz tartozó kontrakció félcsoport, amelynek c_k paraméterei megegyeznek a kizárási folyamatban használt c_k paraméterrel. Így a (85) egyenlőség úgy is írható, hogy

$$\eta_k(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p(t,k,j)\eta_j(0) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^t p(t-s,k,j)\,\mathrm{d}m_j^*(s) \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{86}$$

ahol $p(t,k,j) = P(X(t) = j\,|X(0) = k)$, azaz t idő alatt a k-ból j-be eljutás valószínűsége. Így minden $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ esetén

$$N_n(t,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{j\in\mathbb{Z}} p(tn^2,k,j)\eta_j(0) + \tag{87}$$

$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^{tn^2} p(tn^2-s,k,j)\,\mathrm{d}m_j^*(s),$$

ahol $N_n(t,\varphi)$ definícióját az (53) összefüggés tartalmazza. A kívánt 3.3.7. tétel bizonyításához a következő három lemmára lesz szükségünk.

3.4.11. Lemma. *Legyen G_1 az $X(t)$ generátora. Ekkor G_1 minden $\varphi, \psi \in l^2(\mathbb{Z})$ esetén kielégíti a*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)G_1\psi(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(k)G_1\varphi(k) \tag{88}$$

egyenlőséget. Azaz $X(t)$ reverzibilis a számláló mértékre nézve $\mathbb{Z}$-n, amiből következik, hogy $p(t,k,j) = p(t,j,k)$ minden $k, j \in \mathbb{Z}$ esetén.

Bizonyítás. /3.4.11. lemma bizonyítása/

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)G_1\psi(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)\left(c_k(\psi(k+1)-\psi(k)) + c_{k-1}(\psi(k-1)-\psi(k))\right) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(k)\left(c_k(\varphi(k+1)-\varphi(k)) + c_{k-1}(\varphi(k-1)-\varphi(k))\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(k)G_1\varphi(k)$$

□

Ezek után használhatjuk a $p(t,k,j) = p(t,j,k)$ összefüggést. A következő lemma azt biztosítja, hogy a (87) egyenlet második tagja sztochasztikusan 0-hoz tartson.

3.4.12. Lemma. *A közeg majdnem minden $(c_k : k \in \mathbb{Z})$ realizációjára és minden $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ esetén*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \varphi \left(\frac{k}{n} \right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^{tn^2} p(tn^2 - s, k, j) \, \mathrm{d}m_j^*(s) \right)^2 = 0. \tag{89}$$

Bizonyítás. /3.4.12. lemma bizonyítása/ Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy $\varphi \geq 0$. Ekkor

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \varphi \left(\frac{k}{n} \right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^{tn^2} p(tn^2 - s, k, j) \, \mathrm{d}(m_j(s) - m_{j-1}(s)) = \tag{90}$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^{tn^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \varphi \left(\frac{k}{n} \right) \big(p(tn^2 - s, k, j) - p(tn^2 - s, k, j+1) \big) \, \mathrm{d}m_j(s),$$

ahol felcseréltük a két szummát, és az egyik összegben $j-1$ helyett j-t írtunk.

$N_j(t)$ egy c_k paraméterű Poisson folyamat, így $N_j(t) - c_j t$ minden $j \in \mathbb{Z}$ esetén martingál. Mivel $(\eta_{j+1} - \eta_j)(t-)$ jósolható $\mathcal{F}_t := \sigma\{N_k(s) - c_k s, \ s \leq t\}$-re nézve, ezért $m_j(t)$ és $m_j^*(t)$ is martingál, és a fenti integrált tekinthetjük sztochasztikus integrálnak. $\{N_k(t) - c_k t, \ k \in \mathbb{Z}\}$ független növekményű és egymástól független $\mathcal{F}_t$-martingálok, és $N_k(t) - c_k t$ kvadratikus variációja $c_k t$.

3.4.13. Megjegyzés. *A kvadratikus variáció olyan sztochasztikus folyamat, amelyre teljesül, hogy $M_t^2 - \langle M_t \rangle$ martingál.*

Felírható egy összefüggés miszerint: $E(\int_0^t Y_s \, \mathrm{d}M_s)^2 = E\left(\int_0^t Y_s^2 \, \mathrm{d}\langle M \rangle_s\right)$, ha Y_s megjósolható folyamat, és $\langle M \rangle_s$ az M_s martingál kvadratikus variációja. Erről bővebben olvashatunk a [6] jegyzetben.

