Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Tóth Bence Barnabás

Párosítás algoritmusok általános gráfokban

MSc Szakdolgozat

Témavezető:

Jüttner Alpár

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2015

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Jüttner Alpárnak, hogy elvállalta a konzulensi teendőket. Köszönöm, hogy a konzultációk során türelmével, tudásával és szakmai tapasztalatával nagymértékben segítette munkámat, és irányított a szakdolgozat felépítésének megalkotásában.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A gráfelmélet egyik központi témaköre a párosítások vizsgálata, ezen belül is a maximális méretű párosítás meghatározása. Páros gráfokban a maxmiális párosítás méretére Kőnig tétele (1931) szolgál minimax-tételként, a Hall-tétel (1935) pedig szükséges és elégséges feltételt ad az egyik pontosztályt fedő párosítás létezésére. Kőnig a tételének bizonyításakor mátrixok terminológiáját használva leírta az alternáló utas algoritmust. A Hopcroft-Karp algoritmus (1973) a jelenleg ismert leggyorsabb algoritmus, mely megtalál egy maximális párosítást.

A páros gráfok esete motiválja a probléma vizsgálatát általános $G = (V, E)$ gráfokra is. Egy fontos eredmény erre vonatkozóan Tutte tétele (1947), mely karakterizálja azokat a gráfokat, melyekben van teljes, azaz minden pontot lefedő párosítás. Ez speciális esete a Berge-Tutte formulának (1958), mely egy minimax-tétel a gráfokban a maximális párosítás által fedetlenül hagyott pontok számára. A Gallai-Edmonds struktúratétel (1963-65) pedig egy adott gráfban levő összes maximális párosítást írja le, a csúcsok partícióján keresztül. Az első algoritmus, mely polinom időben határozott meg egy maximális párosítást Edmonds párosítás-algoritmusa volt (1965), ennek futásideje $O(|V|^4)$. Jelenleg a leggyorsabb ismert algoritmus a Micali és Vazirani által feltalált MV-algoritmus (1980), ez $O(|E| \cdot |V|^{1/2})$ időben talál a gráfban maximális párosítást. A párosítások egy általánosítása a b-matching: itt a pontokon adott egy b függvény, és olyan maximális elemszámú élhalmazt keresünk, mely esetén minden v csúcsnál a rá illeszkedő kiválasztott élek száma legfeljebb $b(v)$. Erre a problémára ad eredményt Gabow algoritmusa (1983), valamint Anstee algoritmusa (1986). Számos elméleti eredmény és gyakorlati alkalmazás használja a maximális párosításokat és b-matchingeket, ez motiválja a gyorsabb algoritmusok kifejlesztését.

A szakdolgozatban szerepel az Edmonds-algoritmus leírása, A Micali-Vazirani algoritmus, és helyességének bizonyítása, valamint az általam készített implementáció és futási eredmények leírása, ezen kívül egy, a Gallai-Edmonds felbontásra épülő algoritmus általánosítása b-matchingekre. A következő részben néhány, a párosításokra vonatkozó definíció és tétel szerepel. A 2. fejezetben az Edmonds-algoritmus leírása található. A 3. fejezet első részében az MV-algoritmus leírása, a második részében pedig helyességének bizonyítása szerepel. A 4. fejezet a Gallai-Edmonds felbontásra épülő algoritmusról szól. Az 5. fejezetben a párosítás probléma b-matchingekre való általánosítása, és a 4. fejezet algoritmusának b-matchingekre vonatkozó változata van. Végül a 6. fejezetben az MV-algoritmus implementációjának leírása található. A dolgozatban Vazirani és Micali [1], valamint Lovász és Plummer [2] eredményeit dolgoztam fel. Az algoritmus implementálása során a LEMON C++template library-t [5] használtam.

Alapfogalmak

Ebben a fejezetben néhány fontosabb, a párosításokra vonatkozó definíció és tétel leírása található.

Jelöljük $|V|$-t n-nel, $|E|$-t m-mel. Jelöljük $\nu(G)$-vel a G gráf maximális párosításának elemszámát. Legyen M egy párosítása G-nek. **Alternáló útnak** nevezzük a párosítás és nem-párosítás éleket felváltva használó utakat, **javító út** pedig olyan alternáló út, mely két, a párosítás által fedetlen pontot köt össze. Egy javító út mindig páratlan sok élet tartalmaz. Javító út mentén kicserélve a párosítás és nem-párosítás éleket, egy nagyobb párosításhoz jutunk. Ha van két párosításunk M és M', akkor $M-M'$-**alternáló útnak** azon utakat nevezzük, mely felváltva használ M és M' beli éleket.

1.0.1. Definíció. *Egy G gráfot **faktorkritikusnak** nevezünk, ha $G-v$-ben van teljes párosítás minden $v \in G$ csúcsra.*

1.0.2. Tétel. ***Gallai-lemma:***

Ha G összefüggő, és $\nu(G-v)=\nu(G), \forall v \in V$, akkor G faktorkritikus.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy egy M maximális párosítás legalább két pontot nem fed (u ás v), és hogy ezek között a lehető legkisebb a távolság. Szomszédosak nyilván nem lehetnek, ezért tegyük fel, hogy van még egy w pont az őket összekötő úton, ekkor a faktorkritikusság miatt van egy ezen pontot elkerülő M' párosítás is. Ekkor a w csúcsból induló $M - M'$-alternáló út segítségével M-ből kaphatunk egy újabb párosítást, ami szintén maximális elemszámú de csökkent a fedetlen pontok közti távolság, ami ellentmond a feltevésnek. $\square$

Jelölje $c_0(G)$ a G gráf páratlan csúcsszámú komponenseinek számát, $\mathrm{def}(G) = |V| - 2\nu(G)$ pedig a maximális párosítás által fedetlenül hagyott csúcsok száma.

1.0.3. Tétel. ***Berge-Tutte formula:***

A G gráfban a maximális párosítás elemszámára a következő érvényes:

$$\nu(G) = \min_{X \subseteq V} \{|V| - c_0(G - X) + |X|\}/2$$

Másképp:

$$\mathrm{def}(G) = \max_{X \subseteq V} \{c_0(G - X) - |X|\}$$

Bizonyítás. Vegyünk egy M párosítást és egy $X \subseteq V$ halmazt, ekkor legalább $c_0(V - X) - X$ pont marad fedetlen, így a $\nu(G) \leq \min$ irány adódik.

A másik irány bizonyítása $|V|$-re vonatkozó teljes indukcióval történik: a $|V| = 0$ eset triviális. Az indukciós feltétel, hogy $|V| \geq 1$ és a formula igaz minden kisebb gráfra. Kell találnunk egy X_0 halmazt, melyre $\nu(G) \geq (|V| - c_0(G - X_0) + |X_0|)/2$. Két esetre bomlik a bizonyítás, ha G nem faktorkritikus, akkor van olyan v pontja amit elhagyva csökken a maximális párosítás elemszáma, ezt hagyjuk el. A kisebb gráfra az indukciós feltétel miatt igaz az állítás, legyen X_0' egy olyan halmaz, amire egyenlőség áll fenn. $X_0 = X_0' + v$ teljesíti a kívánt egyenlőtlenséget. Ha G faktorkritikus, akkor a Gallai-lemma miatt $\nu(G) = (|V| - 1)/2$, tehát $X_0 = \emptyset$ választással adódik a tétel. $\square$

Egy $X \subseteq V$ halmazt, melyre egyenlőség áll a formulában nevezzünk **gátnak**. Látható hogy minden párosítás fedetlenül hagy legalább $c_0(G - X) - |X|$ darab pontot a $G - X$ páratlan részhalmazaiból. Mivel a maximális párosítás esetén a Berge-Tutte formula egyenlőséggel teljesül, így az a gátat és a páros komponenseket teljesen fedi, továbbá a gát pontjai mind a kimaradó páratlan komponensek egyikével párosítottak, így a páros komponensekben a párosítás teljes.

Jelöljük $D(G)$-vel azon csúcsok halmazát, melyekre létezik azt elkerülő maximális párosítás. Álljon $A(G)$ a $V - D(V)$ halmaz azon csúcsaiból melyeknek van $D(G)$-beli szomszédja. Végül legyen $C(G)$ a maradék pontok halmaza. Ezt a partíciót a gráf Gallai-Edmonds felbontásának nevezzük.

1.0.4. Tétel. ***Gallai-Edmonds struktúratétel***

Adott G gráfban legyenek $D(G)$, $A(G)$ és $C(G)$ az előbb definiált halmazok. Ekkor:

1. *$D(G)$ komponensei faktorkritikusak*
2. *$C(G)$-ben van teljes párosítás*
3. *a $C(G)$ elhagyásával és $D(G)$ komponenseinek összehúzásával kapott páros gráfban $A(G)$ minden nemüres X részhalmazának legalább $|X|+1$ szomszédja van.*
4. *minden M teljes párosítás tartalmaz egy teljes párosítást $C(G)$-ben, egy majdnem-teljes párosítást $D(G)$ minden komponensén, valamint $A(G)$ minden pontját különböző $D(G)$-beli komponensekhez párosítja.*
5. *$\nu(G) = (|V| - c(D(G)) + |A(G)|)/2$ ahol $c(D(G))$ a $D(G)$ komponenseinek száma*

Bizonyítás. Legyen A' egy gát, D' a $G - A'$ páratlan komponenseinek uniója, C' a párosaké. Minden M' maximális párosítás fedi A'-t és C'-t, mert legalább $\mathrm{def}(G)$ fedetlen pont fog esni D'-be így máshol nem lehetnek, emiatt viszont $D(G) \subseteq D'$.

Legyen A' olyan, melyre D' minimális. Ekkor D' komponensei faktorkritikusak, mert ha az egyik nem az, akkor ennek létezik nemüres gátja és ezt hozzávéve A'-höz egy olyan gátat kapnánk, amire a páratlan komponensek uniója valódi része D'-nek. A 3. állításhoz tegyük fel hogy létezik egy sértő X halmaz: ekkor viszont $A' - X$ is gát, melyre a páratlan komponensek uniója valódi része D'-nek. Emiatt D' minden komponenséhez létezik maximális párosítás mely nem tartalmaz bele lépő élt, és mivel faktorkritikus, ezért minden pontjára létezik őt elkerülő teljes párosítás. Emiatt $D' \subseteq D(G)$ tehát $D' = D(G)$. Mivel A' gát, ezért minden pontjából vezet él D'-be, és C' egyik pontjából sem vezet él D'-be, tehát $A' = A(G)$ és $C' = C(G)$.

Láttuk tehát hogy a fenti felbontásban $A(G)$ azon gát, melyre $D(G)$ minimális. Ebből következnek a tétel állításai. $\square$

2. fejezet

Az Edmonds-algoritmus

Egy adott M párosításból indulunk ki, ezt szeretnénk módosítani, hogy nőjön az elemszáma. Amikor G-beli utakról beszélünk, mindig alternáló utat értünk alatta. Az algoritmus a Berge-lemmára épül, mely szerint a G gráfban egy M párosítás akkor és csak akkor maximális elemszámú, ha nem létezik rá vonatkozó javító út.

Szükség van a következő tulajdonságra:

2.0.5. Lemma. *Legyen C egy $2k+1$ hosszú kör G-ben, mely tartalmaz k párosításélet, és pont-diszjunkt M többi részétől. Legyen G' az a gráf, amit G-ből C egyetlen ponttá összehúzásával kapunk, valamint $M' = M - E(C)$. Most M' akkor és csak akkor maximális párosítás G'-ben, ha M maximális párosítás G-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy M nem maximális: ekkor van egy p javító út M-re nézve. Ha ez elkerüli C-t, akkor G-ben is javító út. Ha találkozik C-vel, akkor van egy olyan u végpontja, mely nem C-beli. Ekkor u-ből indulva legyen v a p út első pontja mely C-n van. Ekkor a $p[u, v]$ javító út M'-re nézve, tehát M' nem maximális.

Ha M' nem maximális, létezik egy nála nagyobb N' maximális párosítás G'-ben. Az N' párosítás G-beli megfelelője legfeljebb egy pontot fed C-ről, így k élet hozzávéve C-ről, kaphatunk egy N párosítást G-ben, mely nagyobb, mint M: $|M| = |M'| + k < |N'| + k = |N|$. $\square$

Legyen a párosítatlan csúcsok halmaza S, F pedig egy olyan erdő, melyre teljesülnek a következők: minden komponensben pontosan egy darab S-beli pont van, és minden S-beli pont része egy komponensnek, valamint minden olyan F-beli él párosításél, mely páratlan távolságra van a saját komponensének S-beli pontjától. Emiatt minden pont F-beli foka 2, mely páratlan távolságra van S-től F-ben: ezeket nevezzük belső csúcsoknak, a többit külsőknek. Egy ilyen erdőt hívjunk alternáló erdőnek: kezdetben álljon ez az S halmaz pontjaiból, élek nélkül. A komponensek S beli pontjait a gyökerüknek hívjuk.

Tekintsük most a külső csúcsok szomszédait: ha létezik u külső pont, mely szomszédos egy nem F-beli v ponttal, legyen w a v párja M-ben. Ekkor adjuk F-hez az uv és vw éleket, kaptunk egy F-nél nagyobb alternáló erdőt.

Ha létezik egy u külső pont, mely G-ben szomszédos egy másik F-beli komponensben levő v külső ponttal, ezen komponensek S-beli gyökerei között találtunk egy javító utat. Ez a megfelelő gyökerektől u-ig és v-ig haladó F-beli utak valamint az uv él összeillesztése. Ezáltal kaptunk egy nagyobb párosítást.

Ha léteznek u és v külső pontok, melyek G-ben szomszédosak, valamint F-beli komponensük megegyezik, akkor legyen C az uv él és az F-beli uv út által alkotott kör, és P a C-t a gyökerével összekötő út. Ez az út alternáló, és kicserélhetjük a párosítás és nem-párosítás éleket, mert az egyik vége fedetlen, így egy ugyanakkora M_1 párosítást kapunk. Most M_1 teljesíti a lemma feltételeit, így húzzuk össze a C-t, egy G' gráfot kapva, mely kisebb G-nél: elég ebben a gráfban maximális párosítást keresnünk.

Ha minden külső csúcs szomszédai belső csúcsok, akkor M maximális: Legyen F belső csúcsainak száma k, a külsőké l, ekkor $|S| = l - k$. Ha most kitöröljük a belső csúcsokat, akkor G izolált pontokból fog állni. Így $\mathrm{def}(G) \geq l - k = |S|$ ahol $\mathrm{def}(G)$ a maximális párosítás által fedetlenül hagyott pontok száma, az összefüggés pedig a Berge-Tutte formula miatt igaz. Mivel $|M|$ pontosan $|S|$ élet hagy fedetlenül, ezért maximális.

Ezt ismételve tehát eljutunk egy maximális párosításhoz. Az algoritmus futási ideje $O(n^4)$

3. fejezet

Az MV-algoritmus

A fejezet elején az MV-algoritmus által használt definíciók szerepelnek, a második részben az algoritmus leírása, a harmadikban pedig a bizonyítása található.[1]

Az Edmonds-algoritmushoz hasonlóan ez az algoritmus is egy adott M párosításból indul ki (kezdetben lehet ez az üres párosítás), majd egy lépésben ezt növeli. Itt is javító utakat fogunk keresni, jelölje l_m a legrövidebb javító út hosszát.

Az algoritmus egy fázis során az adott párosításra vonatkozó legrövidebb javító utak tovább nem bővíthető halmazát keresi meg, majd az utakon cserélve a párosításéleket, egy nagyobb párosításhoz jut. A javító utakat az egyik belső élüktől kezdve keressük. Az algoritmus meghatározza az ilyen lehetséges éleket, majd diszjunkt utakat keres a végpontjaiktól különböző a párosítás által fedetlen pontokba.

3.1. Definíciók

A következő definícióknál mindig egy adott M párosításból indulunk ki.

3.1.1. Definíció. *Egy v csúcs* ***párosszintje*** *illetve* ***páratlanszintje*** *legyen a legrövidebb olyan alternáló út hossza, mely páros illetve páratlan hosszú, és egy fedetlen csúcsot köt össze v-vel. Jelöljük ezeket a szinteket $evenlevel(v)$ illetve $oddlevel(v)$-vel. Ha nincs ilyen út, legyen ez az érték ∞. Az ilyen utakat a v csúcs páros illetve páratlan útjának fogjuk nevezni, jelölésben ezek $evenlevel(v)$-út illetve $oddlevel(v)$-út.*

Minden fedetlen csúcs párosszintje 0, a páratlanszintje pedig az innen induló legrövidebb javító út hossza.

