Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Bóra Eszter

Idő-inkonzisztens tervezés viselkedéses közgazdaságtani problémákban

MSc Szakdolgozat

Témavezető:

Király Tamás

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2016

Kivonat

Az idő-inkonzisztencia olyan irracionális viselkedésekhez vezet, mint a halogatás, vagy az elvállalt feladat feladása időközben. A jelenséget egy irányított gráffal modellezzük Kleinberg és Oren [8] alapján, ahol az egyes csúcsok a feladat elvégzésének lehetséges közbülső állapotait jelölik, a költséggel súlyozott élek pedig az egyik állapotból a másik állapotba való eljutáshoz szükséges munkát jelentik. Az ügynök ezen a gráfon szeretne eljutni t-be, a feladat befejezéséhez, a lehető legolcsóbb módon. Az ügynököt jellemez egy $\beta \leq 1$ jövő torzító paraméter. Amikor egy csúcsban van, az ügynök az onnan kilépő éleknek a valós költségét látja, a többi élnél viszont a költség β-szorosával számol. Az ügynök naiv, azaz a paraméterének létével nem számol.

Ismertetjük a szakirodalom eredményeit a kiinduló modellről, majd módosítjuk a modellt úgy, hogy feltételezzük, hogy az ügynök tisztában van azzal, hogy van jövő torzító paramétere és ezt valamilyen módon frissítheti. Bebizonyítunk egy-egy felső becslést a kétféle frissítő eljárás költséghányadosára, és mutatunk is egy-egy példát, ahol el is éri.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a témavezetőmnek, Király Tamásnak, az érdekes témát és az útmutatást. Köszönöm családomnak és barátaimnak a türelmet és a biztatást.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Az ember racionális. Legalábbis a közgazdaságtan szerint. A közgazdaságtan egyik fő dogmája, hogy az ember gazdasági döntései során a lehetőségek közül a számára legnagyobb nettó nyereségűt választja ki. [4] De akkor mi a helyzet a halogatással? A halogatás az a viselkedés, amikor egy előre eltervezett feladat elvégzését akaratlagosan elhalasztjuk annak ellenére, hogy ebből hátrány származik. El kéne kezdenünk mozogni, diétázni, nyelvet tanulni, de valahogy, mindig csak „holnap" kezdjük el. Megvettünk egy sport-, színház bérletet, mégsem megyünk el minden alkalommal. Felvettünk érdekes kurzusokat a világ legjobb egyetemeiről tömeges online kurzusokon, mégsem fejezzük be. A halogatásnak komoly társadalmi, gazdasági, pszichés, egészségügyi vonatkozásai, kárai vannak. Van erre valami racionális magyarázat, meg lehet-e jósolni ezt a viselkedést, vagy ez egy újabb rejtély, amelynek okát, az emberi psziché mélyebb rétegeiben kell keresni?

A közgazdaságtanban már kidolgoztak olyan modelleket, amelyben a halogatás, a feladatok feladása, vagy a terv módosítása végrehajtása közben modellezhető. A szakdolgozatban egy olyan új modellel fogunk foglalkozni, amely mind a három jelenségre alkalmazható, és az eddigi, hiperbolikus modellekhez képest egyszerűbb, kevesebb paraméter szükséges.

A szakdolgozat célja, hogy ezt az új modellt ismertesse és a szakirodalom eredményeit összefoglalja és néhány, a modellel kapcsolatos saját új kérdésre bemutassa a választ.

A szakdolgozat felépítése a következő. Az első részben az alapmodellt mutatjuk be néhány, a későbbiekben is fontos példával, ugyanebben a fejezetben még definiáljuk a költséghányados fogalmát, amelynek segítségével a modell módosított változatait jól össze tudjuk hasonlítani. A második részben ismertetjük a modell bonyolultságelméleti problémáit. Majd ugyanebben a fejezetben definiálunk egy új fogalmat, a kritikus β-t, amely egy adott, a végpontban jutalommal adott, feladatgráfhoz azt a kritikus értéket adja meg, amelyre igaz, hogy az ügynök annál nagyobb jövő torzító paraméterrel végig fog érni a gráfon. Bizonyítjuk, hogy a kritikus β értéket meg lehet találni polinomiális időben. A harmadik részben szofisztikált ügynökök viselkedésével foglalkozunk. A harmadik részig feltételeztük, hogy az ügynök naiv, hogy nem számol a saját jövő torzító paraméterével, de a szofisztikált ügynök tisztában van, hogy a jövőt torzítva látja. Mutatunk háromféle módszert, hogy az ügynök hogyan küzdhet meg a saját jövő torzító paraméterével. Egyik módszer a szakirodalomból van, amely szerint az ügynök végiggondolja, hogy a gráf későbbi csúcsaiban miképp fog dönteni, és ennek segítségével fogja kiszámolni a legrövidebb utat. A másik két módszerben pedig megengedjük az ügynök számára, hogy frissítse a β paraméterét. Ezekhez a módszerekhez fogunk bebizonyítani felső korlátot, majd mutatunk olyan példákat is, ahol ezek a korlátok élesek.

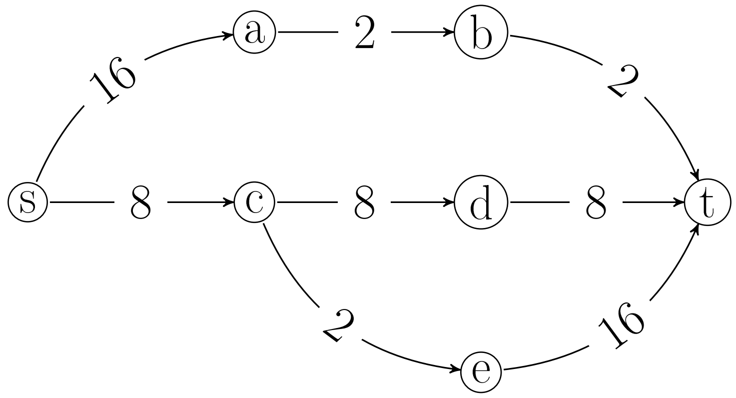
1.1. Kvázi-hiperbolikus modell

A közgazdaságtanban a diszkontálásra az egyik leggyakrabban alkalmazott modell a kvázi-hiperbolikus modell. Ez a közgazdaságtanban régóta elterjedt modell, Phelps és Pollak nevéhez köthető [12]. Mivel Kleinberg és Oren modellje a kvázi-hiperbolikus modellezés speciális esete, ezért röviden ismertetjük a kvázi-hiperbolikus diszkontálást. A modellt két paraméter jellemzi $\beta, \delta \leq 1$. Legyen egy jövőbeli c költség vagy nyereség t időegység múlva a jövőben, ekkor c a következő jelenlegi értékkel jelentkezik: $\beta \cdot \delta^t \cdot c$. A $\beta = 1$ speciális esetben a hagyományos exponenciális diszkontálásról beszélünk. Ha $\beta < 1$, akkor a jövő torzítást modellezzük, hiszen minden jövőbeli költség vagy nyereség a valóságosnál kisebbnek tűnik a jelenből. Kleinberg és Oren modellje a $\delta = 1$ speciális esetet vizsgálja, a problémát gráfelméletileg közelítik meg. Ez utóbbi azért újdonság, mert az eddigi kutatások során nem igazán alkalmaztak gráfelméleti megközelítést. [5]

1.2. Kleinberg és Oren modellje

A következőkben Kleinberg és Oren modelljét mutatjuk be [8]. Legyen $G = (V, E)$ egy irányított, aciklikus gráf. G-nek definiáljuk két kitüntetett pontját: s-t, a kiinduló csúcsot, és t-t, az elérni kívánt csúcsot. Minden más csúcs a feladat elvégzése során fellépő lehetséges köztes állapotoknak felel meg. Minden élre definiáljunk egy nem-negatív költséget: $c(v, w)$, ahol $(v, w) \in A$, amely a feladat két állomása közötti szükséges munka költségének felel meg. Egy ilyen gráfot hívjunk *feladat gráf* nak (*task graph*).

Tekintsünk egy $\beta \in [0, 1]$ jövő torzító paraméterrel (*present-bias parameter*) rendelkező ügynököt, aki el szeretné végezni a feladatot, azaz egy utat szeretne létrehozni s-ből t-



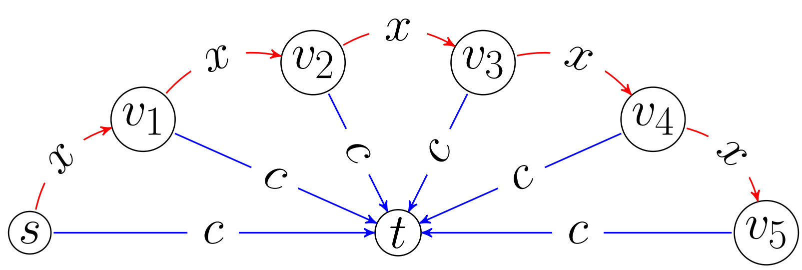
1.1. ábra. Kleinberg és Oren példája

be, számára a lehető legolcsóbb módon. Az ügynök a következőképp fog megtalálni egy s-ből t-be vezető utat. Az ügynök álljon egy v tetszőleges csúcsban, ebből a csúcsból kiszámolja a legolcsóbb utat t-be. De az ügynök nem a tényleges $c(e)$ (ahol $e \in A$) költségek szerint fog számolni. Egy út első éle, amely v-ből indul, a valódi költség szerint van számon tartva, viszont minden további él β-val van szorozva. (Ez a számítási mód annak a gondolatnak felel meg, hogy a jövőbeli költségeket nem a valódi költsége szerint, hanem annál kevesebbnek érzékeljük. Viszont a jelenbeli költségeket már a valóságnak megfelelően látjuk.) Miután v-ből kiszámolta a legolcsóbb P utat t-be, megteszi az első lépést ezen a P úton, majd újra számolja a legrövidebb t-be menő út hosszát, amíg el nem éri t-t. Ha több legolcsóbb út van egy adott lépésben, akkor tetszőlegesen kiválaszthatjuk az egyik legolcsóbb utat. Vagy, a gráf struktúrája mellett minden csúcsnál számon tartjuk a kimenő élek egy sorrendjét, amely segítségével egyenlőség esetén meghatározhatjuk, hogy melyik élen haladjon tovább az ügynök.

Jelöljük a tényleges legrövidebb út költségét $d(s,t)$-vel. Továbbá $c_\beta(s,t)$-vel a β paraméterrel rendelkező ügynök bejárt útjának költségét, ezt a bejárt utat jelöljük P_β-val. Egy adott v pontból hívjuk legrövidebb β-útnak azt az utat, amelyet az ügynök β torzító paraméterrel a legrövidebb útnak számít ki v-ből t-be.

Kleinberg és Oren példáján keresztül mutatjuk be a modellt (lásd 1.1. ábra). A modell több érdekességére is jó példa lesz. Legyen az ügynöknek $\beta = \frac{1}{2}$ jövő torzító paramétere. Az ügynök s-ben áll, kiszámolja, hogy melyik a t-be vezető legrövidebb út. Három különböző út vezet t-be: *sabt* út $16 + 2\beta + 2\beta = 18$ költséggel, *scdt* út $8 + 8\beta + 8\beta = 16$ költséggel és *scet* út $8 + 2\beta + 16\beta = 17$ költséggel. Az ügynök az *scdt* utat találja legkedvezőbbnek, ezért elindul az *sc* élen azzal a szándékkal, hogy d-n keresztül éri el t-t.

