

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Mándli Anna

**OPTIMALIZÁLÁSI PROBLÉMÁK A HÁROMDIMENZIÓS
VLSI HUZALOZÁSBAN**

MSc Szakdolgozat

Témavezető:

Kiss Attila

Számítógéptudományi Tanszék



Budapest, 2015

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozok témavezetőmnek, Kiss Attilának, hogy bátorított a dolgozat elkészítésében, és felmerülő kérdéseimre bármikor szakszerűen válaszolt.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. A VLSI huzalozás fázisairól röviden	6
3. A kétdimenziós huzalozási feladatokról	8
3.1. Egysoros huzalozás	10
3.1.1. Egysoros huzalozás két rétegű Manhattan-modellben	10
3.2. Csatornahuzalozás	12
3.3. Switchbox huzalozás	13
3.4. Gamma huzalozás	14
4. Háromdimenziós huzalozási feladatok	15
4.1. Definíciók	15
4.2. Egyetlen aktív réteg huzalozási feladat	16
4.3. Háromdimenziós csatornahuzalozás	17
4.4. Egyéb háromdimenziós problémák	18
5. Háromdimenziós gamma huzalozás	20
5.1. Háromdimenziós gamma huzalozás a kockában	20
5.1.1. Kétosztatú 3DGRP a kockában	21
5.1.2. Féloldali 3DGRP a kockában	22
5.1.3. Általános eset	24
5.2. Háromdimenziós gamma huzalozás négyzet alapú hasábon	25
5.2.1. $n=h$ eset	25
5.2.2. $h=w$ eset	30
6. Összegzés	35

1. fejezet

Bevezetés

A nagyon nagy méretű integrált áramkörök (*Very Large Scale Integrated Circuits*, rövidítve VLSI) tervezése egy olyan terület, amelyben igen széles körben alkalmazható a kombinatorikus optimalizálás. Az utóbbi évtizedek gyors technikai fejlődését követve nagyon sok matematikai probléma is adódott e téren. Rengeteg eredmény született az egyes huzalozások konkrét megvalósítási módszereiről, illetve ezeknek a feladatoknak a bonyolultságáról. A témában sok problémáról ismert, hogy NP-teljes, viszont a megoldás heurisztikus módszerek segítségével jól közelíthető.

A VLSI rövidítés az ilyen áramkörök tervezésénél felmerülő igen sokféle problémára utal. A huzalozás fázisairól ad egy rövid áttekintést a 2. fejezet. A dolgozatban ezek közül a *részletes huzalozással* foglalkozunk. Ebben a fázisban egy huzalozási lap szélén található kivezetések (*terminálok*) meghatározott részhalmozait (*neteket*) kell huzallal összekötnünk. A különböző nethez tartozó huzalok technikai okokból nem metszhetik egymást, sőt bármilyen közel sem haladhatnak egymáshoz. Ezért a huzalozást leggyakrabban egy háromdimenziós kockarácson szokás megvalósítani. Az itt felmerülő gráfelméleti probléma tehát pontdiszjunkt Steiner-fák keresése ebben a kockarácásban.

A 3. fejezetben a kétdimenziós huzalozás klasszikus feladatait, és az ezekkel kapcsolatos fontosabb eredményeket tekintjük át. Kétdimenziós huzalozás esetén a terminálok egy téglalap oldalain helyezkednek el. Aszerint, hogy a téglalap melyik oldalain találhatóak ezek a terminálok, különböző feladatokat kapunk. A dolgozatban szó esik az egysoros, a csatorna, a switchbox és a gamma huzalozásról.

A 4. fejezetben áttérünk a háromdimenziós huzalozási problémák ismertetésére. Említjük az *egyetlen aktív réteg* feladatot, amikor egy téglalapon helyezkednek el a terminálok, és a cél, hogy a huzalozáshoz minél kevesebb vízszintes réteget használjunk. Ez után a *há-*

háromdimenziós csatornahuzalozás feladról és a megoldásával kapcsolatos eredményekről írunk. Ekkor a terminálok két párhuzamos téglalapon találhatók, és ismét minél kevesebb rétegen szeretnénk megvalósítani a huzalozást. Végül röviden összefoglaljuk, hogy milyen háromdimenziós problémákat ismerünk még.

A dolgozat lényegi része az 5. fejezetben található, és a *háromdimenziós gamma huzalozással* kapcsolatos. Ebben az esetben a terminálok egy téglatest két szomszédos oldalán helyezkednek el. (Ezeket *déli* és *nyugati* síkoknak fogjuk hívni.) A huzalozás megvalósításakor cél, hogy a megoldás minél kisebb *felosztáson* történjen, azaz a huzalozáshoz használt rácsot minél kevesebbel kelljen növelnünk.

Ennek a problémának a kockában való megoldására ismertetünk egy algoritmust, illetve adunk egy újat, ami kicsit kisebb felosztáson oldja meg a feladatot. Ezek után a háromdimenziós gamma huzalozás általános esete felé haladva algoritmusokat adunk a feladat négyzet alapú hasábon való megoldására. Ennek két esetét különböztethetjük meg aszerint, hogy a terminálok a hasáb mely oldalain vannak.

2. fejezet

A VLSI huzalozás fázisairól röviden

Egy áramkör megtervezésekor tulajdonképpen az a feladat, ha nagyon leegyszerűsítve fogalmazzunk, hogy vannak bizonyos áramköri elemek, amiknek adott kivezetéseit össze kell kötnünk egymással. Az alkatrészeket összekötő huzalok azonban technikai okokból nem haladhatnak egymáshoz tetszőlegesen közel. A célunk általában a minél helytakarékosabb megoldás: minél rövidebb huzalokkal, minél kisebb területű/térfogatú helyen szeretnénk megoldani a huzalozást.

Egy áramkör tervezésekor rengeteg követelménynek kell megfelelnünk, rengeteg változó szerint kell optimalizálnunk. A feladatot egészében megfogalmazni és megoldani tehát szinte reménytelen. Hogy kezelhetővé tegyük, szokás szétbontanunk a problémát fázisokra.

Az első az elhelyezési (*placement*) fázis, amikor a megtervezendő áramkör elemeit elhelyezzük a lapon. Ekkor még nem tudjuk, hogyan fognak futni a huzalok, ezért heurisztikus módon szokás valamilyen költséget hozzárendelni az egyes elhelyezésekhez, és erre a költségfüggvényre optimalizálni. Ilyen algoritmust ismertet a [5] cikk.

A második fázis a globális huzalozás (*global routing*), amikor a huzalok hozzávetőleges útját határozzuk meg. (Tehát olyasmiket, hogy az egyes elemek alatt, vagy felett haladjanak el.) Ez akkor hasznos, hogyha az áramköri elemek felbonthatók kisebb csoportokra, és a cél kitalálni, hogy a csoportok között hogyan helyezkedjenek el a huzalok.

A huzalozás következő fázisa a részletes huzalozás, amikor az áramköri elemeket már elhelyeztük a lapon, és már csak a huzalok konkrét útvonalát kell meghatározni. A szakdolgozat lényegi része ezzel a fázissal kapcsolatos, ezért a következő fejezetekben külön-külön tekintjük át a részletes huzalozás kétdimenziós és háromdimenziós eseteiben felmerülő problémákat.

Ez után még következhet a tömörítés (*compaction*), amikor az algoritmusainkkal elké-

szített huzalozást megpróbáljuk még jobban lekicsinyíteni.

Egy másik eljárás, hogy felbontjuk az áramkört több részre (mielőtt megkezdénénk a huzalozást, vagy egy fázison belül), és a részeket külön vizsgáljuk. Erre több különböző úgynevezett áramkör particionáló (*circuit partitioning*) algoritmus létezik.

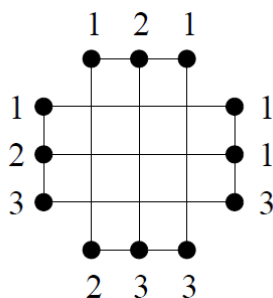
3. fejezet

A kétdimenziós huzalozási feladatokról

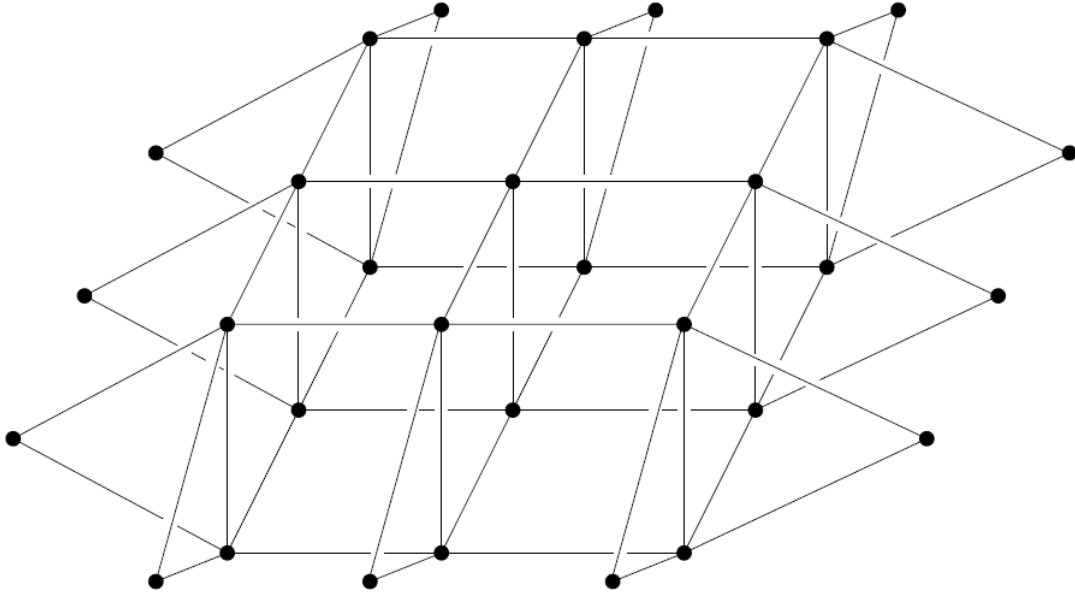
A kétdimenziós huzalozási feladat esetén képzeljük el egy téglalap alakú áramköri lapot, amelynek a szélein vannak az alkatrészek kivezetései, a terminálok. Ezeknek bizonyos előre meghatározott részhalmazait (*netjeit*) szeretnénk huzalokkal összekötni. A huzalok technikai okokból nem metszhetik egymást. Sőt mi több, bizonyos távolságnál közelebb nem is haladhatnak egymáshoz, ezért érdemes úgy tekintenünk, hogy a huzalok csak egy adott négyzetrács egyenesein haladhatnak.