3.1.2. Definíció. *Egy v csúcs **kisszintjének** a $\min\{evenlevel(v), oddlevel(v)\}$, **nagyszintjének** pedig a $\max\{evenlevel(v), oddlevel(v)\}$ értékeket nevezzük, jelölésük legyen rendre $minlevel(v)$ és $maxlevel(v)$. Az előzőhöz hasonlóan definiáljuk és jelöljük v kis-, valamint nagy útját, jelük $minlevel(v)$-út és $maxlevel(v)$-út.*

3.1.3. Definíció. *Egy v csúcsot nevezzünk **külső csúcsnak**, ha a párosszintje kisebb, mint a páratlanszintje, egyébként pedig **belsőnek**.*

Látható, hogy a fedetlen csúcsok külsők, a párosításélek v végpontjai belsők, ha a $minlevel(v)$-út nem használja v párosításélét, külsők ha igen.

3.1.4. Definíció. *Nevezzük egy csúcs **erejének** a páros- és páratlanszintjének összegét, jelöljük így: $tenacity(v) = evenlevel(v) + oddlevel(v)$. Egy $(u, v) \in M$ párosításélre az erőt definiáljuk így: $tenacity(u, v) = oddlevel(u) + oddlevel(v) + 1$, egy $(u, v) \notin M$ nem-párosításélre pedig így: $tenacity(u, v) = evenlevel(u) + evenlevel(v) + 1$. Legyen t_m a legkisebb erejű csúcs ereje a gráfban.*

Ha a legrövidebb, l_m hosszú javító utat tekintjük, ezen minden csúcs és él ereje l_m.

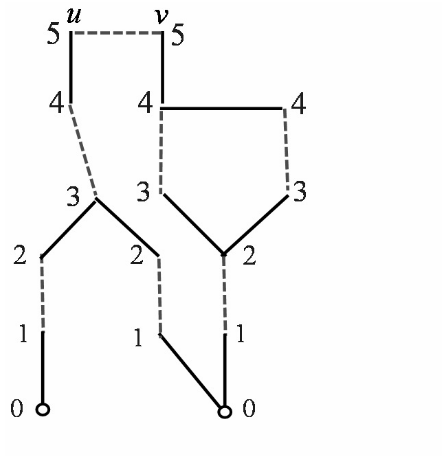
3.1.5. Definíció. *Vegyünk egy v csúcsot, és egy $minlevel(v)$-utat, legyen ennek az útnak az utolsó éle az (u, v) él! Ekkor nevezzük u-t a v csúcs **elődjének**, valamint azt mondjuk, hogy az (u, v) él egy **pillér**. Azokat az éleket, amelyek nem pillérek, **hidaknak** nevezzük.*

3.1.6. Definíció. *Legyen (u, v) egy híd, melynek az ereje t és ez az érték legfeljebb l_m. Az (u, v) híd tartójának nevezzük azokat a w pontokat, melyek ereje szintén t, és létezik olyan $maxlevel(w)$-út, mely és használja az (u, v) hidat. A tartót jelöljük $support(u, v)$-vel.*

Az ábrán a csúcsok kisszintjei vannak feltüntetve, a vízszintes élek a hidak, a többi pillér.

3.2. Az algoritmus egy fázisa

Az algoritmus két részből áll, az első rész meghatározza a gráf csúcsainak kis- és nagyszintjeit, a második megtalálja a javító utakat. Az első rész két főbb eljárásból



áll, ezek felváltva futnak: az egyik egy alternáló szélességi keresés, mely szintenként felváltva lép párosítás, és nem-párosítás éleken, a másik egy dupla mélységi keresés (DDFS), mely a hidak tartójának meghatározásában játszik szerepet. Az eljárások során az algoritmus megadja a csúcsok szintjeit, valamint azt, hogy mely csúcsok hidak és melyek pillérek. A hidakat erejük szerint külön halmazokba soroljuk. Az algoritmus egy fázisa keresési szintekre tagolódik, a 0. szintről kezdve, egészen az $(l_m - 1)/2$. szintig, ahol megtalálja a legrövidebb javító utakat.

3.2.1. A MIN és MAX eljárások

Minden keresési szinten két eljárás hajtódik végre egymás után: a MIN és a MAX nevű (a csúcsok megfelelő szintjeit határozzák meg). Az i-edik keresési szinten a MIN-folyamat megtalálja az összes olyan v csúcsot, melynek kisszintje $i + 1$, és ezek kisszintjét véglegesíti. Ehhez a pontosan i kis- vagy nagyszintű u csúcsok v szomszédait kell végigjárni, amennyiben megfelelő él köti őket össze: ha $i+1$ páratlan, akkor nem-párosításéleket használunk és így a talált csúcsok belsők, ha $i + 1$ páros, akkor párosításéleket használunk, és a talált csúcsok külsők. Látható, hogy külső csúcsnak csak egy elődje lehet, belsőnek akár több is. Ha v kisszintje $i + 1$ vagy végtelen (tehát nagyobb, mint i), akkor az (u, v) él pillér, és u a v csúcs elődje. Ha v kisszintje legfeljebb i, akkor (u, w) híd, és amennyiben ismert az ereje (t), ezt határozzuk is meg: (u, v) bekerül a $Br(t)$ halmazba. A MIN-eljárás egy keresési szinten az alternáló BFS egy lépését hajtja végre.

A MIN eljárás után a MAX-folyamat megtalálja az összes olyan v csúcsot, melynek az ereje $2i + 1$, és meghatározza ezek nagyszintjét. Ezen csúcsok kisszintje legfeljebb i, így már ismert. Ezen eljárás neve DDFS. (később bemutatásra kerül) Ha egy híd értéke $t = 2i + 1$, akkor a DDFS meghatározza a tartóját, és a tartó az összes csúcsán a nagyszintet. A tartóból kivezető hidakra, ha ismert az értékük, azt szintén meghatározzuk.

Az i-edik keresési szinten:

1. MIN

for minden i szintű u csúcsra **do**
  for az összes megfelelő paritású, még nem vizsgált (u, v) élen **do**
    if $minlevel(v) \geq i + 1$ **then**
      $minlevel(v) := i + 1$
      u a v csúcs elődje
      (u, v) pillér
    else
      (u, v) híd
      if $tenacity(u, v) = t$ ismert **then**
        $Br(t) \cup \{(u, v)\}$
      end if
    end if
  end for
end for

2. MAX

for minden hídra $Br(2i + 1)$-ben **do**
  megkeresni a tartóját DDFS-sel
  for minden v csúcsra a tartóban **do**
    $maxlevel(v) := 2i + 1 - minlevel(v)$
    if v belső csúcs **then**
      for minden (u, v) élre mely nem pillér és $tenacity(u, v) = t$ ismert **do**
        $Br(t) \cup \{(u, v)\}$
      end for
    end if
  end for

end for

3.2.2. DDFS

Most a DDFS leírása következik, először általánosan, majd a következő részben az algoritmusban történő használattal.

A DDFS eljárás irányított, szintezett gráfokon működik: a csúcsok $h+1$ különböző szintre vannak osztva, a szintek partíciót alkotnak. Legyen l_0 a legalacsonyabb, l_h a legmagasabb szint! Minden él nagyobb szintű csúcsból kisebb szintű felé vezet (átugorhat szintet). Szükséges feltétel, hogy minden csúcsból vezessen irányított út az l_0 szintre. Ezt DDFS-feltételnek nevezzük.

A feladat: adott két kijelölt csúcs, r és g, ezekből szeretnénk a 0 szintre két egymástól pontdiszjunkt utat. Lehetséges, hogy ilyen nem létezik: azokat a csúcsokat, amelyek minden r-ből l_0-ba vezető, valamint minden g-ből l_0-ba vezető úton rajta vannak, **akadálynak** nevezzük, ez esetben a feladat a legnagyobb szintű akadály megtalálása. Ezt a csúcsot **legmagasabb akadálynak** nevezzük és b-vel jelöljük, nyilvánvaló, hogy minden szinten legfeljebb egy akadály lehet. A

Az eljárás két, szimultán futó DFS-ből áll, nevezzük *pirosnak* az r-ből, *zöldnek* a g-ből indulót. Mindkét DFS a megszokott módon működik, annyi kikötéssel hogy mindig az a DFS lép, amelyiknek az éppen vizsgált pontja nagyobb szintű (egyenlőség esetén mindegy), valamint egymás fáiba nem léphetnek bele. Mindkét DFS fenntart egy vermet, melyben az elért, de még nem átvizsgált pontok vannak, kezdetben ezek az r és g pontokból állnak.

Ha az egyik DFS be tud lépni a másik által vizsgált v csúcsba, ez a v csúcs egy lehetséges akadály, melynek szintje l. Most meg kell határozni, hogy v tényleg akadály-e, ha nem, akkor pedig melyik DFS-fába kerüljön. Ekkor először a zöld DFS próbál meg elérni egy másik legfeljebb l szintű csúcsba, úgy hogy közben a piros DFS fájába tartozó pontokat nem használhatja. Ha nem talál, akkor v a zöld fába fog tartozni, ekkor a verme üres lesz, és beletesszük a v pontot. Ezután a piros DFS próbál meg hasonlóan másik utat találni az l szintre, vagy alá. Ha ez sikerül, akkor haladnak tovább, ha nem akkor megtaláltuk az akadályt, ekkor az akadály egyik fába se fog tartozni. A talált akadály szükségképpen a legmagasabb akadály lesz. Amennyiben nem létezik akadály, a DDFS talál két pontdiszjunkt utat a 0 szintre.

A DFS-ek által épített (diszjunkt) fákat eltároljuk.

Az egyszerű DFS és a DDFS-ben levő DFS-ek közötti különbség akkor lép fel, mikor ezek egy v csúcsnál találkoznak, az l_j szinten. Ha egy DFS elér egy csúcsot az l szinten, akkor az általa vizsgált pont ez után mindig legfeljebb az l szinten lesz. Mivel mindkét DFS most ért az l_j szintre, ezért az l_j-n és alatta még nincs átvizsgált pont. Ha v nem akadály, akkor van egy másik út is, ami eléri l_j-t, és mivel mindkét DFS megvizsgál minden lehetséges utat l_j-re (vagy alá), ezért a DDFS tovább tud haladni. Ha v akadály, akkor a DDFS, miután megvizsgálta az összes lehetséges utat, megáll: ekkor mindkét verem üres.

A DDFS tehát mindig a fent leírtaknak megfelelően működik. Ha van egy v akadály, akkor v fölött minden élen kétszer halad végig: egyszer odafelé, és egyszer a visszakeresés során (a v alatt levőkön egyszer sem), ha nincs, akkor minden élen legfeljebb kétszer.

3.2.3. A DDFS alkalmazása

A DDFS-t a hidak két végpontjából indítva kell futtatni, a szintek pedig a csúcsok kisszintjeinek felelnek meg, az éleket megfelelően irányítjuk. Ha a DDFS talál egy akadályt figyeljük meg, hogy az akadály nem lesz a kiinduló híd tartójában, csak a fölötte levő pontok. Ezek a pontok azok, amik bekerültek a DFS-fák egyikébe. Ekkor nevezzük **szirom**-nak a híd tartóját, és a szirom **rügyének** az akadályt. Az algoritmus létrehoz egy új, szirom-csúcsot, mely csak a szirmok azonosítására szolgál, nem része a gráf csúcshalmazának! A tartó minden pontjáról létrehozunk egy mutatót a szirom csúcsba, majd a szirom csúcsból a rügyre és a kiinduló-hídra is.

3.2.1. Definíció. *Ha a v csúcs benne van egy sziromban és a szirom rügye a b csúcs, definiáljuk a $bud(v) = b$ függvényértéket. Ez azokon a csúcsokon értelmezett, melyek benne vannak valamelyik sziromban. Definiáljuk a bud^* függvényt az alábbi módon: ha v nincs benne sziromban $bud^*(v) = v$, egyébként pedig $bud^*(v) = bud^*(bud(v))$.*

Az a kikötés a DDFS futtatása során, hogy ha az egyik DFS elér egy v csúcsot, akkor mindig átugrik a $bud^*(v)$ csúcsra. Ez a szirom-csúcsok segítségével érhető el: minden csúcsra számon tartjuk hogy melyik az ő szirom-csúcsa és rügye. Az előzőekből következően minden csúcshoz legfeljebb egy szirom (és rügy) tartozhat.

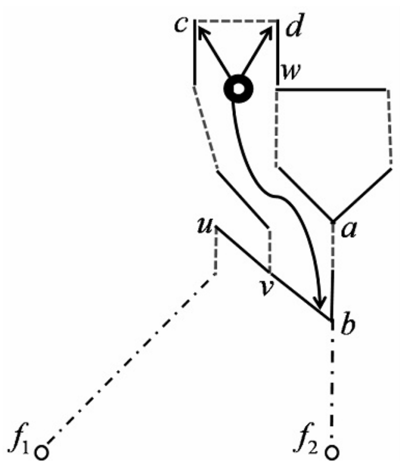
Az, hogy egy csúcs melyik sziromhoz tartozik, nem adódik a gráf és a párosítás struktúrájából, az algoritmus futása során függhet a hidak választási sorrendjétől.

3.2.4. Javító utak megtalálása

Amennyiben egy (u, v) hídról induló DDFS nem talál akadályt, itt létezik a gráfban egy növelő út. Célunk ennek megtalálása. Egy növelő út megtalálásához az algoritmus utat keres a DDFS megfelelő fáiban u-ból és v-ből a 0 szintre. Ezeken az utakon a híd felől indulva halad végig. Ha elér egy olyan w csúcshoz, mely benne van egy sziromban, így a kereséskor a $bud^*(w)$ csúcsra ugrott a DFS, itt a szirom-csúcs segítségével azonosítja a rügyet, valamint a hidat. El kell dönteni, hogy w-ből merre haladjon a sziromban a b rügyig: a hidat használva, vagy sem. Figyeljük meg hogy az előzőleg használt él nem-párosításél volt, csak ilyenen léphetünk be a sziromba.

Most ha w külső csúcs, azaz a párosszintje kisebb, akkor a megtalált $u - b$, w-n átmenő alternáló út nem használja a szirom hídját. Ekkor w ből a kisebb szintű csúcsok felé haladva lehet folytatni az alternáló utat b-be.

Ha w belső csúcs, tehát a párosszintje nagyobb, akkor az út használni fogja s hídját. Ekkor s megfelelő DFS-fáiban kell utat keresni a hídjáról w-be és b-be. Ha útközben újabb szirmot talál az eljárás, az előző folyamat ismétlődik rekurzívan. Ezt mutatja a következő ábra.



Az algoritmus célja a legrövidebb javító utak egy tovább nem bővíthető halmazának megtalálása. Ezen utaknak diszjunktnak kell lenniük egymástól. Miután egy utat megtaláltunk, ezt el kell hagyni a gráfból (ideiglenesen, csak a fázis végéig). Ezzel keletkezhetnek olyan párosított csúcsok, melyeknek nincs elődje. Hagyjuk el az összes ilyen csúcsot (ezzel új előd nélküliek is keletkezhetnek), és ezt ismételjük addig amíg még van ilyen. Amit ennek vége, ismét az összes csúcsból el lehet jutni a párosítatlan csúcsok halmazába ha minden csúcsból csak az elődjeibe léphetünk, tehát teljesülni fognak a DDFS feltételei.

Ezután újra a DDFS-fázis következik egy másik hídról.

Miután több utat nem tudunk találni, a meglevőkön cseréljük fel a párosított és nem párosított éleket, így egy nagyobb elemszámú párosításhoz jutunk.

3.3. Bizonyítás

Az algoritmus helyességének bizonyításához szükségünk van új fogalmak bevezetésére, valamint tételek és lemmák kimondására, bizonyítására.

3.3.1. Definíciók és tételek

Az, hogy általános gráfokra a párosítás probléma és a javító-út keresés nehezebb, mint páros gráfok esetén, tehát ezeket az utakat nem lehet egyszerűen BFS segítségével megkeresni, abból adódik, hogy a következő tulajdonság nem igaz minden csúcsra:

3.3.1. Definíció. *Legyen v egy tetszőleges csúcs, p pedig v páros vagy páratlan útja, melynek fedetlen kezdőpontja f, egy kijelölt pontja pedig u. Az f és u közti szakasz hosszát jelölje $|p[f\ to\ u]|$, és ha ez páros(páratlan), akkor azt mondjuk, hogy u páros(páratlan) p-re nézve. Azt mondjuk, hogy u BFS-tartó p-re nézve, ha $|p[f\ to\ u]| = evenlevel(u)(oddlevel(u))$, ha u páros(páratlan) p-re nézve.*

Ennek a fogalomnak a csúcsok ereje az alapja, a következő tételek során ebből a szemszögből vizsgáljuk.

A következő lemma miatt elég mindig a párosításéleknek csak egy végpontját vizsgálni.