A következő lépésben az ügynök tehát c-ben áll. Innen újra számítja a legrövidebb utat t-be. Két lehetséges út van: *cdt* út $8 + 8\beta = 12$ költséggel és *cet* $2 + 16 \cdot \beta = 10$



1.2. ábra. Akerlof példája a halogatásra

költséggel. Az ügynök a *cet* útvonalat látja kedvezőbbnek, így a *ce* élen halad tovább. Az e csúcsból pedig t-be lép, hiszen nincsen már több elágazás t-ig.

A példa két érdekes jelenségre is illusztráció. Egyik érdekessége, hogy a legolcsóbb út az *sabt*, 20 költséggel, a leghosszabb út pedig az *scet*, 26 költséggel. Az ügynök még a legolcsóbb út irányában sem indul el, és a legköltségesebb úton fog elérni t-be. Egy idő-konzisztens, azaz $\beta = 1$-gyel rendelkező ügynök a legolcsóbb úton menne végig. Ahhoz, hogy egy ügynök a legolcsóbb úton menjen végig nem kell feltétlenül idő-konzisztensen viselkednie, csak elég nagy β-val kell rendelkeznie. Számoljuk ki a példához tartozó „kritikus” β-t: azaz, keressük azt a legkisebb β-t, amelynél nagyobb jövő torzító paraméterre már igaz, hogy a legolcsóbb, *sabt* úton halad végig az ügynök. Ehhez olyan β-t kell választani, hogy a $16 + 4\beta$ legyen a legkisebb a három út, az ügynök által látott költsége közül: $16 + 4\beta$, $8 + 14\beta$ és $8 + 20\beta$. Ez pedig nyilvánvalóan akkor teljesül, ha $16 + 4\beta < 8 + 16\beta$, azaz $\frac{2}{3} < \beta$.

A példa másik érdekessége, hogy az ügynök elindul az *sc* élen azzal a szándékkal, hogy *cdt* úton fejezi be a feladatot. Menet közben viszont, a c csúcsnál úgy dönt, hogy *cet* úton keresztül jut el t-be, ezzel összegészében költségesebb utat választva, mint az eredeti szándéknak megfelelő *cdt*. Tehát az ügynök nem tartja magát a saját tervéhez, idő-inkonzisztens módon viselkedik.

1.3. Akerlof példája

Akerlof a következő példát [1] ismerteti a halogatásra (lásd 1.2. ábra). A példa későbbiekben is hasznos lesz, látni fogjuk, hogy a legrosszabb költséghányadosú (az optimális és a valójában bejárt út költségeinek hányadosa) gráfok minorként tartalmaznak egy hasonló struktúrájú gráfot, mint Akerlof példájának gráfja.

Akerlof Indiában élt egy évig, ahol meglátogatta egy barátja. Látogatása során a barát egy csomagot hagyott hátra Akerlofnál, akit megkért, hogy küldje el Amerikába a csomagot. A csomag feladása c költségbe kerül. Ha a csomag még nincs leadva, akkor x

költségbe kerül Akerlof barátjának, hiszen a csomag haszontalanul Indiában van Amerika helyett.

Az ábrán s-sel jelöltük a kiinduló állapotot, t-vel pedig azt, amikor a csomagot feladtuk postán, v_i-vel pedig azt, amikor az i. napot elértük anélkül, hogy a csomagot elküldtük volna. Most vizsgáljuk meg, hogy egy megfelelően kicsi β érték mellett hogyan viselkedik egy ügynök. Az ügynök előtt két lehetséges út áll: st út c költséggel, sv_1t út $x + c \cdot \beta$ költséggel (minden további lehetséges út sv_1t-nél többe kerül, ezért velük nem kell számolni). Ahhoz, hogy az sv_1t utat válassza az ügynök teljesülnie kell, hogy $c > x + c \cdot \beta$, amiből következik, hogy $1 - \frac{x}{c} > \beta$-nak teljesülnie kell. Egy ilyen β-val v_1-re fogunk lépni, ahol ugyanazok a választási lehetőségek, vagy azonnal elküldi a csomagot (azaz t-be lép), vagy vár vele egy napot (v_2-re lép), azzal a szándékkal, hogy a következő nap már biztosan elküldi a csomagot. Az ügynök ismét halasztja a feladatát, hiszen β-ja még mindig ugyanakkora, és a lehetséges legolcsóbb utak költsége is változatlan. Így végül az ügynök elér a határidő végéig, ahol már kénytelen feladni a csomagot, de ezzel a folyamatos halogatással, minden nappal x költséget halmoz fel, így a lehető leghosszabb úton ér el a t-be.

Tehát $1 - \frac{x}{c} > \beta$ esetén, az ügynök $x \cdot (n-2)$ költséget halmoz fel.

1.4. Költséghányados

Az előző példa nem csupán azért volt érdekes, mert egy egyszerű, hétköznapi példája a halogatásnak, de a példa gráfja jellemezni fogja a legrosszabb költséghányadosú (*cost ratio*) gráfokat.

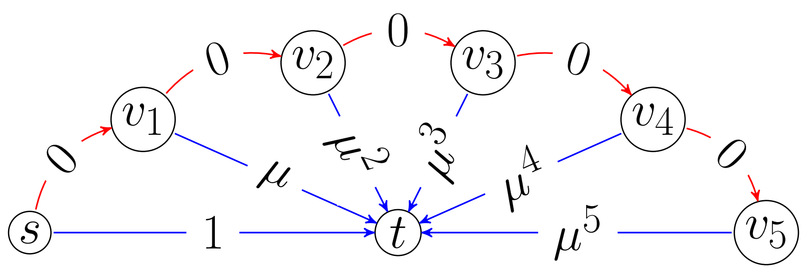
1.4.1. definíció (Költséghányados). *Az ügynök által követett út költségének és a legolcsóbb út költségének hányadosa:*

$$\frac{c_\beta(s,t)}{d(s,t)}$$

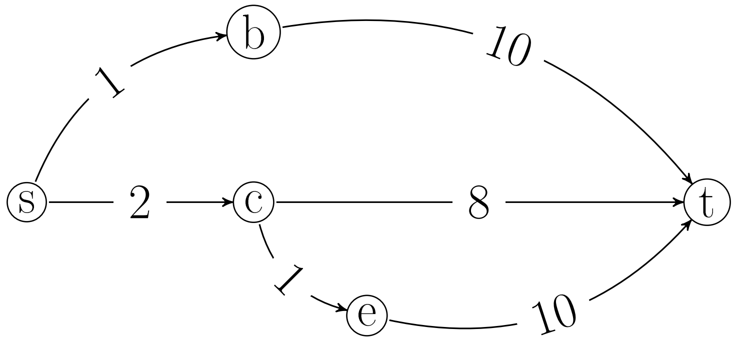
Kleinberg és Oren ([8]) Akerlof példája alapján olyan feladat gráfokat definiálnak (lásd 1.3. ábra), amelyek költséghányadosa exponenciális n-ben, azaz a csúcsszámban.

Legyen $s = v_0, v_1, \dots, v_n$ irányított út, amelynek minden v_i csúcsából fut egy irányított él a t csúcsba. Válasszunk egy $\mu < \frac{1}{\beta}$ számot, és ennek segítségével definiáljuk az él költségeket. Az irányított úton az élek költsége legyen 0: $c(v_i, v_{i+1}) = 0$, $i \in 0, 1, \dots, n-1$, a t-be vezető éleken pedig a következő: $c(v_i, t) = \mu^i$, $i \in 0, 1, \dots, n-1$.

Most számoljuk ki, hogy egy β paraméterrel rendelkező ügynök hogyan jut el t-be, és így milyen költséghányados jön létre. Ha az ügynök egy v_i csúcsban áll, akkor a közvetlen él t-be μ^i költségű, viszont két lépésben, a költség $0 + \beta\mu^{i+1}$. Összehasonlítva a



1.3. ábra. A csúcsokban exponenciális költséghányados



1.4. ábra. Példa arra, hogy a költséghányados nem monoton β-ban.

két költséget: $0 + \beta\mu^{i+1} = (\beta \cdot \mu) \cdot \mu^i < \mu^i$. Tehát az ügynök $v_i v_{i+1}$ élen halad tovább azzal a szándékkal, hogy majd v_{i+1}-ből közvetlenül t-be fog lépni. De v_{i+1}-ben újra számolja a költségeket és v_{i+2}-be lép. Így eljut végül v_n-be, ahonnan már csak t-be léphet. Az összköltség így $c_\beta(s,t) = \mu^n$, míg az optimális út költsége csupán $d(s,t) = 1$. Tehát a költséghányados: $\frac{c_\beta(s,t)}{d(s,t)} = \frac{\mu^n}{1} = \mu^n$. Tehát ezzel a gráf-családdal elérhető, hogy a költséghányados exponenciális legyen n-ben, a csúcsok számában.

A költséghányados érdekes tulajdonsága, hogy β-ban nem monoton.

1.4.2. Lemma ($c_\beta(s,t)$ nem monoton β-ban). *Ha β-t növeljük, a költséghányados nőhet is.*

Bizonyítás Ehhez tekintsük a 1.4. ábrán látható példát. Ha $\beta < 1/2$, akkor az ügynök az *sbt* úton megy 11 költséggel. Ha $1/2 < \beta < 7/10$, akkor az ügynök *scet* úton megy 13 költséggel. Ha $7/10 < \beta$, akkor az ügynök az optimális *sct* úton megy végig 10 költséggel. A költséghányados $\beta < 1/2$-nél $11/10$, majd $1/2 < \beta < 7/10$ között $13/10$-re nő, végül $7/10 < \beta$-nál lecsökken 1-re. $\square$

Viszont, ha valamely β-ra a költséghányados 1, akkor minden nagyobb β-ra is.

1.4.3. Lemma. *Ha valamely β-ra $\frac{c_\beta(s,t)}{d(s,t)} = 1$, akkor $\beta \leq \beta'$-ra is $\frac{c_{\beta'}(s,t)}{d(s,t)} = 1$*

Bizonyítás Ha a $\frac{c_\beta(s,t)}{d(s,t)} = 1$, azt jelenti, hogy $P_\beta(s,t)$ útvonal optimális volt. Az ügynök egy adott a csúcsból, hogy eldöntse b vagy c felé induljon a következő két látszólagos költséget számolja ki: $c(a,b) + \beta' \cdot d(b,t) <$ vagy $> c(a,c) + \beta' \cdot d(c,t)$. Ha az ab egy at legolcsóbb úton fekszik és $c(a,b) \leq c(a,c)$, akkor nem létezhet olyan $\beta \in [0,1]$, amire $c(a,c) + \beta \cdot d(c,t)$ kisebb. Ha $c(a,b) > c(a,c)$ és β esetén b irányába megy, akkor $\beta' > \beta$ esetén is b irányba fog menni. □

Érdekes eredmény [8], hogy minden exponenciális költséghányadosú gráfra igaz lesz, hogy van benne egy elég nagy példány az Akerlof-féle gráfokból. Ehhez definiáljuk az F_k irányítatlan gráfot, amelyet alakja után k-legyezőnek (k-*fan*) hívunk.

1.4.4. definíció (k-legyező). *Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ és w egy irányítatlan gráf csúcsai. Az élek a következők: (v_i, v_{i+1}) $i = 1, 2, \ldots, (k-1)$ továbbá (v_i, w) $i = 1, \ldots, k$. Az így definiált irányítatlan gráfot $k+1$ csúccsal, hívjuk* ***k-legyezőnek****, és a továbbiakban jelöljük F_k-val.*

Továbbá definiáljuk G irányítatlan változatát.