Néhány direkt számolás a következőket adja:

$$E \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^{tn^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \varphi \left(\frac{k}{n} \right) \big(p(tn^2 - s, k, j) - p(tn^2 - s, k, j+1) \big) \right) \right. \tag{91}$$

$$\left. (\eta_{j+1} - \eta_j)(s-) \, \mathrm{d}(N_j(s) - c_j s) \right)^2 =$$

$$\stackrel{(I)}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j E \int_0^{tn^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \varphi \left(\frac{k}{n} \right) \big(p(tn^2 - s, k, j) - p(tn^2 - s, k, j+1) \big) \right)^2$$

$$((\eta_{j+1} - \eta_j)(s-))^2 \, \mathrm{d}s \leq$$

$$\stackrel{(II)}{\leq} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \int_0^{tn^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \varphi \left(\frac{k}{n} \right) (p(s, k, j) - p(s, k, j+1)) \right)^2 \mathrm{d}s =$$

$$\stackrel{(III)}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \int_0^t \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \left(p(sn^2,k,j) - p(sn^2,k,j+1)\right) \right)^2 \mathrm{d}s,$$

ahol az (I) egyenlőség a 3.4.13. megyjegyzésből következik, a (III) egyenlőségnél pedig változó cserét hajtottunk végre.

Legyen $u(t,j) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) p(tn^2,k,j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) p(tn^2,j,k)$. Ekkor $u(t,j) = P_n^t \varphi\left(\frac{j}{n}\right)$ alakban írható fel, ahol P_n^t az $X_n(t)$ átskálázott véletlen bolyongáshoz tartozó kontrakció félcsoport ($\frac{\mathbb{Z}}{n}$-en ugrál, nem az egész rácspontokon). A $P_n^t\varphi$-hez tarozó *Kolmogorov egyenlet* úgy írható fel, hogy

$$\partial_t u(t,j) = n^2 \left(c_j(u(t,j+1) - u(t,j)) + c_{j-1}(u(t,j-1) - u(t,j))\right),$$

így

$$\partial_t \sum_{j\in\mathbb{Z}} u^2(t,j) = 2\sum_{j\in\mathbb{Z}} u(t,j)\partial_t u(t,j) =$$

$$= 2n^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \left(u(t,j)(u(t,j+1) - u(t,j)) + u(t,j+1)(u(t,j) - u(t,j+1))\right) =$$

$$= -2n^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_j \left(u(t,j+1) - u(t,j)\right)^2.$$

Mivel $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_j \left(u(s,j+1) - u(s,j)\right)^2 \mathrm{d}s \stackrel{(I)}{=} \frac{1}{2n^2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (u^2(0,j) - u^2(t,j)) \le$$

$$\stackrel{(II)}{\le} \frac{1}{2n^2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} u^2(0,j) \stackrel{(III)}{=} \frac{1}{2n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n} \varphi^2\left(\frac{j}{n}\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ahol az (I) egyenlőségnél a Newton-Leibniz formulát használtuk fel. A (III) egyenlőségben $\frac{1}{2n}$ 0-hoz tart, az utána következő kifejezés pedig egy integrál közelítő összeg, amely $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x$-hez konvergál. Ez véges, így a szorzat 0-hoz konvergál.

Ebből az eredményből és a (91) egyenletből már adódik a 3.4.12. lemma bizonyítása. □

Tekintve a 3.4.12. lemmát, elegendő csak a következő lemmát igazolni.

3.4.14. Lemma. *A közeg majdnem minden $(c_k : k \in \mathbb{Z})$ realizációjára és minden $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ esetén a (87) egyenlőség első tagjának limeszére teljesül, hogy*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{j\in\mathbb{Z}} p(tn^2,k,j)\eta_j(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\rho(t,x)\,\mathrm{d}x$$

sztochasztikusan, ahol ρ felírható $\rho(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t,x-y)\rho_0(y)\,\mathrm{d}y$ alakban, ahogy a 3.3.7. tételben szerepelt.

Bizonyítás. /3.4.14. lemma bizonyítása/ Az általánosság elvesztése nélkül ismét feltehetjük, hogy $\varphi \geq 0$. Felírható, hogy

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\sum_{j\in\mathbb{Z}} p(tn^2, j, k)\eta_j(0) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}P_n^t\varphi\left(\frac{j}{n}\right)\eta_j(0), \tag{92}$$

ahol P_n^t az $X_n(t)$ átskálázott véletlen bolyongáshoz tartozó kontrakció félcsoport, ahogy ezt az 3.1. részben bevezettük. Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\rho(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} P^t\varphi(x)\rho_0(x)\,\mathrm{d}x, \tag{93}$$

ahol P^t a $W(t)$ Wiener folyamathoz tartozó kontrakció félcsoport, ahogy ezt a 3.3. részben bevezettük. Az előbb felírt (93) egyenlőség könnyen látható, hogy a 3.3.8. megjegyzés következménye. Tekintve a előbbi (92) és (93) egyenlőségeket, valamint a 3.3.7. tétel feltevését ((55) egyenlőséget), elegendő csak a következő állítást belátnunk.