3.3.2. Lemma. *Ha $(u, v) \in M$, akkor $tenacity(u) = tenacity(v) = tenacity(u, v)$.*

Bizonyítás. Ha $(u, v) \in M$, akkor $evenlevel(v) = oddlevel(u)+1$ és $evenlevel(u) = oddlevel(v) + 1$, a definícióból adódik a lemma. □

3.3.3. Tétel. *Legyen a p út a v csúcs páros vagy páratlan útja, mely az f pontból indul, és legyen $u \in p$ csúcs, melyre $tenacity(u) \geq tenacity(p)$. Ekkor u BFS-tartó p-re nézve, és ha az egyenlőtlenség szigorú, akkor $|p[f \text{ to } u]| = minlevel(u)$.*

Bizonyítás. Az előző, 3.3.2 lemma miatt feltehetjük, hogy p a v csúcs egy páros útja, valamint u páros p-re nézve. Indirekt tegyük fel, hogy u nem BFS-tartó p-re nézve, és legyen q az u páros útja: ekkor $|u| < |p[f \text{ to } u]|$.

Először tekintsük azt az esetet, mikor $evenlevel(v) = maxlevel(v)$, legyen r egy $minlevel(v)$-út, valamint az u' csúcs az u párja a párosításban. Tekintsük r első csúcsát, amely rajta van $p[u' \text{ to } v]$-n! Ha ez a csúcs páros p-re nézve, akkor $oddlevel(u) \leq |r| + |p[u \text{ to } v]|$. Mivel $|q| < |p[f \text{ to } u]|$, ezért $tenacity(u) < tenacity(v)$ ami ellentmond a tétel feltevésének. Ha ez a csúcs páratlan p-re nézve, akkor $minlevel(v) = |r| > evenlevel(u)$, különben r elejét ettől a ponttól kezdve p-vel folytatva egy p-nél rövidebb páros utat találnánk v-be. Innentől kezdve az $evenlevel(v) = minlevel(v)$ rész tárgyalásával együtt vizsgáljuk ezt az esetet.

Nézzük a q utat, legyen ennek w az első, $p(u \text{ to } v]$-be eső pontja. Ilyen biztosan létezik, különben lenne egy p-nél rövidebb páros út v-be. A w csúcs mindenképpen páros p-re nézve, különben w-ig q-n, majd utána p-n haladva kapunk egy p-nél rövidebb páros utat v-be. Most q-n w ig haladva, majd ezután p-n visszafele menve w-től u-ig, kapunk egy páratlan utat u-ba, melynek hossza kisebb, mint $evenlevel(v)$. Ebből következik, hogy $tenacity(u) < tenacity(v)$ ami megint ellnetmondásra vezet.

A tétel második fele nyilvánvaló, ha $evenlevel(v) = minlevel(v)$, tehát tegyük fel, hogy $evenlevel(v) = maxlevel(v)$. Tekintsük ismét az r, $minlevel(v)$-utat, és ennek első $p[u' \text{ to } v]$-re eső csúcsát. Ha ez a csúcs páros p-re nézve, akkor $oddlevel(u) \leq |r| + |p[u \text{ to } v]|$, ezzel $tenacity(u) \leq tenacity(v)$, ami ellentmondás. Amennyiben ez a csúcs páratlan p-re nézve, akkor $minlevel(v) = |r| > evenlevel(u)$, különben r elejét ettől a ponttól kezdve p-vel folytatva egy p-nél rövidebb páros utat találnánk v-be. Ebből következik az állítás, különben $|p[f \text{ to } u]| = maxlevel(u)$, ezzel pedig $tenacity(u) < tenacity(v)$ ami megint ellentmondás. $\square$ A tételből következik, hogy ha egy u csúcs nem BFS-tartó p-re nézve, akkor ennek ereje kisebb, mint v ereje.

Legyen v egy csúcs, melynek ereje t, amire $t_m \leq t < l_m$, valamint p egy $evenlevel(v)$-út vagy $oddlevel(v)$-út, melynek fedetlen kezdőpontja f.

3.3.4. Definíció. *Ha u és w két csúcs p-n, és u messzebb van f-től p-re nézve, mint w, akkor azt mondjuk, hogy u magasabb, mint w. Nézzük az össze csúcsot*

p-n, melynek szigorúan nagyobb az ereje, mint t: ilyen létezik, mert f is ilyen. A legmagasabbat ezek között hívjuk v bázisának p-re nézve, jelöljük ezt $F(p, v)$-vel. (ez nyilván páros p-re nézve)

Mivel $tenacity(F(p, v)) > tenacity(v)$, a 3.3.3 tétel miatt $minlevel(F(p, v)) = evenlevel(F(p, v))$ vagyis $F(p, v)$ külső csúcs.

3.3.5. Definíció. *Legyen $B(v) = \{F(p, v) | p \text{ evenlevel}(v)\text{-út vagy oddlevel}(v)\text{-út}\}$. Adott f párosítatlan csúcsra legyen $B_f(v) = \{F(p, v) | p\ f\text{-nél kezdődő evenlevel}(v)\text{-út vagy oddlevel}(v)\text{-út}\}$*

Egy csúcs bázisának definiálásához szükségünk lesz a következő állításra:

3.3.6. Állítás. *Legyen v egy csúcs, melynek ereje t, amire $t_m \leq t < l_m$. Ekkor a $B(v)$ halmaz egyelemű.*

Ennek az állításnak a bizonyítása a későbbiekben fog megtörténni, t-re vonatkozó teljes indukcióval.

3.3.7. Definíció. *Páratlan t-re, melyre $t_m \leq t < l_m$,* ***t-feltétel****-nek hívjuk azt az állítást, hogy 3.3.6 fennáll minden v csúcsra, melyre $t_m \leq tenacity(v) \leq t$.*

A következő definíciókat és lemmákat feltételesen mondjuk, ki, mindegyik a **t-feltételre** vonatkozóan érvényes.

3.3.8. Definíció. *Páratlan t-re, melyre $t_m \leq t < l_m$, feltéve a* ***t-feltétel****-t, minden v csúcsra, melynek ereje legfeljebb t, nevezzük a $B(v)$ halmazban levő egyetlen csúcsot v* ***bázisának****, és jelöljük $base(v)$-vel.*

A v csúcs bázisa mindig külső csúcs, és a 3.3.3 tétel miatt BFS-tartó is minden $evenlevel(v)$útra és $oddlevel(v)$-útra nézve.

3.3.9. Definíció. *Páratlan t-re, melyre $t_m \leq t < l_m$, feltéve a* ***t-feltétel****-t, definiáljuk rekurzívan a virágokat: legyen b egy külső csúcs, melynek ereje szigorúan nagyobb, mint t. Azt a virágot, melynek ereje t és bázisa b, jelöljük $\mathcal{B}_{b,t}$-vel. Legyen $\mathcal{B}_{b,1} = \emptyset$. Ha $t \geq 3$, legyen $S_{b,t} = \{v | tenacity(v) = t \text{ and } base(v) = b\}$, és legyen*

$$\mathcal{B}_{b,t} = S_{b,t} \cup \left(\bigcup_{v \in S_{b,t} \cup \{b\}, v \text{ külső}} \mathcal{B}_{b,t-2} \right).$$

Nyilvánvaló, hogy ha $v \in \mathcal{B}_{b,t}$, akkor $tenacity(v) \leq t$, tehát $b \notin \mathcal{B}_{b,t}$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{B}_{b',t'}$ virág része a $\mathcal{B}_{b,t}$-nek, ha $\mathcal{B}_{b',t'} \subset \mathcal{B}_{b,t}$

3.3.10. Lemma. *Legyen v egy csúcs, melyre $t_m \leq tenacity v < l_m$. Akkor, és csak akkor létezik egy f-ben kezdődő $evenlevel(v)$-út, ha létezik f-ben kezdődő $oddlevel(v)$-út.*

Bizonyítás. A 3.3.2 lemma miatt elég az odafelé irányt bizonyítani. A feltétel miatt v-nek létezik mindkét paritású útja. Legyen p egy páros út, ami az f fedetlen pontból indul, és q egy páratlan út, mely az $f' \neq f$ fedetlen pontból indul. Megmutatjuk, hogy szükségképpen f-ből is indul v-be páratlan út.

Legyen u a q-ra nézve legalacsonyabb olyan csúcs, mely rajta van p-n is. Ha u páros p-re nézve, akkor létezik egy javító út f' és f között, ami rövidebb, mint t_m, ez pedig ellentmondás, tehát u páratlan p-re nézve. Mivel $q[f' \text{ to } u] \circ p[u \text{ to } v]$ egy páros alternáló út, ezért $|q[f' \text{ to } u]| \geq |p[f \text{ to } u]|$, különben lenne egy p-nél rövidebb páros út v-be. Ha $|q(u \text{ to } v]| \cap |p[f \text{ to } u)| = \emptyset$, akkor $p[f \text{ to } u] \circ q[u \text{ to } v]$ legfeljebb $|q|$ hosszú páratlan út f-ből v-be, ezzel készen vagyunk. Különben pedig legyen (w', w) a legalacsonyabb párosításéle p-nek, amelyet q is használ, úgy hogy w páros p-re nézve. Ha w páratlan q-ra nézve, akkor megint találtunk egy t_m-nél rövidebb javító utat f'-ből f-be. Ha páros, akkor pedig $p[f \text{ to } w] \circ q[w \text{ to } v]$ egy q-nál rövidebb páratlan út, ami ellentmondás. $\square$

Legyen f egy fedetlen pont, t egy páratlan szám, melyre $t_m \leq t < l_m$. Jelöljük $V_t(f)$-fel a csúcsok azon halmazát, melyek ereje t, és van f-ben kezdődő páros és páratlan útjuk is. Egy adott $v \in V_t(f)$ csúcsra nézzük az összes f-ben kezdődő $evenlevel(v)$-utat és $oddlevel(v)$-utat, és nézzük azokat a csúcsokat, amelyek ereje nagyobb mint t, és minden ilyen úton rajta vannak. (f például ilyen csúcs) Ezen csúcsok közül a legmagasabbat jelölje $A_f(v)$.

3.3.11. Lemma. *Legyen (u, v) egy párosításél, melynek ereje t, és $t_m \leq t < l_m$. Ekkor $u \in V_t(f)$ akkor és csak akkor, ha $v \in V_t(f)$. Továbbá ha u és $v \in V_t(f)$, akkor $A_f(u) = A_f(v)$ és $B_f(u) = B_f(v)$.*

Bizonyítás. Következik a 3.3.2 lemmából. $\square$

A következő lemma adja meg az indukció kezdőlépését:

3.3.12. Lemma. *Minden v csúcsra, melynek ereje t_m, a következő igaz:*

A $B(v)$ halmaz egyelemű.

Minden $maxlevel(v)$-út tartalmaz egy egyértelmű hidat, melynek ereje t_m.

A bizonyításhoz szükségünk lesz több részállításra is.

Legyen f egy fedetlen csúcs, melyre $v \in V_{t_m}(f)$. Ekkor:

3.3.13. Állítás. *Elég, ha a 3.3.12 lemma első állítása helyett a következőt látjuk be $V_{t_m}(f)$ belső csúcsaira:*

A $B_f(v)$ halmaz egyelemű, és $B_f(v) = A_f(v)$.

Valamint a második állítást is elégséges ezekre a csúcsokra belátni.

Bizonyítás. A 3.3.2 lemmából következik, hogy minden v külső csúcs párosított párja egy v' belső csúcs.(fordítva nem igaz) Továbbá a 3.3.11 lemma miatt, ha $v \in V_{t_m}(f)$ akkor $v' \in V_{t_m}(f)$. Látható, hogy minden $maxlevel(v')$-útból kapható egy $maxlevel(v)$-út, az utolsó, (v, v') él elhagyásával, és minden $maxlevel(v)$-útból kapható egy $maxlevel(v')$-út, a (v, v') él hozzávételével. Ezért ha az "új első állítás" igaz v'-re akkor igaz v-re is. A második állítás a 3.3.11 lemma miatt igaz v-re, amennyiben v'-re igaz volt. □

A 3.3.12 lemma bizonyításához definiáljuk a következő G_v gráfot: Legyen $v \in V_{t_m}(f)$ egy belső csúcsa, és legyen $A_f(v) = b$.(a legmagasabb akadálynak felel meg a DDFS-nél) A G_v gráf legyen az összes f-ben kezdődő $evenlevel(v)$-út és $oddlevel(v)$-út uniója. Legyen $\beta = minlevel(b)$ és $\alpha = (t_m - 1)/2)$: ekkor α a lehetséges legnagyobb kisszint, amivel egy t_m erejű csúcs rendelkezhet. t_m definíciója alapján minden G_v-beli csúcs BFS-tartó. A G_v gráf megfelel a DDFS leírásánál használt H gráfnak, annyi különbséggel, hogy az α szinten mennek élek a szinten belül is. G_v-nek $\alpha + 1$ szintje van, 0-tól α-ig, a szinteket a kisszintek határozzák meg, a 0 szinten egyedül az f csúcs van. G_v teljesíti a DDFS feltételeit.

3.3.14. Állítás. *Legyen p egy $evenlevel(v)$-út G_v-ben. Ekkor p tartalmaz egy t erejű hidat.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy p tartalmaz egy olyan (u, u') élet, mely az α szinten belül megy. Minden $minlevel(u)$-útból képezhető egy $maxlevel(u')$ út, és fordítva is, ezért $tenacity(u) = tenacity(u') = t_m$. Az u és u' csúcsok elődeinek kisszintje $\alpha - 1$, ezért az (u, u') él híd. □ A 3.3.12 lemma első állítását $minlevel(v)$-re vonatkozó indukcióval fogjuk belátni. Megmutatjuk, hogy minden $l \in [\beta + 1, \alpha]$-ra G_v minden l kisszintű csúcsának ereje t_m, ebből következően $B_f(v) = \{b\}$. Az indukció előtt még szükségünk van néhány segédállításra.

Legyen (u, u') egy t_m erejű híd G_v-ben. Tekintsük az összes $minlevel(u)$-utat és $minlevel(u')$-utat és mondjuk azt, hogy w akadály, amennyiben az összes ilyen úton rajta van. Jelölje a legmagasabb akadályt $H(u, u')$.

3.3.15. Állítás. *$H(u, u')$ rajta van minden $oddlevel(v)$-úton.*

Bizonyítás. Ha nincs, akkor vegyünk egy $oddlevel(v)$ utat, mely nem tartalmazza w-t. Ez az út kiterjeszthető egy $minlevel(u)$ vagy $minlevel(v)$-úttá, ellentmondva annak, hogy $H(u, u')$ akadály. □

Definiáljuk az $S(u, u')$ halmazt a következőképpen: minden $minlevel(u)$-útra és $minlevel(u')$-útra vegyük azokat a pontokat, melyek magasabbak $H(u, u')$-nél, legyen $S(u, u')$ ezek uniója.

3.3.16. Állítás. *Minden $w \in S(u, u')$ csúcsra $tenacity(w) = t_m$.*

Bizonyítás. A G_v-n, az (u, u') hídról indított DDFS mindenképpen a $H(u, u')$ akadályt találja meg, és bejár minden csúcsot $S(u, u')$-ben. Minden $w \in S(u, u')$ csúcsra a DDFS által adott utak, egy $evenlevel(H(u, u'))$-úttal együtt egy (u, u')-n átmenő $maxlevel(w)$-utat adnak, ezzel belátva az állítást. □

A teljes indukció kezdőfeltétele: Legyen $v \in V_{t_m}(f)$, melynek kisszintje minimális(ekkor v belső csúcs), és $A_f(v) = b$.

3.3.17. Állítás. *Legyen p egy $oddlevel(v)$-út. Ekkor p utolsó éle (b, v), sőt létezik egy $(u, u') \in G_v$ híd, melyre $H(u, u') = b$*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy a p út utolsó éle (w, v). Ekkor létezik olyan $evenlevel(v)$-út, melyhez ha hozzárakjuk a (v, w) élet, akkor egy páratlan alternáló utat kapunk w be, ezzel w ereje t_m, ami ellentmond annak, hogy v minimális szintű.

Legyen (u, u') egy híd valamely q, $evenlevel(v)$-úton. $q[b \text{ to } v]$-n az egyetlen akadály b, mert $p[b \text{ to } v]$ csak a (b, v) élből áll, tehát $H(u, u') = b$. □ Ez alapján minden p, $evenlevel(v)$-úton, minden $p(b \text{ to } v]$-re eső csúcs ereje t_m, és így $B_f(v) = A_f(v) = \{b\}$, ami bizonyítja az indukció kezdőfeltételét.

Az indukciós lépés: Legyen $v \in V_{t_m}(f)$ belső csúcs, $minlevel(v) = l$, ahol $l \in [\beta+1, \alpha]$, és tegyük fel, hogy a 3.3.12 lemma második állítása fennáll minden $V_{t_m}(f)$ beli csúcsra, melynek kisszintje kisebb, mint l. Tekintsük az összes t_m erejű hidat, ami rajta van $evenlevel(v)$-úton és vegyük az összes $H(u, u')$ akadályt, ami hozzájuk tartozik. Vegyük az akadályok között a legalacsonyabb szintűt, ez az 3.3.15 állítás miatt rajta van az összes $oddlevel(v)$ úton.