1.4.5. definíció. *Jelöljük $\sigma(G)$-vel azt az irányítatlan gráfot, amelyet G-ből kapunk úgy, hogy G élein megszüntetjük az irányítást.*

1.4.6. definíció (minor). *Legyen G és H két irányítatlan gráf. Azt mondjuk, hogy G* ***tartalmaz egy*** *H* ***minort****, ha minden $h \in H$ csúcsot hozzárendelhetünk G egy S_h összefüggő részgráfjához úgy, hogy a következő tulajdonságok teljesüljenek:*

(i) *S_h és $S_{h'}$ diszjunkt minden $h, h' \in H$.*

(ii) *ha (h, h') egy él H-ban, akkor G-ben létezik él, amely S_h és $S_{h'}$ egy-egy csúcsát összeköti.*

Kleinberg és Oren ([8]) eredménye a következő.

1.4.7. Tétel. *Minden $\lambda > 1$ -re létezik $n_0 > 0$ és $\epsilon > 0$ úgy, hogy ha $n \geq n_0$ és $\frac{c_\beta(s,t)}{d(s,t)} > \lambda^n$, akkor $\sigma(G)$ tartalmaz egy F_k minort valamilyen $k > \epsilon n$-re.*

Kleinberg és Oren cikkük [8] végén felvetik, hogy mi van azokkal a feladat gráfokkal, amelyek nem tartalmaznak k-legyezőt. Erre a kérdésre Tang és munkatársai [13] adnak választ.

1.4.8. Tétel. *Bármely $k > 1$-re, ha $\sigma(G)$ nem tartalmaz F_k minort, akkor a költséghányados legfeljebb β^{2-k} (β - jövőtorzító paraméter). Ez a költséghányados elérhető F_{k-1}-gyel.*

1.5. Házi feladat probléma - a jutalom modell

Az eddigi példákban az ügynöknek mindenképp végig kellett menni a gráfon. Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy miként lehetne modellezni azt, hogy az ügynök félúton abbahagyja a feladatot. Ehhez a modellt úgy módosítjuk, hogy a cél csúcsba teszünk valamennyi jutalmat. Ezt a modellt *jutalom modellnek* fogjuk hívni. Ehhez a jutalomhoz az ügynök úgy juthat hozzá, ha teljesíti a feladatot, azaz elér t-be. Az ügynöknek tehát a következőképp módosul az útszámítása. Ha a v csúcsban áll, kiszámolja a legrövidebb út költségét (természetesen a jövőbeli éleket felszorozza β jövő torzító paraméterrel), ha az út költsége nagyobb, mint a jutalom, azaz $c_\beta(v,t) > \beta \cdot r$, akkor úgy dönt, hogy nem éri meg számára befejezni a feladatot, feladja. Az ügynök akkor is feladja a feladatot, ha az adott csúcsból nem lehet eljutni t-be. Ellenkező esetben, ha az út költsége kisebb, mint a megszerezhető jutalom, azaz $c_\beta(v,t) \geq \beta \cdot r$ akkor megéri folytatnia a feladatot, így lép egyet a legrövidebbnek számolt úton, majd megint kiszámolja a legrövidebb utat, összehasonlítja a jutalommal. (Döntetlen esetén tetszőlegesen lép tovább, vagy pedig a gráf mellé eltároljuk minden csúcshoz a kimenő élek egy sorrendjét, aminek segítségével egyértelműen eldönthető merre lép tovább.) Fontos, hogy a jutalmat mindig meg kell szorozni β-val.

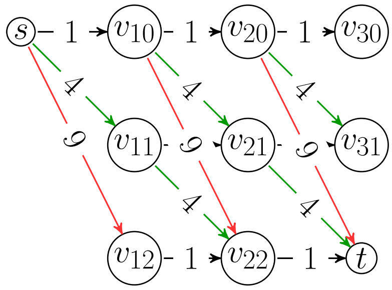
Definiáljuk a következő speciális β értékeket:

1.5.1. definíció (gyengén kritikus β). *Azt a minimális $\beta_{kritikus} \in [0,1]$ értéket nevezzük* ***kritikusnak*** *egy adott jutalom modellre nézve, amelyre igaz, hogy $\forall\beta \geq \beta_{kritikus}$ jövő torzító paraméter esetén az ügynök elér t-be, nem adja fel útközben. Úgy, hogy döntetlen esetén tud úgy választani, hogy végigmenjen.*

1.5.2. definíció (erősen kritikus β). *Azt a minimális $\beta_{kritikus} \in [0,1]$ értéket nevezzük* ***kritikusnak*** *egy adott jutalom modellre nézve, amelyre igaz, hogy $\forall\beta \geq \beta_{kritikus}$ jövő torzító paraméter esetén az ügynök elér t-be, nem adja fel útközben. Úgy, hogy döntetlen esetén bármely választásra végigmenjen.*

1.5.3. definíció (költséghányadosra nézve gyengén kritikus β). *Nevezzük azt a minimális $\beta_{cost} \in [0,1]$ értéket* ***költséghányadosra nézve kritikusnak****, amelyre igaz, hogy $\forall\beta_{cost} \leq \beta$ jövő torzító paraméter esetén az ügynök egy legolcsóbb úton ér végig a gráfon. Úgy, hogy döntetlen esetén tud úgy választani, hogy végigmenjen.*

1.5.4. definíció (költséghányadosra nézve erősen kritikus β). *Nevezzük azt a minimális $\beta_{cost} \in [0,1]$ értéket* ***költséghányadosra nézve kritikusnak****, amelyre igaz, hogy $\forall\beta_{cost} \leq \beta$ jövő torzító paraméter esetén az ügynök egy legolcsóbb úton ér végig a gráfon. Úgy, hogy döntetlen esetén bármely választásra végigmenjen.*



1.5. ábra. Házi feladat probléma. A fekete (vízszintes) éleknek 1, a zöld (egy szintet ugró éleknek) 4, a piros (két szintet ugró éleknek) 9 a költsége.

A következő, mindennapi példában Kleinberg és Oren [8] bemutatja a jutalom modell működését (lásd 1.5. ábra). A tanulóknak két projektet kell elkészítenie egy három hetes kurzus végéig. A tanuló költsége legyen 1 egyik hétről a másikra, amikor nem készít el egy projektet sem, legyen 4, amikor az adott héten egy projektet készít el és végül legyen 9, amikor két projektet készít. A kurzus sikeres teljesítésének jutalma legyen 16. Számoljunk $\beta = \frac{1}{2}$ jövő torzító paraméterrel. A kiinduló, s állapotból, hat lehetséges út van t-ig: $sv_{10}v_{20}t$ és $sv_{10}v_{22}t$ út $1 + \beta(1 + 9) = 6$ költséggel, $sv_{10}v_{21}t$ út $1 + \beta(4 + 4) = 5$ költséggel, $sv_{11}v_{22}t$ és $sv_{11}v_{21}t$ út $4 + \beta(1 + 4) = 6,5$ költséggel és $sv_{12}v_{22}t$ út $9 + \beta(1 + 1) = 10$ költséggel. (Ez utóbbi $sv_{12}v_{22}t$ út ki is esik, hiszen a jövőbeli jutalom, $\beta \cdot 16 = 8$ kisebb, mint az odavezető út költsége.) Tehát $\beta = \frac{1}{2}$ esetén s-ből v_{10}-ba lépek.

Érdemes megjegyezni, hogy bármely $\beta < 1$ jövő torzító paraméter esetén az ügynök v_{10}-ba fog belépni. Annak ellenére, hogy a legrövidebb útból háromféle van ($sv_{10}v_{21}t$, $sv_{11}v_{22}t$ és $sv_{11}v_{21}t$).

1.5.5. Lemma. *Ha v-ben van az ügynök és létezik olyan v-ből kiinduló legrövidebb út, amelynek első, v-ből kiinduló élének költsége a v-ből kiinduló élek között a legolcsóbb, akkor $\beta \in (0, 1)$ jövő torzító paraméter bármely értéke esetén a legrövidebb β-út egyben egy legrövidebb út lesz. Tehát a következő lépés mindenképp egy v-ből kiindulók közötti legolcsóbb él lesz, amelyen keresztül van legolcsóbb út t-be.*

Folytatva tovább a számolást, v_{10}-ból három lehetséges út van: $v_{10}v_{20}t$ út $1+\beta 9 = 5,5$ költséggel, $v_{10}v_{21}t$ út $4 + \beta 4 = 6$ költséggel, illetve $v_{10}v_{22}t$ út $9 + \beta 1 = 9.5$. Ez alapján a következő csúcs a v_{20} lesz, innen viszont csak egyféleképp lehet t-be érni, mégpedig 9 költséggel, amely kevesebb, mint a $16\beta = 8$ jutalom, tehát a második héten a tanuló feladja a kurzus elvégzését.

Felmerül a kérdés, hogy ebben a gráfban mi a kritikus β, azaz milyen β érték esetén fog a tanuló eljutni t-be? A v_{10}-ból kiinduló lehetséges utak költségeiből látszik, hogy

$\beta_{kritikus} = \frac{9}{16}$, azaz ha $\beta \geq \frac{9}{16}$, akkor a tanuló el fog érni t-be. Hiszen ha az utolsó hétre hagyja az ügynök az összes beadandót, akkor is végig fog érni, hiszen $9 \leq \beta \cdot 16$. A $\beta = \frac{9}{16}$ esetén még a lehető legköltségesebb úton megy végig a feladat gráfon. Mi az a β_{cost} érték, amelyre $\forall \beta \geq \beta_{cost}$ esetén a legolcsóbb úton ér a tanuló t-be? Ahhoz, hogy ez teljesüljön a következő egyenlőtlenségnek kell teljesülnie: $4 + \beta \cdot 4 \leq 1 + \beta \cdot 9$. Tehát $\beta \geq \frac{3}{5}$ esetén a tanuló legolcsóbb úton éri el t-t, azaz $\beta_{cost} = \frac{3}{5}$.

Tehát a módosított modell lehetőséget ad arra, hogy a következő jelenségeket modellezzük: egy projekt feladása félúton, elkészítjük egy feladat ütemezését, majd menet közben megváltoztatjuk kevésbé hatékony ütemezésre, halogatás, utolsó pillanatra hagyás.

A kritikus béta kiszámítása a 2.6 fejezetben fog szerepelni.

2. fejezet

Bonyolultságelméleti megközelítés és eredmények

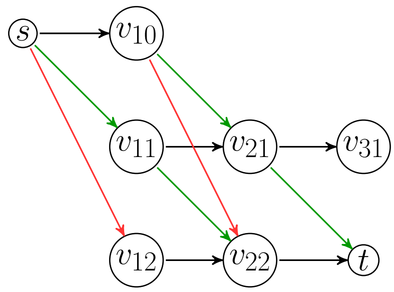
2.1. Határidők - lehetőségek csökkentése

Felvetődik az a kérdés, hogy miként lehet segíteni az ügynököt, hogy végigcsinálja a feladatot? Több lehetőség felmerül a jutalom megemelésén kívül. Az egyik módszer a lehetőségek csökkentése, az itt megfogalmazott modellben ez úgy valósul meg, hogy kitörlünk éleket, csúcsokat.

