Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Redukált hitelkockázati modellek

Szakdolgozat

Czene Anna

Alkalmazott matematikus Msc

Sztochasztika szakirány

Témavezető:

Dr. Márkus László

egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Márkus Lászlónak a sok segítségért, türelemért és hasznos észrevételért, amit a dolgozatom elkészítéséhez nyújtott.

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Motiváció

A hitelderivatívák megjelenése alapjaiban változtatta meg a bankok és pénzügyi intézetek hitelkockázatról és a hitelkockázat kezeléséről alkotott képét. A hitelek nyújtásából és kötvények tartásából származó hitelkockázat fedezésére és az ezekre tartandó kötelező tartalékok hatékonyabb kezelésére a hitelderivatívák megjelenése egy újfajta megoldást kínált. Így létrejött egy új piac, amelyen bárki részt vehet, így csökkentve a bankszektorban jelenlévő hitelkockázat koncentráltságát.

A pénzügyi szereplők hamar felismerték, hogy olyan új termékeket hozhatnak létre, amelyeket a kívánt hozam-kockázat profilnak megfelelően alakíthatnak, ezzel alapvetően valami újat nyújtva a befektetőknek és a hedgereknek egyaránt. Ezzel együtt növelhető a likviditás: a kevésbé likvid termékeket átcsomagolják, átstruktúrálják olyan termékekké, amelyek jobban megfelelnek a befektetők elképzeléseinek. Az ettől hajtott kereslet dinamikus növekedése a hitelderivatívák piacának fejlődését indukálta az elmúlt évtizedekben.

Ezzel párhuzamosan a hitelkockázat modellezése is egyre nagyobb figyelmet kapott folyamatosan kihívást jelentve az akadémiai és az üzleti szektornak. A szakdolgozat elsődleges célja a legegyszerűbb hitelkockázathoz kapcsolt termékek: a kockázatos kötvény és a mulasztási csereügylet (Credit Default Swap, CDS) árazási lehetőségeinek vizsgálata egy viszonylag új megközelítésen, a redukált hitelkockázati modelleken keresztül.

1.2. A árazási modellekről általában

A hitelkockázati esemény vizsgálatának két legnépszerűbb megközelítési formája a struktúrált és a redukált modellezés. A struktúrált megközelítés Black és Scholes (1973), valamint Merton (1974) munkásságából kiindulva a csőd idejét egy adaptált sztochasztikus folyamat előrejelezhető szintelérési idejének tekinti (pl. a vállalat kötelezettségeinek névértéke meghaladja az eszközeinek értékét). A módszertan intuitív, könnyen értelmezhető, viszont két jelentős hátránya van: egyrészt az értékfolyamat nem (egyszerűen) megfigyelhető, másrészt rövid lejáratnál az előrejelezhető csődidő miatt a hozamfelárnak (spread-nek) 0-körüli értéket kellene felvenni: ez inkonzisztens a piaci megfigyelésekkel.

Ezzel szemben a redukált modellek a bedőlést egy pontfolyamat (gyakran Poisson- vagy Cox-folyamat) első ugrásának feltételezik, ezért a csőd időpontját egy teljesen elérhetetlen megállási időnek tekintik. Ezzel elkerülhető az előbb említett probléma a rövid lejáratú termékeknél. Az ilyen modellek - a struktúráltakkal ellentétben - csak a piacon elérhető információkat használnak fel, ezért nem adnak választ arra a kérdésre, hogy miért következett be a csőd, de nagyon könnyen illeszthetők az empirikus teszt során. Ez kézenfekvő a befektetők számára.

A redukált formájú modelleket vizsgálhatjuk struktúráltként, más filtrációk mellett: a struktúrált modellek a vállalatnál elérhető információkra épülnek, amely folytonos idejű megfigyeléseket jelent az eszköz értékéről és a forrásokról ("complete information"), viszont a redukáltak a piacon elérhető információkat használnak fel, ez az előző töredékét jelenti ("incomplete information"). Ez a hiányos információkra épülő modell ötvözi a két megközelítés előnyeit: a struktúrális irány közgazdasági és intuitív meggondolásait illetve a redukált modellek könnyű kezelhetőségét és empirikus illeszkedését.

1.3. A dolgozat felépítése

A dolgozat első felében röviden bemutatjuk a redukált modellezés alapvető sajátosságait, különválasztva kétféle megközelítést aszerint, hogy a konstrukcióban a piac összes információjára vagy csak a kockázatmentes eszközök ismeretére támaszkodunk. Ennek megfelelően bevezetünk két árazási formulát a kockázatos követelésekre (IBPR-"Intensity based pricing rule", HBPR-"Hazard-based pricing rule") és megvizsgáljuk, hogy melyiket milyen feltételek mellett érdemes alkalmazni.

A harmadik fejezetben - a teljesség igénye nélkül - megvizsgáljuk a kockázatmentes információk által generált filtráció kiterjesztésének lehetőségeit úgy, hogy az árazási szempontból fontos elvárásokat továbbra is teljesítse (piac teljessége, martingál, invariancia tulajdonság, intenzitás-folyamat és az árazási formulában szereplő ugrás egyszerű kiszámítása). Ehhez elengedhetetlen lesz a csődidőpont megfelelő definiálása. A fejezetet speciális példák bemutatásával zárjuk.

A negyedik fejezetben középpontba állítjuk az ún. hiányos információra épülő modellezést és utánajárunk annak, hogy az eredeti modellhez képest ez miben jelent változást. A módszertan egy speciális irányzata, amikor egy struktúrált modellből az információáramlás késleltetésével és egy Markov-folyamat felhasználásával egy redukált modellt származtatunk. A fejezet végén kitérünk az diffúziós folyamatokkal történő árazás lehetőségeire.

Az utolsó két fejezetet a kockázatos kötvény és a mulasztási csereügylet (Credit default swap - CDS) árazási kérdéseinek szenteljük, az előző fejezetekben tárgyalt feltételek és eredmények szem előtt tartásával. A dolgozat végén egy könnyen paraméterezhető, R programcsomagban készített Monte-Carlo-szimulációt mutatunk be a diszkontált kockázatos kötvény árának kiszámításához.

2. fejezet

A redukált modellek

Ebben a fejezetben - elsősorban a [19], [5], [14] és [21] cikkek alapján - áttekintjük az intenzitás- és a hazárd-folyamaton alapuló kockázati modellek jellegzetességeit. Látni fogjuk, hogy valójában a hazárd modell az első egy speciális esete, ahol a filtráció megfelelő megválasztásával egy jobban használható árazási formulához juthatunk. Ennek egy klasszikus példája lesz a következő fejezetben bemutatott Cox-féle konstrukció.

2.1. Intenzitás modellek

Tekintsük a $[0, T]$ véges időhorizontot, és e mellett legyen adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ filtrált valószínűségi mező. Ezek felett legyen adott egy ármérce folyamatot és néhány alapterméket tartalmazó piac, ahol a B_t ármérce folyamat egy $\mathcal{G}_t$-adaptált pozitív szemimartingál, (leggyakrabban $B_0 \cdot e^{rt}$, azaz egy egyszerű fix rátával kamatozó bankbetét), az alaptermékek pedig az S_t vektor értékű $\mathcal{G}_t$-adaptált folyamat (a t-kori értékük) által reprezentáltak. A hatékony piac hipotézisét érvényesnek tekintjük, vagyis $\mathcal{G}_t$ a piac összes információját tartalmazza. A piac alaptermékeivel megengedett vagy teljesen megengedett önfinanszírozó stratégiák segítségével kereskedünk. A piac arbitrázsmentes, ha zéró kezdőtőke mellett megengedett stratégiával kereskedve pozitív valószínűséggel pozitív hozamot érünk el, miközben 1 valószínűséggel nem keletkezik veszteségünk. Az arbitrázsmentesség (folytonos kereskedés esetén a Delbaen féle No Free Lunch with Vanishing Risk

(NFLVR) értelemben) ekvivalens a martingálmérték (illetve általánosabban az ármérce pár) létezésével. A martingálmérték a kockázatsemleges mérték. A dolgozat során mindvégig feltételezzük, hogy piacunk arbitrázsmentes, ezért martingálmérték, amelyet $\mathbb{Q}$-val jelölünk létezik. A kereskedett dinamikus portfoliónk ármérce szerint diszkontált értékfolyamata teljesen megengedett stratégia esetén a martingálmérték szerint $\mathcal{G}_t$-martingál (tkp. innen a martingálmérték elnevezés), megengedett stratégia esetén az idő (folytonos vs. diszkrét), és a termék árának változása (véges sok ár, folytonosan változó ár, folytonosan és ugrásokkal változó ár) függvényében martingál, szupermartingál illetve lokális martingál. A piac teljessége azt jelenti, hogy megengedett stratégiával kereskedve végső tőkeként (értékként) tetszőleges $\mathcal{G}_t$-mérhető valváltozó elérhető, azaz előállítható. Teljes piacon a martingálmérték egyértelmű. A továbbiakban általunk vizsgált modellek, ha csak külön nem mondjuk az ellenkezőjét, bizonyithatóan teljes piacot eredményeznek (a bizonyításokra azonban nem térünk ki), és így a martingál mérték nem csupán létezik, hanem egyértelmű is. Ebből következően a termékek/eszközök ára/értéke ugyancsak egyértelmű. A csődeseményt bekövetkezésének időpontjával, a – leggyakrabban τ-val jelölt – $\mathcal{G}_t$ filtráció szerinti megállási idővel reprezentáljuk.

A fentebb felhasznált fogalmakat és állításokat a szakon tanterv szerint részletesen oktatják, ezért ezeket ismertnek feltételezzük. Másfelől ezek részletes kifejtésére a jelen dolgozat nem is szolgáltat megfelelő keretet, tárgyalásuk hosszas és a fő mondanivaló lényegétől eltérő lenne.

A kockázatos származtatott követelés rögzített T-beli kifizetését jelölje az $X\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}$ nemnegatív valószínűségi változó, azaz ha a csődesemény nem következik be az adott időszakban, akkor X, különben 0. Mivel feltettük, hogy létezik a $\mathbb{Q}$ egyértelmű martingálmérték, a kifizetések jelenlegi ára éppen a diszkontált kifizetés $\mathbb{Q}$ szerinti feltételes várható értéke lesz: $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\mathcal{G}_t)$. Az árazási formula felírásához szükségünk lesz a következőkre.

Legyen H_t a csőd indikátor folyamata: $\forall t \geq 0$ esetén $H_t = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$. A H_t egy adaptált, növekedő càdlàg folyamat, ezért egy szubmartingál. Ekkor a Doob-Meyer felbontás szerint létezik egyetlen előrejelezhető, növekvő Λ folyamat (kompenzátor), amellyel az alábbi M_t

folyamat egy egyenletesen integrálható martingál lesz:

$$M_t = H_t - \Lambda_t.$$

Mivel a csőd bekövetkezése után $H = 1$, a Λ-nak konstansnak kell lennie, ezért $\forall t \geq 0$-ra $\Lambda_t = \Lambda_{t \wedge \tau}$. A τ csődidőpontról már említettük, hogy nem előrejelezhető, ennek a pontosításához vezessük be a következő definíciókat:

2.1.1. Definíció (Előrejelezhető megállási idő). *A T megállási idő előrejelezhető, ha létezik megállási idők egy növekvő T_n sorozata úgy, hogy m. m. igazak a következők:*

1. $\lim_n(T_n) = T$ *és*
2. $T > 0$ *esetén* $\forall n$*-re* $T_n < T$.

2.1.2. Definíció (Teljesen elérhetetlen megállási idő). *A T megállási idő teljesen elérhetetlen, ha $P(T = S < \infty) = 0$ bármely előrejelezhető S megállási időre. Egy ezzel ekvivalens definíció: minden T_n növekvő megállási idő sorozatra $P(\{\lim T_n = T\} \cap A) = 0$, ahol $\{A = T_n < T\}$.*

A τ-t az általunk ismertetett felépítésben egy teljesen elérhetetlen megállási időnek fogjuk választani. Ez a tulajdonság teszi majd lehetővé az árazás során a modell illesztését a piaci adatokra és ami legalább annyira fontos az alkalmazás szempontjából, a kompenzátor analitikus tulajdonságaival is összefüggésbe hozható (részletesen bizonyítva [31]-ben 123.oldalon a 20. tételnél):

2.1.1. Tétel. *Egy H_t adaptált, lokálisan korlátos variációjú, càdlàg folyamat Λ_t kompenzátora akkor és csak akkor folytonos trajektóriájú, ha τ egy teljesen elérhetetlen megállási idő.*

Mivel a csőd H_t indikátor folyamata kielégíti a tétel feltételeit, ezért kompenzátora folytonos trajektóriájú. Ha még a Λ_t abszolút folytonos is a Lebesgue-mértékre nézve, akkor létezik egy nemnegatív, adaptált $\lambda_t^{\mathcal{G}}$ folyamat, amellyel az M_t martingál a következő alakba írható:

$$M_t = H_t - \int_0^t \lambda_s^{\mathcal{G}} ds.$$

2.1.3. Definíció (Intenzitás). *Legyen $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ egy szubfiltráció és a τ véletlen idő $\mathcal{G}$-megállási idő (de nem feltétlenül $\mathcal{F}$-megállási idő) H_t indikátorfolyamattal. Tegyük fel, hogy létezik egy korlátos, nemnegatív, $\mathcal{F}$-adaptált $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ folyamat, amellyel $H_t - \int_0^t \lambda_s ds$ egy $\mathcal{F}$-martingál. Ekkor a λ_t-t a $(\tau,\, \mathcal{F})$-csődmodell intenzitásának nevezzük.*

2.1.1. Megjegyzés. *Sok esetben a definícióban felteszik λ_t $\mathcal{G}$-előrejelezhetőségét is. Viszont mivel a folyamat $\mathcal{G}$-adaptált és cádlág, ha lecseréljük a $\lambda_{t-} = \lim_{s \to t-} \lambda_s$-re (ezt megtehetjük, mivel $\int_0^t \lambda_s ds = \int_0^t \lambda_{s-} ds$), akkor $\mathcal{G}$-előrejelezhető intenzitáshoz jutunk.*

2.1.2. Megjegyzés. *Ha egy filtrációra építjük a modellt, a fenti definíciónál nyilván $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Általánosabb esetben, az $\mathcal{F}$ filtrációt úgy kell kibővíteni, hogy τ a $\mathcal{G}$ bővített filtrációban megállási idő legyen. Ebben a kontextusban $\mathcal{F}$ lesz a referencia filtráció.*

Aven [3] cikkében az intenzitás meghatározásához a következő lemmát javasolta:

2.1.1. Lemma (Aven lemmája). *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ egy filtrált valószínűségi mező és N egy számláló folyamat. Tegyük fel, hogy $E(N_t) < \infty$ minden t-re. Legyen $(h_n, n \geq 1)$ egy tetszőleges 0-hoz tartó valós számsorozat és*

$$Y_t^{(n)} = \frac{1}{h_n} E(N_{t+h_n} - N_t | \mathcal{G}_t).$$

Feltételezzük, hogy léteznek olyan λ_t és y_t nemnegatív, adaptált folyamatok, amelyekre $\forall t$ esetén igazak az alábbiak:

1. $\lim Y_t^{(n)} = \lambda_t$,

2. *1 valószínűséggel létezik ω-ra egy $n_0 = n_0(t, \omega)$, amelyre:*

$$|Y_s^{(n)}(\omega) - \lambda_s(\omega)| \leq y_s(\omega), \quad s \leq t, \quad n \geq n_0(t, \omega),$$

3. $\int_0^t y_s ds < \infty$.