3.3.18. Állítás. *w rajta van minden $evenlevel(v)$-úton is.*

Bizonyítás. Indirekt feltevés: Legyen p egy $evenlevel(v)$-út, mely nem tartalmazza w-t. Legyen (u, u') híd p-n. Ha létezik olyan q, $oddlevel(v)$-út, mely $q(w \text{ to } v)$-n belül tartalmaz egy olyan $(y, y') \in M$ párosításélet, amelyet p is használ, akkor $p[f \text{ to } y] \circ q[y \text{ to } v]$ egy páratlan út v-be, mely nem használja w-t ami ellentmondás. Ha nem létezik ilyen q, akkor $H(u, u')$ alacsonyabb, mint w, ami szintén ellentmondás. $\square$

Mivel w a legmagasabb akadály minden $oddlevel(v)$ és $evenlevel(v)$-útra, ezért minden $z \in G_v$ csúcsra, melyre $minlevel(z) > minlevel(v)$, $z \in S(u, u')$, valamely t_m erejű (u, u') hídra, ami egy $evenlevel(v)$-úton van. Ekkor a 3.3.16 állítás szerint $tenacity(z) = t_m$. Két eset lehetséges: $w = b$,(ekkor $B_f(v) = A_f(v) = \{b\}$) vagy $w \neq b$.

3.3.19. Állítás. *Ha $w \neq b$, akkor $tenacity(w) = t_m$ és $B_f(w) = A_f(w) = \{b\}$.*

Bizonyítás. Ha $tenacity(w) > t_m$ lenne, akkor $A_f(v) = w$ ami ellentmondás, valamint mivel $minlevel(w) < minlevel(v)$, ezért az indukciós feltevés igaz w-re, tehát $B_f(w) = A_f(w)$. Az állítás utolsó egyenlősége:

Minden p, $evenlevel(w)$-út kiterjeszthető egy $oddlevel(v)$-úttá, így $F(p, w) = b$. Ha létezne, olyan q, $oddlevel(w)$-út, melyre $F(q, w) \neq b$, akkor vagy létezik olyan$p$, $evenlevel(w)$-út, melynek a $p(b \text{ to } w)$ szakaszon van közös $(y, y') \in M$ párosításéle q-val, vagy nincs ilyen. Ha van, akkor $r = q[f \text{ to } y] \circ p[y \text{ to } w]$ egy olyan $evenlevel(w)$-út, melyre $F(r, w) \neq b$: ellentmondás. Ha nincs, akkor $q \circ p[w \text{ to } b]$ egy $oddlevel(b)$-út, de ekkor $tenacity(b) = t_m$, ami megint ellentmondás. Ebből következően $F(q, w) = b$, így $A_f(w) = b$ és így $B_f(w) = b$. $\square$

3.3.20. Állítás. *Ha $w \neq b$, akkor minden p, $evenlevel(v)$ vagy $oddlevel(v)$-útra, minden $p(b \text{ to } w)$-ra eső csúcs ereje t_m.*

Bizonyítás. Mivel w rajta van minden p, $evenlevel(v)$ vagy $oddlevel(v)$-úton, és BFS-tartó is p-re nézve, ezért p egy $evenlevel(w)$ út és egy megfelelő (w, v)-út összeragasztása. $B_f(w) = b$, ezért minden q, $evenlevel(w)$-úton, minden $q(b \text{ to } w)$-ra eső csúcs ereje t_m, és így minden $p(b \text{ to } w)$-re eső csúcs ereje is t_m. $\square$

Ezzel beláttuk, hogy $B_f(v) = A_f(v) = \{b\}$ a második esetben is (amikor $w \neq b$), tehát bizonyítottuk a "módosított első állítást" a 3.3.12 lemmában. Most következik az eredeti állítás bizonyítása.

3.3.21. Állítás. *Legyenek f és f' fedetlen csúcsok a párosításban. Ekkor minden $v \in V_{t_m}(f) \cap V_{t_m}(f')$ csúcsra teljesül, hogy $B_f(v) = B_{f'}(v)$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $B_f(v) \neq B_{f'}(v)$: legyen $b = B_f(v)$ és $b' = B_{f'}(v)$, valamint az általánosság megszorítása nélkül: $minlevel(b) \leq minlevel(b')$. Minden f-ben kezdődő $evenlevel(v)$ és $oddlevel(v)$ út használja b-t de nem használja b'-t, és fordítva, az f' ben kezdődőek b'-t használják és b-t nem. Speciálisan minden $evenlevel(b)$ út pontdiszjunkt minden $evenlevel(b')$ úttól. Ha ez nem lenne igaz, akkor lenne f és f' között egy l_m-nél rövidebb javító út.

Álljon az $S_1 \subseteq V_{t_m}(f)$ azokból a pontokból, melyek páros és páratlan útjai tartalmazzák b-t, $S_2 \subseteq V_{t_m}(f')$ pedig azokból, melyek páros és páratlan útjai tartalmazzák b'-t. Legyen S a minimális kisszintű pontok halmaza $S_1 \cap S_2$-ben.(ezek mind belső csúcsok) Abban az esetben, ha $v \in S$ szomszédja b-nek vagy b'-nek (mondjuk b-nek), akkor van egy $oddlevel(v)$-út b-n át, és egy $evenlevel(v)$-út b'-n át, ezeket összeillesztve egy l_m-nél rövidebb javító utat kapunk f-től f'-be ami ellentmondás. Tetszőleges $v \in S$-et nézve, legyen (w, v) az utolsó él, egy b-t tartalmazó $oddlevel(v)$-úton. Legyen p egy b'-t tartalmazó $evenlevel(v)$-út, ezt a (v, w) éllel összeillesztve egy $oddlevel(w)$-utat kapunk, ami tartalmazza b'-t. Most a 3.3.10 lemma miatt, $w \in S_1 \cap S_2$, de $minlevel(w) < minlevel(v)$ ami ellentmondás, tehát $B_f(v) = B_{f'}(v)$. $\square$ Az állításból egyből adódik, hogy $B(v)$ egyelemű, így ez bizonyítja a 3.3.12 lemma első állítását. Az is következik, hogy $S_1 = S_2$, így a második állítás a 3.3.14 állítás miatt igaz.

Ismét feltételes definíciók következnek, a **t-feltétel** teljesülése mellett:

3.3.22. Definíció. *Páratlan t-re, melyre $t_m \leq t < l_m$, feltéve a **t-feltétel**-t, legyen v egy csúcs, melyre $tenacity(v) = t' \leq t$. Definiáljuk a v csúcs iterált, vagy k-adik bázisait a következőképpen: $base^1(v) = base(v)$, és $k > 1$-re, ha $tenacity(base^k(v)) \leq t$, akkor legyen $base^{k+1}(v) = base(base^k(v))$.*

3.3.23. Definíció. *Páratlan t-re, melyre $t_m \leq t < l_m$, feltéve a **t-feltétel**-t, legyen v egy csúcs, melyre $tenacity(v) = t' \leq t$, és k egész, melyre $tenacity(base^k(v)) \leq t$. Legyen $base^{k+1}(v) = b$. Ekkor nevezzük $evenlevel(b; v)$ ($oddlevel(b; v)$) útnak egy minimális, páros(páratlan) hosszú utat b-ből v-be, mely nem párosításéllel kezdődik.*

3.3.24. Állítás. *Páratlan t-re, melyre $t_m \leq t < l_m$, feltéve a **t-feltétel**-t, legyen v egy csúcs, melyre $tenacity(v) = t$ és $base(v) = b$. Ekkor minden $evenlevel(v)$*

($oddlevel(v)$) út egy $evenlevel(b)$-út és egy $evenlevel(b;v)$ ($oddlevel(b;v)$) út összeillesztéseként adódik.

Bizonyítás. Legyen p egy $evenlevel(b)$-út, melynek kezdőpontja f, valamint q egy $evenlevel(b;v)$-út. Ha az összeillesztésük hosszabb, mint $evenlevel(v)$, akkor q még b alatt is találkozik p-vel: legyen (w, w') a p-re nézve legalacsonyabb párosításél, melyet q használ, úgy hogy w' páros p-re nézve. Most a 3.3.3 tétel bizonyításánál használt módszerrel megmutatható, hogy ha w páratlan q-ra nézve, akkor van f-től v-be egy páros út, mely rövidebb $evenlevel(v)$-nél, ha pedig w' páratlan q-ra nézve, akkor van egy rövid páratlan út f-ből b-be, amely miatt $tenacity(b) \leq t$, tehát mindkét esetben ellentmondást kapunk. □

A következő lemmához nem kell feltenni a **t-feltétel**-t:

3.3.25. Lemma. *Legyen v egy t-erejű csúcs, melyre teljesül, hogy $t_m \leq t < l_m$, p egy $minlevel(v)$-út, és $b = F(p, v)$. Legyen továbbá u egy csúcs $p[b \text{ to } v]$-n, melyre $tenacity(u) < t$ úgy, hogy az (u, w) él p-n van, w magasabb mint u, és $tenacity(w) = t$. Ekkor u BFS-tartó p-re nézve.*

Bizonyítás. A 3.3.2 lemma miatt feltehető, hogy p páros útja v-nek. u szükségképpen páros, w pedig páratlan p-re nézve. Indirekt tegyük fel, hogy u nem BFS-tartó p-re nézve, és ekkor legyen q egy $evenlevel(u)$-út, melyre $|q| < |p[f \text{ to } u]|$.

Legyen z a q út első csúcsa, mely $p(u \text{ to } v]$-re esik. Ilyen létezik, különben lenne egy rövidebb páros út v-be, mint $evenlevel(v)$. Ha z páratlan p-re nézve, akkor megint kapunk egy $evenlevel(v)$-nél rövidebb páros utat v-be. Ha z páros p-re nézve, akkor $q[f \text{ to } z] \circ p[z \text{ to } w]$ egy páros út w-be, ami rövidebb, mint $minlevel(v)$. Mivel w páratlan p-re nézve, ezért $oddlevel(w) < minlevel(v)$, tehát $tenacity(w) < tenacity(v)$ ami ellentmondás. □

Most következik a tétel, melynek bizonyításakor igazoljuk a feltételes állításokat.

3.3.26. Tétel. *Páratlan t-re, melyre $t_m \leq t < l_m$, legyen v egy csúcs, melyre $tenacity(v) = t$, a következők igazak:*

1. állítás: *A $B(v)$ halmaz egyelemű.*

2. állítás: *Minden $maxlevel(v)$-út tartalmaz t erejű hidat.*

3. állítás: *A legfeljebb t erejű virágok lamináris rendszert alkotnak.*

4. állítás: *Legyen $base(v) = b$ és $u \in \mathcal{B}_{b,t}$. Ekkor minden $evenlevel(u)$ ($oddlevel(u)$) út előáll egy $evenlevel(b)$-út és egy $evenlevel(b;v)$ ($oddlevel(b;v)$) út összeilleszté-*

seként. Továbbá minden evenlevel$(b;v)$ *és oddlevel*$(b;v)$ *út* $\mathcal{B}_{b,t} \cup \{b\}$*-ben van. Ezen kívül ezen utak minden élének ereje legfeljebb* t.

5. állítás: *Legyen base*$(v) = b$ *és* p *egy evenlevel*(v) *vagy oddlevel*(v)*-út,* u *legyen rajta* $p(b$ *to* $v]$*-n. Ekkor base*(u) *rajta van* $p[b$ *to* $v]$*-n.*

Ezen kívül minden l_m *erejű* v *csúcsra minden maxlevel*(v)*-út tartalmaz egy egyértelmű,* l_m *erejű hidat.*

A bizonyítás teljes indukcióval történik. A kiinduló lépéshez a 3.3.12 lemma bizonyítja az első két állítást, tehát $base(v) = b$, és $\mathcal{B}_{b,t_m}$ definiálhatóak. Ha d és d' különböző csúcsok, melyek ereje nagyobb t_m-nél, akkor a $\mathcal{B}_{d,t_m}$ és $\mathcal{B}_{d',t_m}$ diszjunkt halmazok, hiszen egy csúcsnak sem lehet két bázisa, így igaz a 3. állítás is. A 4. állításban szereplő u csúcs ereje t_m, az állítás első fele a 3.3.24 lemmából adódik. A 3.3.12 lemma miatt minden $w \neq b$ csúcs, mely $evenlevel(b;u)$ vagy $oddlevel(b;u)$-úton van, t_m erejű és b bázisú, azaz $w \in \mathcal{B}_{b,t_m}$, ez az állítás második része. A harmadik rész is a 3.3.12 lemmából adódik a G_v gráf tulajdonságain keresztül. Az 5. állításban u ereje is t_m, így ez adódik a negyedik állításból. Beláttuk tehát a kezdeti feltételt az indukcióhoz.

Az indukciós lépés: legyen t páratlan melyre $t_m < t < l_m$, és tegyük fel, hogy a tétel igaz minden $t_m \leq t' < t$-re.

3.3.27. Állítás. *A tétel második állítása teljesül.*

Bizonyítás. Legyen p egy $maxlevel(v) = evenlevel(v)$-út, q pedig egy $minlevel(v)$-út: ekkor $|p|+|q| = t$. A 3.3.3 tétel alapján minden u, legalább t erejű csúcs BFS-tartó p-re nézve. Ezek közül tekintsük azokat, melyek kisszintje legalább β: particionáljuk őket a következőképp. Álljon T_1 (T_2) azokból az u csúcsokból, melyekre $|p[f$ to $u]| = minlevel(u)$ ($maxlevel(u)$). Ekkor $b \in T_1$ és $v \in T_2$ teljesül, tehát a halmazok nemüresek. Legyen a a T_1 legnagyobb kisszintű pontja, c pedig a T_2 legkisebb nagyszintű pontja. Innen 3 eset lehetséges.

1. eset: a és c szomszédosak p-n, és az (a,c) párosításél. Az a és c pontok ereje legalább t. A p és q utak összeillesztésével és átdarabolásával kapunk f-ből egy páros és egy páratlan utat is a-ba, ezek összhossza t, így a ereje legfeljebb t, tehát pontosan t. A 3.3.2 lemma alapján kapjuk, hogy $tenacity(a) = tenacity(c) = tenacity(a,c) = t$. Mivel p határozza meg a kisszintjét, és c nagyszintjét, ezért $minlevel(a) = \alpha$ és $maxlevel(c) = \alpha + 1$. Ezen kívül $tenacity(a) = tenacity(c) = t$-ből következik, hogy

$minlevel(c) = \alpha$ és $maxlevel(a) = \alpha + 1$, tehát a és c is belső csúcsok, vagyis (a, c) egy t erejű híd.

2. eset: a és c szomszédosak p-n, és az (a, c) nem párosításél. Az előzőhöz hasonlóan látható, hogy $tenacity(a) = tenacity(c) = tenacity(a, c) = t$, tehát a és c is külső csúcsok, vagyis (a, c) egy t erejű híd.

3. eset: a és c nem szomszédosak p-n, tehát léteznek a és c között t nél kisebb erejű csúcsok. Legyen (c, c') a p-n levő nem párosításélet. Két eset lehetséges:

3a. eset: (c, c') pillér: ekkor $c' \in \mathcal{B}_{c,t-2}$. Legyen (d, d') az első él $p[c \text{ to } f]$-ben, amire $d \in \mathcal{B}_{c,t-2}$ és $d' \notin \mathcal{B}_{c,t-2}$. Ekkor (d, d') nem párosításél. Ha most $d' = a$, akkor (d, a) híd, mert a külső és d minden elődje $\mathcal{B}_{c,t-2} \cup \{c\}$-ben van. Ekkor, p és q utak összeillesztésével és átdarabolásával kapunk egy $evenlevel(d)$ utat, egy $evenlevel(a)$ utat, és a (d, a) élet. Ez az 5. állítás miatt lehetséges, melyet d-re már tudunk az indukciós feltétel miatt, így (a, d) egy t erejű híd. Ha $d' \neq a$, akkor $tenacity(d') < t$ és így $d \in \mathcal{B}_{e,t-2}$, valamely e-bázisú virágra. Az 5. állítást indukciós feltételként d'-re alkalmazva következik, hogy minden d' ből f-be vezető legrövidebb páros út használja e-t, ezért e rajta van $p[d' \text{ to } a]$-n. $tenacity(e) \geq t$, ezért $e = a$ következik. Az előzőhöz hasonlóan p és q utak összeillesztésével és átdarabolásával kapunk egy $evenlevel(d)$ utat, egy $evenlevel(d')$ utat, és a (d, d') élet így a (d, d') egy t erejű híd.

3b. eset: (c, c') híd: ekkor az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy $c' \in \mathcal{B}_{a,t-2}$, és (c, c') egy t erejű híd.