A házi feladat problémában azért nem tudta a tanuló befejezni a kurzust, mert az utolsó hétre hagyta mindkét projektjét. Ha nem engedjük meg ezt a lehetőséget és az első projekt leadási határidejét a második hét végére tesszük, azaz letöröljük a v_{20} csúcsot és a hozzátartozó éleket (lásd 2.1. ábra), akkor v_{10}-ból v_{21}-ba lép, végül pedig elér t-be. Érdemes kiszámolni, hogy mennyi lesz a kritikus $\beta_{kritikus}$, mennyit csökkent a lehetőségek csökkentése révén. A v_{10}-ból bármekkora is $\beta \in [0, 1]$ értéke a tanuló v_{21}-be fog lépni, hiszen $4 + \beta \cdot 4 \geq 9 + \beta \cdot 1$ nem lesz igaz. Ahhoz, hogy a tanuló be is fejezze a $v_{21}t$ élen a kurzust az kell, hogy v_{10} érdemesnek tartsa elindulni v_{21}-be: $4 + \beta \cdot 4 \leq \beta \cdot 16$, amiből $\beta_{kritikus} = \frac{1}{3}$, ez jelentős javulás a határidő nélküli házi feladat probléma kritikus $\frac{9}{16}$-os β értékéhez képest. Ez a $\beta_{kritikus} = \frac{1}{3}$ érték egyben költséghányadosra nézve is kritikus $\beta_{cost} = \frac{1}{3}$ érték lesz. Az határidő nélküli házi feladat problémában ez a két érték nem esett egybe.

2.1.1. definíció (motiváló gráf). *Egy G gráf* ***motiváló*** *egy β torzító paraméterű ügynökre nézve, ha az ügynök nem adja fel a feladatot és s-ből eljut a t-be.*

Mivel egyenlőség esetén tetszőlegesen választhatunk a legolcsóbb β-utakból, ezért G csak akkor legyen motiváló gráf, ha az ügynök célba fog érni, bármelyiket is választotta.



2.1. ábra. Házi feladat probléma. Határidő bevezetése, azaz csúcs törlés a gráfon.

2.2. Motiváló részgráfok keresése

A következőkben összefoglaljuk a motiváló részgráf megkeresésének különböző eredményeit a szakirodalomból: [2] és [8] alapján.

2.2.1. definíció (MS - Motiváló részgráf). *Hívjuk motiváló részgráf problémának (motivating subgraph) a következő döntési problémát. Adott G feladatgráf, r jutalom és jövő torzító paraméter $\beta \in [0,1]$. Döntsük el, hogy létezik-e motiváló részgráfja.*

Vegyük észre, hogy $\beta = 0$-ra és $\beta = 1$-re a motiváló részgráf megkeresése polinomiális időben megoldható.

2.2.2. Állítás. *Motiváló részgráf megkereshető polinomiális időben, ha $\beta = 0$ vagy $\beta = 1$.*

Bizonyítás A $\beta = 0$ esetben csak akkor létezik motiváló részgráf, vagy egyáltalán út s-ből t-be, ha létezik s-ből t-be olyan út, ahol minden él költsége 0.

Ha $\beta = 1$, akkor az ügynök a legolcsóbb utat követi s-ből t-be, az élek valódi költsége szerint. Ebben az esetben nem lép fel torzítás. Tehát csak akkor létezik motiváló részgráf, ha létezik s-ből t-be olyan út, amely összköltsége legfeljebb a jutalom nagysága, r. Ha létezik ilyen, akkor G önmaga is egy motiváló részgráf. $\square$

A következő állítás azt mondja ki, hogy MS az NP bonyolultsági osztályban van.

2.2.3. Állítás. *Minden G feladat gráfra, r jutalomra és β paraméterre eldönthető polinomiális időben, hogy G motiváló-e.*

Bizonyítás Hagyjuk el G-ből azokat az éleket, amelyek nem minimalizálják az ügynök számított költségét. Ekkor G pontosan akkor lesz motiváló, ha a módosított G-ben minden s-ből elérhető csúcsra igaz, hogy $c_\beta(v) \leq \beta r$. $\square$

2.2.4. Tétel. *A motiváló részgráf létezésének eldöntése NP-teljes, minden $\beta \in (0,1)$ értékre.*

2.2.5. definíció (k-DCP). *Adott egy irányítatlan G gráf k csúcspárral* $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_k t_k)$. *k-DCP lesz az a döntési feladat, hogy létezik-e k csúcsdiszjunkt út, minden egyes ilyen út összeköt egy-egy* s_i *és hozzátartozó* t_i *csúcsot.*

Albers és Kraft [2] úgy bizonyítja az NP teljességet, hogy a feladatot visszavezeti a $k - DCP$ egy változatára.

2.2.6. Tétel. *k-DCP NP-teljes irányított aciklikus gráfokban.*

Albers és Kraft [2] úgy bizonyítja az NP teljességet, hogy a feladatot visszavezeti a 3-SAT problémára.

2.3. Motiváló részgráf keresése - közelítő algoritmus

Mivel a motiváló részgráf keresése (MS) NP-nehéz, vajon létezik-e hatékony közelítő algoritmus? Ezzel Albers és Kraft [2] foglalkoznak cikkükben: az MS problémát optimalizálási problémaként fogalmazzák meg, majd adnak egy $1 + \sqrt{n}$-közelítést és be is bizonyítják, hogy jobb közelítést találni NP-nehéz.

2.3.1. definíció (MS OPT). *Adott egy G feladat gráf és egy jövő torzító paraméter* $\beta \in (0, 1)$. *Határozzuk meg azt a legkisebb értékű r jutalmat, amelyet t-re helyezve a G tartalmaz motiváló részgráfot.*

Az algoritmus a következő lesz. A szerzők kétféle algoritmust alkalmaznak, egyfélét a nagy β-ra, egy másikfélét a kis β-ra. Ha belegondolunk ez a gondolatmenet elég jól rezonál a valósággal, a kis értékű β azt jelenti, hogy a jövőt nem igazán számítjuk be, arra koncentrálunk, hogy az épp aktuálisan elvégezendő feladat a lehető legkevesebb költséggel járjon. Nagyobb β esetén pedig a jövőt jobban beszámítjuk a költségekbe, minél nagyobb a β, annál jobban hasonlít a bejárt út a legkisebb költségű útra.

Ha β kicsi, akkor a MinimaxPathApprox algoritmust használjuk. Azt szeretnénk elérni az adott gráfban, hogy az ügynök olyan úton haladjon végig, amely minimalizálja a maximum élköltséget az út mentén. Egy ilyen utat nevezzünk *minmax* útnak. Ezt polinomiális időben ki lehet számolni.

A MinmaxPathApprox algoritmus meg fog adni egy ilyen P *minmax* utat, ez legyen a motiváló részgráf. A jutalom pedig legyen legalább akkora, mint a P úton számolt legdrágább β-út költsége, azaz

$$r = \frac{\max\{c_\beta(v) | v \in P\}}{\beta}$$

Így P mindenképp motiváló részgráf lesz.

2.3.2. Állítás. MINMAXPATHAPPROX *minden* $\beta \in (0,1)$*-re* $(1+\beta n)$ *- közelítő algoritmus.*

Nagy β esetén legyen a legrövidebb út s-ből t-be a motiváló részgráf, és a jutalom értékét ugyanúgy számoljuk, mint az előző esetben: $r = \frac{\max\{c_\beta(v) | v \in P\}}{\beta}$. Az eljárást hívjuk CHEAPESTPATHAPPROX-nak.

2.3.3. Állítás. *A* CHEAPESTPATHAPPROX *algoritmus bármely* $\beta \in (0,1)$ *érték esetén* $1/\beta$*-közelítő.*

A két eljárásból egy kombinált, COMBINEDAPPROX, eljárást készítünk, amely $(1+\sqrt{n})$-közelítő lesz.

```
if β ≤ 1/√n then
    MINMAXPATHAPPROX
else
    CHEAPESTPATHAPPROX
end if
```

2.3.4. Tétel. *A* COMBINEDAPPROX *bármely* $\beta \in (0,1)$ *értékre* $(1+\sqrt{n})$*-közelítő lesz.*

Hasonlóan az előző NP-teljes bizonyításhoz Albers és Kraft a közelítés NP-nehézségét úgy bizonyítja be, hogy visszavezeti $k - DCP$-re.

2.3.5. Tétel. *MS-OPT* $1/4 \cdot \sqrt{n}$*-nél nem nagyobb közelítése* NP*-nehéz.*

2.4. Az autómosó probléma - motiválás közbülső jutalmakkal

Kleinberg és Oren modelljét [8] a következőképp lehet módosítani. (Albers és Kraft [2] és Heimann [6] alapján.) Ebben a változatban nem csupán t-re lehet jutalmat rakni, hanem a feladat gráf bármelyik csúcsára. Az ügynöknek csak akkor fizetjük ki a jutalmat, ha az adott csúcsra rálép. Ezzel megnyílik a lehetőség, hogy jutalmak elhelyezésével módosítsunk az ügynök útján. Így az ügynök olyan úton járhat, amely költséghányados kedvezőbb, vagy arrafelé indul, ahonnan mindenképp be tudja fejezni a feladatot.

Albers és Kraft [2] alapján leírjuk az autómosó problémát, majd bemutatjuk a példán, hogyan motiváljuk az ügynököt közbülső jutalmakkal. Képzeljük el a következő szituációt: Alice extra zsebpénzt kap, ha lemossa a családi autót. Alice minden egyes nap eldöntheti, hogy aznap mossa le az autót, vagy elhalasztja a következő napra. Csakhogy minél tovább vár, annál piszkosabb lesz az autó. Az i. napon történő autómosás kerüljön $i/50$ költségbe ($i \geq 1$), a munka elhalasztása nem kerül semmibe. Ha Alice lemossa az autót, akkor 1 a jutalma. Alice jövő torzító paramétere legyen $\beta = 1/3$. Vegyük észre, hogy $50 > i \geq 1$ esetén, Alice-nak mindig megéri a következő napra halasztani a munkát, azzal a szándékkal, hogy lemossa akkor az autót:

$$\frac{i}{50} > \beta \cdot \frac{i+1}{50}$$

Amikor eléri az 50. napot, akkor Alicenak már nem éri meg elhalasztani, mert a költség nagyobb lesz, mint a nyereség. Hiszen az 50. napon lemosni 1 költségbe kerül, az 51. napra halasztva, pedig $1/3 \cdot \frac{51}{50} > 1/3 \cdot 1$ miatt látszik, hogy nem éri meg a következő nap sem lemosni az autót. Tehát Alice az 50. napon feladja az autómosást.

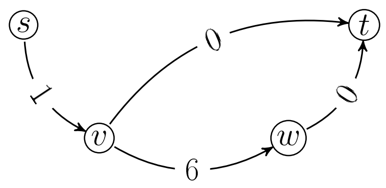
Vegyük észre, hogy Alice ilyen alacsony β mellett mindig fel fogja adni a feladatot. Ez akkor is igaz, ha megnöveljük a jutalmat, hiszen az csak a halogatás hosszát fogja megnövelni. A halogatás mindig olcsóbb: $\frac{i}{m} > \frac{i+1}{m} \cdot \beta$. Ha $\beta \geq 1/2$ akkor már az első lépésben le fogja mosni Alice az autót.

Most képzeljük el, hogy Alice a következő ajánlatot kapja a családjától. Ha először lemossa a családi autót (1 költség), majd rendet rak a szobájában (6 költség), akkor 10 jutalmat kap. Ezt a következő feladatgráffal modellezzük (lásd 2.2. ábra). Jelöljük (s, v) 1 költséggel az autó lemosását, (v, w) 6 költséggel a szoba rendbetételét, (v, t) és (w, t) pedig 0 költségű élek. Ha csupán t-be helyezhetnénk el a jutalmat, akkor legalább 3-t kéne elhelyezni. Most más csúcsokba is helyezhetünk jutalmat, helyezzünk w-re 10-t. Ekkor Alice $\beta = 1/3$ jövő torzító paraméterrel, az $svwt$-utat számolja a legolcsóbbnak, hiszen a jutalommal $1/3$ nyereséghez jut. Miután v-be ér, nem fogja w-felé folytatni az útját, hiszen a jutalommal együtt is veszteséges lesz: $10/3 - 6 = -8/3$. Tehát v-ből közvetlenül t-be megy, ekkor a családnak semmibe se került, hogy az autót Alice lemossa, viszont a szobája továbbra is rendetlen maradt. Így a családnak 3 helyett nem került semmibe, hogy Alice a feladatot elvégezze.