Ekkor az $N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ *folyamat martingál.*

Tehát a mi esetünkben a lemma szerint $N_t = H_t$ szereposztásban megkapjuk az intenzitást (ha a határérték létezik):

$$\lambda_t^{\mathcal{G}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(t < \tau \leq t + h | \mathcal{G}_t). \tag{2.1}$$

Az eddig tárgyalt alapokra építkezve a kockázatos származtatott követelés árazásához a következő formulát vezethetjük be:

2.1.1. Állítás. *A kockázatos származtatott követelés* T*-beli kifizetésének ára a* $\mathbb{Q}$ *martingál mérték mellett:*

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} (V_t - \mathbb{E}(\Delta V_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t)), \tag{2.2}$$

ahol $X \in \mathcal{G}_T$, $V_t = e^{\Lambda_t} \mathbb{E}(X e^{-\Lambda_T} | \mathcal{G}_t) = e^{\int_0^t \lambda_s ds} \mathbb{E}(X e^{-\int_0^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t)$ *és* $\Delta V_\tau = V_\tau - V_{\tau-}$. *Ezt intenzitáson alapuló árazási szabálynak nevezzük ("intensity based rule", IBPR).*

Bizonyítás.
Legyen $L_t = (1 - H_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}$ és $U = VL = e^{\int_0^t \lambda_s ds} \mathbb{E}(X e^{-\int_0^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t)(1 - H_t)$. A V folyamat nem feltétlenül folytonos τ-ban, ezért a bizonyítást két esetre bontjuk:

1. Ha a V folytonos τ-ban, akkor a formulából eltűnik az ugrás:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}(V_t | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}(X e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t).$$

   Az állítás igazolásához azt kell megmutatni, hogy az U folyamat martingál. A jelölések könnyebb követhetősége érdekében legyen Z_t a következő martingál: $Z_t = \mathbb{E}(X e^{-\Lambda_T} | \mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(X e^{-\int_0^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t)$, ekkor persze $V_t = e^{\int_0^t \lambda_s ds} Z_t$. Első lépésként alkalmazzuk az Itô-formulát a V folyamatra:

$$dV_t = \lambda_t V_t dt + e^{\int_0^t \lambda_s ds} dZ_t.$$

Második lépésként ugyanezt szeretnénk felírni a H_t folyamatra, ehhez vegyük a már korábban megismert M martingál egy módosított alakját:

$$M_t = H_t - \int_0^t \lambda_s ds = H_t - \int_0^t (1 - H_s)\lambda_s ds.$$

Tehát a parciális integrálási szabály szerint:

$$dH_t = (1 - H_t)\lambda_t dt + dM_t.$$

Végül felhasználva az előző két eredményt az U_t folyamat dinamikája:

$$dU_t = V_{t-}dL_t + L_{t-}dV_t + \Delta L_t \Delta V_t = -V_{t-}dM_t + (1 - H_{t-})e^{\int_0^t \lambda_s ds} dZ_t.$$

Ebből következik, hogy $U_T = 1 - H_T$ martingál és minden $t < \tau$ esetén:

$$V_t = U_t = \mathbb{E}(X(1 - H_T)|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\mathcal{G}_t) = e^{\int_0^t \lambda_s ds}\mathbb{E}(Xe^{-\int_0^T \lambda_s ds}|\mathcal{G}_t).$$

2. Ha viszont a V nem folytonos τ-ban, az U dinamikájában megjelenik az ugrás:

$$dU_t = L_{t-}dV_t + V_{t-}dL_t + d[L, V]_t = L_{t-}dV_t + V_{t-}dL_t + \Delta L_t \Delta V_t$$

és az előző pont számolásait felhasználva ekkor a kockázatos követelés ára a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_T|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\mathcal{G}_t) = U_t - \mathbb{E}(\Delta V_\tau e^{\int_0^\tau \lambda_s ds}|\mathcal{G}_t) = \\ = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}e^{\int_0^t \lambda_s ds}\mathbb{E}(Xe^{-\int_0^T \lambda_s ds}|\mathcal{G}_t) - \mathbb{E}(\Delta V_\tau \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}|\mathcal{G}_t) = \\ = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}(V_t - \mathbb{E}(\Delta V_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}|\mathcal{G}_t)).\end{aligned}$$

❑

Specializáljuk az intenzitáson alapuló árazási szabályt a legegyszerűbb hitelkockázathoz kapcsolható termékre, a kockázatos elemi kötvényre.

2.1.4. Definíció (Elemi kötvény). *A T időpontban lejáró elemi kötvény az az eszköz, amely T időpontban 1-et fizet, tehát a neki megfelelő kifizetés az $X \equiv 1$ valváltozó. Legyen $\beta = e^{-\int_0^T r_s ds}$ bankbetét folyamat, ekkor az elemi kötvény t időpontbeli ára:*

$$B(t,T) = \beta_t \mathbb{E}(\frac{1}{\beta_T}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^T r_s ds}|\mathcal{G}_t).$$

A kockázatos elemi kötvény annyiban különbözik az előbb definiált, kockázatmentes elemi kötvénytől, hogy akkor fizet 1-et T-ben, ha T-ig nem következett be a csődesemény (tehát $X = 1 \cdot \mathbb{1}_{\{T<\tau\}}$). Eszerint és az *IBPR* szabályt felhasználva a kockázatos elemi kötvény ára:

$$D(t,T) = \beta_t \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}}{\beta_T}|\mathcal{G}_t\right) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}((e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s^G)ds}|\mathcal{G}_t) - \mathbb{E}(\Delta V_\tau \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}|\mathcal{G}_t)). \quad (2.3)$$

Érdemes megfigyelni, hogy ha a formulában szereplő V folyamat τ csődidőpontban folytonos, akkor a kockázatmentes elemi kötvény árától csak a diszkontfaktorban fog eltérni. Általános esetben a V ugró-folyamat kiszámítása nagyon bonyolulttá teszi ezt az árazási formulát, ezért a következő részben egy olyan módszert vezetünk be, ahol ez elkerülhető.

2.2. A hazárd-folyamatra épülő modellek

Ebben a részben levezetünk egy könnyebben alkalmazható árazási szabályt, amelyhez elég lesz a τ túlélés-folyamatának vagy az ezzel ekvivalens hazárd-folyamatának ismerete. A τ túlélés-folyamata egyszerűen kiszámolható a piaci adatokból. Az előző alfejezetben szereplő $\mathcal{G}_t$ filtrációt ezért két, általában nem független szubfiltrációra bontjuk:

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$$

ahol $\mathcal{F}_t$ egy referencia filtráció, amely tartalmazza az összes, a piacon szereplő eszközár alapján elérhető információt:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$$

és $\mathcal{H}_t$ a csőd indikátor folyamata által generált filtráció:

$$\mathcal{H}_t = \sigma(H_s = \mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}), \quad s \leq t).$$

Ekkor nyilván $\mathcal{H}_t$ a legszűkebb olyan filtráció, ahol τ megállási idő. Továbbá - az intenzitás definíciójához hasonlóan - a τ csődidőpont $\mathcal{G}$-ben megállási idő, de $\mathcal{F}$-ben nem feltétlenül. Fontos megfigyelés, hogy mivel a csőd előtt az összes információ az $\mathcal{F}_t$ által generált, minden $\mathcal{G}$-mérhető X valószínűségi változóra létezik $\hat{X}$ $\mathcal{F}$-mérhető valószínűségi változó, amelyek megegyeznek a $\{t < \tau\}$-n:

$$X\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} = \hat{X}\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}.$$

Jelölje minden $t \in \mathbb{R}^+$-ra $F_t = \mathbb{P}(\tau \leq t|\mathcal{F}_t)$ és ebből legyen $G_t = 1 - F_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)$ a τ túlélés-folyamata, erről a továbbiakban feltesszük, hogy folytonos. Ezzel ekvivalens a következően definiált folyamat:

2.2.1. Definíció (Hazárd-folyamat, hazárd-ráta). *A fenti jelölésekkel Γ a τ hazárd-folyamata, ha kielégíti a következő egyenletet: $G_t = e^{-\Gamma_t}$ (vagy $\Gamma_t = -\ln G_t$). Ha az F_t abszolút folytonos f_t sűrűségfüggvénnyel, a $\gamma_t := f_t/(1-F_t) = f_t/G_t$ függvényt hazárd-rátának nevezzük.*

A minden információt tartalmazó σ-algebrára, $\mathcal{G}_t$-re vonatkozó feltételes valószínűség árazásban fontos tulajdonságáról szól a következő lemma:

2.2.1. Lemma. *Minden $\mathcal{G}$-mérhető X valószínűségi változóra és $\forall t \in \mathbb{R}^+$-re:*

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{F}_t)}{P(t<\tau)|\mathcal{F}_t)} = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{F}_t). \tag{2.4}$$

Bizonyítás.

Rögzítsünk le egy $t \in \mathbb{R}^+$-t. Mivel minden $\mathcal{G}_t$-mérhető valószínűségi változó a $\{t < \tau\}$-n egybeesik egy $\mathcal{F}_t$-mérhető valószínűségi változóval:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} Y,$$

ahol Y $\mathcal{F}_t$-mérhető. Vegyünk $\mathcal{F}_t$-re vonatkozó feltételes várható értéket:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} | \mathcal{F}_t) = P(t < \tau | \mathcal{F}_t) Y.$$

Ha az egyenletet Y-ra rendezzük és ezt visszahelyettesítjük az első összefüggésbe, megkapjuk az állítást. ❑

A következőkben egy Y valváltozó mérhetőségét egy $\mathcal{F}$ σ-algebrára jelöljük $Y \bar{\in} \mathcal{F}$-fel.

2.2.1. Következmény. *Az $X \bar{\in} \mathcal{F}_T$-re felírható egy nagyon egyszerű árazási formula, amely nem tartalmaz ugró-folyamatot és az intenzitás ismeretét sem feltételezi:*

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \frac{1}{G_t} \mathbb{E}(G_T X | \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t} \mathbb{E}(X e^{-\Gamma_T} | \mathcal{F}_t). \tag{2.5}$$

Ez a hazárd-folyamatra épülő árazási szabály ("Hazard based pricing rule" - HBPR).

Bizonyítás.

Legyen $\hat{X} := \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} X$. Ekkor $\hat{X} = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \hat{X}$, mivel $t < T$. Az előző tétel miatt:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} | \mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(\hat{X} \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} e^{-\int_0^t \gamma_s ds} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} | \mathcal{F}_t),$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk, hogy $P(\tau > t) | \mathcal{F}_t) = e^{-\int_0^t \gamma_s ds}$. Mivel az X $\mathcal{F}_t$-mérhető:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X (P(T < \tau) | \mathcal{F}_T) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X e^{-\int_0^T \gamma_s ds} | \mathcal{F}_t).$$

Ezt a kifejezést visszahelyettesítve az első egyenletbe visszakapjuk az állítást. ❑

2.2.1. Megjegyzés. *Általában* Γ *nem növekvő, még csak nem is korlátos variációjú. Viszont ha létezik egy növekvő,* $\mathcal{F}$*-adaptált* Δ *folyamat, amellyel minden* $t < T$*-re és* $X \bar{\in} \mathcal{F}_T$*-re:* $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}(X e^{\Delta_t - \Delta_T} | \mathcal{F}_t)$*, akkor* $\Gamma = \Delta$*.*

A célunk a $\mathcal{G}$-intenzitás előállítása az ismert piaci adatok segítségével, ehhez fel kell vázolnunk a $\mathcal{G}$-intenzitás és az $\mathcal{F}$-intenzitás kapcsolatát. Az előző alfejezetben láttuk, hogy létezik egyértelmű $\mathcal{G}$-előrejelezhető, növekvő Λ_t kompenzátor, amellyel az M_t:

$$M_t = H_t - \Lambda_t$$

folyamat egy $\mathcal{G}$-martingál. Hasonlóan a $G = \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t)$ egy folytonos $\mathcal{F}$-szupermartingál (ezt gyakran Azéma-szupermartingálnak hívják), ezért létezik egy $C = (C_t)_{t \geq 0}$ előre-jelezhető folyamat úgy, hogy a $G + C$ egy $\mathcal{F}$-martingál. Tudjuk, hogy $\Lambda_t = \Lambda_{t \wedge \tau}$ és $\Lambda_t \mathbb{1}_{\{t \leq \tau\}} = \Lambda_t^F \mathbb{1}_{\{t \leq \tau\}}$, ahol

$$\Lambda_t^F = \int_0^t \frac{dC_s}{G_s}$$

és Λ_t^F egy $\mathcal{F}$-előrejelezhető, növekvő folyamat (a részletes bizonyítás megtalálható a [14]:5. oldalán). Feltesszük, hogy a C folyamat abszolút folytonos a Lebesgue mérték szerint ($dC_s = c_s ds$), ekkor az intenzitás a következő alakban áll elő az $\mathcal{F}$-intenzitás illetve a τ túlélésfüggvényének segítségével:

$$\lambda_t^G = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \lambda_t^F, \quad \text{ahol} \quad \lambda_t^F = \frac{c_t}{G_t}.$$

Az előző részben láttuk, hogy az Aven-lemma szerint $\mathcal{G}$-intenzitás a következő határ-értékkel egyenlő:

$$\lambda_t^G = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(t < \tau \leq t + h | \mathcal{G}_t)$$

2.2.1. Állítás. *Az* $\mathcal{F}$*-intenzitás a következő alakban áll elő:*

$$\lambda_t^F = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{\mathbb{P}(t < \tau < t + h | \mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(t < \tau | \mathcal{F}_t)},$$

Bizonyítás.