A p úton csak egyetlen t erejű híd lehet: Tekintsünk egy (d, e) élet, $p[f \text{ to } a]$-n úgy, hogy d az e alatt van p-n. Ha $tenacity(e) \geq t$, akkor e BFS-tartó p-re nézve és (d, e) pillér. Ha $tenacity(e) < t$, akkor alkalmazható rá indukciós feltételként az 5. állítás, így $tenacity(d, e) < t$. Hasonló gondolatmenettel $p[c \text{ to } v]$ éleire is ugyanezek láthatók. Ezzel beláttuk az állítást. $\square$

Vegyünk egy f fedetlen csúcsot, melyre $v \in V_t(f)$. A következő állítás bizonyítása nagyon hasonlít a 3.3.12 lemmáéra, az ott már leírt részek itt vázlatosan szerepelnek.

3.3.28. Állítás. *A következő igaz:*

1'.állítás: *A $B_f(v)$ halmaz egyelemű, és $B_f(v) = A_f(v)$.*

Bizonyítás. Ismét elégséges a belső csúcsokra bizonyítani, legyen $v \in V_t(f)$ egy belső csúcsa. Legyen $A_f(v) = b$, valamint $\beta = minlevel(b)$ és $\alpha = (t-1)/2$, ekkor α a t értékű csúcsok maximális kisszintje. Legyen G_v egy, H hoz hasonló szintezett gráf, amit a DDFS-nél és a 3.3.12 lemmánál leírtunk, ezen nem tartunk fenn párosítást.

G_v nek $\alpha+1$ szintje van, itt nem feltétlenül tartalmaz mindegyik szint csúcsot. Ahogy a 3.3.12 lemmában, itt is a legmagasabb α szinten belül megengedünk szinten belüli éleket.

G_v-t a $G = (V, E)$ gráfból kapjuk, a szintek a csúcsok kisszintjeinek felelnek meg, az élek hossza legyen az általuk áthidalt szintkülönbség. Megmutatjuk, hogy G_v teljesíti a DDFS feltételét, vagyis hogy minden csúcsból vezet út a 0 szintre.

Kapcsolat G_v és G utai között: G_v-ben minden u -ból w-be vezető úthoz tartozik egy ugyanilyen hosszú alternáló út G-ben, továbbá ha egy (a, c) híd esetén létezik út a-ból u-ba és c-ből w-be , és ezek diszjunktak, akkor a megfelelő diszjunkt alternáló utak léteznek G-ben is.

Vegyünk egy f fedetlen csúcsot, és nézzük az összes innen induló $evenlevel(v)$ és $oddlevel(v)$ utat. A 3.3.3 tétel alapján, ezeken minden, legalább t erejű csúcs BFS-tartó a saját útjára nézve, legyen S ezen csúcsok halmaza. G_v csúcshalmaza $S \cup S'$, élhalmaza $E' \cup E''$ ahol S'-t, E'-t és E''-t később definiáljuk. Minden $u, w \in S$-re, ha $(u, v) \in E$ és $minlevel(u) \neq minlevel(v)$, akkor (u, v)-t berakjuk E'-be, ezen élek hosszait egységnyiek. Ezeken kívül E' tartalmazni fog minden t erejű hidat.

E'' élei a kisebb erejű virágokban levő részutakat fogják reprezentálni. Legyen $w \in S$, és p egy $minlevel(w)$-út, ami f-ben kezdődik: p része egy $evenlevel(v)$ vagy $oddlevel(v)$ útnak. Legyenek a és c kisebb, mint t erejű csúcsok p-n, úgy, hogy a alacsonyabb c-nél. Legyen a' az a előtti, c' a c utáni csúcs p-n. Azt mondjuk, hogy $p[a \text{ to } c]$ egy maximális folytonos t-nél kisebb erejű rész p-n, ha $tenacity(a') \geq t$ és $tenacity(c') \geq t$, és minden $p[a \text{ to } c]$-beli csúcs ereje kisebb, mint t. A 3.3.25 lemma alapján c BFS-tartó p-re nézve és a 3.3.2 lemma miatt $|p[f \text{ to } c]|$ páros. Indukciós feltételként használva a 4. állítást $p[a' \text{ to } c] = evenlevel(a'; c)$ és ez a $\mathcal{B}_{a',t-2} \cup \{a'\}$-ben van.

Most adjuk az E''-höz az (a', c') élet, ennek hosszát definiáljuk $|p[a' \text{ to } c']|$-nek, ez egyenlő c' és a' szintjeinek különbségével. Ezt a műveletet minden megfelelő részútra végrehajtjuk.

Adjuk továbbá G_v-hez az összes t erejű hidat, az előző állítás bizonyítása eseteinek függvényében: az 1. és 2. esetben csak az (a, c) élet kell hozzáadni.

A 3a. eset első részeseténél adjunk S'-höz egy d csúcsot az α szintre, valamint egy (c, d) élet E''-höz és egy (d, a) élet E'-höz. (c, d) hossza legyen $|p[c \text{ to } d]|$. A második részesetben S'-höz egy d és egy d' csúcsot adunk, mindkettőt az α szintre, E'-höz hozzáadjuk a (d, d') élet, E''-höz pedig a (c, d) és (d', a) éleket. Ezek az $evenlevel(c; d)$

és $evenlevel(a;d')$ G-beli utak megfelelői, hosszukat is ez alapján határozzuk meg.

A 3b. esetben adjunk S'-höz egy c' csúcsot az α szintre, valamint egy (c,c') élet E'-höz és egy (c',a) élet E''-höz, ez az $evenlevel(a;c')$ G-beli út megfelelője, hossza is ez alapján adódik.

Most G_v teljesíti a DDFS-feltételt, ez a felépítéséből következik. Ha (a,c) és (d,e) élek E''-ben, és 4 különböző csúcson fekszenek, akkor G-ben ezek két különböző, $t-2$ súlyú virágban levő utaknak felelnek meg. Az indukciós feltételből a 3. állítást használva (lamináris rendszer) következik, hogy ezek a virágok pontdiszjunktak, így a bennük futó részutak is azok. Ebből következik, hogy igaz az összefüggés G_v és G utai között.

Innen a bizonyítás ugyanúgy megy, mint a 3.3.12 lemmánál. □

A tétel többi állításának bizonyítása:

A 3.3.21 állítás ismét kiterjeszti az 1'. állításunkat az 1. állítássá. Most minden t erejű csúcs bázisa és minden t erejű virág definiált, a 3. állítás egy, a következő fejezet végén bizonyított állításból következik.

A 4. állításban szereplő u csúcs ereje t, az állítás első fele a 3.3.24 lemmából adódik. A második rész abból következik, hogy a t-nél kisebb erejű csúcsok benne vannak a $t-2$ erejű virágokban, ezek pedig $\mathcal{B}_{b,t}$-ben. A harmadik részben szereplő csúcsok pontosan ezek. Egy ilyen $u \in \mathcal{B}_{d,t-2}$ csúcsra $d = b$ vagy egy t súlyú csúcs $\mathcal{B}_{b,t}$-ben. Az első esetben az indukciós feltétel adja az állítást, a második esetben pedig b egy iterált bázisa u-nak. Ekkor a keresett utat egy $evenlevel(b;d)$ út és egy $\mathcal{B}_{d,t-2}$-ben levő út összeillesztése adja ki. (utóbbi az indukciós feltétel miatt létezik). A harmadik rész a G_v gráf tulajdonságaiból rögtön adódik.

Az 5. állítás nyilvánvaló, ha $tenacity(u) = t$. Amennyiben kisebb t-nél, legyen a w csúcs az első t erejű csúcs $p[u \text{ to } v]$-n és legyen w' az ezt megelőző csúcs, ekkor $tenacity(w) < t$. Legyen a az utolsó csúcs $p[b \text{ to } u]$-n, melynek ereje legalább t. A 3.3.25 lemma miatt w' BFS-tartó p-re nézve, az indukciós feltétel 4. állítását használva pedig $p[a \text{ to } w']$ egy $evenlevel(a;w')$-út. Az indukciós feltétel 5. állítása miatt u bázisa rajta van ezen az úton, ezzel az indukciós lépés bizonyítása kész.

A tétel utolsó állításának bizonyításához legyen v egy l_m erejű csúcs. A 2. állítás bizonyításakor használt részállítások nem függtek t értékétől, így ez igaz lesz l_m-re is. Ezzel beláttuk a tételt.

A következő lemma az előző fejezetben definiált szirom és az itteni virág közötti kapcsolatot adja meg, és egyértelműen következik az előbbiekből.

3.3.29. Lemma. *Legyen tenacity*$(v) = t$, *valamint az* $i = (t-1)/2$*-edik keresési szint végén tegyük fel, hogy* $bud^*(v) = b$. *Ekkor* v *bázisa* b *a* $\mathcal{B}_{b,t}$*-hez definiált* $S_{b,t}$ *halmaz pontosan* $\{u | tenacity(u) = t$ *és* $bud^*(u) = b\}$. *Ezen kívül* $\mathcal{B}_{b,t}$ *azon szirmok uniójából áll, melyek* bud^**-a* b *az* i*-edik keresési szint végén, valamint azon virágokból, melyek ereje* $t-2$, *és a bázisuk* b, *vagy az előbbi szirmokban található.*

3.3.2. Lamináris virágok

Ebben a fejezetben végig feltesszük, hogy a **t-feltétel** teljesül valamely páratlan t-re, melyre $t_m \le t < l_m$, és belátjuk, hogy a legfeljebb t erejű virágok lamináris rendszert alkotnak, ez igazolja az előző fejezet 3.3.26 tételének 3. állítását.

3.3.30. Definíció. *Definiáljuk rekurzívan a virágok mélységét: legyen* b *egy külső csúcs,* t *páratlan szám, melyre* $tenacity(b) > t$ *és* $t < l_m$. *A* $\mathcal{B}_{b,1}$ *virág mélysége legyen* $N(\mathcal{B}_{b,1}) = 0$. *A* $\mathcal{B}_{b,t}$ *virág mélysége legyen*

$$N(\mathcal{B}_{b,t}) = 1 + \left(\max_{v \in (S_t \cup \{b\}), v \text{ külső}} N(\mathcal{B}_{v,t-2}) \right)$$

ha $S_{b,t} \neq \emptyset$ *egyébként pedig* $N(\mathcal{B}_{v,t-2})$.

3.3.31. Lemma. *Legyen* $v \in \mathcal{B}_{b,t}$. *Ekkor létezik* k *egész, melyre* $1 \le k \le N(\mathcal{B}_{b,t})$ *és* $b = base^k(v)$. *Ezen kívül a* $base(v), \dots, base^{k-1}(v)$ *csúcsok* $\mathcal{B}_{b,t}$*-ben vannak.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk a $\mathcal{B}_{b,t}$ virág mélysége szerint. Ha $N(\mathcal{B}_{b,t}) = 1$, akkor definíció szerint $b = base(v)$. Most tegyük fel, hogy $N(\mathcal{B}_{b,t}) = l + 1$. Ekkor, ha $v \in S_{b,t}$, tehát $tenacity(v) = t$ és $base(v) = b$, készen vagyunk. Ellenkező esetben létezik $u \in S_{b,t} \cup \{b\}$, melyre $v \in \mathcal{B}_{u,t-2}$. Ekkor $N(\mathcal{B}_{u,t-2}) \le l$ és vagy $u = b$ vagy $base(u) = b$. Az indukciós feltétel alapján létezik $1 \le k \le l$, melyre $u = base^k(v)$. Ha most $u = b$, akkor $b = base^k(v)$, és az indukciós feltétel alapján $base(v), \dots, base^{k-1}(v)$ a $\mathcal{B}_{b,t-2}$ és így a $\mathcal{B}_{b,t}$ virágban vannak. Ha $u \neq b$, akkor $b = base^{k+1}(v)$ és $k + 1 \le l + 1$. Az indukciós feltétel miatt $base(v), \dots, base^{k-1}(v)$ a $\mathcal{B}_{b,t-2}$-ben van, így $base(v), \dots, base^k(v)$ pedig a $\mathcal{B}_{b,t}$-ben. □

3.3.32. Lemma. *Legyen* $t \le t' < tenacity(b)$ *és* $t' < l_m$, *valamint* $\mathcal{B}_{b,t}$ *és* $\mathcal{B}_{b,t'}$ *két virág, azonos* b *bázissal. Ekkor* $\mathcal{B}_{b,t} \subseteq \mathcal{B}_{b,t'}$

Bizonyítás. Teljes indukció $t'-t$-re. A $t'=t$ eset nyilvánvaló. Az indukciós feltevés: $\mathcal{B}_{b,t} \subseteq \mathcal{B}_{b,t'-2}$. Most a 3.3.30 definícióból következően $\mathcal{B}_{b,t'-2} \subseteq \mathcal{B}_{b,t'}$, ezért $\mathcal{B}_{b,t} \subseteq \mathcal{B}_{b,t'}$. $\square$

3.3.33. Lemma. *Legyen $\mathcal{B}_{b,t}$ egy virág, melynek bázisa b és ereje $t < l_m$, valamint v egy csúcs, melyre igaz, hogy $base^k(v) = b$ valamely $1 \leq k$-ra. Ha $t \geq tenacity(base^{k-1}(v))$, akkor $v \in \mathcal{B}_{b,t}$.*

Bizonyítás. Teljes indukció k-ra. Ha $k=1$, akkor $base(v) = b$, legyen $tenacity(v) = r$, ekkor $r \leq t$. A 3.3.30 definícióból adódóan $v \in \mathcal{B}_{b,r}$ és a 3.3.32 lemma miatt $\mathcal{B}_{b,r} \subseteq \mathcal{B}_{b,t}$. Ebből következik, hogy $v \in \mathcal{B}_{b,t}$.

Az indukciós lépéshez legyen $base^{k-1}(v) = u$, $tenacity(u) = r \leq t$. Az indukciós feltétel szerint $v \in \mathcal{B}_{b,r-2}$. Mivel $base(u) = b$, ezért a 3.3.30 definícióból adódóan $\mathcal{B}_{u,r-2} \subseteq \mathcal{B}_{b,r}$ és a 3.3.32 lemma miatt $\mathcal{B}_{b,r} \subseteq \mathcal{B}_{b,t}$. Ebből következik, hogy $v \in \mathcal{B}_{b,t}$. $\square$

3.3.34. Lemma. *Legyenek $\mathcal{B}_{b,t}$ és $\mathcal{B}_{b',t'}$ virágok, melyekre $b \in \mathcal{B}_{b',t'}$. Ekkor $\mathcal{B}_{b,t} \subset \mathcal{B}_{b',t'}$.*

Bizonyítás. A 3.3.31 lemma alapján létezik $1 \leq k$, melyre $b' = base^k(b)$ valamint $base(b), \ldots, base^{k-1}(b) \in \mathcal{B}_{b',t'}$. Ekkor $t' \geq tenacity(base^{k-1}(b))$. Teljes indukciót használunk k-ra. A $k=1$ esetet nézzük: legyen $tenacity(b) = r$ Ekkor $t < r \leq t'$ és $\mathcal{B}_{b,t} \subset \mathcal{B}_{b,r-2}$. A 3.3.30 definícióból adódóan $\mathcal{B}_{b,r-2} \subset \mathcal{B}_{b',r}$, ahol valódi tartalmazás van, mert b nincs benne az első virágban. A 3.3.32 miatt $\mathcal{B}_{b',r} \subseteq \mathcal{B}_{b',t'}$, tehát $\mathcal{B}_{b,t} \subset \mathcal{B}_{b',t'}$.

Az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy $base^{k+1}(b) = b'$. Legyen $base^k(b) = v$ és $tenacity(v) = r$. Mivel $v \in \mathcal{B}_{b',t'}$, ezért $r \leq t'$,és ekkor $tenacity(base^{k-1}(b)) \leq r-2$. A 3.3.33 lemma következményeképp $b \in \mathcal{B}_{v,r-2}$, és mivel $base^k(b) = v$, az indukciós feltevés miatt $\mathcal{B}_{b,t} \subset \mathcal{B}_{v,r-2}$.

Mivel $base(v) = b'$, a 3.3.30 alapján $\mathcal{B}_{v,r-2} \subseteq \mathcal{B}_{b',r}$. Most $r \leq t'$ és $\mathcal{B}_{b',r} \subseteq \mathcal{B}_{b',t'}$, ezért $\mathcal{B}_{b,t} \subset \mathcal{B}_{b',t'}$. $\square$

3.3.35. Állítás. *Tegyük fel, hogy valamely páratlan t-re, melyre $t_m \leq t < l_m$, teljesül a **t-feltétel**.*

A legfeljebb t erejű virágok lamináris rendszert alkotnak.