Ilyen feladatból könnyen el tudunk képzelni olyat, ami nem oldható meg egy síkrácson (3.1. ábra), ezért szükség lesz az eredeti rács fölött több rétegre, a feladatot tehát tulajdonképpen egy kockarácson oldjuk meg. Ez a gyakorlatban régebben úgy valósult meg, hogy a nyomtatott áramkörök két oldalán futhattak a huzalok, és a lapba fúrt furaton csatlakozhattak egymással. Ma a technikai fejlődésnek köszönhetően egyre több réteg állhat rendelkezésünkre. Minden esetre a huzalozási feladatoknál gyakran az a cél, hogy

3.1. ábra. **Egy VLSI huzalozási feladat, amely nem oldható meg síkban.** Az azonos számmal jelölt terminálok tartoznak egy nethez. A netek nem köthetők össze a rendelkezésre álló síkon, azonban két rétegen megvalósítható a huzalozás. [6]



3.2. ábra. Egy kétrétegű derékszögű rácsgráf, $w = h = 3$. [6]



minél kevesebb rétegen találjunk megoldást.

A probléma precíz megfogalmazásában egy rácsgráfot kell definiálnunk, amin a feladatot megoldjuk:

3.0.1. Definíció. (k-rétegű derékszögű rácsgráf) Az $\{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, w\} \times \{1, \dots, k\}$ halmaz legyen egy gráf csúcshalmaza, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy koordinátában térnek el és abban éppen eggyel. Vegyünk fel egy-egy új t_{ij} csúcsot minden olyan (i, j) párra, amelyre

- $i = 1$ vagy $i = h$ és $j = 1, \dots, w$; vagy
- $j = 1$ vagy $j = w$ és $i = 1, \dots, h$.

A t_{ij} csúcsot kössük össze minden (i, j, l) csúccsal, ahol $l = 1, \dots, k$. Az így keletkezett G_k gráf termináljai a t_{ij} csúcsok. A rács szélessége w , hosszúsága pedig h .

3.0.2. Definíció. Ha adott egy derékszögű rácsgráf, ebben netnek nevezzük a terminálok egy részhalmazát. Huzalozási probléma alatt páronként diszjunkt netek egy $N = \{N_1, \dots, N_n\}$ halmazát értjük.

3.0.3. Definíció. Legyen adott az $N = \{N_1, \dots, N_n\}$ huzalozási probléma. Ennek egy k -rétegű megoldása a G_k derékszögű rácsgráf páronként csúcdiszjunkt, összefüggő részgráfjainak $H = \{H_1, \dots, H_n\}$ halmaza úgy, hogy $N_i \subset V(H_i)$, vagyis H_i összeköti az N_i -hez tartozó terminálokat.

A huzalozási feladatok megoldásának egy típusa a *Manhattan-modell*, ami azt jelenti, hogy az egymást követő rétegeken felváltva csak függőleges, vagy csak vízszintes huzalrészek futnak. Az elnevezést természetesen Manhattan rácsszerű utcahálózata ihlette.

3.1. Egysoros huzalozás

Az egyik legegyszerűbb huzalozási feladat az *egysoros huzalozás*. A terminálok ekkor a kockarácsnak csak egy oldalán helyezkednek el. Az ilyen feladatoknál általában fix a rács hossza (n) és a rendelkezésre álló rétegek száma. Célunk a feladatot minél kisebb szélességű rácson megoldani.

Az ilyen típusú problémák közül csak egy klasszikus eredményt említünk példaként:

3.1.1. Egysoros huzalozás két rétegű Manhattan-modellben

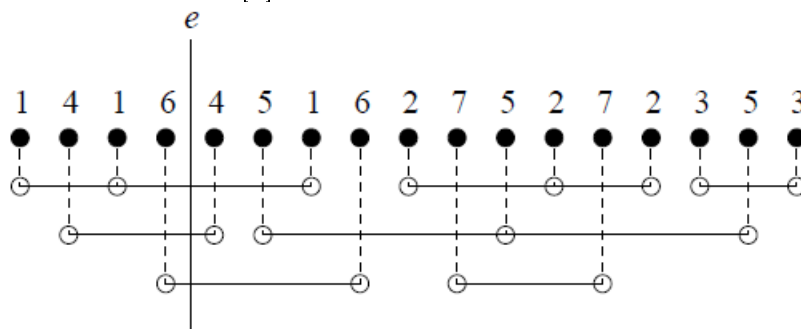
Tekintsünk tehát n terminált egy sorban. A huzalozást két rétegben valósíthatjuk meg, Manhattan-modellben, azaz az alsón csak függőleges, a felsőn csak vízszintes huzalrészek futhatnak. Erre a problémára ismertetünk az alábbiakban egy lineáris idejű algoritmust.

Nevezzük egy a feladatot kettévágó vízszintes e egyenes *terhelésének* ($t(e)$) azt a számot, ahány netet az egyenes kettévág. (Tehát ahány netnek van az egyenes mindkét oldalán terminálja.) Az egyenesek közt előforduló maximális terhelést nevezzük a feladat *sűrűségének*, legyen $d = \max_e t(e)$.

3.1.1. Tétel. (Gallai [2]) Egy egysoros huzalozási probléma kétrétegű Manhattan-modellbeli megoldásának minimális szélessége megegyezik a feladat sűrűségével. Ilyen szélességű huzalozás lineáris időben található.

Bizonyítás. A huzalozást úgy fogjuk megvalósítani, hogy minden netnek egy vízszintes huzalrésze lesz a felső rétegen, aminek a két végéhez az alsó rétegen huzalok vezetnek (3.3. ábra).

3.3. ábra. **Egysoros huzalozás két rétegű Manhattan-modellben.** [6] A szaggatott vonalak jelzik az alsó, a folytonosak a felső rétegen haladó huzalrészeket, a körök pedig az őket összekötő átmeneteket. [6]



Rendeljük hozzá minden nethez a legkisebb és a legnagyobb x koordinátájú terminálja által meghatározott intervallumot, ez lesz tulajdonképpen a vízszintes huzalrész. (x koordináta alatt azt értjük, hogy a terminál hanyadik a sorban.) A huzalozást elkészíthetjük egy mohó algoritmussal:

Vegyük sorra az intervallumokat kezdetük x koordinátájának sorrendjében, és készítsük el a huzalozásukat. Tegyük fel, hogy az első k net már kész. Ekkor a $k + 1$ -nek a vízszintes huzalrészét helyezzük el abban a sorban, ahova elfér, azaz ahol egy huzalt se metsz. Ha ilyen nincs, nyissunk neki új sort.

Tegyük fel, hogy az algoritmusunk r sorban oldja meg a feladatot. $r \geq \max_e t(e) = d$, mert azoknak a neteknek a vízszintes huzalrésze, amiket a maximumot adó egyenes kettévág, nem kerülhetnek egy sorba. És $r \leq d$, hiszen ha az algoritmus már nyitott r sort, és jön egy új intervallum, annak nem fog újat nyitni. Ha ugyanis ez az intervallum egyik sorba sem férne be, akkor lenne olyan egyenes, ami $r + 1$ intervallumot vág ketté. Tehát $r \leq d$.

Az algoritmus lineáris idejű: A terminálokra való egyszerű sorbamenéssel meghatározhatók a szükséges intervallumok. A huzalozás elkészítésekor számon tartjuk a szabad sorok listáját, azaz azokat a sorokat, amikben nem metszi az aktuális terminál oszlopát vízszintes huzalrész. Ezek után végigmegyünk jobbról balra a terminálokra. Ha olyanhoz érünk, ami egy net bal szélső terminálja, akkor a szabad sorok listájából választunk egy sort, töröljük a listából, és ide tesszük a vízszintes huzalrészét. Ha nincs szabad sor, nyitunk egy új sort. Ha olyan terminálhoz érünk, ami egy net jobb szélső terminálja, akkor a sort, amiben a net vízszintes huzalrésze haladt, visszaradjuk a szabad sorok közé. Így

tehát a terminálokon kétszer végigmenve elkészíthető a huzalozás. \square

A fenti bizonyításból egyébként az is kijött, hogy az intervallumgráfok perfektek. Hiszen képzeljük el a vízszintes szakaszokhoz tartozó intervallumok által meghatározott intervallumgráfot. Ennek a klikkszámát pont a maximális terhelés, és ennyi a kromatikus száma, hiszen a sorokba való rendezés egy színezésnek feleltethető meg, ahol egy sor egy színosztály.

Az egysoros huzalozásnak még több esete ismert, de ezekről itt nem szólunk, bár megjegyezzük, hogy a megszorítás nélküli 2-rétegű modellben például nem ismert polinomiális idejű algoritmus, ami megoldja a soros huzalozási feladatot optimális szélességgel.

3.2. Csatornahuzalozás

A huzalozási feladatnak azt az esetét, amelyben a terminálok a lapnak csak két szemben levő oldalán helyezkednek el, *csatornahuzalozásnak* nevezzük. A feladatunk megvalósítani a huzalozást fix számú rétegen, minél kisebb szélességben.

Tekintsünk egy k -rétegű Manhattan-modellbeli feladatot. Ekkor legyen a vízszintes huzalrészeket tartalmazó rétegek száma v , a függőlegeseket tartalmazóké f . (Természetesen $k = v + f$, és v és f legfeljebb eggyel tér el egymástól.) A terhelés és a sűrűség fogalma itt ugyanaz, mint a soros huzalozásnál.