Az M martingál tulajdonsága miatt:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{t<\tau<t+h}|\mathcal{G}_t) - \int_t^{t+h} \mathbb{E}((1-H_s)\lambda_s|\mathcal{G}_t)ds = 0.$$

Ebből következik, hogy $\mathcal{F}_t$-re projekcióval:

$$\mathbb{P}(t<\tau<t+h|\mathcal{F}_t) = \int_t^{t+h} \lambda_s \mathbb{P}(s<\tau|\mathcal{F}_t)ds.$$

❑

Végül az intenzitás alapú és a hazárd-folyamatra épülő árazási szabály összehasonlításával minden $X\bar{\in}\mathcal{F}_T$-re a következő árazási egyenlőséget írhatjuk fel:

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}(V_t - \mathbb{E}(\Delta V_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\le T\}}|\mathcal{G}_t)) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t}\mathbb{E}(Xe^{-\Gamma_T}|\mathcal{F}_t), \tag{2.6}$$

ahol $V_t = e^{\lambda_{t\wedge\tau}}\mathbb{E}(e^{-\lambda_{T\wedge\tau}}|\mathcal{G}_t)$. Vegyük észre, hogy a bal oldal kiszámolásához szükségünk van a G Doob-Meyer dekompozíciójára és a V ugrására, amíg a jobb oldalhoz csak G ismerete szükséges.

3. fejezet

A filtráció bővítése és a piac teljessége

Láthattuk az előző fejezetben, hogy a hazárd-folyamatot használó árazási szabály sokkal kényelmesebben használható a gyakorlatban, viszont az alkalmazhatósága bizonyos technikai feltételeket igényel a kockázati eseménnyel kapcsolatban. Ezeket és a filtráció megfelelő bővítésének lehetőségeit alaposan tanulmányozták a [20], [30] és [29] cikkekben, mi csak azokat a legfontosabb pontokat vesszük át, amelyek szükségesek a továbbiakhoz.

Legyen továbbra is a $[0, T]$ véges időhorizont és mellette $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ egy filtrált valószínűségi mező és az $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ filtráció tartalmazza a kockázatmentes (csőd lehetőséget kizáró értelemben!) információkat (pl. kockázatmentes elemi kötvények generálják). Az előző fejezetben megadottaknak megfelelően egy arbitrázsmentes piacot vizsgálunk létező martingálmértékkel. Tudjuk, hogy az arbitrázs kizárásával a csődmentes piacon a (megfelelően diszkontált) eszközárak $\mathcal{F}$-szemimartingálok. Ha az egész piacot arbitrázsmentesnek feltételezzük, akkor ezeknek az áraknak a kibővített $\mathcal{G}$-ben is szemimartingáloknak kell maradniuk, ezt $\mathcal{H}'$-hipotézisnek nevezzük és a következőképpen jelöljük: $\mathcal{F} \hookrightarrow_{\mathcal{H}'} \mathcal{G}$.

Ennél erősebb elvárás, hogy az $\mathcal{F}$-beli martingálok $\mathcal{G}$-ben is martingálok maradjanak, ez a $\mathcal{H}$-hipotézis az előzőhöz analóg jelöléssel: $\mathcal{F} \hookrightarrow_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ (martingál invariancia tulajdonság). Ha ez a sajátosság teljesül, akkor megmutatjuk, hogy a piacon mindenki számára elérhető adatokra épülő hazárd-folyamattal egyszerűen kifejezhető a kockázatos követelések ára. A fejezet végén bemutatjuk a klasszikus Cox-féle konstrukciót és egy általánosítását.

3.1. A progresszív filtráció bővítés

A fejezet elején említettekkel összhangban a piacon hozzáférhető információk által generált $\mathcal{F}$ filtrációt úgy kell kiterjesztenünk, hogy az $\mathcal{F}$-szemimartingálok a kibővített filtrációban is szemimartingálok maradjanak. Ehhez vegyük a legszűkebb olyan jobbról folytonos $\mathcal{G}$ filtrációt, amelyre nézve a τ csődidőpont megállási idő és $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Ekkor a $\mathcal{G}$ filtráció a következő alakban áll elő:

$$\mathcal{G}_t = \bigcup_{\epsilon>0} \mathcal{G}^0_{t+\epsilon}, \quad \textit{ahol} \quad \mathcal{G}^0_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge t). \tag{3.1}$$

Ha t-t lerögzítjük, a $\mathcal{G}^0_t$ σ-algebrát $F_t h(t \wedge \tau)$ alakú valószínűségi változók generálják, ahol h Borel-függvény és $F_t \bar{\in} \mathcal{F}_t$. Ebből következik, hogy a csőd előtt a $\mathcal{G}$ egybeesik $\mathcal{F}$-el, ezért a $t < \tau$ esetén a $\mathcal{H}'$-hipotézis igaz: ha az X folyamat $\mathcal{F}$ szerint martingál, akkor a megállítottja, $(X^\tau_t = X_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ egy $\mathcal{G}$-szemimartingál.

Vegyük ismét a τ túlélés-folyamatának $\mathcal{F}$-Doob-Meyer-dekompozícióját:

$$G_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t) = Z_t - C_t$$

és legyen B az $\mathcal{F}$-előrejelezhető, duális projekciója a $\mathcal{G}$-adaptált $(\epsilon_u)_u = (\Delta X_\tau H_u)_u$ folyamatnak. Ezekkel a jelölésekkel igaz a következő kanonikus felbontás (részletes bizonyítás a [26] 87. oldalán):

3.1.1. Tétel (Jeulin). *Az X $\mathcal{F}$-martingál megállított folyamata $(X^\tau_t = X_{\tau\wedge t}, t \geq 0)$ egy $\mathcal{G}$-szemimartingál és*

$$X_{t\wedge\tau} - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, Z\rangle_u + dB_u}{G_{u-}}$$

martingál a $\mathcal{G}_t$ filtrációra nézve.

3.1.1. Megjegyzés. *Ha feltesszük, hogy a τ elkerüli az $\mathcal{F}$-megállási időket, azaz $\mathbb{P}(\tau = T) = 0$, minden T $\mathcal{F}$-megállási idő esetén, akkor a $\Delta X_\tau = 0$ és a $B = 0$.*

A kockázati esemény bekövetkezése után viszont további megszorításokat kell bevezetnünk a τ csődidőponttal kapcsolatban, ha szeretnénk, hogy a $\mathcal{H}'$-hipotézis továbbra is fennálljon. A két leggyakrabban vizsgált karakterizáció, ha a τ ún. honest idő vagy kezdeti idő.

3.1.1. Definíció (Honest idő). *A τ kockázati esemény honest idő, ha minden $t > 0$ esetén τ egy $\mathcal{F}_t$-mérhető valószínűségi változóval egyenlő a $\{\tau \leq t\}$-n.*

Ha a τ-t honest időnek választjuk, a $\mathcal{G}_t$ σ-algebra sorozat:

$$\mathcal{G}_t = \{A \in \mathcal{F}, \forall t, \exists A_t, B_t \in \mathcal{F}_t, A = (A_t \cap \{\tau > t\}) \cup (B_t \cap \{\tau \leq t\})\}$$

növekvő és egy filtrációt alkot.

Ebben az esetben a $\mathcal{H}'$-hipotézis teljesül és a következő kifejezés minden X $\mathcal{F}$-martingál esetén egy $\mathcal{G}$-martingál:

$$X_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, Z\rangle_u + dB_u}{G_{u-}} + \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} \int_\tau^t \frac{d\langle X, Z\rangle_u + dB_u}{1 - G_{u-}}. \tag{3.2}$$

3.1.2. Definíció (Kezdeti idő). *A τ kockázati eseményt kezdeti időnek (initial time) nevezzük, ha létezik egy $(\alpha_t^u, t \geq 0)$ pozitív $\mathcal{F}$-martingál család, amellyel a túlélés-folyamat a következő formában állítható elő:*

$$G_t^T = \mathbb{P}(\tau > T|\mathcal{F}_t) = \int_T^\infty \alpha_t^u \eta(du), \quad \forall t \geq 0,$$

ahol η egy nemnegatív mérték az $\mathbb{R}^+$-on.

Ha a τ csődidőpontot kezdeti időnek választjuk, minden X $\mathcal{F}$-martingál $\mathcal{G}$-szemimartingál és a honest idő esetében megismert kanonikus felbontás a következőképpen módosul (részletes bizonyítás az [20]-ben a 3.oldaltól):

$$X_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, G\rangle_u + dB_u}{G_{u-}} - \int_{t\wedge\tau}^t \frac{d\langle X, \alpha^\theta\rangle_u}{\alpha_{u-}^\theta}\bigg|_{\theta=\tau}, \tag{3.3}$$

ahol a kifejezés ismét egy $\mathcal{G}$-martingál.

A gyakorlatban inkább kezdeti időnek vesszük a τ-t (pl. Cox-modell), mert a honest idő egy $\mathcal{F}_\infty$-mérhető valószínűségi változó (ezt Dellacherie és Meyer bizonyította be a [11] cikkében), amelyet nem tudunk kinyerni közvetlenül piaci adatokból és egy $\mathcal{F}_\infty$-mérhető valószínűségi változóval való modellezése sem lesz konzisztens a valósággal. Ezen kívül a kockázati esemény bekövetkezése után a $\mathcal{G}$-adaptált folyamat általában a kockázati eseménytől függ: ez lehetetlen, amikor az idő honest, mert definíció szerint minden $\mathcal{G}$-előrejelezhető folyamat $\mathcal{F}$-mérhető lesz τ után.

3.2. Martingál invariancia tulajdonság

Ebben a részben megvizsgáljuk az erősebb feltétel, a $\mathcal{H}$-hipotézis teljesülésének lehetőségeit, vagyis milyen feltételek kellenek ahhoz, hogy az $\mathcal{F}$-martingálok a kibővített $\mathcal{G}$ filtrációban is martingálok legyenek. Látni fogjuk, hogy ekkor a két tárgyalt árazási formula nagyon közel áll egymáshoz és a kockázatos elemi kötvény árának meghatározásához egy egyszerűbb formula vezethető le. Először bebizonyítunk két, $\mathcal{H}$-hipotézissel ekvivalens állítást, amelyek segítségünkre lesznek a gyakorlati példáknál.

3.2.1. Állítás. *Ekvivalensek a következők:*

1. $\mathbb{F} \hookrightarrow_{\mathcal{H}} \mathbb{G}$

2. *$\forall t$-re $\mathcal{F}_\infty$ és $\mathcal{G}_t$ feltételesen független $\mathcal{F}_t$-től, azaz $\forall t$-re és és $\forall \xi$ $\mathcal{F}_\infty$-mérhető valószínűségi változóra:*
$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t).$$

3. *Legyen τ olyan kezdeti idő, amely elkerüli az $\mathbb{F}$-megállási időket, azaz $\mathbb{P}(\tau = T) = 0$, minden T $\mathcal{F}$-megállási idő esetén, akkor a $u \geq 0$ esetén a túlélésfüggvény előállításában szereplő α^u martingál konstans u után.*

Bizonyítás.