Bizonyítás. Legyen $t' \leq t$ és $t'' \leq t$, valamint tegyük fel, hogy v benne van a $\mathcal{B}_{b,t'}$ és $\mathcal{B}_{b',t''}$ virágokban. Ha $b = b'$, akkor a 3.3.32 lemma miatt készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy $b \neq b'$. Most a 3.3.31 lemma miatt $b = base^k(v)$ és $b' = base^l(v)$, valamely k-ra és l-re. Mivel $b \neq b'$, ezért $k \neq l$, az általánosság megszorítása nélkül mondjuk, hogy $k < l$. A 3.3.31 lemma szerint $b = base^k(v) \in \mathcal{B}_{b',t''}$. A 3.3.34 lemma miatt $\mathcal{B}_{b,t'} \subset \mathcal{B}_{b',t''}$. Mivel egyik lemma se használta ki t-nél nagyobb erejű virágok létezését, ezért az állítás bizonyított. □

3.3.3. A bizonyítás

Először be kell látnunk, hogy minden csúcs a megfelelő kis- és nagyszint értékeket kapja az algoritmus futása során, ehhez szükségünk van egy lemmára.

3.3.36. Lemma. *Legyen (u, v) egy híd, melyre $tenacity(u, v) \leq l_m$.*

Ekkor, ha (u, v) párosításél, akkor u és v is belső csúcsok.

Amennyiben (u, v) nem párosításél, akkor $tenacity(u) \leq tenacity(u, v)$, ha u belső, akkor az egyenlőtlenség szigorú.

Bizonyítás. Páros kisszintet csak párosításélen keresztül kaphat egy csúcs, ha (u, v) párosításél, mivel híd, tehát egyik végpont sem határozza meg a másik kisszintjét, így ezek páratlanok. Ami pont azt jelenti, hogy a végpontok belsők.

Most tegyük fel, hogy (u, v) nem párosításél. Három eset lehetséges:

1. eset: u és v is külső csúcs. Ekkor azt állítjuk, hogy $evenlevel(u) = evenlevel(v)$. Tegyük fel, hogy $evenlevel(u) < evenlevel(v)$, ekkor a paritás miatt $evenlevel(u) + 1 < evenlevel(v)$ is teljesül. Egy $evenlevel(u)$-út az (u, v) éllel összeillesztve egy páratlan alternáló utat ad v-hez, így azt kapjuk, hogy $oddlevel(v) \leq evenlevel(u)+1 < evenlevel(v)$, ami ellentmond annak, hogy v külső csúcs.

Legyen $evenlevel(u) = evenlevel(v) = i$ ekkor $oddlevel(v) \geq i + 1$. Mivel egy $evenlevel(u)$-út és az (u, v) él együtt egy páratlan alternáló utat adnak v-be, ezért $oddlevel(v) = i + 1$ és ez ugyanígy igaz v-re is. Ekkor $tenacity(u) = tenacity(v) = tenacity(u, v) = 2i + 1$

2. eset: u és v is belső csúcs. Ekkor $minlevel(u)$ páratlan, és mivel (u, v) pillér, ezért $evenlevel(v) + 1 > oddlevel(u)$. Emiatt $evenlevel(u) + evenlevel(v) + 1 > evenlevel(u) + oddlevel(u)$, tehát $tenacity(u) < tenacity(u, v)$, az állítás ugyanígy adódik v-re is.

3. eset: u belső, v pedig külső csúcs. Ekkor $minlevel(u)$ páratlan, és mivel (u, v) pillér, ezért $evenlevel(v)+1 > oddlevel(u)$. Emiatt $evenlevel(u)+evenlevel(v)+1 > evenlevel(u) + oddlevel(u)$, tehát $tenacity(u) < tenacity(u, v)$. Egy $evenlevel(u)$-út az (u, v) éllel összeillesztve egy páratlan alternáló utat ad v-hez, így azt kapjuk, hogy $oddlevel(v) \leq evenlevel(u) + 1$, tehát $tenacity(v) \leq tenacity(u, v)$. $\square$

3.3.37. Tétel. *Minden v csúcsra, melyre $tenacity(v) < l_m$, az algoritmus helyes $minlevel(v)$ és $maxlevel(v)$ értékeket határoz meg.*

Bizonyítás. Az $l_m = 1$ eset nyilvánvaló: ekkor még vannak szomszédos, párosítatlan csúcsok G-ben, ezért tegyük fel, hogy $l_m \geq 3$. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $i = 0$-tól kezdve $i = (l_m - 1)/2$-ig az algoritmus az alábbi feladatokat teljesíti az i-edik keresési szinten:

1. feladat: A MIN eljárás pontosan az $i + 1$ kisszintű pontoknak határozza meg a kisszintjét, és az összes pillért megtalálja, mely $i + 1$ kisszintet ad valamelyik csúcsnak.

2. feladat: Ezen a keresési szinten a MIN eljárás végére $Br(2i + 1)$ az összes $2i + 1$ erejű híd halmaza.

3. feladat: A MAX eljárás helyes nagyszint értékeket határoz meg minden $2i+1$ erejű csúcsra.

Az indukció alapesete, vagyis $i = 0$ nyilvánvaló, MIN megadja az összes szomszédját a fedetlen csúcsoknak, ezek kisszintje 1. Olyan híd pedig nem létezhet, aminek 1 az ereje.

Most tegyük fel, hogy az indukciós feltétel minden i-nél kisebb keresési szintre igaz, belátjuk hogy a három feladat teljesül az i-edik keresési szinten.

1. feladat: Az i-edik keresési szint elején az indukciós feltétel alapján a v csúcshoz rendelt kisszint ∞ akkor és csak akkor, ha $minlevel(v) \geq i + 1$. Mivel a MIN eljárás az i szintű (kis vagy nagy) csúcsokból jár be a megfelelő paritású éleken, és akkor határoz meg kisszintet, ha annak pillanatnyi értéke legalább $i + 1$ (ez vagy ∞, vagy $i + 1$), ezért minden v csúcsra, aminek ezen a keresési szinten adta meg a kisszintjét, $minlevel(v) = i + 1$ valóban teljesül, és az él, amin elérte v-t tényleg pillér.

Most megmutatjuk, hogy a fordított irány is igaz: minden v csúcsra, melyre $minlevel(v) = i + 1$, a kisszint ezen a keresési szinten meghatározódik, valamint minden pillért, ami egy csúcsnak $i+1$ kisszintet határoz meg, az algoritmus pillérnek osztályoz. Legyen $minlevel(v) = i + 1$, p egy $minlevel(v)$-út, melynek az utolsó éle (u, v). Ekkor (u, v) pillér, és minden pillér így adódik (definíció). Az u csúcs mindenképpen BFS-tartó p-re nézve, különben v szerepel egy p-nél rövidebb u-ba vezető úton, ezáltal $minlevel(v) < i + 1$ lenne.

Az indukciós feltétel alapján az u csúcs kis- vagy nagyszintje i, ezért az i-edik szinten MIN bejárja az (u, v) élet, és megtalálja v-t. az indukciós feltétel alapján v kisszintje eddig ∞ vagy $i + 1$ volt. Mindkét esetben $i + 1$-két határozódik meg, és (u, v) pedig pillérnek minősül.

2. feladat: Legyen (u, v) egy híd, melyre $tenacity(u, v) = 2i + 1$. Nézzük azt az esetet, mikor (u, v) párosításél. A 3.3.2 lemma alapján $tenacity(u) = tenacity(v) = tenacity(u, v)$, valamint a 3.3.36 lemma miatt a végpontok belső pontok, tehát $oddlevel(u) = oddlevel(v) = i$. Emiatt az i-edik keresési szinten a MIN eljárás hídnak határozza meg (u, v)-t, és a $Br(2i + 1)$ halmazba teszi.

Ha (u, v) nem párosításél, akkor a 3.3.36 lemma szerinti három esetet nézzük. Az 1. esetben az i-edik keresési szinten a MIN eljárás meghatározza, hogy (u, v) híd, és az ereje $2i + 1$.

A 2. esetben tegyük fel, hogy $tenacity(u) \geq tenacity(v)$, a lemma miatt pedig $tenacity(u) < tenacity(u, v)$. A $(tenacity(v) - 1)/2)$-edik keresési szinten a MAX eljárás meghatározza v párosszintjét, a $(tenacity(u)-1)/2)(< i)$-edik keresési szinten pedig a MAX eljárás meghatározza u párosszintjét, tehát már az i szint előtt, a MAX eljárás meghatározza, hogy (u, v) egy híd, és a $Br(2i + 1)$ halmazba teszi.

A 3. esetben, mivel u külső, ezért $tenacity(u) \leq tenacity(u, v) = 2i + 1$, így $evenlevel(u) = minlevel(u) \leq i$, tehát ezt a MIN eljárás legfeljebb az i-edik szinten meghatározza, valamint eldönti, hogy (u, v) híd. Mivel v belső csúcs, ezért $tenacity(u) < tenacity(u, v) = 2i + 1$, így $evenlevel(v) = maxlevel(v)$-t a MAX eljárás meghatározta már az i-edik keresési szint előtt. Ezen két eljárás közül a későbbi meghatározza (u, v) erejét is, és a $Br(2i + 1)$ halmazba teszi azt.

3. feladat: A 3.3.26 2. állítása miatt minden $2i + 1$ erejű csúcs benne van egy $2i+1$ erejű híd tartójában, és a 2. feladat alapján minden ilyen híd eleme $Br(2i+1)$-nek az i-edik keresési szint MAX folyamatának kezdetekor.

A MAX eljárás futásakor tekintsük azt az állapotot, amikor az $(u, v) \in Br(2i+1)$ hídra következik a DDFS futtatása. Legyen S azon $2i + 1$ erejű csúcsok halmaza, melyeknek nagyszintjét MAX már eddig meghatározta.

Állítjuk, hogy a következő DDFS által megtalált pontok halmaza $support(u, v) - S$.

Az indukciós feltevés szerint minden $2i+1$-nél kisebb erejű csúcs, már benne van egy sziromban: a DDFS követi az elődöket u-ból és v-ből, és ha egy ilyen csúcsot talál, leugrik ezen szirom *bud** csúcsára. Ez igaz minden S-beli csúcsra is. Legyen w benne a $support(u, v) - S$ halmazban, ekkor van egy f kezdőpontú p $maxlevel(w)$ út (u, v)-n át, tegyük fel, hogy v magasabb p-n, mint u. Ekkor w elérhető v-ből az elődöket követve, és esetlegesen szirmokat átugorva. A $p[f \text{ to } u]$, az előzőtől diszjunkt úton a DDFS elérhet w szintje alá, így a DDFS megtalálja w-t. □

3.3.38. Lemma. *Az algoritmus megtalálja diszjunkt javító utak egy tovább nem bővíthető halmazát.*

Bizonyítás. Ha az i-edik keresési szinten egy DDFS két fedetlen csúcsnál áll meg, akkor $l_m = 2i + 1$. Mivel minden virágban az eljárás által talált alternáló út teljesíti a 3.3.26 tetel 4. állításában meghatározott tulajdonságokat, így az algoritmus egy legrövidebb p javító utat talál.

Az eljárás által kizárt pontok nem lehetnek részei egy újabb, ettől diszjunkt javító útnak, ám meg kell vizsgálni, hogy a DDFS feltétel ezután is teljesülni fog-e a többi hídra. Ezt a 3.3.26 tétel garantálja: legyen $v \in p$ eleme egy virágnak, és legyen $\mathcal{B}$ a legnagyobb ilyen virág, ennek bázisa b. Ekkor az eljárás b-t törli a gráfból (ideiglenesen, csak ebben a fázisban), és a rekurzív eljárás kitöröl minden csúcsot melynek nincs elődje, tehát törli a $\mathcal{B}$ virágot. □

3.3.39. Tétel. *Az algoritmus $O(m\sqrt{n} \cdot \alpha(m, n))$ időben fut, ahol α az inverz-Ackerman függvény.*

Bizonyítás. A MIN, MAX, a javító út keresés, és a csúcselhagyás minden élet konstans sokszor vizsgál egy fázis során. A maximális párosításhoz $O\sqrt{n}$ fázis szükséges [3], a *bud** meghatározásához fázisonként $Om \cdot \alpha(m, n)$ időre van szükség [4]. □

4. fejezet

A Gallai-Edmonds felbontásra épülő algoritmus

Legyen G gráf, keressük ebben a maximális párosítást. Tegyük fel, hogy már megtaláltunk t-darab k-elemű párosítást, legyen ezek halmaza: $\mathcal{L} = (M_1 \dots M_t)$.

Definiáljuk a következő halmazokat:

$$D(\mathcal{L}) = \{x \in V(G) | x \notin V(M_i) \text{ valamely } 1 \leq i \leq t\text{-re}\}$$

$$A(\mathcal{L}) = \{x \in V(G) - D(\mathcal{L}) | x \text{ szomszédja valamely } D(\mathcal{L})\text{-beli pontnak}\}$$

$$C(\mathcal{L}) = V(G) - D(\mathcal{L}) - A(\mathcal{L})$$

Amennyiben k a maximális párosítás elemszáma és $\mathcal{L}$ az összes maximális párosításból áll, akkor ez megegyezik a Gallai-Edmonds felbontással. Szükségünk van a következő lemmára:

4.0.40. Lemma. *Legyen $\mathcal{L}$ k-elemű párosításoknak egy halmaza, és legyen $M \in \mathcal{L}$. Tegyük fel, hogy M-ben nincs olyan él, mely $A(\mathcal{L})$ egy pontját $A(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$ egy pontjával kötné össze, és hogy M tartalmazza $G[D(\mathcal{L})]$ minden összefüggő komponensének egy majdnem-teljes párosítását. Ekkor M maximális párosítás.*

Bizonyítás. A feltevésből következik, hogy $D(\mathcal{L})$ minden összefüggő komponense páratlan, és minden ilyen komponensnek van pontosan egy pontja, mely párosítatlan, vagy $A(\mathcal{L})$ egy pontjával párosított. Az is adódik, hogy M $A(\mathcal{L})$ és $D(\mathcal{L})$ között futó élei fedik $A(\mathcal{L})$-t. Emiatt $D(\mathcal{L})$-nek pontosan $|A(\mathcal{L})| + |V(G) - V(M)|$ összefüggő komponense van, tehát:

$$def(G) \geq c_0(G - A(\mathcal{L})) - |A(\mathcal{L})| = |V(G) - V(M)|$$

ahol $def(G)$ a maximális párosítás által fedetlenül hagyott pontok száma, az egyenlőtlenség pedig a Berge-Tutte formulából jön. Így megkaptuk, hogy M maximális párosítás. □

Az algoritmus kezdetekor legyen $k = 0$ és $\mathcal{L}$ az üres párosítás. Általános lépésben válasszunk ki tetszőleges $M_1 \in \mathcal{L}$-t, és ellenőrizzük, hogy teljesíti-e a lemma feltételeit. Ha igen, akkor megállunk: M_1 maximális párosítás, és megkaptuk a Gallai-Edmonds felbontást is.

Tegyük fel, hogy M_1 nem teljesíti a lemma feltételeit, ekkor találunk egy M' párosítást, mely k-nál nagyobb, vagy egy nem $D(\mathcal{L})$-beli pontot elkerül. Első esetben legyen $\mathcal{L} = \{M'\}$, második esetben adjuk M'-t $\mathcal{L}$-hez, így növelve $D(\mathcal{L})$-t.

1. eset: Tegyük fel, hogy M_1 tartalmaz egy xy élet, melyre $x \in A(\mathcal{L})$ és $y \in A(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$. Ekkor $A(\mathcal{L})$ definíciója alapján x szomszédja valamely z, $D(\mathcal{L})$-beli pontnak. Most $D(\mathcal{L})$ definíciója alapján létezik olyan $M_i \in \mathcal{L}$ párosítás, mely elkerüli z-t. Ha M_1 elkerüli z-t, cseréljük ki az xy élet az xz élre, így kaptunk egy k elemű párosítást, ami y-t elkerüli így $D(\mathcal{L})$-t növeltük. Ha M_1 nem kerüli el z-t, akkor tekintsük a z-ben kezdődő, $M_1 - M_i$ alternáló utat, legyen ez P. Ha P másik végén is M_1 beli él van, akkor P növelő út M_i-re nézve, így nagyobb párosítást kaptunk. Ha P másik végén M_i-beli él van, és nem használja az xy élet, akkor legyen $P' = P + zx + xy$, és ekkor M_1-ből kaphatunk egy k élű párosítást úgy hogy P'-n kicseréljük a párosítás és nem-párosítás éleket. Ez az új párosítás elkerüli y-t, így $D(\mathcal{L})$-t növeltük. Ha pedig P átmegy xy-on, akkor P megfelelő részén cserélve kapunk egy újabb k élű párosítást, mely x-et vagy y-t elkerüli, így $D(\mathcal{L})$-t növeltük.

2. eset: Tegyük fel, hogy $G[D(\mathcal{L})]$-nek van egy T komponense, melyre $M_1 \cap E(T)$ nem egy majdnem-teljes párosítása T-nek. A következő részesetek lehetségesek:

2a. eset: Tegyük fel, hogy $M_1 \cap E(T)$ legalább két pontot kihagy T-ben, legyenek x és y ilyen pontok, valamint tegyük fel, hogy M_1 elkerüli x-et. Az y pont lehet fedetlen de lehet, hogy párosított egy $A(\mathcal{L})$-beli ponttal. Ha x és y szomszédosak, akkor ezt az élet vegyük be M_1-be: ha y fedetlen volt, egy $k + 1$ élű párosítást kaptunk, ha nem, akkor az eddigi élét kihagyva egy k elemű párosítást kapunk, mely egy $A(\mathcal{L})$ beli pontot elkerül.