Definiáljuk formálisan a döntési problémát:

2.4.1. definíció (MRC - Motivating Reward Configuration). *Adott G feladatgráf, b pénzkeret, és $\beta \in [0, 1]$ jövő torzító paraméter. Döntsük el, hogy létezik-e olyan r motiváló jutalomrendszer a csúcsokon ($r(v) > 0$, minden v csúcsra), hogy az ügynök begyűjtött jutalma legfeljebb b nagyságú, bármely lehetséges útvonalon is jutott el t-ig.*

2.4.2. Lemma. *MRC polinomiális időben megtalálható, ha $\beta = 0$ vagy $\beta = 1$.*



2.2. ábra. Az autómosó probléma, közbülső csúcson elhelyezett jutalommal.

A következő tétel azt mondja ki, hogy MRC NP-ben van.

2.4.3. Tétel. *Adott G feladatgráfra, b pénzkeretre és β jövő torzító paraméterre eldönthető polinomiális időben, hogy r motiváló jutalomrendszer.*

2.4.4. Tétel. *MRC NP-teljes akármilyen $\beta \in (0,1)$ értékre, még $b = 0$ pénzkeret esetén is.*

Albers és Kraft úgy bizonyítja, hogy visszavezeti a problémát a halmaz pakolásra (SET PACKING). Emlékeztetőül a SET PACKING.

2.4.5. definíció (SET PACKING). *Adott $S_1, S_2, \dots, S_l$ véges halmazok, $k \geq l$ egész szám. Döntsük el, hogy létezik-e k kölcsönösen diszjunkt halmaz.*

Az MRC következő variánsa is NP-nehéz.

2.4.6. definíció (MRC-OPT). *Adott G feladatgráf, β jövő torzító paraméter, döntsük el, hogy mekkora az a minimális b pénzkeret, amerre létezik olyan r motiváló jutalom rendszer ($r(v) \geq 0$, minden $v \in G$ csúcsra), hogy az ügynök által összegyűjtött jutalom nem legyen nagyobb b-nél, az ügynök bármely lehetséges útja során.*

2.4.7. Tétel. *$MRC-OPT$ közelítése NP-nehéz, bármely 1 vagy annál nagyobb aránnyal.*

Bizonyítás A 2.4.4 Tétel következménye, hiszen ha $b = 0$ esetet nem lehet eldönteni, akkor semmilyen arányban nem lehet közelíteni. □

Tang és munkatársai [13] szintén körbejárták, a közbülső jutalmazás rendszer problémáját. Ők a következő döntési problémákat javasolták, majd mindegyikről belátták, hogy NP-nehéz.

2.4.8. definíció (MTR - Minimum Total Rewards). *Legyen G egy feladatgráf, β jövő torzító paraméter, b pénzkeret. Döntsük el, hogy létezik-e r jutalom rendszer, ahol az ügynök motivált, hogy befejezze a feladatot, és a jutalmak összegére igaz, hogy kevesebb, mint b, azaz $\sum_{v \in G} |r(v)| \leq b$.*

A három változat a következő:

- *MTR_β I: $r(v) \geq 0$ minden $v \in G$ csúcsra*
- *MTR_β II: $r(v) \geq 0$ minden $v \in P$ csúcsra és $r(v) = 0$ minden $v \notin P$, ahol P legyen az az útvonal amelyen az ügynök eljut t-be*
- *MTR_β III: $r(v) \in R$, negatív „jutalmakat”, azaz büntetéseket is megengedünk.*

2.4.9. Tétel. *$MTR_\beta I, II, III$ NP-nehéz minden $\beta < 1$.*

Tang és munkatársai [13] az állítást úgy bizonyítják, hogy a problémát visszavezetik a 3-SAT problémára.

2.5. Lehetséges útvonalak

Ugyanazon a feladat gráfon, annak függvényében, hogy β mekkora, az ügynök más útvonalat választ. Ha egy feladatot nem csupán egy ügynök számára tervezünk, hanem egy egész populációra, akkor különböző jövő torzító paraméterrel rendelkező ügynökök milyen útvonalon haladhatnak végig a gráfon? Hányféle útvonal létezhet, azaz $\{P_\beta(s,t) : \beta \in [0,1]\}$ mekkora lehet? Annak ellenére, hogy β kontinuum sok értéket vehet fel, a lehetséges utak száma csak polinomiális a csúcsok számában. Kleinberg és Oren [8] a következő eredményt találta a kérdésre. Az eredmény arra a modellre vonatkozik, ahol a döntetleneket az élek előre meghatározott sorrendjével döntjük el, azaz egyértelműen választunk utat.

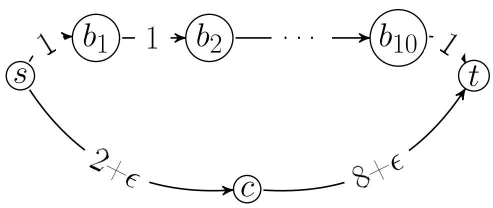
2.5.1. Tétel. *Bármely G feladat gráfra $|\{P_\beta(s,t) : \beta \in [0,1]\}| = O(n^2)$.*

A tétel azért is érdekes, mert általánosabb parametrikus út problémáknál a lehetséges utak száma szuper-polinomiális. [8]

2.6. A kritikus β megtalálása

2.6.1. Lemma (A végigérés nem monoton β-ban). *Ha valamely β-ra végig érünk a gráfon, akkor annál nagyobb β-ra nem biztos, hogy végig érünk.*

Bizonyítás Ennek a bizonyításához lássunk egy példát (lásd 2.3. ábra). Ebben a példában először legyen $\beta = \frac{1}{2}$ és a jutalom 12. Ekkor s-ből a felső út $1 + \beta \cdot 10 = 6$, az alsó út $2 + \epsilon + \beta \cdot (8 + \epsilon) = 6 + \frac{3}{2} \cdot epsilon$. Tehát $\beta = \frac{1}{2}$ esetben az ügynök a felső utat választja. Mivel a felső út 1 költségű utakra van felosztva, ezért az ügynök végig is ér a célig. Most nézzük egy $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb értéket, legyen $\beta = \frac{2}{3}$. Ekkor a felső út ügynök által látott költsége: $1 + \beta \cdot 10 = \frac{23}{3}$, az alsó út $2 + \epsilon + \beta \cdot (8 + \epsilon) = \frac{22}{3} + \frac{5}{3} \cdot \epsilon$. Megfelelően kicsinek választva



2.3. ábra. Egy példa arra, hogy β nem monoton.

$\epsilon > 0$-t, az ügynök az alsó utat fogja választani. Az ügynök tehát c-re lép tovább, ahol kiszámítja a hátralévő út költségét és összehasonlítja a jutalommal: $8 + \epsilon > 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$. Mivel a költség nagyobb, mint a jutalom, az ügynök c-ben feladja a feladat teljesítését. $\square$

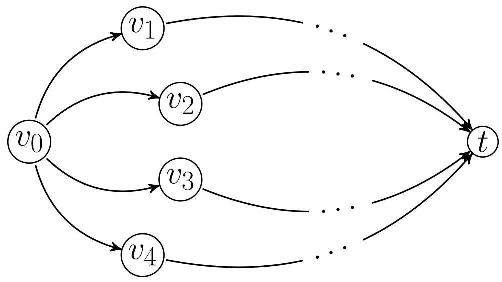
2.6.2. Tétel. *A kritikus β megtalálása megy polinomiális időben.*

A gondolatmenet mind a négyféle kritikus β definícióra működni fog.
Bizonyítás Először adunk egy rövid gondolatmenetet, hogy miért lehet polinomiális időben megadni, majd mutatunk egy algoritmust, a kritikus β megtalálására.

Az ügynök útja során a továbbhaladás irányához kétféle helyzetben vesszük figyelembe a β értékét: egy csúcsnál, hogy melyik élen haladjunk tovább, és egy élnél, hogy egyáltalán a jutalom reményében érdemes-e tovább haladni. Hogy melyik élen haladunk tovább és a továbbhaladás kritériumait felírhatjuk β-ra különböző egyenlőtlenségeként. A gráf összes ilyen egyenlőtlenségét felírva legfeljebb kétszer élszámnyi egyenlőtlenséget kapunk. Tehát polinom sok kritikus értéket kapunk, a kritikus értékek közötti intervallumokon ugyanúgy viselkedik az ügynök, és dinamikus programozással ki tudjuk számolni, hogy melyik intervallumon hogyan.

Egy v_0v_1 élre a következő egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, ahhoz, hogy az ügynök ne adja fel v_0-ban az útját: $c(v_0, v_1)+\beta\cdot d(v_1, t) \leq \beta\cdot r$, ahol r a t, végcsúcsra helyezett jutalom értéke. Ahhoz, hogy v_0-ból a v_1 irányába induljon el, teljesülnie kell annak, hogy az általa látott legrövidebb út v_1-n keresztül vezessen, azaz: $\min_i c(v_0, v_i)+\beta\cdot d(v_i, t) = c(v_0, v_1)+\beta\cdot d(v_1, t)$. (Lásd 2.4. ábra.) Azaz bármely $i \neq 1$-re: $c(v_0, v_i)+\beta\cdot d(v_i, t) \leq c(v_0, v_1)+\beta\cdot d(v_1, t)$. Tehát v_0 fokszámnyi egyenlőtlenséget írhatunk fel. Így összesen az egész eljárás során az élek és a csúcsok számában polinomiális egyenlőtlenséget kell megvizsgálni.

Most mutatunk egy algoritmust, hogy miként lehet a különböző kritikus β-kat kiszámolni. A gondolatmenet mind a négy definícióra alkalmazható. Először is feltételeztük, hogy a feladat gráf aciklikus, azaz van topologikus sorrendje. A topologikus sorrendet polinomiális időben a standard módszerekkel megkeressük. És a topologikus sorrend fordítottján visszafelé lépkedünk. Minden élhez számon tartjuk, hogy a $[0, 1]$ intervallumon,



2.4. ábra. Példa arra, hogy kell a kritikus β-t meghatározni a különböző egyenlőtlenségek segítségével.

mely intervallumokon haladunk végig az adott élen. Kezdetben, a t csúcsból indulunk ki. Ekkor még nincs él, amelyhez számon kell tartani ilyen intervallumokat. Ezeket az intervallumokat először azokra az élekre nézzük, amelyek t-be érkeznek. Ekkor megkeressük azt a β értéket, amely az él elvégzéséhez minimálisan szükséges: $(c(v_1, t) \leq \beta \cdot r)$, illetve azokat a β értékeket is ami ahhoz kell, hogy ezen a v_1t élen haladjunk tovább v_1-ből (és nem a v_1-ből induló többi élen). Ezeknek a kritikus β-k segítségével felírhatjuk azokat az intervallumokat, amelyek β értékeknél v_1t-t fogja választani az ügynök v_1-ből és el is tudja végezni a feladatot v_1-ből t-be. A következő csúcs, amelyekbe érkező éleket megvizsgálunk az a topologikus sorrenden visszafelé lépve a t utáni csúcs. Ebben a csúcsban az élekre felírt intervallumok segítségével pontosan lehet látni, hogy milyen β-ra melyik élre halad tovább az ügynök, és hogy abban az irányban be tudja-e fejezni az útját. Ennél a lépésnél van különbség a négyféle kritikus β érték számításánál. Hiszen itt kell figyelni arra, hogy olyan β intervallumokat válasszunk, hogy egyik esetben: tudjon úgy választani, hogy végigmenjen (gyenge változat); vagy másik esetben: bármely választásra végigmenjen (erős változat).