Először a 1. és a 2. állítás ekvivalenciáját bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a 2. állítás igaz. Legyen M egy tetszőleges $\mathcal{F}$-martingál, ekkor minden $t \leq s$ esetén:

$$\mathbb{E}(M_s|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(M_s|\mathcal{F}_t) = M_t,$$

ezért M egy $\mathcal{G}$-martingál. Tehát igaz a martingál invariancia tulajdonság. Az ellentétes irányhoz legyen $A \in \mathcal{F}_\infty$. Vezessük be az M_u $\mathcal{F}$-martingált: $M_u := \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_u)$, ahol $u \in \mathbb{R}^+$. Mivel az M a $\mathcal{G}$ filtráció szerint is martingál, megkapjuk a 2. állítást:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_t) = M_t = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_t).$$

Térjünk át az 1. és 3. állítás azonosságára, először tegyük fel, hogy igaz a 3. állítás: ha minden $u \geq 0$-ra az α^u martingál u után konstans, akkor a $G = Z - C$ Doob-Meyer-dekompozíció Z martingál része is konstans lesz, mivel

$$Z_t = \int_0^\infty \alpha^u_{u\wedge t}\eta(du) = \int_0^\infty \alpha^u_t \eta(du) = \mathbb{P}(\tau > 0|\mathcal{F}_t) = 1.$$

Emiatt minden X $\mathcal{F}$-martingál esetén a következő kifejezés értéke nulla:

$$\int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, Z\rangle_u}{G_{u-}} = 0.$$

Ráadásul minden $F_t \bar{\in} \mathcal{F}_t$-re és h Borel-függvényre az $L_t = F_t h(t \wedge \tau)$ jelöléssel:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(L_t \int_{t\wedge\tau}^t \frac{d\langle X, \alpha^\theta\rangle_u}{\alpha^\theta_{u-}}\bigg|_{\theta=\tau}\right) &= \mathbb{E}\left(F_t h(\tau) \int_\tau^t \frac{d\langle X, \alpha^\theta\rangle_u}{\alpha^\theta_{u-}}|_{\theta=\tau}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(F_t \int_0^t h(s) \int_s^t \frac{d\langle X, \alpha^\theta\rangle_u}{\alpha^\theta_{u-}} \alpha^s_t \eta(ds)\right) = 0,\end{aligned}$$

mert $d\langle X, \alpha^s\rangle_u = 0$, ha $u \geq s$. Mivel a τ elkerüli az $\mathcal{F}$-megállási időket, a $\Delta X_\tau = 0$ és a Jeulin-formulában szereplő $B = 0$. Tehát az X egy $\mathcal{G}$-martingál és a $\mathcal{H}$-hipotézis igaz.
A másik irányhoz tegyük fel, hogy a $\mathcal{H}$-hipotézis igaz. Felhasználjuk a következő lemmát (bizonyítása a [20]-ben):

3.2.1. Lemma. *Ha X egy $\mathcal{F}$-lokális martingál, akkor*

$$Y_t = X_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, G\rangle_u + dB_u}{G_{u-}} - \int_{t\wedge\tau}^t \frac{d\langle X, \alpha^\theta\rangle_u}{\alpha^\theta_{u-}}\bigg|_{\theta=\tau}$$

folyamat $\mathcal{G}$ filtrációt szerint is lokális martingál.

A lemma miatt az $Y - X$ folyamat egy $\mathcal{G}$-martingál és (Jeulin-formulája miatt) egy véges variációjú, előrejelezhető folyamat, ezért 0-val egyenlő. Tehát 1 valószínűséggel az

$$\int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, G\rangle_u}{G_{u-}} - \int_{t\wedge\tau}^{t} \frac{d\langle X, \alpha^\theta\rangle_u}{\alpha^\theta_{u-}}\bigg|_{\theta=\tau} = 0,$$

ezért mindkét integrál értéke nulla 1 valószínűséggel. Ebből következik, hogy minden $L_t = F_t h(t\wedge\tau)$ $\mathcal{G}_t$-mérhető valószínűségi változóra:

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{E}\left(L_t \int_{t\wedge\tau}^{t} \frac{d\langle X, \alpha^\tau\rangle_u}{\alpha^\tau_u}\right) &= \mathbb{E}\left(F_t \mathbb{1}_{\tau\le t} h(\tau) \int_{\tau}^{t} \frac{d\langle X, \alpha^\tau\rangle_u}{\alpha^\tau_u})\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(F_t \int_0^t h(s)\alpha^s_t \eta(ds) \int_s^t \frac{d\langle X, \alpha^s\rangle_u}{\alpha^s_u}\right), \end{aligned}$$

emiatt az $\alpha^s_t(d\langle X, \alpha^s\rangle_u/\alpha^s_u) = 0$, amiből $d\langle X, \alpha^s\rangle_u = 0$ minden $u \ge s$-re és minden X $\mathcal{F}$-martingálra. Tehát minden $u \ge 0$ esetén az α^u martingál konstans u után. ❑

3.2.1. Megjegyzés. *A G túlélés-folyamat csökkenő, mivel a martingál invariancia tulajdonság teljesülése esetén: $G_t = P(\tau < t|\mathcal{F}_t) = P(\tau \le t|\mathcal{F}_\infty)$. Ebből következik, hogy a $\Gamma = -\ln G$ hazárd-folyamat növekedő, előrejelezhető és*

$$\Lambda^{\mathcal{F}}_t = \int_0^t \frac{dA_s}{G_{s-}} = \int_0^t \frac{dG_s}{G_{s-}} = \Gamma_t,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél feltettük, hogy G folytonos. Ebből következik, hogy $\Lambda_t = \Gamma_{t\wedge\tau}$.

Ha a $\mathcal{H}$-hipotézis teljesül, akkor a két tárgyalt árazási formula, az intenzitás-folyamaton alapuló és a hazárd-folyamatra épülő nagyon hasonló. Tegyük fel, hogy Γ folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, ezért a következő alakba írható: $\Gamma_t = \int_0^t \lambda^{\mathcal{F}}_s ds$. Ezt a hazárd folyamatot használó árazási szabályba behelyettesítve a következőképpen módosul:

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{T<\tau}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\tau>t} e^{\Gamma_t} \mathbb{E}(Xe^{-\Gamma_T}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\tau>t}\mathbb{E}(Xe^{-\int_t^T \lambda^{\mathcal{F}}_s ds}|\mathcal{F}_t). \tag{3.4}$$

A két árazási formula összehasonlítása előtt meg kell jegyeznünk, hogy a $\mathcal{H}$-hipotézis alatt minden $\mathcal{F}_T$ mérhető, integrálható X valószínűségi változóra:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t), \quad \forall t \leq T.$$

Tehát ekkor mindkét $\mathcal{G}$-martingál végeredménye X, ezért igaz a következő egyenlőség:

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{T<\tau}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\tau>t}\mathbb{E}(Xe^{-\int_t^T \lambda_s^{\mathcal{F}} ds}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\tau>t}\mathbb{E}(Xe^{-\int_t^T \lambda_s^{\mathcal{F}} ds}|\mathcal{G}_t). \tag{3.5}$$

Ezt az intenzitás alapú árazási formulával összehasonlítva:

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{T<\tau}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\tau>t}\mathbb{E}(Xe^{-\int_t^T \lambda_s^{\mathcal{G}} ds}|\mathcal{G}_t) - \mathbb{E}(\Delta V_\tau \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}|\mathcal{G}_t)). \tag{3.6}$$

Azt kaptuk, hogy a $\mathcal{H}$-hipotézis teljesülése esetén a két árazási formula nagyon közel áll egymáshoz, hiszen a HBPR úgy viselkedik, mint az IBPR ahol az intenzitás le lett cserélve $\mathcal{F}$-intenzitásra és az ugrás eltűnik.

3.2.2. Megjegyzés. *Az előbbi csak egy interpretáció, nem igaz azt kijelenteni, hogy a filtráció bővítésével az intenzitás egy olyan konstrukciójához jutunk, ahol az ugrás eltűnik. Valójában ebben a megközelítésben az intenzitáson alapuló árazási formula alkalmazása elvezet az ugrás kifejezéséhez:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Delta V_\tau \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}|\mathcal{G}_t)) &= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma^t}(\mathbb{E}(Xe^{-\Lambda_{T\wedge\tau}}|\mathcal{G}_t) - \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(Xe^{-\Gamma_T}|\mathcal{G}_t)) = \\ &= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma^t}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}X(e^{-\Gamma_\tau} - e^{-\Gamma_T})|\mathcal{G}_t).\end{aligned}$$

Az első fejezetben láttuk, hogy kockázatos elemi kötvény árára az intenzitásfolyamat és az ugrás ismerete mellett az intenzitáson alapuló árazási szabály szerint a következőképpen fejezhető ki:

$$D(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}((e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s^{\mathcal{G}})ds}|\mathcal{G}_t) - \mathbb{E}(\Delta V_\tau \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}|\mathcal{G}_t)). \tag{3.7}$$

Viszont ha a martingál invariancia tulajdonság teljesül, az előzőek alapján egy sokkal egyszerűbb formulához jutunk, ahol az $\mathcal{F}$-intenzitás kapcsolatát τ-hoz úgy interpretálhatjuk, hogy ez a kamat ráta melletti hozamfelára (spread):

$$D(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s^{\mathcal{F}})ds}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s^{\mathcal{F}})ds}|\mathcal{G}_t). \tag{3.8}$$

A legtöbbet használt alkalmazása ennek a módszernek a Cox-folyamaton alapuló konstrukció, amelyről a következő fejezetben lesz szó.

A másik ok, amiért a hipotézis tanulmányozása árazási szempontból fontos, az a következő arbitrázs feltétel:

3.2.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy létezik egyetlen $\mathcal{Q}$ mérték, amely ekvivalens P-vel az $\mathcal{F}_T$-n, ezért az $(\widetilde{S}_t, \quad t \leq T)$ diszkontált árfolyam egy $\mathcal{F}$-martingál $\mathcal{Q}$ alatt. Tegyük fel továbbá, hogy létezik legalább egy $\mathcal{Q}^*$, P-vel ekvivalens mérték a $\mathcal{G}_T$-n, így $(\widetilde{S}_t, \quad t \leq T)$ egy $\mathcal{G}$-martingál $\mathcal{Q}^*$ mérték szerint. Ekkor a $\mathcal{H}$-hipotézis teljesül $\mathcal{Q}^*$ alatt.*

Bizonyítás.

Mivel feltettük, hogy X négyzetesen integrálható martingál, ezért bármilyen $XR_T \bar{\in} \mathcal{F}_T$ származtatott követelés felírható a következő alakban:

$$R_T X = x + \int_0^T \theta_s d\widetilde{S}_s,$$

ahol θ egy négyzetesen integrálható, $\mathcal{F}$-előrejelezhető folyamat. A származtatott követelés ára t-ben: $E_Q(XR_T/R_t|\mathcal{F}_t)$. Mivel X hedgelhető a $\mathcal{G}$-adaptált θ stratégiával és az ár egyedi, tetszőleges $\mathcal{Q}^*$ ekvivalens martingál mértékre:

$$E_Q(XR_T|\mathcal{F}_t) = E_{Q^*}(XR_T|\mathcal{G}_t).$$

Ezért $E_Q(Z|\mathcal{F}_t) = E_{Q^*}(Z|\mathcal{G}_t)$ minden négyzetesen integrálható, $\mathcal{F}_T$-mérhető Z valószínűségi változóra, amiből következik, hogy minden négyzetesen integrálható $\mathcal{F}$-$\mathcal{Q}^*$-martingál $\mathcal{G}$-$\mathcal{Q}^*$-martingál. ❑

3.2.3. Megjegyzés. *Nem nehéz olyan arbitrázsmentes modelleket konstruálni, ahol a $\mathcal{H}$-hipotézis nem tartható. Ilyenre lesz példa a következő fejezetben a hiányos információ esete, ahol egyszerűen kiszámolható, hogy a hazárd-folyamat nem növekedő, ezért a hipotézis nem igaz.*

3.3. Példák: Cox-féle modellek

Két példán keresztül áttekintjük az eddig tárgyalt tulajdonságokat. Az első a klasszikus Cox-féle konstrukció lesz, amelyet Lando alkalmazott először hitelkockázati modellként [28] cikkében, itt az erősebb $\mathcal{H}$-hipotézis is teljesül. Ezt a második részben általánosítjuk és megvizsgáljuk, hogy az első modellnél igazolt kellemes tulajdonságok közül melyek maradnak meg. A példákban legyen adott az $\mathcal{F}$ filtráció, X $\mathcal{F}$-adaptált folyamat és két nemnegatív valószínűségi változó: V, amely $\mathcal{F}_\infty$-mérhető és integrálható; θ, amely egy $\mathcal{F}_\infty$-től független, exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

- A Cox-féle megközelítésben legyen λ egy nemnegatív, $\mathcal{F}$-adaptált folyamat és definiáljuk τ csődidőt a következőképpen:

  $$\tau = \inf\{t : \Lambda_t \geq \theta\},$$

  ahol $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$. Tegyük fel, hogy $\int_0^\infty \lambda_s ds = \infty$, ekkor $t \geq 0$ esetén a feltételes túlélés-folyamat:

  $$G_t^T = \mathbb{P}(\tau > T|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\Lambda_T < \theta|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\exp(-\Lambda_T)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\int_T^\infty \lambda_s \exp(-\Lambda_s) ds|\mathcal{F}_t).$$

  Vezessük be a $\psi_s = \lambda_s \exp(-\Lambda_s)$ és $\gamma(s,t) = \mathbb{E}(\psi_s|\mathcal{F}_t)$ jelöléseket, így

  $$G_t^T = \int_T^\infty \mathbb{E}(\psi_s|\mathcal{F}_t) ds = \int_T^\infty \gamma(s,t) ds.$$

  Vegyük észre, hogy $\gamma(s,t) = \psi_s$, ha $s \leq t$. Legyen $\eta(]0,t]) = \eta([0,t]) = \int_0^t \gamma(s,0) ds = \mathbb{P}(\tau \leq t)$ a τ valószínűségi változó eloszlása. Általánosságban fel-írhatjuk a következőt:

$$G_t^T = \mathbb{P}(\tau > T|\mathcal{F}_t) = \int_T^\infty \alpha_t^s \eta(ds),$$

ahol $\alpha_t^s = \gamma(s,t)/\gamma(s,0)$. Ez minden s-re egy pozitív martingál, ezért a τ egy kedeti idő. Ebből következik, hogy a $\mathcal{H}'$-hipotézis igaz, sőt, mivel a τ elkerüli az $\mathcal{F}$-megállási időket és minden $t \geq s$-re $\alpha_t^s = \alpha_s^s$, a **3.2.1.** tétel szerint a $\mathcal{H}$-hipotézis is igaz. Ebből következik, hogy $X \bar{\in} \mathcal{F}_t$-re az árazási szabály:

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t}\mathbb{E}(e^{-\Gamma_T}X|\mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} e^{\Lambda_t}\mathbb{E}(e^{-\Lambda_T}X|\mathcal{F}_t).$$

Bebizonyítható, hogy ha $\mathcal{H}$-hipotézis igaz és G folytonos, a csőd ideje megkonstruálható a Cox-féle módszerrel (ez az ún. kanonikus konstrukció).