3.4.15. Állítás. *A közeg minden realizációjára és minden $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$-re, ahol $\varphi \geq 0$, teljesül, hogy*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}\left|P_n^t\varphi\left(\frac{j}{n}\right) - P^t\varphi\left(\frac{j}{n}\right)\right|\eta_j(0)\right) = 0 \tag{94}$$

Bizonyítás. /3.4.15. állítás bizonyítása/

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|P_n^t\varphi\left(\frac{j}{n}\right) - P^t\varphi\left(\frac{j}{n}\right)\right|\eta_j(0)\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n}\left|P_n^t\varphi\left(\frac{j}{n}\right) - P^t\varphi\left(\frac{j}{n}\right)\right|, \tag{95}$$

mivel $\eta_j(0)$ 0 vagy 1 értéket vehet fel. Így elég belátni azt, hogy (95) jobb oldala tart a 0-ba. Ez utóbbi bizonyításához felhasználjuk Scheffé tételét.

3.4.16. Tétel (Scheffé-tétel). *Tegyük fel, hogy $f \in L^1(\mathbb{R})$ és legyen $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ olyan függvénysorozat, amelyre teljesül, hogy*

1. $f_n \geq 0$,
2. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén, és*
3. $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ekkor $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0$.

A 3.3. részben bevezetett $P_n^t\varphi$ csak a $\{\frac{j}{n} : j \in \mathbb{Z}\}$ halmaz elemeire volt definiálva. Most terjesszük ki az egész $\mathbb{R}$-re, legyen $P_n^t\varphi(x) := P_n^t\varphi(\frac{j}{n})$, ha $\frac{j}{n} \leq x < \frac{j+1}{n}$ és $x \in \mathbb{R}$. Megmutatjuk, hogy $P_n^t\varphi$ és $P^t\varphi$ függvények eleget tesznek a 3.4.16. tétel feltételeinek.

$P_n^t\varphi \geq 0$, és a 3.3.5. tétel miatt teljesül, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $P_n^t\varphi(x) \longrightarrow P^t\varphi(x)$, mivel $P^t\varphi$ egyenletesen folytonos. Emellett a 3.3.8. megjegyzés miatt $\varphi \geq 0$-ra teljesül, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} P^t\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{96}$$

és $\varphi \geq 0$ miatt

$$\int_{\mathbb{R}} P_n^t\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n} P_n^t\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{j}{n}\right) p(tn^2, k, j) = \tag{97}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{j}{n}\right) \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(tn^2, j, k) = \frac{1}{n}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{j}{n}\right),$$

mert $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(tn^2, j, k)$ átmenetvalószínűségek összege, így 1 az értéke. Ezzel egy integrál közelítő összeget kaptunk, és így a Scheffé-tétel 3. feltétele is teljesül. Ezzel a 3.4.15. állítást bizonyítottuk. □

Így a 3.4.14. lemmát is bizonyítottuk. □

Ezzel a 3.3.7. tétel bizonyítása is teljes. □

Hivatkozások

[1] V. V. Anshelevich, K. M. Khanin and Ya. G. Sinai, Symmetric random walks in random environments, Commun. Math. Phys. 85 (1982), 449-470.

[2] Richard A. Durrett: *Probability: Theory and Examples*, Duxbury Press (1995)

[3] Stewart N. Ethier, Thomas G. Kurtz: *Markov processes, Characterization and Convergence*, John Wiley and Sons Inc., New York (1986)

[4] C. Kipnis and S. R. S. Varadhan, Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions, Commun. Math. Phys. 104 (1986), 1-19.

[5] Thomas M. Liggett: *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, New York Inc. (1985)

[6] Michaletzky György: Sztochasztikus analízis, kivonatos jegyzet (1998/99), http://bolyai.cs.elte.hu/probability/michaletzky/index_files/targyak/sztochan.pdf

[7] Nagy Katalin: *Symmetric random walk in random enviroment in one dimension*, Period. Math. Hungar. 45 (2002), no. 1-2., 101-120.