□

3. fejezet

Szofisztikált ügynök

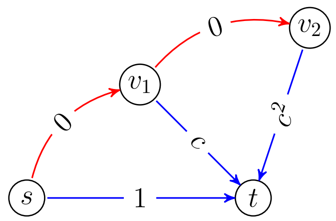
Az eddigiek során feltételeztük, hogy az ügynök nem veszi számításba a saját jövő torzító paraméterét. A most következőkben különböző módokon az ügynök számol a saját torzításával. Kleinberg és munkatársai második cikke ([9]) alapján bevezetjük a szofisztikált ügynök fogalmát. Majd később megengedjük az ügynöknek, hogy bizonyos eljárás szerint a megfigyelt költségek alapján növelhesse a saját β értékét.

3.1. Szofisztikált és naiv ügynök

Kleinberg és munkatársai ([9]) cikke alapján az ügynököknek háromféle lehetséges viselkedését írjuk le. Ehhez először emlékeztetünk arra a szokásos, hasznos metaforára, amely viselkedéses közgazdaságtani szakirodalomban használatos. Amikor egy ügynök feladat elvégzés során különböző időpontokban újra tervezheti a munkáját, akkor erre úgy gondolunk, hogy t időpontban a **t-én** dönt, majd $(t+1)$. időpontban átadja a döntést a **(t+1)-én** számára. Tehát ezek alapján a háromféle viselkedés:

1) Az optimálisan viselkedő ügynök (*optimal agent*). Az optimális ügynök t időpontban, minimalizálja a bejárandó út költségét mind maga számára, mind a jövőbeliének számára.

2) Naiv ügynök. Egy adott t időpontban a naiv ügynök **t-én**je minimalizálja a bejárandó út költségét saját maga és a jövőbeli ének számára. De a költségeket megsúlyozza, a jelenlegi, tehát saját költségét $b = 1/\beta$ faktorral megnöveli. Naivan azt képzeli, hogy a jövőbeli ének másképp fognak dönteni, úgy döntenek majd, mint az optimális ügynök. Így egy lépést megtesz, és átadja a döntést a **(t+1)-én** számára, abban bízva, hogy a **(t+1)-én** optimálisan fog dönteni.



3.1. ábra. Három napos példa

3) Szofisztikált ügynök. A naiv ügynökhöz hasonlóan számolja a költségeket. A jelenlegi költségeket b-szorossal számolja. De tisztában van azzal, hogy jövőbeli ének is szofisztikált ügynökök lesznek, ugyanazzal a β jövő torzító paraméterrel.

O'Donoghue és Rabin példáján ([10],[11]) mutatjuk meg a naiv és a szofisztikált ügynök közötti különbséget.

- Két napos példa. Egy ügynök két dolog között választ: vagy elkészíti a munkát most 1 költségért, vagy holnapra halasztja, amikor magasabb $1 < c$ költséggel tudja elvégezni. Az ügynök torzító paramétere legyen $c < b$. Mivel a jelenlegi költséget b-nek látja, a jövőbelit c-nek, ezért mind a szofisztikált, mind a naiv ügynökre igaz, hogy elhalasztja a munkát holnapra. Itt tehát mind a szofisztikált, mind a naiv viselkedés szuboptimalitáshoz vezet.

- Három napos példa (lásd 3.1. ábra). Ebben a példában az ügynöknek harmadik nap estére el kell végeznie a munkát. Itt is b torzító paraméterrel számolunk. Ha első nap este csinálja meg, akkor 1, ha második nap este c és ha harmadik nap este, akkor c^2 költségbe kerül a munka elvégzése. Ahol c legyen olyan, hogy $1 < c < b < c^2$ teljesüljön. A naiv ügynök s-ben a következőképp gondolkodik, a munka elvégzése most b költségű, de holnap elvégezni csak $c < b$ költségű, tehát halogat, azt gondolva, hogy a holnapi, v_1-énje majd elvégzi a feladatot. Ugyanez a gondolatmenet lejátszódik a következő nap, így a naiv ügynök az utolsó este fejezi be a munkát c^2 költséggel. Ehhez képest a szofisztikált ügynök tudja, hogy ha egy napot halogat, akkor a másnapi énje tovább fog halogatni, összesen c^2 költséggel fogja elvégezni a munkát. Mivel $b < c^2$, ezért a szofisztikált ügynöknek nem éri meg halogatni, azonnal elvégzi a munkát 1 költséggel.

A szofisztikált és naiv viselkedésnek is megvannak a maga előnyei és a hátrányai. A naiv ügynök jól modellezi azt az emberi viselkedést, amikor egyre halogatjuk a feladatot, mindig azt feltételezve, hogy majd hamarosan elvégezzük, de végül utolsó pillanatban, sokszor az optimálisnál magasabb költséggel kell elvégezni. Ez rizikós, veszélyes feladatoknál akár előny is lehet. A szofisztikált ügynökre is találhatunk példát a mindennapi életben. Az a fajta a viselkedés, amikor tisztában vagyunk saját halogató viselkedésünkkel és a halogatást megelőző lépéseket teszünk. Ilyen lépés lehet, amikor a munka vagy tanuló környezetünket próbáljuk úgy kialakítani, hogy nehezebb legyen halogatni. De a szofisztikált ügynök túl is kompenzálhatja a saját halogatását, és következésképp több munkájába kerülhet a feladat elvégzése.

Azt már láttuk, hogy a naiv ügynök költséghányadosa exponenciális lehet. Mekkora lehet a szofisztikált ügynök költséghányadosa? Ezzel kapcsolatban Kleinberg és munkatársai ([9]) két állítást bizonyítanak.Egyáltalán hogy viselkedik a szofisztikált ügynök az exponenciális legyezős példán?

3.1.1. Tétel. *A szofisztikált ügynök költséghányadosa legfeljebb b.*

Az is érdekes kérdés, hogy a szofisztikált ügynök vajon mindig jobban teljesít-e, mint a naiv ügynök? Mint kiderül nem, sőt:

3.1.2. Tétel. *Létezik olyan gráf, ahol a szofisztikált ügynök költséghányadosa meghaladja a naiv ügynökét. A két költséghányados aránya tetszőlegesen közel lehet b-hez.*

Tekintsük a 3.2. ábrán látható példát. A naiv ügynök a következő költségekkel számol: $s \to u \to t$ költsége $bx + 1$, $s \to w \to t$ $bx + b - 2\epsilon$, tehát u-ba fog lépni. A naiv ügynök u-ból $u \to v \to t$ utat választja $b - \epsilon$ költséggel a közvetlen t-be lépés helyett. Összesen a naiv ügynök $x + b - \epsilon$ költségű úton jutott el t-be.

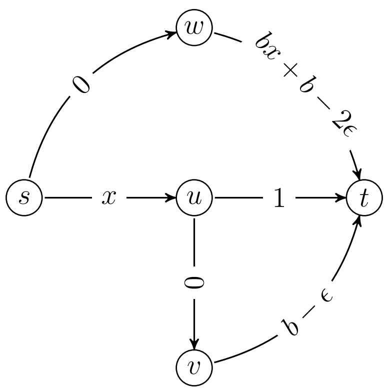
A szofisztikált ügynök tisztában van vele, hogy ha v-be lép, akkor v-beli énje nem közvetlenül t-be lép, hanem w-n keresztül fog menni, összesen $bx + b - \epsilon$ költséggel. (A szofisztikált ügynök az aktuális, s csúcsból induló éleket b-szeresének látja.) A szofisztikált ügynök a w-beli utat $bx + b - 2\epsilon$-nak látja, így w felé fog menni. Összesen $bx + b - 2\epsilon$ költségű úton ér el t-be.

A két költséget összehasonlítva:

$$\frac{\text{szofisztikált}}{\text{naiv}} = \lim_{x\to\infty} \frac{bx + b - 2\epsilon}{x + b - \epsilon} = b$$

3.2. A β frissítése

A következőkben olyan ügynök típust szeretnénk bemutatni, aki a szofisztikált és a naiv ügynök „között” van. Ha azt veszi észre, hogy egy adott lépés után a hátralévő munka



3.2. ábra. A legrosszabb költséghányados arány a szofisztikált és a naiv ügynök között.

költsége nem hogy csökkent volna, de nőtt, akkor módosít a viselkedésén. Észrevette, hogy torzítva látja a jövőt, ezért korrigálni próbál.

Nevezzük T**-féle frissítésnek** a következőt. Ha egy v csúcsban vagyunk és egy β út költsége az adott β torzító paraméterrel $d'(v,t)$ és a β - út következő, w csúcsában, $d'(w,t)$ a β út költsége, és $d'(v,t) < d'(w,t)$, akkor a következő módon frissítsük β-t:

$$\beta_{T(w)} := \beta \cdot \frac{d'(w,t)}{d'(v,t)}$$

Majd az ügynök ezzel a frissített β_{akt}-val számol tovább.

Először be kell látnunk, hogy ez a frissítés jó, azaz, β nem nőhet 1 fölé.

3.2.1. Lemma. *A T-féle frissítés során β nem nő 1 fölé.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy a T-féle frissítés során v-ből w-be léptünk. Ekkor a frissítés feltétele, hogy $d'(v,t) < d'(w,t)$, azaz $c(v,w) + \beta \cdot d(w,t) \geq \beta \cdot d(w,t)$. Tehát a frissítés után kapott β_{akt}-t felülről becsülhetjük:

$$\beta_{akt} = \beta \cdot \frac{d'(w,t)}{c(v,w) + \beta \cdot d(w,t)} \leq \beta \cdot \frac{d'(w,t)}{\beta \cdot d(w,t)} = \frac{d'(w,t)}{d(w,t)} \leq 1$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség igaz, hiszen az ügynök $d'(w,t)$ utat kell hogy lássa a legrövidebbnek, még a tényleges legrövidebb úthoz képest is. □

Vizsgáljuk meg, hogy Akerlof exponenciális költséghányadosú „legyezős” példáján hogyan változik meg az ügynök útvonala a frissítések miatt.

Az s csúcsban $\mu \cdot \beta$ látszik a legolcsóbb útnak, az ügynök v_1-re lép. Itt újra számolja a legolcsóbb utat, itt $\mu^2 \cdot \beta$ lesz. Az ügynök észreveszi hogy a hátralévő út nagysága nőtt, tehát frissíteni fogja a β-t. Az új β_{akt} tehát: $\beta_{akt} = \beta \cdot \frac{\mu^2 \cdot \beta}{\mu \cdot \beta} = \beta \cdot \mu < 1$. Ha β_{akt} továbbra sem elég nagy, akkor újra frissítjük, és az új β_{akt} érték $\beta_{akt} = \beta \cdot \mu^2$ lesz stb. Az ügynök akkor fog t-re lépni, ha β_{akt} elég nagy, azaz, ha $1 < \mu^j \cdot \beta$, azaz $b < \mu^j$. Így az j. frissítés után lép t-re, ahol j az első olyan szám, amelyre: $b < \mu^j$. Tehát a „legyezős” példa során az ügynök nem fog végig halogatni, hanem már előbb belép t-be. (Ha a gráf elég sok csúcsot tartalmaz.)