- Az előző modell kiterjesztéséhez vezessük be a következő véletlen időt:

$$\tau = \inf\{t : \Lambda_t \geq \theta V\}. \tag{3.9}$$

Itt a θV változó már nem független az $\mathcal{F}_\infty$-től. Ismét felírjuk a feltételes túlélés-folyamatát:

$$\begin{aligned} G_t^T &= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(\frac{\Lambda_T}{V} < \theta|\mathcal{F}_\infty\right)|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\exp -\frac{\Lambda_t}{V}|\mathcal{F}_t\right) = \\ &= \int_T^\infty \mathbb{E}(\psi_s|\mathcal{F}_t)ds = \int_T^\infty \gamma(s,t)ds, \end{aligned}$$

ahol

$$\psi_s = \frac{\lambda_s}{V}\exp\left(-\int_0^s \frac{\lambda_u}{V}du\right) \quad \text{és} \quad \gamma(s,t) = \mathbb{E}(\psi_s|\mathcal{F}_t).$$

Ekkor minden s-re a $(\gamma(s,t), t \geq 0)$ folyamat egy $\mathcal{F}$-martingál. A τ definíciója miatt $\eta([0,t]) = \int_0^t \gamma(s,0)ds = \mathbb{P}(\tau \leq t)$ és minden T-re és t-re:

$$G_t^T = \mathbb{P}(\tau > T|\mathcal{F}_t) = \int_T^\infty \alpha_t^s \eta(ds), \tag{3.10}$$

ahol $\alpha_t^s = \gamma(s,t)/\gamma(s,0)$. Eszerint τ itt is kezdeti idő, tehát a $\mathcal{H}'$-hipotézis igaz marad. Viszont $s \leq t$ esetén

$$\alpha_t^s = \frac{\gamma(s,t)}{\gamma(s,0)} = \frac{\mathbb{E}(\psi_s|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{E}(\psi_s)} \neq \alpha_s^s,$$

ezért a martingál invariancia tulajdonság itt már nem igaz.

4. fejezet

A hiányos információra épülő modellezés

A fejezet első felében megvizsgáljuk, hogy az információ csökkenésével, azaz a filtráció szűkítésével milyen eddig tárgyalt modell jellemzők maradnak meg, továbbra is szem előtt tartva a $\mathcal{H}'$- és a $\mathcal{H}$-hipotézis teljesülésének kérdését. A második részben egy struktúrális modellből az információ késleltetésével és egy X folytonos Markov-folyamat felhasználásával egy redukált modellt származtatunk. A τ csődidőpont definiálása és az intenzitás meghatározása után kifejezzük az intenzitáson alapuló árazási szabályban szereplő ugrást. Ezután rátérünk a kockázatos követelések árazására, rámutatva az eredeti és a csökkentett információ csökkentett modell intenzitásának kapcsolatára. A fejezetet egyszerű példákkal zárjuk.

4.1. Csökkentett információ

A már megszokott jelölésekkel legyen $G_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)$ túlélés-folyamat Doob-Meyer-felbontása $G_t = Z_t - A_t$. Ismét feltételezzük, hogy G folytonos és a növekvő rész kielégíti a $dA_t = a_t dt$ egyenletet és ezért az $\mathcal{F}$-intenzitás továbbra is felírható a $\lambda_s = a_s/G_s$ alakban. Ezekkel a jelölésekkel analóg legyen az $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ filtráció szerint az $\widetilde{A}$ az $\widetilde{A}_t = \mathbb{E}(A_t|\widetilde{\mathcal{F}}_t)$

$\widetilde{\mathcal{F}}$-szubmartingál és a Doob-Meyer-dekompozíciója:

$$\widetilde{A}_t = \widetilde{z}_t + \widetilde{a}_t,$$

ahol $\widetilde{z}$ $\widetilde{\mathcal{F}}$-martingál és $\widetilde{a}$ $\widetilde{\mathcal{F}}$-előrejelezhető, növekvő folyamat.

4.1.1. Állítás. *Ekkor a $\widetilde{G}_t$, azaz a redukált modell túlélés-folyamatának $\widetilde{\mathcal{F}}$-Doob-Meyer-felbontása:*

$$\widetilde{G_t} = \mathbb{P}(\tau > t|\widetilde{\mathcal{F}_t}) = \mathbb{E}(G_t|\widetilde{\mathcal{F}_t}) = \widetilde{Z}_t - \widetilde{z}_t - \widetilde{a}_t = \widetilde{X_t} - \widetilde{a}_t,$$

ahol $\widetilde{Z}_t = \mathbb{E}(Z_t|\widetilde{\mathcal{F}}_t)$ $\widetilde{\mathcal{F}}$-martingál, $\widetilde{X_t}$ szintén $\widetilde{\mathcal{F}}$-martingál és $\widetilde{a}_t = \int_0^t \mathbb{E}(a_s|\widetilde{\mathcal{F}_s})ds$ egy $\mathcal{F}$-előrejelezhető, növekvő folyamat.

Bizonyítás.
Ha $N_t = \widetilde{A_t} - \int_0^t \mathbb{E}(a_u|\widetilde{\mathcal{F}_u})du$ és $c_s \in \widetilde{\mathcal{F}_s}$, akkor

$$\mathbb{E}(c_s(N_t - N_s)) = \int_s^t \mathbb{E}(\mathbb{E}(c_s a_u|\widetilde{\mathcal{F}_t}) - \mathbb{E}(c_s a_u|\widetilde{\mathcal{F}_u}))du = \int_s^t \mathbb{E}(c_s a_u) - \mathbb{E}(c_s a_u)du = 0.$$

❏

4.1.2. Állítás. *Legyen $\widetilde{\mathcal{G}}_t$ az $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ progresszív bővítése: $\widetilde{\mathcal{G}}_t = \widetilde{\mathcal{F}}_t \vee \mathcal{H}_t$. Ekkor a*

$$H_t - \int_0^{t\wedge\tau} (\widetilde{a_s}/\widetilde{G_s})ds$$

egy $\widetilde{\mathcal{G}}$-martingál és a τ $\widetilde{\mathcal{F}}$-intenzitása: $\widetilde{\lambda}_t = \widetilde{a}_t/\widetilde{G}_t = \mathbb{E}(\lambda_t G_t|\widetilde{\mathcal{F}_t})/\mathbb{E}(G_t|\widetilde{\mathcal{F}}_t)$.

4.1.1. Következmény. *A redukált modell intenzitásának meghatározásához nem elég az $\mathcal{F}$-intenzitás ismerete, mert $\widetilde{\lambda}_t \neq \mathbb{E}(\lambda_s|\widetilde{\mathcal{F}}_s) = \mathbb{E}(a_s/G_s|\widetilde{\mathcal{F}}_s)$, ezért a kiszámításához szükség van az $\widetilde{F}_t = 1 - \widetilde{G}_t$ Doob-Meyer-felbontására.*

Érdemes meggondolni, hogy ha a τ az $\mathcal{F}$ filtráció szerint egy kezdeti idő, akkor a redukált $\widetilde{\mathcal{F}}$ szerint is kezdeti idő marad, mert definíció szerint, ha $G_t^T = \mathbb{P}(\tau > T|\mathcal{F}_t) =$

$\int_T^\infty a_t^u du$, minden $u \geq 0$-ra és a^u $\mathcal{F}$-martingálra:

$$\widetilde{G_t^T} = \mathbb{P}(\tau > T|\mathcal{F}_t|\widetilde{\mathcal{F}_t}) = \int_T^\infty \mathbb{E}(a_t^u|\widetilde{\mathcal{F}_t})du = \int_T^\infty \widetilde{a_t^u}du,$$

ahol $\widetilde{a^u}$ $\widetilde{\mathcal{F}}$-martingál. Ebből következik, hogy teljesül a $\mathcal{H}'$-hipotézis, azaz minden $\widetilde{\mathcal{F}}$-szemimartingál a progresszíven bővített $\widetilde{\mathcal{G}}$ filtrációban is szemimartingál. A redukált modell esetén az $\widetilde{a}_{u\wedge t}^u$ általában nem egyenlő $\widetilde{a}_u^u$-val, ezért nem teljesül az erősebb $\mathcal{H}$-hipotézis, a martingál invariancia tulajdonság $\widetilde{\mathcal{F}}$ és $\widetilde{\mathcal{G}}$ filtráció között.

4.2. Késleltetett információ

Induljunk ki egy struktúrális modellből és késleltessük az információáramlást. A struktúrális megközelítésből - ahol a csőd ideje egy előrejelezhető elérési ideje egy konstans trigger diffúziós folyamatának, tehát nincs intenzitása - származtatunk egy redukált modellt a kiindulási információk megváltoztatásával. Ebben a késleltetett információs módszertanban a csőd idejének még van intenzitása. Ekkor analitikus kapcsolat figyelhető meg a csőd intenzitások és az általános, folytonos idejű Markov-modellek megfelelő első elérési idejének sűrűségfüggvénye között.

Precízebben, vegyünk egy X folytonos Markov-folyamatot a $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}}, \theta)$ téren, ahol minden x-re a $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ és θ egy transzláció az Ω-n, azaz $X_s \circ \theta_t = X_{s+t}$. Jelölje az $\mathcal{F}$ az X által generált természetes filtrációt. A kiindulási struktúrális modellben a τ_b egy $\mathcal{F}$-előrejelezhető megállási idő:

$$\tau_b = \inf\{t > 0, X_t \leq b\}$$

egy rögzített $b \in \mathbb{R}$-re. A jelölés egyszerűsítése miatt legyen $\tau = \tau_b$. Vezessük be $0 < \delta < t$-re az $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t-\delta} \subset \mathcal{F}_t$ filtrációt és legyen $\widetilde{\mathcal{G}}_t = \widetilde{\mathcal{F}}_t \vee \mathcal{H}_t$ a progresszíven bővített filtráció.

Mivel τ egy $\mathcal{F}$-megállási idő, nem lehet $\mathcal{F}$ szerint kezdeti idő, ezért nem tudjuk használni az előző fejezet eredményeit, viszont a csőd bekövetkezése, azaz $\{\tau \leq t\}$ esetén a $\tau - \delta$ kifejezhető $\widetilde{\mathcal{F}}_t$-mérhető valószínűségi változókkal, tehát a kockázati esemény honest konstrukciójához jutunk. Részletesebben: a $\{\tau \leq t\}$-n az $\eta = \inf\{t > 0, Z_t \leq b\}$ folyamatra $\mathbb{1}_{\{\eta \leq t-\delta\}} = 1$, ezért $\mathbb{1}_{\{\eta \leq t-\delta\}}\eta$ $\widetilde{\mathcal{F}}_t$-mérhető. Ebből következik, hogy a $\{\tau \leq t\}$-n $\tau = \tau_t$, ahol a $\tau_t = \mathbb{1}_{\{\eta \leq t-\delta\}}\eta + \delta \in \widetilde{\mathcal{F}}_t$, ezért τ $\widetilde{\mathcal{F}}$-honest és $\widetilde{\mathcal{F}}$ és $\widetilde{\mathcal{G}}$ között igaz a $\mathcal{H}'$-hipotézis.

Vizsgáljuk meg ezt a redukált modellt az intenzitás modelleknél megmutatott eredményeken keresztül. Ahogyan már az első részben említettük, a klasszikus módszer a $\widetilde{\mathcal{G}}$-intenzitás kiszámolásához az Aven-lemma alkalmazása:

4.2.1. Tétel.

$$\lambda_t = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^t \mathbb{P}_x(t < \tau \leq t + h | \widetilde{\mathcal{G}}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \frac{f(X_{t-\delta}, b, \delta)}{\mathbb{P}_{X_{t-\delta}}(\delta < \tau)},$$

ahol $f(x, b, t)$ a τ folytonos sűrűségfüggvénye: $f(x, b, t) = \mathbb{P}_x(\tau_b \in]t, t + dt])/dt$.

Bizonyítás.
Az erős Markov-tulajdonságból és a Bayes-formulából következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^t \mathbb{P}_x(t < \tau \leq t + h | \widetilde{\mathcal{G}}_t) &= \frac{1}{h} \frac{\mathbb{P}_x(t < \tau \leq t + h | \widetilde{\mathcal{F}}_t)}{\mathbb{P}_x(t < \tau | \widetilde{\mathcal{F}}_t)} \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} = \\ &= \frac{1}{h} \frac{\mathbb{P}_{X_{t-\delta}}(\delta < \tau \leq \delta + h)}{\mathbb{P}_{X_{t-\delta(\delta<\tau)}}} \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}. \end{aligned}$$

,

tehát a redukált modell intenzitása:

$$\lambda_t := \frac{f(X_{t-\delta}, b, \delta)}{\mathbb{P}_{X_{t-\delta(\tau>\delta)}}} \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}.$$

Ahhoz, hogy λ_t tényleg a τ intenzitás-folyamata, ellenőriznünk kell még az Aven-lemma feltételeit. Az általánosság megsértése nélkül tegyük fel, hogy $h \leq 1$. Ekkor

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\mathbb{P}_x(t < \tau \leq t+h|\widetilde{\mathcal{G}}_t) - \lambda_t\right| &\leq \frac{1}{h}\frac{\int_\delta^{\delta+h}|f(X_{t-\delta},b,s) - f(X_{t-\delta},b,\delta)|ds}{\mathbb{P}_{X_{t-\delta}}(\delta < \tau)}\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \\ &\leq \frac{\sup_{\delta\leq s\leq\delta+1}|f(X_{t-\delta},b,s) - f(X_{t-\delta},b,\delta)|}{\mathbb{P}_{X_{t-\delta}}(\delta < \tau)}\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \\ &:= y_t.\end{aligned}$$

Egyszerű látni, hogy m. m. ω-ra és $\forall t_0 > 0$-ra: $\int_0^{t_0} y_t(\omega)dt < \infty$. ❑

4.2.1. Következmény. *Láttuk az első fejezetben, hogy a kockázatos követelés ára az intenzitás-folyamaton alapuló árazási szabály szerint:*

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\widetilde{\mathcal{G}}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}(V_t - \mathbb{E}(\Delta V_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}|\widetilde{\mathcal{G}}_t)),$$

ahol $V_t = e^{\lambda_{t\wedge\tau}}\mathbb{E}(e^{-\lambda_{T\wedge\tau}}|\widetilde{\mathcal{G}}_t)$*. Ekkor az előző tételben felírt intenzitás behelyettesítésével az ugrás a következő kifejezéssel egyenlő:*

$$V_t = \exp\int_0^{t\wedge\tau}\frac{f(X_{s-\delta},b,\delta)}{\mathbb{P}_{X_{s-\delta}}(\delta<\tau)}ds\mathbb{E}\left(X\exp\int_0^{T\wedge\tau}\frac{f(X_{s-\delta},b,\delta)}{\mathbb{P}_{X_{s-\delta}}(\delta<\tau)}ds\middle|\widetilde{\mathcal{G}}_t\right).$$

Ez az ugrás nem 0, ezért továbbra is kényelmesebb választás, ha kiszámoljuk az $\widetilde{\mathcal{F}}$-hazárd-folyamatot és az erre épülő árazási formulát használjuk.