3.2.1. Állítás. *Egy csatornahuzalozási feladat Manhattan-modellbeli megoldásának minimális szélessége legalább $\lceil \frac{d}{v} \rceil$.*

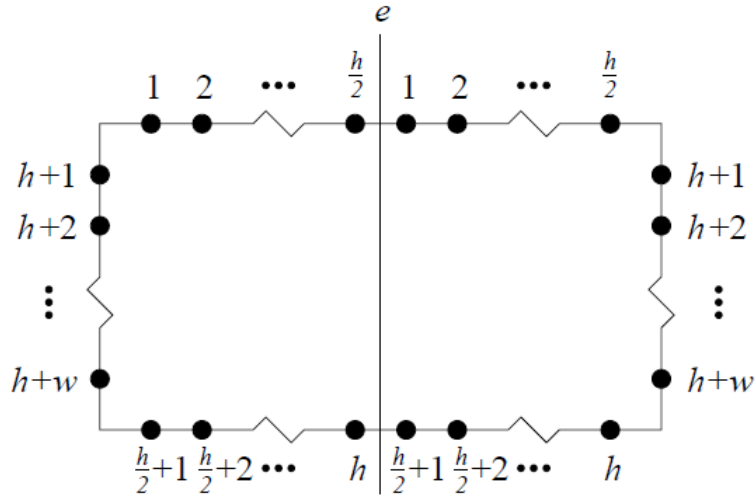
Bizonyítás. Ha van w szélességen megoldás, egy d terhelésű egyenest csak a vízszintes rétegek soraiban metszhetnek huzalszakaszok, és ilyen sorból vw van, ezért $vw \geq d$, amiből adódik az állítás. \square

3.2.2. Tétel. *Minden csatornahuzalozási feladat megoldható $\lceil \frac{d}{f-1} \rceil$ szélességben a Manhattan-modellben (ha $f \geq 2$). Emellett ilyen szélességű huzalozás található lineáris időben.*

A technika régebben csak két réteg használatát tette lehetővé, ezért a legtöbb eredmény a kétrétegű Manhattan-modellre vizsgálta.

3.2.3. Tétel. (Szymansky [13]) *NP-teljes annak az eldöntése, hogy egy csatornahuzalozási feladat megoldható-e legfeljebb k szélességben a kétrétegű Manhattan-modellben (ahol k része az inputnak).*

3.4. ábra. A 3.3.1. bizonyításhoz használt switchbox feladat. [6]



Mivel a probléma megoldása igen fontos, nagyon sok heurisztikus módszert fejlesztettek ki ezen a területen. Az egyébként nem megoldható feladatokat pedig üres oszlopok beszúrásával szokás megoldhatóvá tenni, így a cél az lehet, hogy minél kevesebb oszlopot szúrjunk be.

Megszorítás nélküli kétrétegű modellben viszont minden feladat megoldható:

3.2.4. Tétel. (Recski, Strzyzewski [10]) Minden csatornahuzalozási feladat lineáris időben megoldható a kétrétegű megszorítás nélküli modellben.

3.3. Switchbox huzalozás

Switchbox huzalozás esetén a téglalap mind a négy oldalán helyezkedhetnek el terminálok. Mivel a switchbox huzalozás a csatornahuzalozás egy általánosítása, ezért a megoldhatósága a 2-rétegű Manhattan-modellben szintén NP-teljes. A csatornahuzalozás megoldható volt viszont megszorítás nélkül két rétegen, itt azonban nem így van.

3.3.1. Tétel. (Hambrusch [3]) Tetszőleges k számhoz található olyan switchbox huzalozási feladat, amely nem oldható meg k rétegen a megszorítás nélküli modellben.

Bizonyítás. Tekintsük a 3.4. ábrán látható feladatot. Itt az e egyenes mind a $h + w$ netet kettéválasztja. Ezért k rétegű megoldás esetén teljesülnie kell, hogy $h \leq kw$. De adott k -hoz tudunk választani olyan h -t és w -t, hogy az egyenlőtlenség ne teljesüljön. \square

A téglalap oldalhosszainak és a feladat sűrűségének függvényében azonban megadható a megoldáshoz szükséges rétegek száma:

3.3.2. Tétel. (Szeszlér [9]) *Legyen egy switchbox huzalozási probléma hossza n , szélessége w , úgy, hogy $n \geq w$. Ekkor a Manhattan-modellben való megoldáshoz szükséges rétegek minimális száma $2\lceil \frac{d}{w} \rceil - 1$ és $2\lceil \frac{d}{w} \rceil + 4$ között van. $2\lceil \frac{d}{w} \rceil + 4$ rétegű megoldás található lineáris időben.*

3.4. Gamma huzalozás

A huzalozási feladat azon változatát, amelyben a terminálok a téglalap két szomszédos oldalán helyezkednek el, *gamma huzalozásnak* nevezzük. Mivel a feladat szélessége és hosszúsága fix, a cél itt is a rétegek számának minimalizálása.

A gamma huzalozás bonyolultsága nem ismert, bár egyes aleseiteire ismertek polinomiális algoritmusok. Ha például minden netnek legalább egy terminálja van mindkét oldalon, akkor a feladat megoldható kétrétegű Manhattan-modellben.

Arra az esetre, ha minden netnek csak két terminálja van, Wu és Jájá [14] ad a cikkében egy algoritmust, ami eldönti a megoldhatóságot, és megoldja a feladatot kétrétegű Manhattan-modellben, a netek számában lineáris időben. Az algoritmus egyébként a Gallai-algoritmus kibővítése.

Boros, Recski, Szkaliczki és Wettl cikkükben [1] általánosabb esetekre adnak megoldásokat.

4. fejezet

Háromdimenziós huzalozási feladatok

A huzalozási technológiák fejlődésének köszönhetően megjelentek a valódi háromdimenziós huzalozási feladatok. A soros huzalozás megfelelőjének tekinthetjük az egyetlen aktív réteg huzalozási feladatot, illetve szó lesz a csatorna és gamma huzalozás háromdimenziós verziójáról is. Ezekben az esetekben az optimális huzalozás meghatározásakor tulajdonképp csúcsdiszjunkt Steiner-fákat keresünk.

4.0.1. Definíció. (Steiner-fa probléma) Adott $G = (V, E)$ gráf. $T \subset V$ terminálok, $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény. Keressük azt az F fát, ami lefogja a terminálokat, és az éleinek összköltsége minimális.

Erről a problémáról tudjuk, hogy NP-teljes, de közelítő algoritmusok ismertek rá.

Az alábbiakban ismertetett feladatokat megoldó algoritmusok nem az optimális megoldást adják meg, hanem egy fix felosztás esetén megadnak egy huzalozást. Ezek a felosztások azonban még lehet, hogy javíthatók.

4.1. Definíciók

Háromdimenziós feladatok esetén általában egy $n \times h \times w$ méretű kockarácson dolgozunk, aminek az oldalain helyezkednek el a terminálok. A rácsot képzeljük el egy koordináta-rendszerben, az x tengely irányát nevezzük ezentúl n , az y tengely irányát h , a z tengely irányát w iránynak. n -egyenesnek fogjuk tehát hívni ezentúl az x tengellyel párhuzamos egyeneseket, n -síknak az x tengelyre merőleges síkokat, és így tovább.

A feladatok megoldásakor szükség lesz **felosztásokra**: n irányú s_n méretű felosztás esetén az eredeti rácsunk minden n -síkjá után beszúrunk $s_n - 1$ újat. Ugyanígy definiálhatjuk

a w és h irányú felosztásokat is.

Egy háromdimenziós huzalozási probléma **megoldása** s_n, s_h, s_w felosztás és $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$ netek esetén a $s_n n \times n_h h \times s_w w$ méretű kockarács $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ összefüggő részgráfjai lesznek, ahol teljesül, hogy $N_i \subset V(H_i)$, azaz a H_i összeköti az N_i net termináljait.

4.2. Egyetlen aktív réteg huzalozási feladat

Az egyetlen aktív réteg (*Single Active Layer*) huzalozási feladat (rövidítve SALRP) esetén tekintsünk egy $w \times n$ méretű síkrácsot. Ezen fognak elhelyezkedni a terminálok. A cél, hogy a huzalozást minél kevesebb rétegen, azaz minél kisebb h magasságú kockarácson valósítsuk meg. Könnyen elképzelhető olyan huzalozási feladat, ami így nem oldható meg, tehát szükség lesz felosztásokra.

4.2.1. Lemma. ([9]) Minden n -re és s_w -re létezik olyan SALRP, ami nem oldható meg $h = \frac{n}{2s_w}$ -nél kevesebb rétegen.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $w = 2a$ és $n = 2b$. Tekintsük a következő feladatot (4.1. ábra): Álljon minden net két terminálból, amik helyezkedjenek el az $n = b$ koordinátájú n -sík által elválasztott két félsíkon. s_w nagyságú w irányú felosztás esetén az $n = b$ koordinátájú n -sík kockarácsunkba eső részének területe $s_w w$. Mivel az an net mindegyikének van terminálja a sík mindkét oldalán, így legalább ennyi huzalnak kell áthaladni a síkon. Így adódik, hogy $s_w w h \geq an$, azaz $h \geq \frac{n}{2s_w}$.

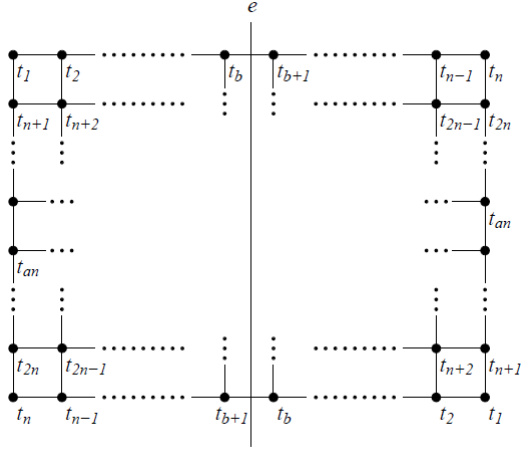
□

4.2.2. Lemma. ([9]) Ha $s_w \geq 2$ és $s_n \geq 2$, akkor minden SALRP megoldható $h = \frac{wn}{2}$ rétegen.

Bizonyítás. Rendeljünk minden nethez egy külön réteget, és a terminálokból vezessünk h irányú huzalrészeket a hozzájuk tartozó nethez rendelt rétegegig, ahol a felosztások miatt létrejött üres sorokban és oszlopokban összeköthetjük őket. A legalább két terminálból álló netek száma legfeljebb $\frac{wn}{2}$, tehát ennyi réteg elég lesz. □

4.2.3. Tétel. (Recski A., Szeszlér D. [11]) Ha egy SALRP minden netje két terminálból áll, akkor a netek feloszthatók $\lfloor \frac{3}{2}n \rfloor$ osztályba úgy, hogy minden osztály huzalozása külön-külön megoldható $s_n = \lceil \frac{w}{2n} \rceil$ felosztáson $h = 2$ rétegen.

4.1. ábra. A 4.2.1. bizonyításban konstruált SALRP alsó rétege. [9] Az e egyenes $n = b$ koordinátájú n -sík metszete az alsó réteggel.