Oren és Kleinberg ([8]) amikor bizonyítják, hogy exponenciálisan rossz költséghányadosú gráfnak tartalmazni kell egy elég nagy legyezőt, bevezetnek egy rangot a csúcsokra, ezt a definíciót a következő bizonyításban felhasználjuk.

3.2.2. definíció (csúcs rangja). *Legyen egy $v \in G$ rangja $r(v)$:*

$$r(v) = \begin{cases} 0 & \text{ha } d(v,t) \leq d(s,t) \\ r & \text{min } r{>}0\text{, ahol } d(v,t) \leq b^r d(s,t), \end{cases}$$

ahol b-vel β reciprokát jelöljük: $b = \beta^{-1}$.

3.2.3. Tétel. *A T-féle frissítés során bejárt úton a csúcsok rangja nem nagyobb, mint 2.*

Bizonyítás Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az ügynök által bejárt úton van egy u csúcs, amely rangja r: $r(u) = r$, és az úton az u csúcs után következő v csúcs, $r(v) = r + 1$ ranggal, továbbá az úton, v után lévő, későbbi w csúcs, ahol először nagyobb 2-vel a rang: $r(w) = r + 2$. A bizonyítás előtt először egy lemmát bizonyítunk:

3.2.4. Lemma. *Legyen $r(v) = r$, ekkor:*

$$d'(v,t) \geq b^{r-2} d(s,t)$$

Bizonyítás A következő egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$d'(v,t) \geq \beta_{akt} \cdot d(v,t) \geq \beta \cdot d(v,t) \geq b^{r-2} \cdot d(s,t)$$

□

3.2.5. Lemma. *A csúcs rangja legfeljebb* 1*-gyel nőhet. Azaz, ha (v,w) egy él a bejárt úton, akkor $r(w) \leq r(v) + 1$.*

Bizonyítás Kleinberg és Oren bizonyítását ([8]) adaptáljuk erre az esetre, amikor a β értéke frissül.

Ha (v,w) él a v-ből t-be vezető legrövidebb úton van, akkor $d(w,t) \leq d(v,t)$. Ha (v,w) él nem ezen az úton van, akkor legyen (v,w') a v-ből t-be vezető legrövidebb úton az első él. Ekkor a következőt írhatjuk fel:

$$c(v,w) + \beta_{akt} d(w,t) \leq c(v,w') + \beta_{akt} d(w',t) \leq d(v,t)$$

Az első egyenlőtlenség abból jön, hogy az ügynök (v, w') él helyett a (v, w) élen halad tovább. A második egyenlőtlenség abból következik, hogy középen is a legrövidebb utat alkotó élek összege áll, csak $c(v, w')$ élen kívül mindegyik meg van szorozva a $\beta_{akt} \leq 1$ számmal, így a legrövidebb út hosszánál biztosabb kevesebb lesz. Így rendezéssel és átalakítással kapjuk:

$$d(w, t) \leq \frac{1}{\beta_{akt}} \cdot d(v, t) \leq \frac{1}{\beta} \cdot d(v, t) \leq b \cdot d(v, t)$$

Ebből következik, hogy $r(w) \leq r(v) + 1$. $\square$

Mivel u-ből v-be lépve a rang nőtt, ezért $d'(v, t) \geq d'(u, t)$, azaz frissíteni kell v-ben a β-t, hasonlóan w-ben is, hiszen ott is nőtt a rang. Tegyük fel, hogy w-ig mindig kellett frissíteni a β-t. (Jelöljük v_{-1}-gyel a bejárt úton a w előtti közvetlen csúcsot.)

$$\beta_{T(w)} = \beta_{T(u)} \cdot \frac{d'(v_1, t)}{d'(u, t)} \cdot \frac{d'(v_2, t)}{d'(v_1, t)} \cdot \dots \cdot \frac{d'(w, t)}{d'(v_{-1}, t)}$$

A szorzat teleszkópikusan összeesik:

$$\beta_{T(w)} = \beta_{T(u)} \cdot \frac{d'(w, t)}{d'(u, t)}$$

Szeretnénk $\frac{d'(w,t)}{d'(u,t)}$-t alulról becsülni. Ehhez a számlálót alulról becsüljük $b^r d(s, t)$-vel, a nevezőt pedig felülről becsüljük $b^{r-1} d(s, t)$-vel. Így a törtre a következő becslést kapjuk: $\frac{d'(w,t)}{d'(u,t)} \geq \frac{b^r d(s,t)}{b^{r-1} d(s,t)} = b$.

Mi történik ezzel a szorzattal, ha nincs frissítés minden lépés során? Ha függetlenül $d'(v_k, t)$ és $d'(v_{k+1}, t)$ viszonyától mindig frissítenénk a β-t, akkor is igaz marad a fenti gondolatmenet. Ha most figyelembe vesszük, hogy csak akkor változtatjuk β-t, amikor $\frac{d'(v_k,t)}{d'(v_{k+1},t)} \geq 1$, akkor a tört értéken csak növelek, tehát az alsó becslés érvényben marad. $\square$

Az ügynök által bejárt út éleit a következőképp becsülhetjük: $c(v, w) \leq d(v, t) \leq b^2 d(s, t)$. Az ügynök által bejárt út hosszára a következőt mondhatjuk.

3.2.6. Tétel. *A T-féle frissítés során a bejárt út hossza legfeljebb $\leq n \cdot b^2 d(s, t)$.*

Tehát a bejárt út költséghányadosa a csúcsok számában lineáris, ha frissítjük a β értékét. Ellentétben az eddigiekkel, amikor is, ahogy a legyezős példán láttuk, a költséghányados exponenciális is lehet.

Mutatunk egy példát, ahol ez a frissítés $\Omega(n)$ költséghányadosú lesz. Akerlof eredeti legyezős példájában, ahol a munka egynapi halogatásának x költsége és a munka elvégzésének c költsége van (lásd 1.2. ábra). Mivel itt a legolcsóbbnak látott költség minden halogatott nap után azonos, ezért a T-frissítés során sosem kell frissíteni a β-t, ezért az ügynök $n \cdot x + b$ költségű úton ér t-be, az optimális c helyett.

3.3. A β frissítése másképp

Hívjuk a következő frissítést E-féle frissítésnek, ez a frissítés az előző frissítéshez képest hatékonyabb lesz. Amikor az ügynök egy adott csúcsban (v-ben) kiszámítja a legrövidebb út hosszát, egyben kiszámítja azt is, hogy a következő lépés elvégzése után mennyi munkája marad még hátra a feladat elvégzésekor. Ezt a költséget összehasonlítja majd a következő csúcsban (w-ben) számolt költséggel. Ha legalább akkora a még hátralevő költség, mint az előzőleg számított, akkor az ügynök frissíti β-t:

$$\beta_{E(w)} = \beta_{E(v)} \cdot \frac{d'(w,t)}{\beta_{E(v)} \cdot d(w,t)}$$

Jelölje $\beta_{E(v)}$ a bejárt út során v csúcsban frissített β értéket.

Először be kell látnunk, hogy az E-féle frissítés valóban jó, azaz a folyamat során $\beta_{E(v)} \leq 1$, minden, az ügynök által bejárt v csúcsra.

3.3.1. Lemma. *Az E-féle frissítés során β értéke nem nő 1 fölé.*

Bizonyítás Egyszerűsítve a frissítés formuláját:

$$\beta_{E(w)} = \beta_{E(v)} \cdot \frac{d'(w,t)}{\beta_{E(v)} \cdot d(w,t)} = \frac{d'(w,t)}{d(w,t)}$$

Tehát azt kell belátni, hogy $d(w,t) \geq d'(w,t)$. Legyen w' a w utáni csúcs a w-ből induló tényleges legrövidebb úton, ekkor az a triviális becslés adódik:

$$d'(w,t) \leq c(w,w') + \beta_{E(v)} \cdot d(w',t) \leq d(w,t)$$

$d'(w,t)$ nem nagyobb bármilyen w-ből $\beta_{E(v)}$ jövő torzító paraméterrel számolt útnál. A w-ből menő tényleges legrövidebb út $\beta_{E(v)}$-vel számolt költsége nem nagyobb, mint a jövő torzító paraméter nélkül számolt költsége. □

Az E-féle frissítés egyik fontos tulajdonsága, hogy érzékeny a β értékre, ha a jövő torzító paraméter kisebb, mint 1, akkor az E-féle frissítés során frissül β.

3.3.2. Lemma. *Ha $\beta < 1$, akkor β frissül az aktuális csúcsban.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy v-ből w-be léptünk, v-ben $\beta < 1$ torzító paraméterrel. Azt szeretnénk belátni, hogy ekkor β-t frissíteni fogjuk. Ez igaz, hiszen, ha összehasonlítjuk a v-ből látott w-től számolt költséget, a w-ben látott költséggel (amelyik úton w után következő csúcs legyen w'):

$$c(w,w') + \beta \cdot d(w',t) \geq \beta \cdot d(w,t)$$

mert $c(w, w') + d(w', t) \geq d(w, t)$ igaz, hiszen $d(w, t)$ a legrövidebb út w-ből. $\square$

A következőkben a bejárt út költségére szeretnénk egy felső becslést adni. Ha azt belátjuk, hogy az ügynök által az E-frissítés során bejárt $v_1 = s, v_2, v_3, \ldots, v_n = t$ útra igaz az, hogy v_2-től megtett út költsége b-szerese a legolcsóbb útnak, akkor az egész bejárt útra beláthatunk egy b^2-es becslést:

$$\sum_{i=2}^{n-1} c(v_i, v_{i+1}) \leq b \cdot d(v_2, t)$$

Mivel az ügynök az első lépésben nem feltétlenül a legrövidebb utat választotta, hanem v_2 felé lépett, igaz:

$$d(v_1, t) \geq c(v_1, v_2) + \beta d(v_2, t)$$

Mindkét oldalt beszorozva $b^2 > 1$-gyel, kapjuk:

$$b^2 d(v_1, t) \geq b^2 c(v_1, v_2) + b d(v_2, t) \geq c(v_1, v_2) + c(v_2, v_3) + \cdots + c(v_{n-1}, v_n)$$

Be kell látnunk, hogy $\sum_{i=2}^{n-1} c(v_i, v_{i-1}) \leq b \cdot d(v_2, t)$, ehhez a következő összefüggést használjuk:

3.3.3. Lemma.

$$d(v_i, t) \geq \frac{\beta_{E(v_{i-1})}}{\beta^2_{E(v_i)}} \cdot c(v_i, v_{i+1}) + \frac{\beta_{E(v_{i-1})}}{\beta_{E(v_i)}} \cdot d(v_{i+1}, t)$$

Bizonyítás Az E-frissítés definícióját átrendezve kapjuk:

$$\beta_{E(v_i)} = \frac{c(v_i, v'_{i+1}) + \beta_{E(v_{i-1})} \cdot d(v'_{i+1}, t)}{d(v_{i,t})}$$