Tegyük fel tehát, hogy x és y nem szomszédosak, legyen P az őket összekötő legrövidebb T-beli út, z pedig a közvetlenül x után következő csúcs P-n. Ekkor $D(\mathcal{L})$ definíciója alapján létezik egy $M_i \in \mathcal{L}$ párosítás, mely kihagyja z-t. Legyen Q a z-ben kezdődő $M_1 - M_i$-alternáló utat. Ha Q másik vége nem x, akkor Q paritásától függően Q vagy $Q + xz$ növelő út M_i-re vagy M_1-re (megfelelően), így nagyobb párosítást kaptunk. Ha Q másik vége x, és áthalad y-on, akkor y biztosan tartalmaz $A(\mathcal{L})$-beli pontot, mert ilyenkor y nak van párja M_1-ben, és ez $A(\mathcal{L})$-beli. Ekkor a $Q + xz$ egy páratlan kört határoz meg, ezen átrendezhetjük M_1 éleit úgy, hogy kihagyják az $A(\mathcal{L})$-beli pontot, tehát növelni tudtuk $D(\mathcal{L})$-t. Végül, ha Q másik vége x, de nem halad át y-on, akkor Q-n cserélve kapunk egy másik k-elemű, M_1' párosítást, mely elkerüli z-t, és $M_1' \cap E(T)$ elkerüli y-t. Mivel a z és y közti távolság kisebb, mint az x és y közötti, ezt az eljárást ismételve legfeljebb $|V(T)|$-szer, visszajutunk egy korábban már vizsgált esethez.

2b. eset: Tegyük fel, hogy $M_1 \cap E(T)$ legalább két pontot kihagy T-ben, de M_1 fedi T-t. Ekkor x és y párjai az $A(\mathcal{L})$-beli u és v pontok (megfelelően). Legyen $M_i \in \mathcal{L}$, mely kihagyja x-et, és legyen Q az $M_1 - M_i$ alternáló út. Ha Q másik végén is M_1-beli él van, akkor javító út M_i-re nézve, tehát tegyük fel, hogy a másik vége M_i-beli. Ha Q nem halad át y-on, akkor M_1-ből Q-n cserélve kapunk egy M_1', k-elemű párosítást, mely kihagyja x-et, és $M_1' \cap E(T)$ kihagyja y-t. Ezzel visszakaptuk a 2a esetet. Ha Q átmegy y-on és y páros távolságra van a végpontjaitól Q-n, akkor Q megfelelő részén cserélve kapunk egy k elemű M_1' párosítást, ami kihagyja y-t, és $M_1' \cap E(T)$ kihagyja x-et. Megint a 2a esetet kaptuk vissza. Ha pedig y páratlan távolságra van a végpontjaitól Q-n, akkor Q megfelelő részén cserélve egy k-elemű párosítást kapunk, mely kihagy egy pontot $A(\mathcal{L})$-ből, így növeltük $D(\mathcal{L})$-et.

3b. eset: Tegyük fel, hogy $M_1 \cap E(T)$ teljes párosítása T-nek, ekkor $|T|$ páros. Legyen $M_i \in \mathcal{L}$ olyan párosítás, ami kihagy egy pontot T-ben. Mivel $|T|$ páros, $M_i \cap E(T)$ kihagy egy másik pontot is T-ben, így visszakaptuk a 2a esetet.

Ezzel a lemma minden feltételének nem-teljesülése esetén tudtunk nagyobb párosítást adni vagy a $D(\mathcal{L})$ halmazt növelni.

5. fejezet

A b-matching algoritmus

A fejezet első részében a párosítás probléma általánosítása szerepel, majd pedig az előző fejezet algoritmusának az átalánosításra vonatkozó változata.

5.1. A b-matching probléma

Az előbb bemutatott tételeknek és fogalmaknak létezik általánosítása a b-matchingekre vonatkozóan, nézzük most ezeket. A bizonyítások a tételek még általánosabb formáihoz [2]-ben találkatók.

A párosítás-problémára úgy is tekinthetünk, mint egy élhalmaz keresésére, mely esetén minden csúcsra a kiválasztott illeszkedő élek száma legfeljebb 1. Amennyiben maximális párosítást keresünk, az a cél, hogy minél több csúcsnál legyen pontosan 1 kiválasztott szomszédos él. A b-matchingekre ez a következőképp néz ki. Legyen adott egy, a csúcsokon értelmezett b függvény. Maximális elemszámú $H \subseteq G$ részgráfot keresünk, melyre $V(H) = V(G)$, és minden v csúcsra $\deg_H(v) \leq b(v)$.

A keresés során olyan H részgráfokat is megengedünk, melyek esetleg sértik a feltételt: a cél olyan H részgráf, melyre $\deg_H(v) = b(v)$ minden v csúcsra.

Ha egy v csúcsnál $\deg_H(v) > b(v)$, a csúcsot nevezzük többletesnek, ha $\deg_H(v) < b(v)$ hiányosnak. Egy, a csúcsokon értelmezett f függvényre az $f(X)$ jelölés ahol $X \subseteq V(G)$, mindig a halmaz csúcsain vett összeget jelöli. Az X és Y halmazokra $\nabla(X, Y)$ a köztük futó élek száma.

Legyen H tetszőleges részgráfja G nek. Definiáljuk a következő mennyiségeket:

$$\delta(v; H; b) = \max\{|\deg_H(v) - b(v)|\}$$

$$\delta(H;b) = \sum_{v \in V(G)} \delta(v;H;b)$$
$$\delta(b) = \min_H \delta(H;b)$$

b-faktornak nevezünk egy H részgráfot, ha $\delta(H;b) = 0$ b-optimálisnak nevezünk egy H részgráfot, ha $\delta(H;b) = \delta(b)$. A $\delta(H;b)$ értéket nevezzük H hibájának.

Adott H-ra nézve nevezzük v-t pontosnak, ha $\deg_H(v) = b(v)$, hiányosnak ha $\deg_H(v) < b(v)$, többletesnek ha $\deg_H(v) > b(v)$. Legyen $\overline{H} = (V(G), E(G) - E(H))$, valamint $\hat{b}(v) = \deg_G(v) - b(v)$.

A H részgráf lokális javításának nevezzük, ha egy nem H-beli élet H-hoz adunk, vagy egy H-beli élet elhagyunk H-ból, és ez által legalább az egyik végpontján csökken a hiba értéke. Lokális javítás esetén a részgráf hibája nem nőhet.

Könnyen látható, hogy minden optimális H részgráfból készíthető egy szintén optimális b-matching: a többletes csúcsoknál hagyjunk el éleket, míg azok hibája 0 nem lesz. Minden ilyen élelhagyás nál az összhiba megmarad mert ezek lokális javítások.

Most a következő módon definiáljuk a halmazokat:

$$C = C(G;b) = \{x \in V(G) | \deg_H(v) = b(v)\ \forall H \text{ b-optimális részgráfra}\}$$

$$A = A(G;b) = \{x \in V(G) - C | \deg_H(v) \geq b(v)\ \forall H \text{ b-optimális részgráfra}\}$$

$$B = B(G;b) = \{x \in V(G) - C | \deg_H(v) \leq b(v)\ \forall H \text{ b-optimális részgráfra}\}$$

$$D = D(G;b) = V(G) - A - B - C$$

Ez hasonlít a Gallai-Edmonds felbontásra, voltaképp annak általánosítása: $b \equiv 1$ esetén $C(G;b) = C(G)$, $A(G;b) = A(G)$, $B(G;b)$ a $D(G)$ egyelemű komponenseinek uniója, $D(G;b)$ pedig a többeleműeké.

Igaz a következő:

5.1.1. Lemma. *Legyen J egy b-optimális részgráf, H pedig tetszőleges részgráf. Ekkor H ból lokális javításokkal kapható egy H_0, b-optimális részgráf, melyre $E(J) \oplus E(H_0)$ csak C által feszített élekből áll.*

Ennek folyomány a következő tétel:

5.1.2. Tétel. *Legyen G-ben adott az előbb definiált felbontás b-re nézve. Ekkor:*

1. *az A és C között futó, valamint A által feszített élek egyetlen b-optimális részgráfban sincsenek benne.*

2. *a B és C között futó, valamint B által feszített élek minden b-optimális részgráfban benne vannak.*

3. *nincs él C és D között*

Bizonyítás. Legyen uv él, melyre $u \in A$ és $v \in A \cup C$, és indirekt tegyük fel, hogy H egy b-optimális részgráf, mely tartalmazza uv-t. Az előző lemma és A definíciója alapján H-ból kapható egy b-optimális J részgráf, melyre $\deg_J(u) > b(u)$. Az uv él kitörlése egyetlen b-optimális részgráfra sem növelheti a hibát egyik csúcson sem, így nem lehet lokális növelés, tehát $uv \in J$. De uv törlése J-ből lokális növelés $\deg_J(u) > b(u)$ miatt, ez pedig ellentmondás. □

A következő fogalom a faktorkritikusság általánosítása, mely így szól: Azt mondjuk, hogy a G gráf b-kritikus, ha összefüggő, és $A = B = C = \emptyset$. Kimondható a Gallai-lemma általánosítása is:

5.1.3. Tétel. *Legyen G egy b-kritikus gráf. Ekkor $\delta(b) = 1$.*

A következő tétel a 5.1.2 tétellel együtt a Gallai-Edmonds struktúratétel általánosításának tekinthető:

5.1.4. Tétel. *Legyen G gráf, b valamint a partícióhalmazok az előbbieknek megfelelően definiáltak. Legyenek $D_1, \ldots, D_t$ a $G[D]$ összefüggő komponensei. Vezessük be a következő függvényt: $\tilde{b(v)}^* = b(v) - |\nabla(v, B)|$. Ekkor minden D_i $\tilde{b}^*$-kritikus, valamint $G[C]$-ben van $\tilde{b}^*$-re nézve hibátlan részgráf. Igaz ezen kívül, hogy:*

$$\delta(b) = t + |\nabla(A, B)| - b(A) - \hat{b}(B)$$

5.2. Az algoritmus

Szükség lesz a Berge-Tutte formula $\mathrm{def}(G) \geq \max_{X \subseteq V(G)}\{c_0(G-X) - |X|\}$ irányának általánosítására, ehhez viszont a páratlanság fogalmának általánosítására.

5.2.1. Definíció. *Legyenek X és Y diszjunkt részhalmazai $V(G)$-nek. Azt mondjuk, hogy a $G - X - Y$ egy K összefüggő komponense (X, Y)-páratlan (b-re nézve), ha $b(V(K)) + |\nabla(V(K), Y)|$ páratlan. Jelölje $\tau(X, Y)$ a $G - X - Y$ gráf (X, Y)-páratlan komponenseinek számát.*

5.2.2. Tétel. *Legyen G gráf, b a csúcsokon adott egész értékű függvény, melyre $0 \le b \le \deg_G$. Ekkor:*

$$\delta(b) \ge \max\{\tau(X,Y) + |\nabla(X,Y)| - b(X) - \hat{b}(Y)\}$$

ahol (X,Y) befutja $V(G)$ összes diszjunkt részhalmazpárját.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy minden H-ra és (X,Y)-ra

$$\delta(H;b) \ge \tau(X,Y) + |\nabla(X,Y)| - b(X) - \hat{b}(Y).$$

Legyen $Z = V(G) - X - Y$, ekkor kapjuk, hogy

$$\delta(H;b) = \sum_{v \in V(G)} \delta(v;H;b) \ge \sum_{v \in X} (\deg_H(v) - b(v)) + \sum_{v \in Y} (\deg_{\overline{H}}(v) - \hat{b}(v)) + \sum_{v \in Z} \delta(v;H;b).$$

Legyek K egy (X,Y)-páratlan komponens $G - X - Y$-ban, ekkor K vagy tartalmaz egy v-pontot, melyre $\delta(v;H;b) \ne 0$, vagy H-ban van él K és X között, vagy $\overline{H}$-ban van él K és Y között. Ez azért igaz mert a fenti tulajdonsággal rendelkező csúcsok/élek összege páratlan. Ebből azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{v \in Z} \delta(v;H;b) \ge \tau(X,Y) - |\nabla_H(Z,X)| - |\nabla_{\overline{H}}(Z,Y)|,$$

tehát

$$\delta(H;b) \ge \deg_H(X) + \deg_{\overline{H}}(Y) - b(X) - \hat{b}(Y) + \tau(X,Y) - |\nabla_H(Z,X)| - |\nabla_{\overline{H}}(Z,Y)|.$$

Igaz továbbá, hogy:

$$\deg_H(X) + \deg_{\overline{H}}(Y) \ge |\nabla_G(X,Y)| + |\nabla_H(Z,X)| + |\nabla_{\overline{H}}(Z,Y)|,$$

ebből pedig következik a bizonyítani kívánt egyenlőtlenség. □

Az algoritmus működése nagyon hasonló az előző fejezetben leírtéhoz: fenntartjuk k hibájú részgráfoknak egy $\mathcal{L} = H_1 \dots H_t$ halmazát, melyet egyre bővítünk, esetleg k-t sikerül csökkenteni. Kezdetben ez a halmaz állhat az üres élhalmazból.

Most a következő módon definiáljuk a halmazokat:

$$C(\mathcal{L}) = \{v \in V(G) |\, \deg_H(v) = b(v)\ \forall H \in \mathcal{L}\}$$

$$A(\mathcal{L}) = \{v \in V(G) - C\mathcal{L} |\, \deg_H(v) \ge b(v)\ \forall H \in \mathcal{L}\}$$

$$B(\mathcal{L}) = \{v \in V(G) - C\mathcal{L} |\, \deg_H(v) \le b(v)\ \forall H \in \mathcal{L}\}$$

$$D(\mathcal{L}) = V(G) - A - B - C$$

Az előző algoritmus mintájára következzen a lemma:

5.2.3. Lemma. *Legyen $\mathcal{L}$ k-hibájú részgráfok egy halmaza, és legyen $H \in \mathcal{L}$. Tegyük fel, hogy H-ban nincs olyan él, mely $A(\mathcal{L})$ egy pontját $A(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$ egy pontjával kötné össze, H tartalmaz minden élet, mely $B(\mathcal{L})$ egy pontját $B(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$ egy pontjával köti össze, és hogy H tartalmazza $G[D(\mathcal{L})]$ minden összefüggő komponensének egy 1-hibájú részhalmazát az $\tilde{b(v)} = b(v) - |\nabla(v, B(\mathcal{L}))|$-függvényre nézve. Szükséges, hogy minden ilyen komponensnek pontosan egy olyan pontja van, melynek hibája 1, vagy H-ban összekötött a X-szel, vagy $\overline{H}$-ban összekötött Y-nal. Szükséges még hogy G-ben nincs él $C(\mathcal{L})$ és $D(\mathcal{L})$ között. Ekkor H minimális hibájú.*

Bizonyítás. A bizonyítás is hasonló módon történik: legyen a 5.2.2 tételben $X = A(\mathcal{L})$, $Y = B(\mathcal{L})$, belátjuk hogy ekkor mindenütt egyenlőség teljesül a bizonyítás során adódó egyenlőtlenségekben, tehát H hibája tényleg minimális. Mivel az adott $v \in X$ esetén $\delta(v; H; b) = \deg_H(v) - b(v)$ és $v \in Y$-ra pedig $\delta(v; H; b) = \deg_{\overline{H}}(v) - \hat{b}(v)$, ezért

$$\sum_{v \in V(G)} \delta(v; H; b) = \sum_{v \in X} (\deg_H(v) - b(v)) + \sum_{v \in Y} (\deg_{\overline{H}}(v) - \hat{b}(v)) + \sum_{v \in Z} \delta(v; H; b).$$

Mivel H tartalmaz a $\tilde{b}$-függvényre nézve 1-hibájú a részhalmazt a $D(\mathcal{L})$ komponenseken, így ezek (X, Y)-páratlanok. Ezen tulajdonság és a feltételek miatt

$$\sum_{v \in Z} \delta(v; H; b) = \tau(X, Y) - |\nabla_H(Z, X)| - |\nabla_{\overline{H}}(Z, Y)|.$$

Végül pedig mivel H-ban nincs él $A(\mathcal{L})$ és $A(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$ pontjai között és $\overline{H}$-ban nincs él $B(\mathcal{L})$ és $B(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$ között, így

$$\deg_H(X) + \deg_{\overline{H}}(Y) = |\nabla_G(X, Y)| + |\nabla_H(Z, X)| + |\nabla_{\overline{H}}(Z, Y)|,$$

ezzel bizonyítva a lemmát. □

Legyen ismét az üres párosítás a kiindulóhelyzet.