4.2.4. Állítás. (Recski A., Szeszlér D. [11]) *Tegyük fel, hogy egy SALRP netjei feloszthatók h_1 osztályba úgy, hogy minden osztály huzalozása külön-külön megoldható $s_w = s'$ és $s_n = s''$ felosztásokon, $h = h_0$ rétegen. Ekkor az eredeti feladat megoldható $s_w = s' + 1$ és $s_n = s'' + 1$ felosztásokon, $h = h_0 h_1$ rétegen.*

4.2.5. Következmény. Ha egy SALRP minden netje két terminálból áll, akkor a huzalozás megvalósítható $s_w = s_n = 2$ felosztáson, $h = 3 \max(n, w)$ rétegen.

4.2.6. Tétel. (Recski A., Szeszlér D. [11]) *Minden SALRP megoldható $s_w = s_n = 2$ felosztáson, $h = 6 \max(n, w)$ rétegen, $O(t(w + n))$ időben, ahol t a netek száma.*

4.3. Háromdimenziós csatornahuzalozás

A két dimenziós csatornahuzalozási feladat háromdimenziós változatának tekinthetjük a háromdimenziós csatornahuzalozási problémát, röviden 3DCRP-t (*3-Dimensional Channel Routing Problem*). Ez esetben alul és felül két párhuzamos $w \times n$ méretű h -síkon helyezkednek el a terminálok, a feladat pedig ismét az, hogy minél kevesebb rétegen, azaz minél kisebb h magasságban kössük őket össze.

Kétosztatúnak hívunk egy feladatot, hogyha minden netjének két terminálja van, egy a felső, egy az alsó síkon.

4.3.1. Lemma. (Reiss A., Szeszlér D. [12]) *Ha $s_w \geq 2$ és $s_n \geq 4$, akkor minden 3DCRP megoldható $h = 6 \max(n, w)$ rétegen, polinomiális időben.*

Bizonyítás. Toljuk el a felső réteg termináljait 2 egységgel n irányban, és vetítsük le őket az alsó síkra. Így egy SALRP-t kaptunk, $s_w, s_n \geq 2$ felosztásokkal, ami a 4.2.6. tétel alapján megoldható $h = 6 \max(n, w)$ rétegen. Minden egyes terminál fölötti h -egyenest lefoglal egy-egy h -huzalrész, ez a megoldás módosítható úgy, hogy az eredeti 3DCRP feladat megoldását adja. \square

4.3.2. Tétel. (Reiss A., Szeszlér D. [12]) Minden kétosztatú 3DCRP megoldható $s_w = s_n = 2$ felosztáson, $h = 3 \max(n, w)$ rétegen.

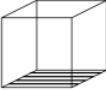
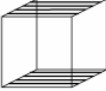
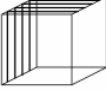
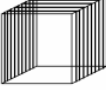
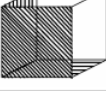
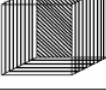

4.3.3. Tétel. (Reiss A., Szeszlér D. [12]) Minden 3DCRP megoldható $s_w = s_n = 2$ felosztáson, $h = 15 \max(n, w)$ rétegen.

Bizonyítás. Először tekintsük az alsó és felső rácsok termináljait úgy, mint két külön SALRP-ot. Ezeket oldjuk meg $s_w = s_n = 2$ felosztáson, $h = 6 \max(n, w)$ magasságban. Mivel a terminálok feletti h egyeneseket csak az adott net használja, felvihetjük a huzalt minden terminálból a SALRP huzalozás felső rétegére. Így a két SALRP között egy kétosztatú 3DCRP feladatot kaptunk, ami megoldható $s_w = s_n = 2$ felosztáson, $h = 3 \max(n, w)$ magasságban. Így összesen $h = 15 \max(n, w)$ réteget használtunk. \square

4.4. Egyéb háromdimenziós problémák

Ezekon kívül még elképzelhetünk olyan háromdimenziós huzalozási problémákat, amikor egy kockarács néhány megadott oldalán helyezkednek el a terminálok, amiket minél kisebb felosztásokon szeretnénk megoldani. Ezek áttekintésére szolgál a 4.2. táblázat, ami a problémák nevét és a kocka esetén ($s = w = h$ esetben) ismert legkisebb felosztás értékét adja meg. A problémák közül a háromdimenziós gamma huzalozást tárgyaljuk részletesen a következő fejezetben.

4.2. ábra. **Háromdimenziós huzalozási feladatok áttekintése. [8]** A táblázatban a probléma neve, a három irányú felosztás közül a legnagyobb értéke, és a probléma vázlatos rajza látható.

Single Active Layer Routing Problem (SALRP)		$s = 2$ [13]
3-Dimensional Channel Routing Problem (3DCRP)		$s = \max(\lceil \frac{n}{15} \rceil, 2)$ [12]
3-Dimensional Gamma Routing Problem (3DGRP)		$s = 9$ [7]
Saddle Routing Problem (SRP)		$s = 10$
Open Corner Routing Problem (OCRP)		$s = 10$
Closed Corner Routing Problem (CCRP)		$s = 15$
3-Dimensional Ring Routing Problem (3DRRP)		$s = 15$
3-Dimensional Open Switchbox Routing Problem (3DOSRP)	Terminals on five faces	$s = 19$
3-Dimensional Switchbox Routing Problem (3DSRP)	Terminals on all the faces	$s = 19$

5. fejezet

Háromdimenziós gamma huzalozás

A kétdimenziós esethez hasonlóan képzelhetjük el a háromdimenziós gamma huzalozási feladatot is (3-Dimensional Gamma Routing Problem, 3DGRP). Tekintsünk tehát egy $n \times h \times w$ méretű kockarácsot. Ennek két szomszédos oldalán fognak elhelyezkedni a terminálok. Legyen ez a két oldal az $n = 0$ koordinátájú függőleges sík, amit hívjunk nyugati síknak, és a $h = 0$ koordinátájú vízszintes sík, amit hívjunk déli síknak. A felosztások nélkül $(0, i, j)$ koordinátájú nyugati terminálokat jelöljük w_{ij} -vel, a $(i, 0, j)$ koordinátájú déli terminálokat pedig s_{ij} -vel.

A fejezetben ismertetjük az algoritmust, ami fix felosztáson megoldja a feladatot kocka esetén. Ez után majd ismertetünk néhány algoritmust négyzet alapú hasábon adott feladatok megoldására.

5.1. Háromdimenziós gamma huzalozás a kockában

A 3DGRP általános esetben nem oldható meg fix felosztásokon:

5.1.1. Állítás. ([7]) Minden s_n, s_h, s_w felosztásra létezik $n, h, és w, és egy ilyen méretű 3DGRP, ami nem oldható meg az adott felosztásokon.$

Bizonyítás. Legyen az egyszerűség kedvéért w páros. A 4.2.1. lemmához hasonló módon tekintsünk egy olyan feladatot, amikor minden net két terminálból áll. Helyezkedjenek el a terminálok úgy, hogy az egyik a $\frac{w}{2}$ koordinátájú w síknak az egyik, a másik a másik oldalán legyen. Ekkor ezen a síkon $\frac{w(h+n)}{2}$ huzal kell áthaladjon, a területe viszont $s_h s_n n$. Feltehetjük, hogy $n \leq h$. Ekkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk: $wn \leq$

$\frac{w(h+n)}{2} \leq s_h s_n n h$. Tehát $w \leq s_h s_n h$ -nak kell teljesülnie, de mivel a bal oldal nem függ w -tól, választhatjuk w -t akkorának, hogy ez ne teljesüljön a fix felosztásokra. \square

A feladat kockára megszorított változatára viszont létezik algoritmus fix felosztásokkal.

5.1.2. Tétel. (Kiss Attila [7]) *Legyen $n = h = w$. Ekkor minden $3D\Gamma RP$ megoldható $s_h = 5, s_n = 5, s_w = 10$ felosztásokon.*

Kiss Attila algoritmus a három lépésben oldja meg a feladatot: Nevezzük **kétsz-****tatúnak** a feladatot, ha minden netnek két terminálja van, egy a déli, egy a nyugati síkon. Ezt az esetet megoldja $s_h = 2, s_n = 3, s_w = 4$ felosztásokon.

Ez után jön a **féloldali** eset, amikor minden netnek több terminálja van a nyugati síkon, mint a délin (vagy fordítva). Ezt megoldja $s_h = 2, s_n = 5, s_w = 5$ felosztásokon, de a dolgozatban erre egy másik módszert ismertetünk, ami $s_h = 3, s_n = 4, s_w = 4$ méretű megoldást ad.

Észrevehetjük, hogy a feladat **általános** esete szétszedhető két féloldali feladatra, amiket külön-külön megoldva $s_h = 6, s_n = 8, s_w = 4$ felosztású általános megoldást kaphatunk (a fent említett második módszer esetén).

5.1.1. Kétszatatú $3D\Gamma RP$ a kockában

Ez esetben tehát minden net két terminálból áll, amik közül egyik a nyugati, másik a déli síkon helyezkedik el. Nevezzük diagonáloszlopoknak a ($s_h = 2, s_n = 3, s_w = 4$ felosztásokat figyelembe véve) $(3i - 1, 0, 4i)$ $i = 1 \dots n$ koordinátájú pont feletti függőleges oszlopokat. A huzalozás megvalósításakor mindkét terminálból el fogjuk juttatni a huzalt a déli terminál harmadik koordinátájának megfelelő diagonáloszlopba. Ehhez egy úgynevezett koordinátatáblát használunk, ami egy $n \times n$ -es mátrix, melynek minden eleme egy nethez tartozik:

$$ct_{ij} = (z_{ij}, \pi_j(i), \sigma_j(i))$$

Ebből z_{ij} a w_{ij} terminál déli párjának harmadik koordinátája. π_j és σ_j ($j = 1 \dots n$) pedig az $\{1, 2, \dots, n\}$ számoknak a permutációi. Ez esetben a σ_j permutációk tetszőlegesen lehetnek. A π_j permutációkra teljesülnie kell, hogy ha a mátrix két elemére $z_{ij} = z_{kl}$, akkor $\pi_j(i) \neq \pi_l(k)$ legyen. Ilyen π_j permutációkat tudunk választani a következő módon:

Feleljen meg egy páros gráf egyik pontosztálya a mátrix oszlopainak, a másik pontosztálya a lehetséges z értékeknek. (A dolgozat során többször lesz szó páros gráfokról,

ezeknek a pontosztályaira egyszerűség kedvéért hivatkozunk felső és alsó pontokként a későbbiekben.) Menjen él két pont közt, ha az adott oszlopban szerepel az adott érték. Ez egy n -reguláris gráf lesz, ami felbomlik n darab éldiszjunkt teljes párosításra. Legyen $\pi_j(i)$ értéke annyi, ahányadik párosításban választottuk ki a ct_{ij} -nek megfelelő élt.