4.3. Kockázatos követelések árazása

Vegyük újra az $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t-\delta} \subset \mathcal{F}_t$ filtrációt és legyen X egy folytonos $\widetilde{\mathcal{F}}$-martingál. Ekkor a transzlációval kapcsolatban a következő lemma bizonyítható be:

4.3.1. Lemma. *A* $Z_t = X_{t-\delta}\mathbb{1}_{\{t>\delta\}} + X_0\mathbb{1}_{\{t<\delta\}}$ *folytonos* $\widetilde{\mathcal{F}}$*-martingál.*

BIZONYÍTÁS.
Ha $t \leq \delta$:

- $T \leq \delta$ esetén: $Z_T = Z_t = X_0$, innen $\mathbb{E}(Z_T|\widetilde{\mathcal{F}}_t) = X_0 = Z_t$,
- $\delta < T$ esetén: $\mathbb{E}(Z_T|\widetilde{\mathcal{F}}_t) = \mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(Z_{T-\delta}) = X_0$.

Ha $t > \delta$: $\mathbb{E}(Z_T|\widetilde{\mathcal{F}}_t) = \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_{t-\delta}) = X_{t-\delta} = Z_t$. ❑

A csődidőpont definíciója legyen továbbra is $\tau_b = \inf\{t > 0, X_t \leq b\}$ minden $t > \delta$-ra. Ekkor az $\widetilde{\mathcal{F}}$-feltételes túlélés-folyamatot a következő alakban írhatjuk fel:

$$\widetilde{\mathcal{G}}_t = \mathbb{P}_x(\tau_b > t|\widetilde{\mathcal{F}}_t) = \mathbb{P}_x(\inf_{s\leq t} X_s > b|\widetilde{\mathcal{F}}_t) = \mathbb{1}_{\{\inf_{s\leq t-\delta} X_s > b\}}\mathbb{P}_x(\inf_{t-\delta<s\leq t} X_s > b|\widetilde{\mathcal{F}}_t) =$$
$$= \mathbb{1}_{\{\inf_{s\leq t-\delta} X_s > b\}}\mathbb{P}_{X_{t-\delta}}(\inf_{s\leq\delta} X_s > b) = \mathbb{1}_{\{\inf_{s\leq t-\delta} X_s > b\}}\Phi(X_{t-\delta}, \delta, b) =$$
$$= D_t\Phi(Z_t, \delta, b),$$

ahol $D_t = \mathbb{1}_{\{\inf_{s\leq t-\delta} X_s > b\}}$, $Z_t = X_{t-\delta}$ és $\Phi(x, u, y) = \mathbb{P}_x(\inf_{s\leq u} X_s > y)$.

A $\widetilde{G}$ folyamat nem csökkenő, ezért a $\mathcal{H}'$-hipotézis nem áll fenn ebben a módszertanban, vagyis az intenzitás ismerete nem elég a kockázatos követelés értékének kiszámításához (kivéve, ha az ugrást ki tudjuk számolni). Mivel a $\Phi(Z_t, \delta, b)$ folytonos és D véges variációjú, a $\widetilde{G}$ dinamikája $t > \delta$ esetén a parciális integrálási formulával:

$$d\widetilde{\mathcal{G}}_t = D_t d\Phi(Z_t, \delta, b) + \Phi(Z_t, \delta, b)dD_t.$$

Alkalmazzuk az Itô formulát a $\Phi(Z_t, \delta, b)$-re:

$$d\widetilde{\mathcal{G}}_t = D_t\partial_1\Phi(Z_t, \delta, b)dZ_t + \frac{1}{2}D_t\partial_{1,1}\Phi(Z_t, \delta, b)d\langle Z\rangle_t + \Phi(Z_t, \delta, b)dD_t.$$

Mivel D-nek csak t-ben van ugrása és ekkor $Z_t = b$, a $\Phi(b, \delta, b) = 0$, azaz az egyenlet utolsó tagja azonosan 0:

$$d\widetilde{\mathcal{G}}_t = D_t\partial_1\Phi(Z_t, \delta, b)dZ_t + \frac{1}{2}D_t\partial_{1,1}\Phi(Z_t, \delta, b)d\langle Z\rangle_t.$$

Ebből a dinamikából és a $\langle Z\rangle$ $\widetilde{\mathcal{F}}$-előrejelezhetőségéből következik a $\widetilde{G}$ $\widetilde{\mathcal{F}}$-szemimartingál dekompozíciója. Könnyen ellenőrizhető, hogy a túlélés-folyamat martingál része nem konstans.

A származtatott követelés ára a hazárd-folyamatot használó árazási szabály segítségével egyszerű alakba írható az $f(X_T)\mathbb{1}_{T<\tau}$ kifizetési függvénnyel:

$$\mathbb{E}(f(X_T)\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\widetilde{\mathcal{G}}_t) = (1-H_t)\frac{\mathbb{1}_{\{\widetilde{\mathcal{G}}_t>0\}}}{\widetilde{\mathcal{G}}_t}\mathbb{E}(\widetilde{\mathcal{G}}_T f(X_T)|\widetilde{\mathcal{F}}_t). \tag{4.1}$$

Ha a $\widetilde{\mathcal{G}}_t = 0$, akkor $\tau \leq t$ és mindkét tag 0-val egyenlő, mivel

$$\mathbb{E}(f(X_T)\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\widetilde{\mathcal{G}}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(f(X_T)\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\widetilde{\mathcal{G}}_t).$$

A feltételes várható érték a Z Markov-tulajdonságának felhasználásával számolható:

$$\mathbb{E}(\widetilde{\mathcal{G}}_T f(X_T)|\widetilde{\mathcal{F}}_t) = V(t,T,Z_t),$$

ahol V folyamatról feltételezzük, hogy sima és kielégíti a megfelelő parciális differenciálegyenletet.

Korábban láttuk, hogy az $\widetilde{\mathcal{F}}$-intenzitást a hazárd-folyamat segítségével tudjuk előállítani. Ha az X Markov-folyamat egy homogén diffúzió:

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dWs,$$

akkor a korábban definiált $Z_t = X_{t-\delta}$ folyamat:

$$Z_t = x + \mathbb{1}_{\{\delta<t\}}\int_\delta^t \mu(Z_s)ds + \mathbb{1}_{\{\delta<t\}}\int_\delta^t \sigma(Z_s)d\beta_s = x + \int_0^t \widetilde{\mu}(s,Z_s)ds + \int_\delta^t \widetilde{\sigma}(s,Z_s)d\beta_s,$$

ahol $\beta_x = W_s - W_\delta$, $\quad \widetilde{\mu}(s,x) = \mathbb{1}_{\{\delta<s\}}\mu(x)$ és $\widetilde{\sigma}(s,x) = \mathbb{1}_{\{\delta<s\}}\sigma(x)$.

Korábbi számolásokból tudjuk, hogy $\delta \leq s$ esetén:

$$d\widetilde{A}_s = -D_s(\partial_1\Phi(Z_s,\delta,b)\mu(Z_s) + \frac{1}{2}\partial_{1,1}\Phi(Z_s,\delta,b)\sigma^2(Z_s))ds,$$

és az $\widetilde{\mathcal{F}}$-intenzitás (mivel $\widetilde{G}_s = D_s\Phi(Z_s, \delta, b)$), $\delta \leq s$-ra:

$$\widetilde{\lambda}_s = -D_s \frac{\partial_1\Phi(Z_s, \delta, b)\mu(Z_s) + \frac{1}{2}\partial_{1,1}\Phi(Z_s, \delta, b)\sigma^2(Z_s)}{\Phi(Z_s, \delta, b)}.$$

Használhatjuk a Laplace-approximációt is a direkt kiszámításhoz:

$$\begin{aligned} d\widetilde{A}_s &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}(\widetilde{\mathcal{F}}_{s+h} - \widetilde{\mathcal{F}}_s|\widetilde{\mathcal{F}_s})ds = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{P}_x(s < \tau \leq s+h|\widetilde{\mathcal{F}}_s)ds = \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}D_s\mathbb{P}_{Z_s}(\delta < \tau \leq \delta + h)ds = -D_s f(Z_s, \delta, b)ds. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\widetilde{\lambda}_s = -D_s f(Z_s, \delta, b)/\Phi(Z_s, \delta, b)$ és visszakapjuk, hogy $\lambda_s = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\widetilde{\lambda}_s$.

4.4. Példák: Diffúziós folyamatok

Tekintsünk néhány nagyon egyszerű példát a hiányos információra épülő modellekre. Általában ebben az esetben bonyolult kiszámítani a Φ függvényt (vagy az f függvényt), így a hazárd-folyamatot és az intenzitást is. A bonyolultság mértéke alapvetően az X folyamat tulajdonságain múlik. A példákban a jelölések egyszerűsítése miatt vegyük az $f(x, u, y) = -\partial_2\Phi(x, u, y)$ függvényt.

- Elöször legyen $X_t = x + B_t$ Brown-mozgás, $\Phi(x, \delta, b)$-t írjuk át $\Phi(x, \delta, b - x)$ alakba. Ekkor

  $$\Phi(0, u, y) = \mathbb{P}_0(\inf_{s\leq u} B_s \geq y) = \mathbb{P}_0(\sup_{s\leq u} B_s \leq -y) = \mathbb{P}_0(|B_u| \leq -y),$$

  ezért

  $$\Phi(0, u, y) = \mathcal{N}\left(-\frac{y}{\sqrt{u}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{y}{\sqrt{u}}\right),$$

  így az f függvény:

  $$f(x, b, \delta) = -\partial_2\Phi(0, \delta, b - x) = \frac{x - b}{\delta\sqrt{2\pi\delta}}\exp -\frac{(x-b)^2}{2\delta}.$$

- Ebben a példában legyen $X_t = x + \sigma B_t + \mu t$, a $\Phi(x, \delta, b)$, helyett most vegyük a $\Phi(0, \delta, b - x)$-t:

$$\Phi(0, u, y) = \mathbb{P}_0(\inf_{s \leq u} \sigma B_s + \mu s \geq y) = \mathbb{P}_0\left(\inf_{s \leq u} B_s + \frac{\mu}{\sigma} s \geq \frac{y}{\sigma}\right).$$

Az előzőhöz hasonlóan:

$$\Phi(0, u, y) = \mathcal{N}\left(\frac{u\mu - y}{\sigma\sqrt{u}}\right) - \exp\frac{2\mu y}{\sigma^2}\mathcal{N}\left(\frac{u\mu + y}{\sigma\sqrt{u}}\right).$$

- Végül vegyük a geometriai Brown-mozgást: $X_t = x \exp\{\sigma B_t + \mu t\}$, ekkor

$$\Phi(x, u, b) = \mathbb{P}_x(\inf_{s \leq u} X_s \geq b) = \mathbb{P}_0(\inf_{s \leq u} \sigma B_s + \mu s \geq \ln(b/x)).$$

Ebből következik, hogy

$$\Phi(x, u, b) = \mathcal{N}\left(\frac{u\mu - \ln(b/x)}{\sigma\sqrt{u}}\right) - \exp\frac{2\mu\ln(b/x)}{\sigma^2}\mathcal{N}\left(\frac{u\mu + \ln(b/x)}{\sigma\sqrt{u}}\right),$$

illetve

$$f(x, b, \delta) = -\partial_2\Phi(x, \delta, b) = -\frac{\ln(b/x)}{\delta\sigma^2\sqrt{2\pi\delta}}\exp-\frac{(\mu\delta - \ln(b/x))^2}{2\delta\sigma^2}.$$

5. fejezet

Kockázatos követelések árazása

Ebben a fejezetben két nagyon egyszerű termék árazását mutatjuk be illusztrálva az eddig tárgyaltakat: a kockázatos elemi kötvényét (az egyszerűség kedvéért megtérülés nélkül) és a mulasztási csereügyletét (Credit Default Swap, CDS). Mindkét terméknél két esetet vezetünk le: egyrészt amikor a $\mathcal{H}$-hipotézis áll (Cox-féle konstrukció), másrészt amikor nem igaz a martingál invariancia tulajdonság (késleltetett információra épülő modell). A fejezetben nem foglalkozunk a kockázatsemleges valószínűség meghatározásának kérdésével, hanem adottnak vesszük. További egyszerűsítés, hogy a kamatot 0-nak választjuk.