A pontok itt $C(\mathcal{L})$-ből $A(\mathcal{L})$-ba vagy $B(\mathcal{L})$-be, ezekből pedig $D(\mathcal{L})$-be fognak átkerülni.

Általános lépésben válasszunk ki tetszőleges $H \in \mathcal{L}$-t, és ellenőrizzük, hogy teljesíti-e a lemma feltételeit. Ha igen, akkor megállunk: H optimális részhalmaz, és megkaptuk az általánosított Gallai-Edmonds felbontást is. Ha nem, akkor pedig az alábbi esetek valamelyike áll fenn:

1.eset: Legyen H egy olyan részgráf melyre x, $A(\mathcal{L})$-beli pontnak van H-beli y szomszédja $(A\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$-ben. Ekkor, ha $\deg_H(x) > b$, a kérdéses élet elhagyva x hibája eggyel csökken, y hibája pedig vagy csökken, ekkor az élet kihagyva találtunk egy kisebb hibájú részhalmazt vagy nő, ekkor pedig y kikerül a $C(\mathcal{L}) \cup A(\mathcal{L})$-ból, tehát tegyük fel, hogy $\deg_H(x) = \deg_h(y) = b(x)$. Az x-hez mindenképpen létezik egy olyan $H' \in \mathcal{L}$ részgráf, melyre $\deg'_H(x) > b(x)$. Ebben az esetben az előbbi gondolatmenet miatt x minden H'-beli szomszédja $B(\mathcal{L}) \cup D(\mathcal{L})$-ben van. Tegyük fel tehát, hogy $\deg_H(x) = b(x)$, ekkor az előzőek miatt biztosan van x-nek egy $z \in B(\mathcal{L}) \cup D(\mathcal{L})$ szomszédja, melyre $xz \notin H$. Amennyiben a $\deg_H(z) < b(z)$, cseréljük ki H-ban a xy és xz éleket, kapunk egy olyan részgráfot, mely elkerüli y-t. Ha $\deg_H(z) = b(z)$, akkor létezik egy $H' \in \mathcal{L}$, melyre $\deg_{H'}(z) < b(z)$. Most a másik algoritmushoz hasonlóan egy P alternáló utat (illetve sétát) építünk, mely felváltva használ éleket H-ról és H'-ről. Itt azonban egy csúcsot többször is használhatunk, ám minden élet csak egyszer. Először is vegyük a szimmetrikus differenciát, tehát hagyjuk el azon éleket, melyek mindkét részgráfban szerepelnek.

Esetünkben az alternáló út z-ből indul egy H-beli éllel, és az alábbi módon építjük fel:

Jelöljük v-vel azt a csúcsot ami az út-kezdemény utolsó pontja.

Ha az utolsó általunk használt él H-beli, és $\deg_{H'}(v) < b(v)$, akkor találtunk egy javító utat H'-re nézve. Ha $\deg_{H'}(v) \geq b(v)$, akkor két esetet különböztetünk meg: ha $\deg_H(v) > b(v)$, akkor $\deg_H(z)$ csökkenthető H ban az úton cserélve úgy, hogy a hiány nem változik, ha pedig $\deg_H(v) \leq b(v)$, akkor az alternáló út-kezdemény folytatható v-ből egy H'-beli éllel, mivel ezekből legalább annyi van, mint H-beliekből.

Ha az utolsónak használt él H'-beli, és $\deg_H(v) < b(v)$, akkor $\deg_H(z)$ megint csökkenthető H-ban az úton cserélve. Ha $\deg_H(v) \geq b(v)$, akkor megint két eset lehetséges: ha $\deg_{H'}(v) > b(v)$, akkor találtunk egy javító utat H'-re nézve, ha pedig $\deg_{H'}(v) \leq b(v)$, akkor az út-kezdemény ismét folytatható. Ha egy ilyen lépés során visszajutnánk a kezdőpontba, egy alternáló körsétát kapunk. Ekkor H'-n cserélve az eljárást újraindítva az előbb bejárt élek eltűnnek a szimmetrikus differenciából. Ekkor indítsuk újra az eljárást.

Ha olyan csúcsba értünk ahol már jártunk, az út hosszának paritásától függően onnan mindig tudunk tovább menni (ha páros), vagy találtunk egy javító utat (ha páratlan).

Látható hogy mindig vagy megállunk, vagy tudunk tovább menni, és minden élen csak egyszer léphetünk, így az eljárás véges. Ha P növelő út, végezzük el a cserét, ha nem az, akkor két eset lehetséges. Ha P elkerüli xy-t, akkor H-ból $P + zx + xy$-on cserélve kapunk egy részgráfot, melynek hibája k, és y hiányos benne, így az átkerül $B(\mathcal{L})$-be. Ha P használja xy-t, akkor a megfelelő részén cserélve H-ból egy olyan k hibájú részgráf kapható, melyben x vagy y hiányos, így az átkerül a megfelelő partícióhalmazba. Figyeljük meg, hogy P semmiképp sem használja az xz élet, mert ha benne van a szimmetrikus differenciában és x felől éri el a séta, akkor alternáló körséta záródik, ha pedig a másik irányból, akkor z-hez visszatérve már lenne egy javító-út.

Ugyanígy bizonyítható az az eset, mikor $B(\mathcal{L})$-beli pontnak van $\overline{H}$-beli szomszédja $B(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$-ben.

2.eset: Ha G-ben van él $z \in D(\mathcal{L})$ és $x \in C(\mathcal{L})$ között, akkor létezik olyan H, melyre z többletes, és olyan H', amire hiányos. Tegyük fel, hogy $xz \in H'$ és $xz \notin H$, különben az él elhagyásával/bevételével x kikerül $C(\mathcal{L})$-ből. Most H és H' szimmetrikus differenciáján nézzük az előbb is vizsgált z-ből induló alternáló utat. Ha javító-út, akkor kész vagyunk, ha nem, akkor H-ban az úton cserélve csökkenthető z hibája, így ismét az előbb vizsgált esetek állnak fenn: z hiányos lesz, ekkor bevehetjük xz-t ezáltal x kikerül $C(\mathcal{L})$-ből, vagy az alternáló út körbe ér, ekkor ezen H'-ben cserélve kaptunk egy részgráfot, melyben z hiányos és benne van xz.

3.eset: Tekintsünk egy T komponenst $G[D(\mathcal{L})]$-ben. Innentől kezdve minden H részgráfról feltesszük a következőket: $A(\mathcal{L})$ és $D(\mathcal{L})$ közötti élek esetén ha H-ban van, akkor az $A(\mathcal{L})$ beli csúcs pontos, a $D(\mathcal{L})$-beli pedig nem többletes, $B(\mathcal{L})$ és $D(\mathcal{L})$ közötti élek esetén, ha $\overline{H}$-ban van, akkor a $B(\mathcal{L})$-beli csúcs pontos, a $D(\mathcal{L})$-beli nem hiányos. Hívjuk ezt **($*$)-feltevésnek**.

Tegyük fel, hogy $H \cap E(T)$-ben legalább két pont, x és y hibája is pozitív $\tilde{b}$-re nézve. **3a.eset:** Nézzük azt az esetet mikor mindkettő hiányos, valamint az egyik (x) a teljes H-ra nézve is hiányos. (a többletes eset azonos módon kezelhető) Ha szomszédosak, akkor az élet behúzva és esetleg egy élet elhagyva y és $A(\mathcal{L})$ között, csökkenthető a hiány, vagy növelhető $D(\mathcal{L})$ mérete. Ha nem szomszédosak, akkor legyen P az őket összekötő legrövidebb út T-ben, legyen ezen x szomszédja z. Ekkor van H', melyre z hiányos. Itt kezdődhet egy $H - H'$-alternáló út, mely nek megfelelő részén cserélve nagyobb párosításhoz vagy a két fedetlen pont közötti rövidebb távolsághoz jutunk attól függően, hogy mi az út vége, valamint hogy áthalad-e y-on.

Amikor az egyik hiányos, a másik többletes, akkor ugyanígy működik a bizonyítás, de szomszédos csúcsok esetén ha a közöttük levő él nincs H-ban, akkor javító utat indíthatunk a többletesből. Ha a köztük levő él nincs H-ban, akkor $\overline{H}$-ra vonatkozó javító utat kell indítani a hiányos csúcsból.

3b.eset: Tegyük fel, hogy x és y hiányos, de a teljes H-ra nézve egyik sem az. Ekkor x és y valamint az u és v között futnak élek (megfelelően). Legyen H' olyan részgráf, melyre x hiányos, ekkor indíthatunk innen egy Q alternáló utat. Ha javító út, készen vagyunk, ha nem az akkor, két eset lehet: ha nem megy át y-on, akkor a megfelelő részén cserélve a 3a esetre jutunk, ha átmegy rajta akkor pedig a másik végétől mért távolság függvényében a megefelelő részen cserélve visszajutunk a 3a esetre, vagy pedig egy $A(\mathcal{L})$-beli ponttal növelni tudtuk $D(\mathcal{L})$-t.

3c.eset: Tegyük fel most, hogy $H \cap E(T)$ hibátlan fedés T-ben, a $\tilde{b}$-re nézve, ekkor $\tilde{b}(T)$ páros. Vegyünk egy x pontot, és ekkor van olyan H', melyre ez hiányos. Mivel $\tilde{b}(T)$ páros, ezért $H \cap E(T)$-ben van még egy pont aminek nem0 a hibája, ezzel visszakaptuk a 2a esetet.

4.eset: Ha $H \cap E(T)$ egyetlen ponton hibás és a hiba legalább 2, akkor innen mindig indítható egy javító út. Az ezen való csere vagy javít, vagy visszajut az előző esetek egyikére.

5.eset: Feltehetjük tehát, hogy T hibája $H \cap E(T)$-ben $\tilde{b}$-re nézve 1. Ha T-beli x ponthoz vezet él H-ban $y \in A(\mathcal{L})$-ből, és $\overline{H}$-ban $z \in B(\mathcal{L})$-ből is, akkor ez csak pontos lehet, különben egy él hozzáadásával vagy elhagyásával tudnánk javítani. A $(*)$ feltevés miatt y és z is pontos. Most létezik egy H' részgráf, ami fedetlenül hagyja z-t. Innen tehát indíthatunk egy $H - H'$-alternáló utat, a lehetséges kimenetelek ugyanazok, mint az 1.esetnél. Most ha van olyan T-beli x pont, mely $H \cap E(T)$-ben $\tilde{b}$-re nézve pontos, és x vezet él H-ban $y \in A(\mathcal{L})$-ből, vagy $\overline{H}$-ban $z \in B(\mathcal{L})$-ből, akkor ez nem lehet pontos H-ban, így ezt az élet hozzáadva vagy elhagyva csökkenteni tudjuk a hibát x-en, így az él másik végén levő pont átkerül $D(\mathcal{L})$-be. Amennyiben nincs ilyen pont, akkor a T-beli x hibás ponthoz vezet legalább két él $A(\mathcal{L})$-ből. Ekkor x H-ban többletes, így egy $A(\mathcal{L})$-be vezető élet elhagyva ismét növelni tudtuk $D(\mathcal{L})$-et.

Látható tehát, hogy a pontok $C(\mathcal{L})$-ből $A(\mathcal{L})$-ba vagy $B(\mathcal{L})$-be, ezekből pedig $D(\mathcal{L})$-be kerülnek át, vagy találunk kisebb hibájú részgráfot.

6. fejezet

Az MV-algoritmus implementációja

Az implementáció során a C++ programozási nyelvet, valamint a LEMON template library-t [5] használtam. A kitűzött célokat sikerült elérni, az eredmények alább láthatók egy táblázatban.

A párosítás, valamint a következő adatok `NodeMap`-ként vannak eltárolva: az algoritmus minden új párosítás keresésekor eltárolja a csúcsok szintjeit és értékeit valamint, hogy a csúcs használható-e (a már megtalált utak kizárnak csúcsokat), ezen kívül jegyezzük a csúcsokhoz tartozó szirmokat és akadályokat.

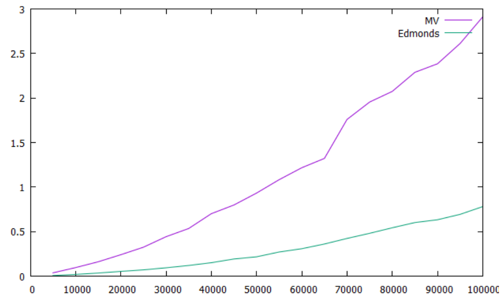
Az implementáció nem teljes egészében a cikk által leírt módon történik, algoritmus azonban ugyanaz. A programba a szirom-csúcsok nem kerültek bele, helyette minden csúcsról pointerek mutatnak a megfelelő többi csúcsba, valamint a javító utak megkeresésénél használt rekurzió helyett egy gyorsabb futású megoldást alkalmaztam, mely adatok tárolásával helyettesíti a számításigényt.

A program tesztelésére nagy méretű véletlen gráfokat választottam, paraméterként a gráf csúcsszámát és az átlagos fokszámot lehet megadni.

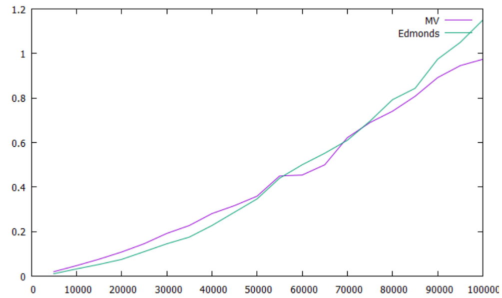
A futás tesztelésére a LEMON-ban már meglévő párosítás-algoritmust használtam, ez az Edmonds által kifejlesztett algoritmusra épül és $O(n^3)$ futásidejű.

A futási eredményekből kitűnik, hogy azonos átlagfokszám mellett a csúcsszám növelésével az MV-algoritmus futása rövidebb lesz, mint az Edmonds-algoritmusé. Ugyanez figyelhető meg azonos csúcsszám mellett az élszám növelésével is. A következő oldalon néhány összehasonlító grafikon található a futási időkről a csúcsszám függvényében, adott élsűrűség mellett, valamint egy összesítő grafikon is.

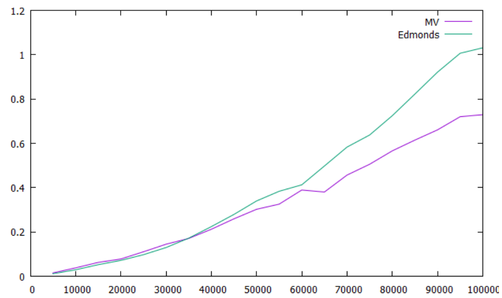
További kutatás tárgya lehet a b-matchong algoritmus implementálása és ennek vizsgálata, valamint az algoritmusok általánosítása súlyozott esetre.



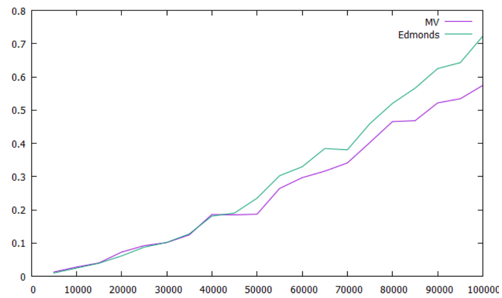
6.1. ábra. átlagfokszám: 3



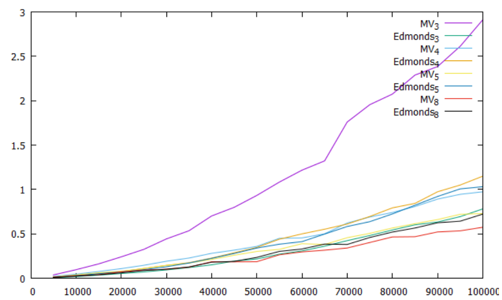
6.2. ábra. átlagfokszám: 4



6.3. ábra. átlagfokszám: 6



6.4. ábra. átlagfokszám: 8



6.5. ábra. az összes

Irodalomjegyzék

[1] Vijay V. Vazirani *A Proof of the MV Matching Algorithm*, February 13, 2014, http://www.cc.gatech.edu/ vazirani/

[2] L. Lovász and M.D. Plummer *Matching Theory* North-Holland, Amsterdam-New York, 1986.

[3] A. V. Karzanov. An exact estimate of an algorithm for fnding a maximum flow, applied to the problem on representatives. Problems in Cybernetics, 5:66-70, 1973. Announced at the Seminar on Combinatorial Mathematics (Moscow, 1971).

[4] R. E Tarjan. Efficiency of a good but not linear set union algorithm. Journal of the ACM, 22:215-225, 1975.

[5] LEMON, Library for Efficient Modeling and Optimization in Networks, EGRES, Egerváry Research Group on Combinatorial Optimization, 2003-2013, http://lemon.cs.elte.hu/