Ezek alapján a déli sík azonos harmadik koordinátájú elemeit a velük egy síkban levő diagonáloszlop különböző magasságú pontjaiba fogjuk bekötni, ezeket a magasságokat határozza meg $\pi_j(i)$. A nyugati terminálokból pedig egy $\sigma_j(i)$ által meghatározott n -síkban visszük fel a huzalt a $\pi_j(i)$ által meghatározott magasságra, majd onnan tovább a diagonáloszlop n , majd w síkjáig.

Az algoritmus ezen része részletesen megtalálható Kiss Attila diplomamunkájában [7], illetve a 5.1. ábra lila részén is lényegében ez látható.

5.1.2. Féloldali 3DΓRP a kockában

Tekintsünk egy féloldali gamma huzalozási feladatot, azaz mondjuk legyen minden netnek legalább annyi terminálja a nyugati síkon, mint a délin. A feladatot vissza fogjuk vezetni egy kétosztatú feladatra. A déli termináloknak válasszunk párt a nyugatiak közül. Amelyik nyugati terminálnak nem jutott pár, annak jelöljük ki párnak egy üres helyet a déli síkról, azaz egy álterminált. Mivel a déli síkon lesz ennek elég hely [7], sikerült létrehoznunk egy kétosztatú feladatot.

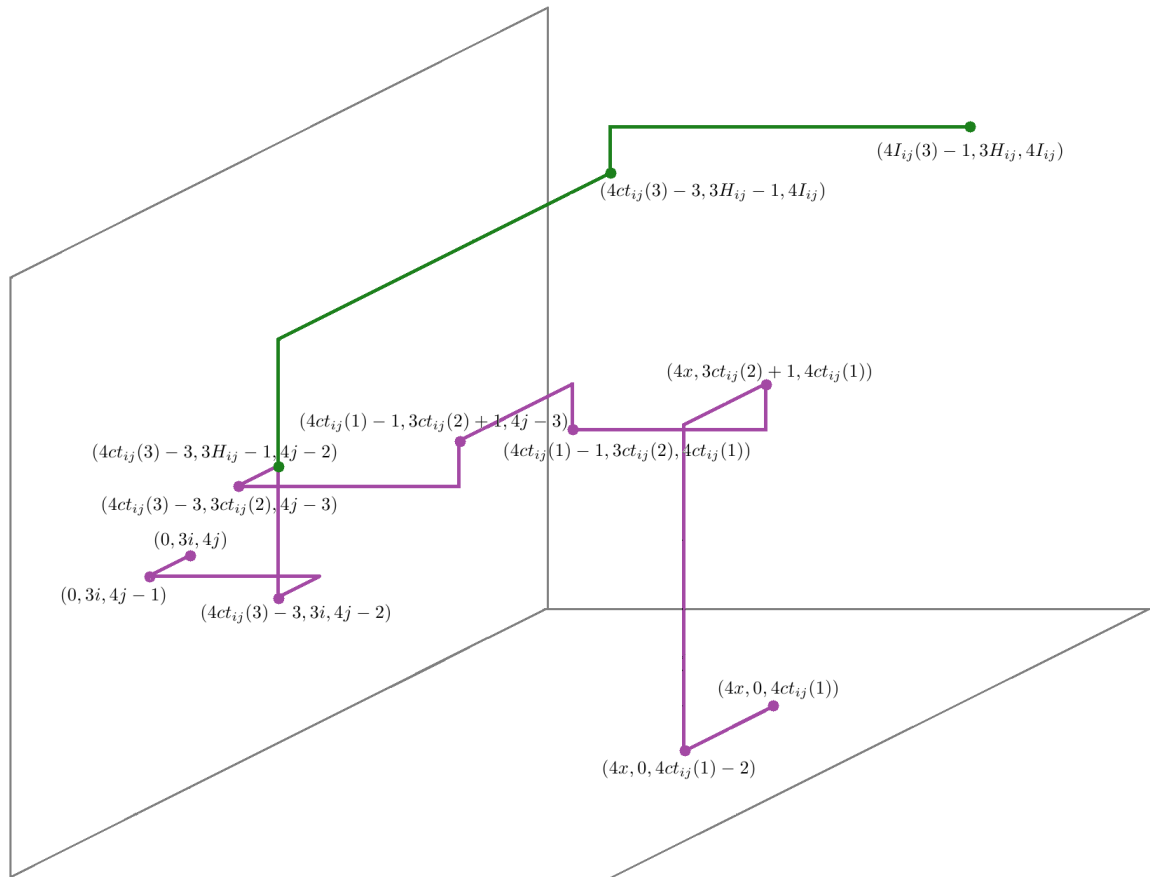
Első fázisként ezt a kétosztatú feladatot oldjuk meg, a második fázisban a diagonáloszlopok egy nethez tartozó pontjait kell összekötnünk.

A huzalozáshoz használt koordinátatábla ez esetben legyen a következő:

$$ct_{ij} = (z_{ij}, \pi_j(i), \sigma_j(i), H_{ij}, I_{ij})$$

A π_j permutációkat válasszuk meg ugyanúgy, mint eddig. Amikor a π_j -k már megvannak, már tudjuk, hogy a w_{ij} terminálból induló huzalt milyen magasra fogjuk bekötni a megfelelő diagonáloszlopba, szóval a $(4z_{ij} - 1, 3\pi_j(i), 4z_{ij})$ koordinátájú pontot kell majd valakivel összekötnünk a második fázisban. Ennek legyen a párja az a vele egy nethez tartozó $(4I_{ij} - 1, 3H_{ij}, 4I_{ij})$ koordinátájú pont, ahol (H_{ij}, I_{ij}) a $(\pi_j(i), z_{ij})$ után következik, ha a nethez tartozó ilyen koordinátákat ábécé sorrendbe rakjuk. (Vagy bármilyen sorrendbe.) A $(4I_{ij} - 1, 3H_{ij}, 4I_{ij})$ koordinátájú pontot hívjuk ezentúl x_{ij} -nek. A sorrend utolsó pontjának nem lesz párja, itt üresen hagyjuk a mátrixot. Így teljesülni fog, hogy a

5.1. ábra. **Féloldali gamma huzalozás a kockában.** A w_{ij} terminált az első fázisban összekötjük a párjával, a $(4x, 0, 4ct_{ij}(1))$ ponttal (lila huzal), majd a második fázisban a kapott huzalrészhez kötjük a nethez tartozó megfelelően választott diagonáloszlopbeli pontot (zöld huzal). A feltüntetett koordináták a hozzájuk legközelebb lévő megvastagított pontokhoz tartoznak.



táblázatban nem lesz két elem, amiknek ugyanaz az utolsó két koordinátája, azaz minden lehetséges H_{ij} érték legfeljebb n -szer szerepelhet.

Ezek után válasszuk meg a σ_j permutációkat úgy, hogy ha a mátrix két elemére $H_{ij} = H_{kl}$, akkor $\sigma_j(i) \neq \sigma_l(k)$ legyen. Ezt meg tudjuk csinálni, mert a π_j -k megválasztásánál használt páros gráfos indoklás itt is működik: Feleljenek meg a páros gráf felső pontjai a mátrix oszlopainak, az alsók a lehetséges H_{ij} értékeknek, közte az üresnek is, ez így $n + 1$ pont. Menjen él két pont közt, ha az adott oszlopban szerepel az adott érték. Átalakíthatjuk n -regulárisra a gráfot, ha az üreshez tartozó pontból átrakjuk az éleket azokhoz a csúcsokhoz, amiknek n -nél kisebb a fokszáma, így n -ed fokúvá egészítve ki őket. És akkor ebben a gráfban lesz n darab éldiszjunkt teljes párosítás, legyen $\sigma_j(i)$ annyi, ahányadik párosításban választottuk ki a ct_{ij} -nek megfelelő élt.

Az első fázisban készítsük el $s_h = 2$, $s_n = 3$, $s_w = 4$ felosztáson a kétosztatú huzalozást, aztán növeljük meg az n és h irányú felosztást eggyel. Legyenek a $4k - 2$ $k = 1..n$ koordinátájú n síkok és a $3k - 1$ koordinátájú h síkok az újonnan beszúrtak.

Második fázisként az x_{ij} pontot szeretnénk összekötni a w_{ij} terminálhoz tartozó nettel. A ponton áthaladó n egyenesen csak a netünkhöz tartozó huzal mehet, ezen induljunk el a pontból a $4ct_{ij}(3) - 2$ koordinátáig. Itt vigyük a huzalt egy egységet lefele, majd w irányban a $4j - 2$ koordinátáig, majd egy egységet n irányban visszafelé. Ezzel megérkeztünk a $(4ct_{ij}3 - 3, 0, 4j - 2)$ feletti oszlopba, amiben csak w_{ij} netjéhez tartozó huzalrész van, amivel összeköthetjük a huzalt.

Szóval az új huzalrészeink tulajdonképpen csak a $(4ct_{ij}(3) - 2, 3H_{ij} - 1, 4I_{ij})$ -ken áthaladó w irányú huzalrészek. Ezek a kétosztatú huzalozásnál használt huzalokat nem metszik, mert az újonnan beszúrt h és n síkokban vannak. Egymást pedig a $ct_{ij}(3)$ értékek megfelelő választása miatt nem fogják metszeni, mert minden nethez különböző ilyen w egyenes tartozik.

5.1.3. Általános eset

Ezek után könnyen megoldható a kockán való gamma huzalozás általános esete úgy, ha szétszedjük két féloldali feladatra. Azaz tartozzanak az egyik feladathoz azok a netek, amiknek több huzaljuk van a déli síkon, mint a nyugatin, a másik feladathoz pedig a többi net. Ezek után oldjuk meg az egyik feladatot $s_h = 3$, $s_n = 4$, $s_w = 4$ felosztáson, és szúrjunk be az eredeti n -síkok elé 4-4 újat, az eredeti h -síkok elé pedig 3-3 újat. Az így kapott $s_h = 6$, $s_n = 8$, $s_w = 4$ felosztáson oldjuk meg a másik féloldali feladatot,

azzal a különbséggel, hogy a déli terminálokat eltoljuk először n irányba 4 egységgel, a nyugatiakat h irányba hárommal.