5.1. Kockázatos elemi kötvény

Az első fejezetben levezettük, hogy egy arbitrázsmentes modellben, ahol a tréderek összes információját $\mathcal{G}$-vel jelöljük, a $\mathbb{Q}$ kockázatsemleges valószínűség alatt a kockázatos elemi kötvény ára:

$$D(t,T) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t} \mathbb{E}(e^{-\Gamma_T}|\mathcal{F}_t),$$

ahol Γ a hazárd-folyamat.

Ha a $\mathcal{H}$-hipotézis teljesül, a hazárd-folyamat kifejezhető az $\mathcal{F}$-intenzitással: $\Gamma_t =$

$\int_0^t \lambda_s ds$. Ekkor az árazási szabály leegyszerűsödik:

$$D(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(e^{\Gamma_t - \Gamma_T}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(e^{-\int_t^T \lambda_s ds}|\mathcal{F}_t).$$

Ahogyan korábban láttuk, a $\mathcal{H}$-hipotézist kielégítő konstrukciók közül a legnépszerűbb a Cox-féle modellezés. Ezekben az esetekben az intenzitásra úgy tekintünk, hogy a kötelezettség hozamfelára (spread-je), ezért minden olyan kamatláb-dinamikát, amely a $B(t,T) = \mathbb{E}(\exp - \int_t^T r_s ds|\mathcal{F}_t)$ elemi kötvény zárt formulájához vezet, választhatunk az intenzitás dinamikájának és ezzel előállítható a kockázatos elemi kötvény zárt alakja is.

Tekintsünk egy olyan példát, ahol az $\mathcal{F}$-intenzitás a CIR-folyamatot követi (itt most B egy $\mathcal{F}$-Brown mozgás):

$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dB_t, \quad \text{ahol} \quad 2\kappa\theta > \sigma^2.$$

Ekkor, ha vesszük az elemi kötvény formuláját és kicseréljük a kamatlábat az intenzitással, a kockázatos elemi kötvény árának az alábbi előállítását kapjuk:

$$D(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(\exp - \int_t^T \lambda_s ds|\mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\varphi(t,T,\lambda_t), \quad \textit{ahol} \tag{5.1}$$

- $\varphi(t,T,x) = \Phi(t,T)e^{-\Psi(t,T)x}$,
- $\Phi(t,T) = \frac{2\eta \exp(\eta+\kappa)(T-t)/2}{2\eta+(\eta+\kappa)(\exp\eta(T-t)-1})^{\mu}$,
- $\Psi(t,T) = (\frac{2(\exp\eta(T-t)-1)}{2\eta+(\eta+\kappa)(\exp\eta(T-t)-1})$,
- $\eta = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$,
- $\mu = 2\lambda\theta/\sigma^2$.

Ha a $\mathcal{H}$-hipotézis nem teljesül, akkor az előző gondolatmenet nem tartható, mert a hazárd-folyamat nem lesz növekvő, ezért a $\mathcal{F}$-intenzitást nem lehet hozamfelárnak (spread-nek) tekinteni .

A kockázatos elemi kötvény ára, mivel az indikátor abban az esetben 0, ha G el tudja érni a 0-t:

$$D(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{1}_{\{G_t>0\}}\mathbb{E}(e^{\Gamma_t-\Gamma_T}|\mathcal{F}_t).$$

Vezessük be újra az előző fejezetben használt jelöléseket: $\mathcal{F}_t$-t cseréljük le $\widetilde{\mathcal{F}}_t$-re, $\mathcal{G}_t$-t $\widetilde{\mathcal{G}}_t$-re és legyen $D_t = \mathbb{1}_{\{\inf_{s\le t-\delta} X_s>b\}}$, $Z_t = X_{t-\delta}$, ahol X egy diffúziós folyamat. Ekkor a hazárd-folyamat (eltekintve attól, hogy ez a folyamat talán eléri $+\infty$-t):

$$\Gamma_t = -\ln(D_t\Phi(Z_t,\delta,b)),$$

illetve igaz a következő egyenlőség:

$$\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{1}_{\{\widetilde{\mathcal{G}}_t>0\}} = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}},$$

ezért az ár:

$$D(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{1}_{\{G_t>0\}}\mathbb{E}(e^{\Gamma_t-\Gamma_T}|\widetilde{\mathcal{F}}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\frac{\mathbb{E}(D_T\Phi(Z_T)|\widetilde{\mathcal{F}}_t)}{\Phi(Z_T)},$$

ahol egyszerűsítettük a jelölést: $\Phi(Z_t) = \Phi(Z_t,\delta,b)$. A számlálót az X Markov-tulajdonsága miatt a következő alakra hozhatjuk:

$$\mathbb{E}(D_t\Phi(Z_T)|\widetilde{\mathcal{F}}_t) = D_t\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\inf_{t-\delta<s\le T-\delta} X_s>b\}}\Phi(X_{T-\delta}|\mathcal{F}_{t-\delta})) = D_t\mathbb{E}_{X_{t-\delta}}(D_{T-t}\Phi(X_{T-t})),$$

Ebből következik, hogy a kockázatos elemi kötvény ára:

$$D(t,T) = D_{t+\delta}\frac{\mathbb{E}_{X_{t-\delta}}(D_{T-t}\Phi(X_{T-t})}{\Phi(X_{t-\delta})}.$$

Például, ha X_t egy Brown-mozgás $X_t = x + B_t$, akkor láttuk az előző fejezetben, hogy a $\Phi(u,x) = \mathcal{N}(-x/\sqrt{u}) - \mathcal{N}(x/\sqrt{u})$. Ekkor a kockázatos elemi kötvény árának számlálója:

$$\mathbb{E}_{X_{t-\delta}}(D_{T-t}\Phi(X_{T-t})) = \Psi(T-t, X_{t-\delta}), \quad \textit{ahol}$$

$$
\begin{aligned}
\Psi(u,x) &= \mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{\{\inf_{s\leq u} X_s > b\}}\Phi(X_u,\delta,b)) = \\
&= \mathbb{E}_0(\mathbb{1}_{\{\inf_{s\leq u} B_s > b-x\}}\Phi(B_u+x,\delta,b)) = \\
&= \int_0^{x-b}\int_{-\infty}^{y} \frac{2(2y-v)\Phi(v+x,\delta,b)}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp - \frac{(2y-v)^2}{2u} dv dy.
\end{aligned}
$$

5.2. Mulasztási csereügylet (CDS)

A mulasztási csereügylet (Credit Default Swap - CDS) egy olyan pénzügyi termék, amely során a vevő biztosítást köt egy vállalatot érintő kockázati eseményre. A CDS kiírója prémiumért cserébe vállalja, hogy a csőd esetén a vevő általbirtokolt névértéket megfizeti. Precízebben, legyen adott a T lejárat, $\kappa(t)$ díj és $\delta(t)$ megtérülés függvény. A (T, κ, δ) karakterisztikájú CDS egy olyan szerződés, ahol a védelem vevője κ díjat fizet a csőd bekövetkezéséig (vagy a lejáratig) és a csőd időpontjában $\delta(\tau)$ összeget kap a védelem eladójától. A CDS t időpontbeli ára a két láb értékének különbsége:

$$CDS(t,T) = \Pr ot_t - \Pr em_t = \mathbb{E}(\delta(\tau)\mathbb{1}_{\{t<\tau<T\}}|\mathcal{G}_t) - \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{t<\tau}\int_t^{\tau\wedge T}\kappa_s ds|\mathcal{G}_t\right).$$

Ha vesszük a túlélés-folyamat Doob-Meyer-dekompozícióját: $G = M - A$ és $dH - (1 - H)dA/G$ $\mathcal{G}$-martingált, a két láb értéke:

$$\Pr ot_t = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(\int_t^T \delta(s)dH_s|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}\mathbb{E}(\int_t^T \delta(s)dA_s|\mathcal{F}_t),$$

$$\Pr em_t = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(\int_t^T (1-H_s)\kappa_s ds|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}\mathbb{E}(\int_t^T \kappa_s e^{-\Gamma_s}ds|\mathcal{F}_t).$$

Ezekkel kifejezve a CDS ára:

$$CDS(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}\mathbb{E}(\int_t^T (\delta(s)dA_s - \kappa_s e^{-\Gamma_s}ds)|\mathcal{F}_t). \tag{5.2}$$

Először tegyük fel, hogy teljesül a martingál invariancia tulajdonság és a hazárd-folyamat felírható az $\mathcal{F}$-intenzitással: $\Gamma_t = \int_0^t \lambda_s ds$. Ekkor a formula:

$$CDS(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}(\int_t^T ds(\delta(s)\lambda_s - \kappa_s)\exp - \int_t^s \lambda_u du|\mathcal{F}_t).$$

Ha δ és κ konstansok (felhasználva, hogy Γ növekvő):

$$CDS(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\delta\mathbb{E}\left(1 - e^{-\int_t^T \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right) - \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\int_t^T \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^s \lambda_u du}|\mathcal{F}_t\right)ds =$$

$$= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\delta(1 - D(t,T)) - \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\kappa\int_t^T D(t,s)ds$$

és a díj, amely mellett a szerződés minden t-ben fair:

$$\kappa(t,T) = \delta(1 - D(t,T))/\int_t^T D(t,s)ds.$$

A kockázatos elemi kötvény árazásához kapcsolódó első példához hasonlóan használjuk a CIR-folyamatot, ekkor a CDS ára:

$$CDS(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}(\delta - \delta_\varphi(t,T,\lambda_t) - \kappa\int_t^T \varphi(t,s,\lambda_s)ds).$$

Szokásosan, ha $\mathcal{H}$-hipotézis nem áll fenn, a számolások sokkal bonyolultabbak és nincs egyszerű általános formula, mint az előző esetben. A harmadik fejezet eredményeit felhasználva, ha $\widetilde{G} = \widetilde{M} - \widetilde{A}$:

$$CDS(t,T) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\frac{\mathbb{1}_{\{\widetilde{G}_t>0\}}}{\widetilde{G}_t}\delta\mathbb{E}(\int_t^T d\widetilde{A}_s|\widetilde{\mathcal{F}}_t) - \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\frac{\mathbb{1}_{\{\widetilde{G}_t>0\}}}{\widetilde{G}_t}\kappa\mathbb{E}(\int_t^T \widetilde{G}_s ds|\widetilde{\mathcal{F}}_t).$$

Láttuk, hogy a túlélés-folyamat $\widetilde{G}_t = D_t\Phi(Z_t,\delta,b)$ és a $\Phi_s = \Phi(Z_s,\delta,b)$ egyszerűsített jelöléssel:

$$CDS(t,T) = \frac{D_{t+\delta}}{\Phi(Z_t,\delta,b)}\mathbb{E}(\int_t^T \delta D_s\partial_1\Phi_s\mu(Z_s)ds + \frac{\delta D_s}{2}\partial_{1,1}\Phi_s d\langle Z\rangle_s - \kappa D_s\Phi_s ds|\widetilde{\mathcal{F}}_t).$$

Például, ha X újra egy Brown-mozgás $X_t = x + B_t$, akkor:

$$CDS(t,T) = \frac{\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}}{\Phi(Z_t,\delta,b)}\mathbb{E}\left(\int_t^T D_s\left(\frac{\delta}{2}\partial_{1,1}\Phi_s ds - \kappa\Phi_s\right)ds\middle|\widetilde{\mathcal{F}}_t\right) =$$

$$= \frac{\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}}{\Phi(Z_t,\delta,b)}\mathbb{E}(\int_t^T \mathbb{1}_{\inf_{t<u\leq s} Z_u - Z_t > b - Z_t}(\frac{\delta}{2}\partial_{1,1}\Phi_s ds - \kappa\Phi_s)ds|\widetilde{\mathcal{F}}_t)$$

így az ár végül:

$$CDS(t,T) = \frac{\mathbb{1}_{t<\tau}}{\Phi(Z_t,\delta,b)}(\delta a(Z_t) - \kappa b(Z_t)), \quad \textit{ahol}$$

- $\Phi(x,u,b) = \mathcal{N}((x-b)/\sqrt{u}) - \mathcal{N}((b-x)/\sqrt{u})$,
- $\Phi_s^x = \Phi(X_{s-t} + x, \delta, b)$
- $a(x) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(\int_t^T \mathbb{1}_{\inf_{t<u\leq s} B_{u-t} > b-x} \partial_{1,1}\Phi_s^x ds)$
- $b(x) = \mathbb{E}(\int_t^T \mathbb{1}_{\inf_{t<u\leq s} B_{u-t} > b-x} \Phi_s^x ds)$.

6. fejezet

Árazás szimulációval

Az elmélet tárgyalásánál egyszerűsítés miatt nem vettük figyelembe a megtérülést, a szimuláció során viszont szeretnénk beépíteni a modellbe. Így a T lejáratú, diszkontált kockázatos kötvény ára t-ben a következőképpen írható fel:

$$D(t,T) = \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^{\tau} r_s ds}\delta_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} + (e^{-\int_t^{T} r_s ds}\mathbb{1}_{\{\tau > T\}}\right),$$

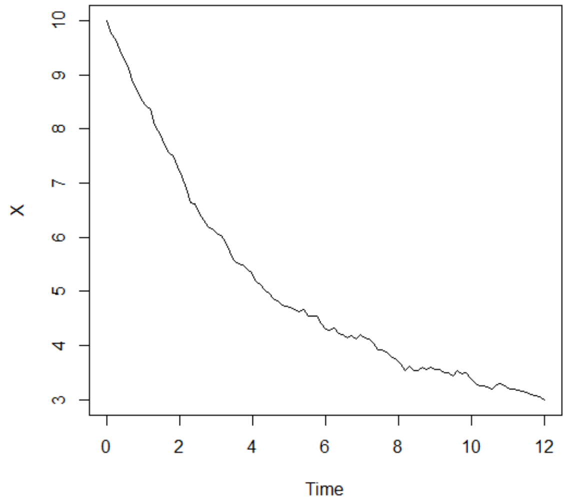
ahol δ_t a t-beli megtérülés.