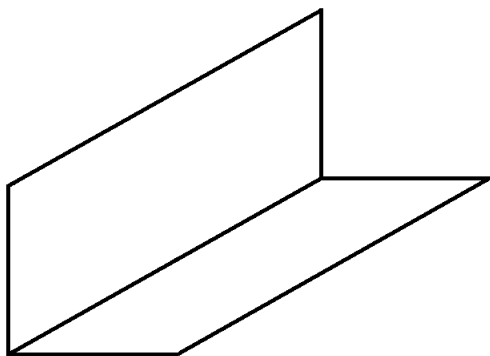
A fejezetben ismertettek alapján tehát kimondhatjuk a következőt:

5.1.3. Állítás. *Legyen $n = h = w$. Ekkor minden $3D\Gamma RP$ megoldható $s_h = 6$, $s_n = 8$, $s_w = 4$ felosztásokon.*

5.2. Háromdimenziós gamma huzalozás négyzet alapú hasábon

A kockán történő gamma huzalozás megoldása után magától értetődőnek tűnik az általános eset vizsgálata. Útban efelé azonban négyzet alapú hasábon történő gamma huzalozással foglalkozunk a dolgozat hátralevő részében. Ennek két változata lehet, aszerint, hogy a hasáb melyik oldalain vannak terminálok. Ezek a problémák nem oldhatók meg fix felosztásokon, de az alábbiakban adunk néhány algoritmust, amik a hasáb oldalainak arányával adott felosztáson működnek.

5.2.1. $n=h$ eset



Tekintsünk egy négyzet alapú hasábot, melyre $n = h$ és $w = Kn$, valamilyen K egészre. Ennek a déli és nyugati síkján legyenek a terminálok. Megjegyezzük, hogy az algoritmus bármilyen w esetén működik: képzeljük a hasáb után annyi üres w -síkot, hogy a mérete K -val osztható legyen, és oldjuk meg a feladatot így.

5.2.1. Állítás. *Minden adott felosztáshoz van olyan $3D\Gamma RP$, amire $n = h$ és $w = Kn$, és nem oldható meg a felosztáson.*

Bizonyítás. Nézzük a $w = \frac{Kn}{2}$ koordinátájú síkot. Ennek mindkét oldalán legyen Kn^2 terminál úgy, hogy minden terminál a párja a sík másik oldalán van. Ekkor Kn^2 huzalnak kell áthaladni ezen a síkon, ami s_h, s_n, s_w felosztások esetén $s_h s_n n^2$ területű. Ebből adódik, hogy $s_h s_n \geq K$ kell, hogy legyen. Szóval ha K -t megfelelően nagynak választjuk, a feladat nem oldható meg az adott felosztáson. \square

Kétosztatú eset

Az alábbiakban megadunk egy algoritmust, ami megoldja a kétosztatú feladatot $s_h = 2$, $s_n = K + 2$, $s_w = 4$ felosztásokon.

A huzalozáshoz egy a kockán való gamma huzalozás koordinátatáblájához hasonló fogunk létrehozni. A mátrix elemeinek négy koordinátája legyen a következő:

$$ct_{ij} = (z_{ij}, \pi_j(i), \sigma_j(i), s_{ij}),$$

ahol $i = 1..n, j = 1..Kn$.

Legyen $z_{ij} \in \{1, 2, \dots, Kn\}$ a felosztások nélkül $(0, i, j)$ koordinátájú nyugati terminál déli párjának a harmadik koordinátája. π_j és σ_j ($j = 1..Kn$) pedig az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok permutációi. A kockán való huzalozás esetéhez hasonlóan úgy kell megválasztanunk a π_j -ket, hogy ct azon elemeiben, ahol z_{ij} megegyezik, $\pi_j(i)$ legyen különböző.

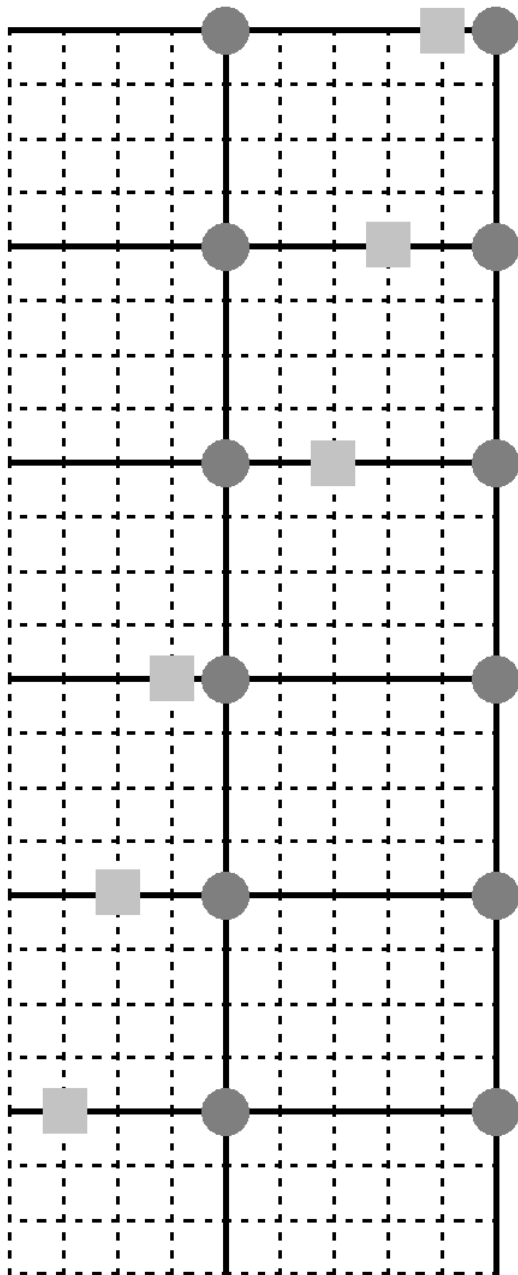
Hogy ezt meg tudjuk tenni, az is a kocka esetéhez nagyon hasonlóan látszik: Vegyünk egy páros gráfot, aminek az egyik pontosztálya a ct mátrix oszlopainak felel meg, a másik a lehetséges z értékeknek. Legyen él két pont közt, ha a megfelelő oszlopban szerepel a megfelelő z érték. Ekkor egy n -reguláris páros gráfot kaptunk, ami felbomlik n darab éldiszjunkt teljes párosításra. Válasszuk $\pi_j(i)$ -nek azt, hogy hanyadik párosításban választottuk ki a z_{ij} koordinátának megfelelő élt. A σ_j -k pedig itt is lehetnek tetszőleges permutációk.

A ct mátrix elemeinek negyedik koordinátája legyen $s_{ij} = z_{ij} \bmod K$.

Innentől használjuk az $s_h = 2$, $s_n = K + 2$, $s_w = 4$ felosztások szerinti koordinátákat. A huzalozás a kockához hasonlóan itt is azon alapul, hogy a net mindkét termináljából eljuttatjuk a huzalt egy adott függőleges oszlopba. A w_{ij} -hez tartozó net diagonáloszlopa legyen a $((K + 2) \lfloor \frac{z_{ij}-1}{K} \rfloor + s_{ij} - K - 1, 0, 4z_{ij})$ fölötti függőleges oszlop. (5.2. ábra)

A net $(0, 2i, 4j)$ koordinátájú nyugati termináljából induljunk el a huzallal egy egységet w irányban vissza, n irányban a $(K + 2)ct_{ij}(3) - K - 1$ koordinátáig, w irányban egyet vissza, majd fel a $2ct_{ij}(2)$ koordinátáig, w irányban egyet vissza, majd n irányban az

5.2. ábra. **Diagonáloszlopok** $n = h$ esetben. A példában $K = 3$, $n = 2$. Az ábrán a huzalozási feladat déli síkja látható, a folyamatos vonalak az eredeti rács részei, a szaggatottak az $s_n = 5$, $s_w = 4$ felosztás miatt beszűrt síkok részei. Az eredeti huzalok metszéspontjaiban levő szürke körök jelzik a terminálokat, a négyzettel jelölt rácsponatok koordinátái $(5 \lfloor \frac{z-1}{3} \rfloor + s - 4, 0, 4z)$, $s = 0 \dots 2$, $z = 1 \dots 6$. Az ezek feletti oszlopok lesznek a diagonáloszlopok.



diagonáloszlop síkjáig. Innen egy egységet visszük fel a huzalt, majd w irányban elvisszük a kijelölt oszlopig.

A déli terminál koordinátái legyenek $((K + 2)x_{ij}, 0, 4z_{ij})$ innen a következőképpen visszük a huzalt a diagonáloszlopba: megyünk két egységet w irányban vissza, innen h irányban $2ct_{ij}(2) + 1$ magassáig, majd két egységet w irányban előre, innen n irányban a kijelölt oszlopig.

Féloldali eset

A féloldali feladatot a kockához hasonló ötlettel tudjuk megoldani. Az első fázisban tehát vezessük vissza a feladatot egy kétosztatú feladatra álderminálok bevezetésével. A koordinátatábla itt a következő lesz:

$$ct_{ij} = (z_{ij}, \pi_j(i), s_{ij}, \sigma_j(i), l_{ij}, H_{ij}, I_{ij})$$

Itt minden korábban előfordult jelölés ugyanaz, mint ahogy eddig (a kétosztatú esetről, vagy a kockán történő féloldali huzalozásnál) definiáltuk, a $z_{ij}, \pi_j(i), s_{ij}, H_{ij}, I_{ij}$ értékeket tehát meg tudjuk határozni ugyanúgy. A H_{ij} értékeket a kocka esetéhez hasonló módon választhatjuk úgy, hogy minden érték legfeljebb Kn -szer szerepeljen a mátrixban. (És még lehetnek olyan helyek, amikre H_{ij} üres.)

A σ_j -k az $\{1, \dots, n\}$ elemek permutációi kell legyenek. Ezen kívül $l_{ij} \in \{1, \dots, n\}$, ezekre teljesülni kell, hogy ha a mátrix két elemére $H_{ij} = H_{kh}$ és $\sigma_j(i) = \sigma_h(k)$, akkor $l_{ij} \neq l_{kh}$, és ha $i > k$, akkor $l_{ij} < l_{kh}$

Ezeket az értékeket meg tudjuk választani a következő módon: vegyünk egy páros gráfot, melynek felső Kn pontja a mátrix oszlopainak, alsó pontjai pedig a lehetséges H_{ij} értékeknek felelnek meg. Ez az érték n féle lehet, feleltessünk meg minden értéknek K darab pontot, így az alsó pontosztály a következő halmaz: $\{1_1, \dots, 1_n, \dots, n_1, \dots, n_n\}$.

A gráf élei feleljenek meg a ct mátrix elemeinek. A ct_{ij} elemhez tartozó él kösse össze az elem oszlopát (j -t) a H_{ij} értékének tetszőleges példányával. Így olyan páros gráfot kapunk, amiben minden pont foka legfeljebb n lesz. Ezt kiegészíthetjük n -regulárisra. És akkor ez a gráf felbontható n darab éldiszjunkt teljes párosításra. Legyen $\sigma_j(i)$ értéke az, hogy hanyadik párosításban választottuk ki a neki megfelelő élt.

Így olyan σ_j permutációkat sikerült választanunk, amikre az is teljesül, hogy minden lehetséges $(H_{ij}, \sigma_j(i))$ érték pontosan K -szor fordul elő. A H_{ij} érték minden K példányából kijövő élek közül egyet választunk ugyanis a $\sigma_j(i)$ értékének megfelelő párosításba. Ezért

meg tudjuk választani az l_{ij} értékeket a kívánalmaknak megfelelően: a $(H_{ij}, \sigma_j(i))$ értékpár K előfordulását tekintsük oszlopok szerinti sorrendben, és ezek kapják meg sorban a $K, \dots, 1$ értékeket.

Ha kész a koordinátatábla, készítsük el a kétosztatú feladat huzalozását $s_h = 3$, $s_n = K + 2$, $s_w = 4$ felosztáson, az előző részben ismerttetett módon, majd szűrjünk be az eredeti n -síkok után kettővel K újat. Azaz az új n -síkok legyenek a $k(2K + 2) + 2, \dots, k(2K + 2) + K + 1$ első koordinátájúak $k = 1 \dots n$.

Ezek után következik a második fázis, $s_h = 3$, $s_n = 2K + 2$, $s_w = 4$ felosztáson. Ekkor az eddig elkészült netet összekötjük a $(0, 3H_{ij}, 4I_{ij})$ koordinátájú ponton áthaladó n -egyenessel. Induljunk ki tehát az eddigi netünk $((2K + 2)\sigma_j(i) - 2K - 1, 0, 4j - 2)$ feletti h -huzalrészéből. Ebből $3H_{ij}$ magasságban induljunk el n irányba l_{ij} egységet.

Az újonnan beszűrt n -síkokban fogjuk tehát a huzalt elvinni a megfelelő w -síkiig. Az l_{ij} értékek megválasztása miatt egy adott h -sík minden w -egyenesében egy huzalt viszünk, és a növekvő sorrendjük miatt nem fogják metszeni ezeket a w huzalrészeket a hozzájuk vezető l_{ij} hosszú n -huzalrészek.

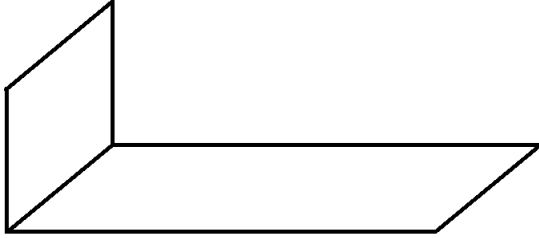
Ezek után pedig innen vigyük a huzalt w irányban $4I_{ij}$ koordinátáig, és itt egy egységet fel. Ezzel meg is érkeztünk a megfelelő n egyenesbe.

Általános eset

Az általános esetet most is szét tudjuk szedni két féloldali feladatra, és így a kockánál leírt módon $s_h = 6$, $s_n = 4K + 4$, $s_w = 4$ méretű megoldást kapunk, tehát:

5.2.2. Állítás. *Legyen $n = h$. Minden ilyen 3DΓRP megoldható $s_h = 6$, $s_n = 4K + 4$, $s_w = 4$ felosztásokon, ahol $K = \lceil \frac{w}{n} \rceil$.*

5.2.2. $h=w$ eset



Tekintsünk egy olyan gamma huzalozási feladatot, amire . Legyenek a terminálok a déli és a nyugati síkon. (A fentiekhez hasonlóan ez az algoritmus is használható lesz tetszőleges n -re.)

5.2.3. Állítás. *Minden adott felosztáshoz van olyan $3D\Gamma RP$, amire $h = w$ és $n = Kh$, és nem oldható meg a felosztáson.*

Bizonyítás. Nézzük a $n = \frac{(K-1)h}{2}$ koordinátájú síkot. Legyen ennek mindkét oldalán $\frac{(K+1)h^2}{2}$ terminál, a netek álljanak két terminálból, és legyen minden terminál a párja a sík másik oldalán. Ekkor $\frac{(K+1)h^2}{2}$ huzalnak kell áthaladni ezen a síkon, ami s_h, s_n, s_w felosztások esetén $s_h s_w h^2$ területű. Ebből adódik, hogy $s_h s_w \geq \frac{K+1}{2}$ kell, hogy legyen. Tehát megfelelően nagy K esetén nem oldható meg a feladat az adott felosztásokon. \square

Féloldali eset

A kockánál általános esetben szétszedtük a feladatot két féloldali feladatra. Ezt itt is megtehetjük, azonban a két feladat nem lesz azonos. Amikor a nyugati síkon van minden netből több terminál, akkor jut hely a délin áltermináloknak, és így a kocka esetéhez hasonlóan visszavezethetjük kétosztatú feladatra.

Abban az esetben, amikor a neteknek a déli síkon van több termináljuk, szintén csinálhatunk valami hasonlót. Válasszunk a nyugati síkon levő termináloknak egy-egy párt a déli síkon levő, velük egy nethez tartozó terminálok közül. Így még maradtak terminálok a déli síkon, amiknek nincsen párjuk. Ezeket a pár nélkül maradt terminálokat is be fogjuk kötni a diagonáloszlopokba, majd az algoritmus második fázisában kötjük őket onnan össze a megfelelő diagonáloszlopbeli elemekkel.

Most tehát a fentebb ismertetett kétféle féloldali esetet egy kalap alá vehetjük, csak az egyik esetben nem lesznek pár nélküli terminálok.

Az első fázishoz tegyük fel tehát, hogy vannak két terminálból álló netjeink, és esetleg pár nélküli terminálok a déli síkon. Itt is kellene fog egy koordináta tábla:

$ct_{ij} = (z_{ij}, k_{ij}, \pi_j(i), \sigma_j(i))$, $i = 1..h$, $j = 1..h$, ahol $(0, i, j)$ felosztás nélküli koordinátájú nyugati terminál párjának a koordinátái (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) , és $k_{ij} = \lceil \frac{x_{ij}}{K} \rceil$. $\pi_j(i)$ és $\sigma_j(i)$ az $\{1, 2, \dots, h\}$ számok permutációi. Teljesülnie kell, hogy ha a mátrix két elemére $z_{ij} = z_{kl}$ akkor $\pi_j(i) \neq \pi_l(k)$. A σ_j -k tetszőlegesen választott permutációk lehetnek.

Ahhoz, hogy megmutassuk, ilyen permutációk léteznek, és egyben meg is adjuk őket, képzeljünk el egy páros gráfot. A felső pontosztály pontjait alkossa Kh darab pont, amik közül az első h feleljen meg a koordináta tábla oszlopainak. Az alsó pontosztály Kh darab pontjának feleljenek meg az (z, k) párok, $z = 1..h$, $k = 1..K$.

Húzzunk be először olyan éleket, amik feleljenek meg a koordinátatábla egy-egy elemének. Egy adott elemnek megfelelő él kösse össze az elem oszlopának megfelelő felső pontot az első két koordinátájának megfelelő alsó ponttal. Ez így h^2 él, és a felső pontosztályban az oszlopoknak megfelelő pontok fokszáma h , a többié 0. Az alsó pontosztályban legfeljebb h a pontok fokszáma, mivel minden ilyen elem legfeljebb ennyi oszlopban szerepelhet.

Most húzzunk még be $(K-1)h^2$ új élt tetszőleges módon úgy, hogy a gráf h -reguláris váljon. A déli sík pár nélküli termináljainak feleltessünk meg éleket ezek közül úgy, hogy ha egy terminál koordinátái (x, y, z) , akkor legyen $k = \lceil \frac{x}{K} \rceil$, és a terminálhoz tartozzon egy olyan él, aminek az alsó pontja a (z, k) pár. Ezt így meg tudjuk tenni, hiszen legfeljebb $(K-1)h^2$ pár nélküli terminál lehet, és minden (z, k) érték legfeljebb h -szor fordul elő a mátrixban.