Az előző fejezetben láttuk, hogy - bizonyos feltételek teljesülése mellett - az intenzitás dinamikájának választhatjuk a CIR-folyamatot:

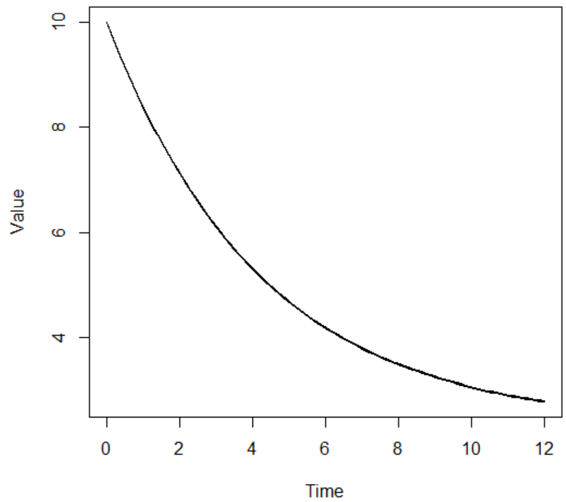
$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dB_t, \quad \text{ahol} \quad 2\kappa\theta > \sigma^2.$$

Monte Carlo szimuláció segítségével fogjuk legenerálni az árat, abban az esetben, amikor a kockázatmentes kamatláb és az intenzitás-folyamat dinamikája is CIR-folyamatot követ. A szimuláció során felhasznált paramétereket Duffie [12] eredményei alapján állítottuk be: $\kappa = 0.559, \theta = 0.238, \sigma = 0.074$.

6.1. ábra. CIR-modell



6.2. ábra. Intenzitás



Ebben az esetben az alacsony volatilitás ($\sigma = 0.074$) miatt a trend stabil marad. A CIR-folyamat és az intenzitás a hosszú távú átlaghoz közeledve csökken ($\theta = 0.238$). Egyértelmű, hogy minél nagyobbra választjuk a θ-t, annál gyorsabban közeledik hozzá az adott folyamat azaz annál kevesebb időt tölt az átmeneti állapotban. A paramétereket nem egyszerű beállítani, mivel ha túl nagyra választjuk a σ-t, nagyobbak lesznek a konfidencia intervallumok, illetve ha a θ-t túl kicsire, az instabilitáshoz vezet (mivel a CIR-folyamat sztochasztikus fele dominánsabbá válik).

A paraméterek megfelelő megválasztása után az **R** statisztikai programcsomag segítségével Monte-Carlo-szimulációval beárazzuk a kockázatos kötvényt az alábbi függvények létrehozásával:

1. Előállítjuk az előre megadott korrelációjú, normális eloszlású változókat:

```
CorrTwoVarsNormRand <- function(n, \textrho)
{ result <- matrix(0, nrow = n, ncol = 2)
 result[, 1] <- rnorm(n)
 result[, 2] <- rho * result[,1] + sqrt(1 - rho^2) * rnorm(n)
 result }
```

2. Megkonstruáljuk a CIR-modellt:

```
CIR <- function(k, theta, vola, dt)
{ function(x, dw)
 { x.sqrt <- ifelse(x >= 0, sqrt(x), 0)
   x + k * (theta - x) * dt + vola * x.sqrt * sqrt(dt) * dw }}
```

3. Készítünk egy trajektóriát:

```
CreateOnePath <- function(model, rand.numbers, init)
{ Reduce(function(x,y)model(x, y), rand.numbers, init,
  accumulate = TRUE)}
```

4. Értékeljünk ki egy trajektóriát:

```
EvaluateOnePath <- function(mma, index.default, dt)
{ size <- length(mma)
  if(index.default > size){mma[size]}
  else{mma[index.default] * (1 - L(index.default * dt))}}
```

5. Jelöljük meg a csődidőpontot:

```
DefaultIndex <- function(path.default, dt)
{ threshold <- rexp(1)
  path.default.cum <- cumsum(path.default) * dt
  default.points <- which(path.default.cum >= threshold)
  ifelse(length(default.points) > 0, min(default.points),
  length(path.default) + 1) }
```

A függvények elkészítése után már csak a megfelelő inputokkal meg kell hívni őket. Legyen a generált trajektóriák száma $N = 500$ és a T lejárat 2 év. Az intenzitás a már említett paramétereket kapja, de természetesen a kockázatmentes kamatláb egy másik CIR-modell dinamikáját követi.

A teljes programkód (a már megismert függvényekkel):

```
% inputok
T <- 2
rho <- 0.3
k.ir     <- 0.6
theta.ir <- 0.05
vola.ir  <- 0.05
init.ir  <- 0.05
k.default     <- 0.559
theta.default <- 0.238
```

```
vola.default  <- 0.074
init.default  <- 0.2
dt <- 1 / 250
L <- function(t){0.3}

%függvények meghívása
model.ir       <- CIR(k.ir, theta.ir, vola.ir, dt)
model.default  <- CIR(k.default, theta.default, vola.default, dt)
random.numbers <- CorrTwoVarsNormRand(N*T*250, rho)
random.number  <- matrix(random.numbers[, 1], nrow = N, ncol = T * M)
path.ir  <- t(apply(random.number, 1,function(x)CreateOnePath(model.ir, x,
init.ir)))
path.ir  <- path.ir[, -1]
mma      <- exp(- t(apply(path.ir, 1, cumsum) * dt))
random.number  <- matrix(random.numbers[, 2], nrow = N, ncol = T * M)
path.default   <- t(apply(random.number, 1, function(x)CreateOnePath
(model.default, x, init.default)))
path.default   <- path.default[, -1]
index.default  <- apply(path.default, 1, function(x)DefaultIndex(x, dt))
price   <- sapply(1:N, function(i)
EvaluateOnePath(mma[i, ], index.default[i], dt))
result  <- mean(price)
result
```

Végül a program eredménye:

```
> result
[1] 0.8521435
```

és az ábrákat előállító kódok:

```
% 6.1. ábra. CIR-modell

X0=10
N=100
t0=0
T=12
M=1
kappa=0.559
theta=0.238
sigma=0.074
library(sde)
sde.sim(X0=X0, N=N, M=M, t0=t0, T=T, theta=c(kappa, theta, sigma),
model="CIR") -> X
plot (X)

% 6.2. ábra. Intenzitás

X0=10
N=100
t0=0
T=12
M=1000
kappa=0.559
theta=0.238
sigma=0.074
library(sde)
sde.sim(X0=X0, N=N, M=M, t0=t0, T=T,
theta=c(kappa, theta, sigma),
```

```
model="CIR") -> X
dt=(T-t0)/N
X.mean = rowMeans(X)
X.sd = apply(X,1,sd)
plot(as.vector(time(X)),X.mean,type="l",xlab="Time",ylab="Value")
lines(as.vector(time(X)),X.mean + (1.96*X.sd)/sqrt(M))
lines(as.vector(time(X)),X.mean - (1.96*X.sd)/sqrt(M))
```

7. fejezet

Összefoglalás

A dolgozat elsődleges célja a legegyszerűbb kockázatos követelések (kockázatos kötvény, mulasztási csereügylet) árazási kérdéseinek tárgyalása volt redukált hitelkockázati modellek alapján. A dolgozat első felében bevezetett, általános árazási formulákat (IBPR-"Intensity based pricing rule", HBPR-"Hazard-based pricing rule") tovább specializáltuk a későbbi fejezetekben az éppen aktuális feltételrendszer mellett (progresszíven bővített filtráció, késleltetett információ).

Az árazás megfelelő megalapozásához szükség volt a matematikai keretrendszer alapos meggondolására, elsősorban a filtráció és a τ csődidőpont megfelelő megválasztására. Többek között bebizonyítottuk, hogy ha a τ kezdeti idő vagy honest idő, teljesül a $\mathcal{H}'$-hipotézis és eljutunk a piaci teljességhez, ahol a diszkontált eszközárak szemimartingálok. Megmutattuk, hogy ha az ennél erősebb feltétel, a $\mathcal{H}$-hipotézis is teljesül, akkor a piacon mindenki számára elérhető adatokra épülő hazárd-folyamattal egyszerűen kifejezhető az intenzitás és ezzel együtt a kockázatos követelések ára.

A hiányos információra épülő modelleknél láttuk, hogy ha az eredeti modellben a τ csőd kezdeti idő volt, akkor a redukált modellben is az lesz és öröklődnek a korábban tárgyalt kellemes tulajdonságok. A késleltetett információs modell intenzitását kifejeztük az Aven-lemma és folytonos Markov-folyamatok (illetve diffúziós folyamatok) segítségével. Kiszámoltuk, hogy a túlélés-folyamat ebben az esetben már nem lesz csökkenő, ezért a vizsgált hipotézisek már nem igazak.

Az utolsó előtti fejezetben rátértünk a kockázatos követelések - a kockázatos kötvény és a mulasztási csereügylet (Credit default swap - CDS) - árazásának részleteire. Külön vizsgáltuk azokat az eseteket, ahol igaz a martingál invariancia tulajdonság (ekkor az intenzitás dinamikáját CIR-folyamattal írtuk le) és amikor nem teljesül (késleltetett információra épülő Brown-mozgás). A dolgozat végén ismertettünk egy könnyen paraméterezhető, R programcsomagban készített Monte-Carlo-szimulációt mutatunk be a diszkontált kockázatos kötvény árának kiszámításához.

Irodalomjegyzék

[1] Gerard Awanou. Modelling credit risk, University of Georgia, 2002.

[2] Jennie Bai, Pierre Collin-Dufresne, Robert S. Goldstein and Jean Helwegey. Is Credit Event Risk Priced?, 2012.

[3] Terje Aven. A theorem for determining the compensator of a counting process. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12(1): 69-72., 1985.

[4] Alain Bélanger, Steven E. Shreve and Dennis Wong. A General Framework for Pricing Credit Risk, 2003.

[5] Tomasz Bielecki, Monique Jeanblanc and Marek Rutkowski. Credit risk, 2006.

[6] Tomasz Bielecki, Marek Rutkowski. Credit risk modelling: Intensity based approach, *Handbook in Mathematical Finance: Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*, University Press, 2000.

[7] Damiano Brigo, Aurélien Alfonsi. Credit default swap calibration and derivatives pricing with the SSRD stochastic intensity model, *inance and Stochastics, Vol. 9, Issue 1*: 29–42, 2005.

[8] Christophette Blanchet-Scalliet and Monique Jeanblanc. Hazard rate for credit risk and hedging defaultable contingent claims.*Finance Stochast.*, 8:145-159., 2004.

[9] Delia Coculescu, Ashkan Nikeghbali. Hazard processes and martingale hazard processes, *Mathematical Finance/8*, 2008.

[10] Claude Dellacherie. Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972.

[11] Claude Dellacherie, Paul-André Meyer. A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus, *Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Mathematics 649*: 70-77, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.

[12] Gregory Duffie. Estimating the Price of Default Risk, *The Review of Financial Studies, Vol. 12, No. 1*: 197-226, 1999.

[13] Darrell Duffie, Mark Schroder and Costis Skiadas. Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty, *The Annals of Applied Probability, Vol. 6, No. 4*: 1075–1090, 1996.

[14] Robert J. Elliott, Monique Jeanblanc and Marc Yor. On Models of Default Risk. *Mathematical Finance*, 10(2), 2000.

[15] Abel Elizalde. Credit risk models III: Reconciliation reduced - structural models, Working paper, CEMFI.

[16] Kay Giesecke. Default and information, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Cornell University, 2001.

[17] Kay Giesecke and Lisa R. Goldberg. The market price of credit risk, Cornell University, 2005.

[18] Xin Guo and Yan Zeng. Intensity process and compensator: A new filtration expansion approach and the Jeulin–Yor theorem, *The Annals of Applied Probability, Vol. 18, No. 1*: 120–142, 2008.

[19] Monique Jeanblanc, Yann Le Cam and Université D'évry Val D'essonne. Reduced form modelling for credit risk, 2007.

[20] Monique Jeanblanc and Yann Le Cam. Progressive enlargement of filtrations with initial times. *Stochastic Processes and their Applications*, 119(8), 2523–2543., 2009.

[21] Monique Jeanblanc and Marek Rutkowski. Default Risk and Hazard Process. *Mathematical Finance*, Bachelier Congress 2000, Springer Finance, 281-312., 2002.

[22] Pavel V. Gapeev, Monique Jeanblanc. On filtration immersions and credit events, *CDAM Research Report*, 2008.

[23] Kay Giesecke. Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction, Cornell University, 2004.

[24] Xin Guo, Robert A. Jarrow and Yan Zeng. Credit Risk Models with Incomplete Information, 2008.

[25] J. Jacod. Grossissement initial, hypothése ($\mathcal{H}'$) et théorém Girsanov, *In Séminaire de Calcul Stochastique 1982-83(1118) of Lecture Notes in Maths*, Springer-Verlag, 1987.

[26] Thierry Jeulin, Marc Yor. Grossissement d'une filtration et semi-martingales : formules explicites, *Séminaire de probabilités de Strasbourg(12) of Lecture Notes in Maths*:78-97., 1978.

[27] David Lando. Credit risk modelling: Theory and applications, Princeton University Press, 2004.

[28] David Lando. On Cox processes and credit risky securities, *Review of Derivatives Research*, 2:99-120, 1998.

[29] Libo Li, Marek Rutkowski. Progressive enlargements of filtrations and semimartingale decompositions, University of Sydney, 2006.

[30] Peter Ouwehand. Enlargement and Filtrations - A Primer.

[31] Philip E. Protter. Stochastic Integration and Differential Equations, Springer, 2004.