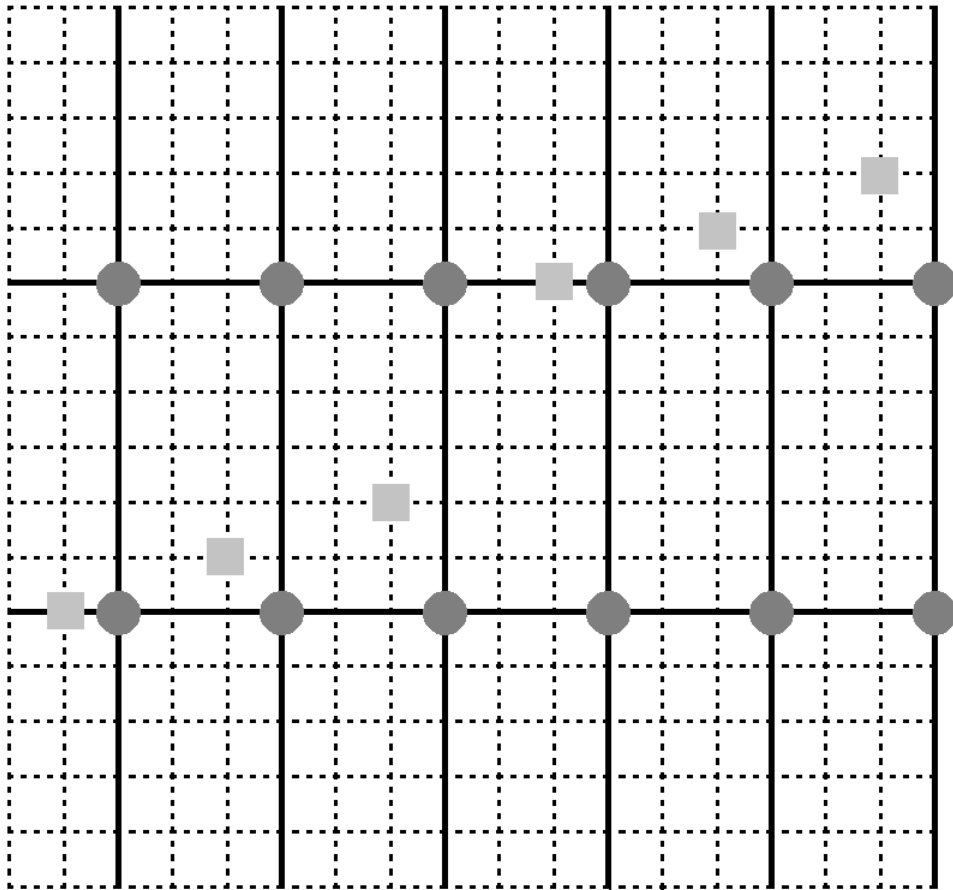
Így h -reguláris páros gráfot kaptunk, ami felbomlik h darab éldiszjunkt teljes párosításra. Legyen $\pi_j(i)$ az, hogy a ct_{ij} -nek megfelelő elem hanyadik párosításhoz tartozik. Jegyezzük meg a pár nélküli terminálokra is, hogy a nekik megfelelő él hanyadik párosításhoz tartozik, és mi a hozzájuk tartozó k érték.

Most készítsük el a huzalozást $s_h = 2$, $s_n = 3$, $s_w = K + 3$ felosztáson.

Nézzük $(0, 2i, (K+3)j)$ koordinátájú terminál párját, ennek a koordinátái $(3x_{ij}, 0, (K+3)z_{ij})$. Ehhez a nethez tartozzon a $(3((z_{ij}-1)K + k_{ij} - 1) - 1, 0, (K+3)z_{ij} + k_{ij} - 1)$ koordinátájú pont feletti oszlop. (5.3. ábra) Ezekre az oszlopokra gondoljunk ezentúl diagonáloszlopokként, ide fogjuk eljuttatni a huzalt minkét terminálból, és majd második fázisban fogjuk összekötni az egy nethez tartozó huzalrészeiket.

Első fázis: A nyugati, $(0, 2i, (K+3)j)$ koordinátájú terminálból a kockán történő

5.3. ábra. **Diagonáloszlopok** $h = w$ esetben. A példában $K = 3$, $h = 2$. Az ábrán a huzalozási feladat déli síkja látható, a folytonos vonalak az eredeti rács részei, a szaggatottak az $s_n = 3$, $s_w = 6$ felosztás miatt beszúrt síkok részei. Az eredeti huzalok metszéspontjaiban levő szürke körök jelzik a terminálokat, a négyzettel jelölt rácsponatok koordinátái $(3((z - 1)K + k - 1) - 1, 0)$, $(K + 3)z + k - 1$, $k = 1 \dots 3$, $z = 1, 2$. Az ezek feletti oszlopok lesznek a diagonáloszlopok.



huzalozással azonos módon juttassuk el a huzalt az oszlophoz. Azaz menjünk egy egységet w irányban vissza, n irányban a $3ct_{ij}(3) - 2$ koordinátáig, w irányban egyet vissza, majd fel a $2ct_{ij}(2)$ koordinátáig, w irányban egyet vissza, majd n irányban az diagonáloszlop síkjáig. Innen egy egységet visszük fel a huzalt, majd w irányban elvisszük az oszlopunkig.

A déli terminálból pedig induljunk el w irányba mínusz két egységet, majd vigyük fel a huzalt $2ct_{ij}(2) + 1$ magasságra. Innen menjünk w irányba $k_{ij} + 1$ egységet, majd egy egységet le. Innen n irányban húzzuk a huzalt a megfelelő oszlopig.

A pár nélküli déli terminálokat is be kell kötnünk ezekbe az oszlopokba, teljesen azonos módon. (Ahol előbb a $ct_{ij}(2)$ értéket használtuk, most azt az értéket kell vennünk, hogy hanyadik párosításban választottuk ki a terminálnak megfelelő élt.)

A **második fázis** itt is a diagonáloszlopok egy nethez tartozó huzalrészeinek összekötése. A $(3((z-1)K + k - 1) - 1, 2H + 1, (K + 3)z + k - 1)$, $z = 1 \dots h$, $k = 1 \dots K$, $H = 1 \dots h$ koordinátájú pontokat fogjuk összekötni egy-egy velük egy nethez tartozó ugyanilyen koordinátájú ponttal. A kocka esetéhez hasonlóan tudunk úgy párt választani ezeknek a pontoknak, hogy mindenkinek különböző legyen a párja, és ha összekötünk mindenkit a párjával, akkor az egy nethez tartozó huzalrészek össze lesznek kötve.

A huzalozást meg tudjuk valósítani, ha a h és n irányú felosztásokat eggyel növeljük, a w irányút pedig $3K$ -val, minden diagonáloszlop után három w -síkot kell beszúrunk ugyanis. Így $s_h = 3$, $s_n = 4$, $s_w = 3K + 3$ méretű felosztást kapunk.

Minden ponthoz hozzá lesz rendelve egy w irányú 1 és h közti eltolási érték. Erre teljesülnie kell, hogy különböző azokra a pontokra, amik azonos magasságúak, és azokra, amiknek a párjuk azonos oszlopban van. Ezt meg tudjuk tenni, hiszen erre az esetre is elmondható egy a fentiekhez hasonló páros gráfos indoklás.

A pontokból tehát az eltolási érték által meghatározott (újonnan beszúrt) w síkig menjünk w irányban. Jegyezzük meg, hogy az ehhez használt egyenesben csak ehhez a nethez tartozó huzalrész van. Ezek után vigyük a huzalt egy egységet fel, hogy az újonnan beszúrt h -síkból viessük el n irányban a párját tartalmazó n -sík előtti síkba. Itt menjünk w irányban egyet előre, majd vigyük fel a huzalt a pár magasságáig, ott egy egységet n irányba, majd w irányban a párig.

Általános eset

A feladat általános esete itt is szétszedhető két féloldali feladatra, és ez esetben $s_h = 6$, $s_n = 8$, $s_w = 3K + 3$ méretű felosztást kapunk.

5.2.4. Állítás. *Legyen $h = w$. Minden ilyen 3D Γ RP megoldható $s_h = 6$, $s_n = 8$, $s_w = 3K + 3$ felosztásokon, ahol $K = \lceil \frac{n}{h} \rceil$.*

5.2.5. Megjegyzés. Az algoritmus féloldali esetének második fázisát csak vázlatosan közöltük. Egyrészt, mert gondolatmenete hasonlít az eddig említettekéhez. Másrészt a feladat valószínűleg megoldható kisebb felosztásokon is, az algoritmus javítása tehát későbbre maradt.

6. fejezet

Összegzés

A dolgozat során tehát adtunk egy új algoritmust a kockán történő gamma huzalozás féloldali esetére, aminek segítségével az általános eset is megoldható kisebb fix felosztáson.

Ezek után a négyzet alapú hasábon történő gamma huzalozás mindkét esetéről beláttuk, hogy nem oldhatók meg fix felosztásokon, és algoritmusokat adtunk, amik a téglatest arányaitól függő felosztáson oldják meg a feladatokat.

A kapott felosztások áttekintésére szolgál az alábbi táblázat.

		kétsztatú	féloldali	általános
kocka	s_h	2	3	6
	s_n	3	4	8
	s_w	4	4	4
$n = h$	s_h	2	3	6
	s_n	$K + 2$	$2K + 2$	$4K + 4$
	s_w	4	4	4
$h = w$	s_h	-	3	6
	s_n	-	4	8
	s_w	-	$3K + 3$	$6K + 6$

Irodalomjegyzék

- [1] Boros E., Recski A., Szkaliczki T., Wettl F., *Polynomial time Manhattan routing without doglegs - a generalization of Gallai's algorithm*, Computers and Artificial Intelligence (1999) 18 (4), 403-413.
- [2] Gallai Tibor nem publikált eredményei Hajnal András és Surányi János *Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen* című művében, Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., 1958 1 115-123.
- [3] Hambrusch, S. E. *Channel routing in overlap models*, IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst. (1985) CAD-4, 23-30.
- [4] Held, S., Korte, B., Rautenbach, D., Vygen, J., *Combinatorial optimization in VLSI design*, In: Chvátal, V. (ed.) Combinatorial Optimization - Methods and Applications, NATO Science for Peace and Security Series - D: Information and Communication Security, vol. 31, pp. 33-96 (2011)
- [5] Johar, Farhana és Shaharuddin, Salleh, *Placement and routing in VLSI design problem using single row routing technique*, Matematika, 2007, 23 (2) 99-120.
- [6] Jordán T., Recski A., Szeszlér D.: Rendszeroptimalizálás, *Typotex*, 2004 140.
- [7] Kiss Attila, *3-dimenziós VLSI huzalozási algoritmusok*, MSc szakdolgozat, ELTE, 2012
- [8] Kiss A., Recski A., *A Spacing - Volume Tradeoff in 3-Dimensional VLSI Routing*, Proc. 9th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, 2015, Fukuoka
- [9] Szeszlér Dávid, *Combinatorial algorithms in VLSI routing*, PhD Dissertation, BME, 2005

- [10] Recski A., Strzyzewski F., *Vertex-disjoint channel routing on two layers*, Integer programming and combinatorial optimization, University of Waterloo Press (1990), 397-405.
- [11] Recski A., Szeszlér D., *Routing vertex disjoint Steiner-trees in a cubic grid - an application in VLSI*, Discrete Applied Math, 2007, 155 44-52.
- [12] Reiss A., Szeszlér D., *3-dimensional Channel Routing*, Proc. 4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, 2005
- [13] Szymanski, T. G., *Dogleg channel routing is NP-complete*, IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Syst. (1985) CAD-4, 31-41.
- [14] Wu, S. A., JáJá, J., *Optimal algorithms for adjacent side routing*, Algorithmica (1991) 6 (4), 565-578.