Ahol v'_{i+1} azt a csúcsot jelöli, ahova $\beta_{E(v_{i-1})}$ jövő torzító paraméter alapján az ügynök v_i-ből lépne. Ekkor $d(v_i, t) = \frac{c(v_i, v'_{i+1})}{\beta_{E(v_i)}} + \frac{\beta_{E(v_{i-1})}}{\beta_{E(v_i)}} \cdot d(v'_{i+1}, t)$, a $\frac{c(v_i, v'_{i+1})}{\beta_{E(v_i)}}$-es tagot alulról becsülhetjük $\frac{\beta_{E(v_{i-1})}}{\beta^2_{E(v_i)}} \cdot c(v_i, v'_{i+1})$-vel. Ez utóbbit, pedig tovább becsülhetjük az ügynök bejárt útján lévő v_{i+1} csúcsokkal, hiszen $c(v_i, v'_{i+1}) + \beta_{E(v_i)} d(v'_{i+1}, t) \geq c(v_i, v_{i+1}) + \beta_{E(v_i)} d(v_{i+1}, t)$, ahol minkét oldalt $\frac{\beta_{E(v_{i-1})}}{\beta^2_{E(v_i)}}$-vel szorozva:

$$d(v_i, t) \geq \frac{\beta_{E(v_{i-1})}}{\beta^2_{E(v_i)}} \cdot c(v_i, v'_{i+1}) + \frac{\beta_{E(v_{i-1})}}{\beta_{E(v_i)}} \cdot d(v'_{i+1}, t) \geq \frac{\beta_{E(v_{i-1})}}{\beta^2_{E(v_i)}} \cdot c(v_i, v_{i+1}) + \frac{\beta_{E(v_{i-1})}}{\beta_{E(v_i)}} \cdot d(v_{i+1}, t)$$

Ezzel beláttuk a lemmát. $\square$

A lemma felhasználásával kapunk egy rekurziót, amelynek segítségével felülről becsülhetjük az ügynök útjának költségét a v_2 csúcstól indulva. Felírva a lemmát $i = 2$-re:

$$d(v_2, t) \geq \frac{\beta_{E(v_1)}}{\beta^2_{E(v_2)}} \cdot c(v_2, v_3) + \frac{\beta_{E(v_1)}}{\beta_{E(v_2)}} \cdot d(v_3, t)$$

A $d(v_3,t)$ helyére a lemma becslését írjuk $i=3$-ra:

$$d(v_2,t) \geq \frac{\beta_{E(v_1)}}{\beta^2_{E(v_2)}} \cdot c(v_2,v_3) + \frac{\beta_{E(v_1)}}{\beta_{E(v_2)}} \cdot \left(\frac{\beta_{E(v_2)}}{\beta^2_{E(v_3)}} \cdot c(v_3,v_4) + \frac{\beta_{E(v_2)}}{\beta_{E(v_3)}} \cdot d(v_3,t) \right)$$

Ebből egyszerűsítve kapjuk:

$$d(v_2,t) \geq \frac{\beta_{E(v_1)}}{\beta^2_{E(v_2)}} \cdot c(v_2,v_3) + \frac{\beta_{E(v_1)}}{\beta^2_{E(v_3)}} \cdot c(v_3,v_4) + \frac{\beta_{E(v_1)}}{\beta_{E(v_3)}} \cdot d(v_4,t)$$

Folytatva rekurzívan a lemmával való becslést, kapjuk:

$$d(v_2,t) \geq \frac{\beta_{E(v_1)}}{\beta^2_{E(v_2)}} \cdot c(v_2,v_3) + \frac{\beta_{E(v_1)}}{\beta^2_{E(v_3)}} \cdot c(v_3,v_4) + \cdots + \frac{\beta_{E(v_1)}}{\beta^2_{E(v_{n-1})}} \cdot c(v_{n-1},v_n)$$

Az egyes élköltségek együtthatóit tudjuk β-val alulról becsülni, hiszen $\frac{\beta}{\beta^2_{E(v_i)}} \geq \beta$, mivel $\beta_{E(v_i)} \leq 1$. Ezzel tovább becsülve alulról $d(v_2,t)$-t kapjuk:

$$d(v_2,t) \geq \beta \cdot c(v_2,v_3) + \beta \cdot c(v_3,v_4) + \cdots + \beta \cdot c(v_{n-1},v_n)$$

Beszorozva β^{-1}-val mindkét oldalt kapjuk a kívánt becslést:

$$b \cdot d(v_2,t) \geq c(v_2,v_3) + c(v_3,v_4) + \cdots + c(v_{n-1},v_n)$$

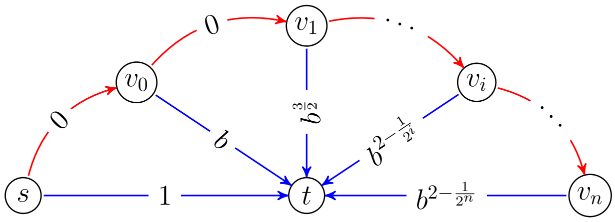
Ezzel beláttuk az E-féle frissítés költséghányadosára vonatkozó becslést:

3.3.4. Tétel. *Az E-féle frissítés során a költséghányados nem lesz rosszabb, mint b^2.*

Érdekes megfigyelni, hogy Akerlof példáján hogy viselkedik az E-féle frissítést használó ügynök. Az egyszerűbb példában az ügynök már a második lépésben frissíti a β-ját 1-re. Az exponenciális példában pedig ugyanaz lesz a helyzet, mint a T-féle frissítés során, hiszen a halogatás költsége csak 0.

Példa arra, hogy az E-féle frissítés b^2 költséghányadost tetszőlegesen megközelíthet (lásd 3.3. ábra). Akerlof legyezős példájából indulunk ki, azzal a különbséggel, hogy az éleken más lesz a költség. Az ügynök kezdeti jövő torzító paramétere legyen β, ennek reciproka pedig $b=\beta^{-1}$. A legyező „peremén” elhelyezkedő csúcsok legyenek: s, a kiinduló csúcs, továbbá $v_0, v_1, \ldots v_n$, a legyező közepén legyen t, a végcél csúcsa. A peremen az él költség legyen végig 0. Az st él legyen 1, a v_0t legyen b, tehát általánosan: v_it él költsége legyen $b^{2-\frac{1}{2^i}} + \epsilon_i$, ahol ϵ_i-k megfelelően kis számoknak választjuk, ezentúl ezeket az ϵ_i-ket nem írjuk ki.

3.3.5. Lemma. *Egy adott v_i csúcsban a jövő torzító paraméter $b^{-\frac{1}{2^{i+1}}}$-re frissül.*



3.3. ábra. Példa arra, amikor E-féle frissítés során a költséghányados b^2.

Bizonyítás Teljes indukcióval bizonyítunk. A kiinduló s csúcsban a jövő torzító paraméter b^{-1}. Ekkor az ügynök összehasonlítja az s-ből kiinduló út költségét: 1 a v_0-ból induló út költségével 1. Ekkor v_0-felé fog lépni, megjegyezve, hogy 1 munkája lesz onnan még hátra.

Az ügynök a v_0-ban a következőt számolja, vagy belép t-be b költséggel most, vagy v_1-be lép, ahonnan $b^{-1} \cdot b^{\frac{3}{2}} = b^{\frac{1}{2}}$ költséggel be fog lépni t-be. Ekkor v_1-felé olcsóbb az út költsége a közvetlen belépéshez képest, de 1-nél drágább, ezért az ügynök frissíti a jövő torzító paraméterét: $\beta_{E(v_0)} = b^{-1} \cdot \frac{b^{\frac{1}{2}}}{1} = b^{-\frac{1}{2}}$. Ezután az ügynök az új jövő torzító paraméterrel újra számolja a költségeket v_1-n keresztül $b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} = b$ a költség. Jól megválasztott ϵ-ok mellett az ügynök v_1-re lép. Tehát az indukciós állítást ellenőriztük $i = 1$-re.

Most tekintsünk egy tetszőleges v_i csúcsot, álljon az ügynök v_i-ben. Tegyük fel, hogy már v_{i-1}-re ismerjük az állítást, azaz ott a jövő torzító paraméter értéke $\beta_{E(v_{i-1})} = b^{-\frac{1}{2^i}}$, továbbá az ügynök szándékai szerint a v_i-ből lépett volna t-be $b^{-\frac{1}{2^i}} \cdot b^{2-\frac{1}{2^i}}$ költséggel. Az ügynök a v_i csúcsban vagy befejezi azonnal a feladatot $b^{2-\frac{1}{2^i}}$ költséggel, vagy halogat, és v_{i+1}-n keresztül lép be $b^{-\frac{1}{2^i}} \cdot b^{2-\frac{1}{2^{i+1}}}$ költséggel. A v_{i+1}-n keresztüli út olcsóbb, de drágább, mint a v_{i-1}-ben megtervezett út költsége, így frissítjük a jövő torzító paramétert:

$$\beta_{E(v_i)} = b^{-\frac{1}{2^i}} \cdot \frac{b^{-\frac{1}{2^i}} \cdot b^{2-\frac{1}{2^{i+1}}}}{b^{-\frac{1}{2^i}} \cdot b^{2-\frac{1}{2^i}}} = b^{-\frac{1}{2^{i+1}}}$$

Ezzel beláttuk a lemmát. $\square$

A frissített jövő torzító paraméterrel az ügynök v_i-ből v_{i+1}-be fog lépni, hiszen megfelelően választott ϵ-ok mellett kevesebb költséggel jár a v_{i+1}-n keresztül belépni, mint v_i-ből közvetlenül belépni: $b^{2-\frac{1}{2^{i+1}}} \cdot b^{-\frac{1}{2^{i+1}}} = b^{2-\frac{1}{2^i}}$. Így addig folytatódik a halogatás, amíg el nem ér v_n-be, ahonnan már mindenképp belép t-be $b^{2-\frac{1}{2^n}}$ költséggel, ezzel n-t növelve tetszőlegesen megközelíthetjük a b^2 költséghányadost:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^{2-\frac{1}{2^n}}}{1} = b^2$$

Tehát a becslésünk éles.

4. fejezet

Összegzés

Kleinberg és Oren [8] cikke alapján egy új modellt mutattunk be a halogatásjellegű viselkedésekre. Az általános hiperbolikus modellhez képest Kleinbergék modellje egyszerűbb és hatékonyabb. A szakirodalomban leginkább bonyolultságelméleti problémákat kutattak eddig. Jelen dolgozatban a bonyolultságelméleti kérdések mellett a modell más aspektusait is megvizsgáltuk. Definiáltuk a négyféle kritikus jövő torzító paraméter változatait, majd mutattunk egy dinamikus kiszámítást a topologikus sorrend segítségével. Ezek után megvizsgáltuk azt, hogy ha az ügynök viselkedése nem naiv, hanem ún. szofisztikált, akkor milyen költséghányadost kaphatunk a legrosszabb esetben. A kapott eredmények alapján látszik, hogy Kleinbergék szofisztikált ügynökének viselkedése és a mi két frissítésünk költséghányadosai lépcsőzetesek: legkisebb költséghányadosú Kleinbergék szofisztikált ügynöke, utána az E-féle frissítés, majd végül a T-féle frissítés.

A következő kutatási irányok merülnek még fel [9]:

- Mit mondhatunk az olyan esetekben, ahol az ügynök, csak részben naiv [9], azaz tisztában van a torzításával, de rosszul becsüli meg a saját β értékét.
- Látjuk, hogy legrosszabb esetben milyenek a költséghányadosok, tudunk-e valamit mondani az átlagról?
- Hányféle útvonalat járhat be egy szofisztikált ügynök, ha β értékét variáljuk?
- Hogyan lehet a szofisztikált ügynököt hatékonyan motiválni? (jutalmak elhelyezése, élek törlése …)

Több érdekes pszichológiai jelenség mélyén húzódnak meg az itt látott tapasztalatok. A jelenben lévő költségek illetve jutalmak értéke nagyobb, mint a jövőbelieké, általában a halogatás dinamikája ezen múlik. Hol halogatunk még? Látszólag a halogatástól független jelenségekre is magyarázatot adhat az eddig tárgyalt modell.

A Milgram kísérlet [7] során a résztvevők meglepően nagy százaléka engedelmeskedett a vizsgálatvezetőknek akkor is, amikor lelkiismeretükkel ellenkezőt kértek tőlük. A résztvevőket egy tanulást vizsgáló kísérlethez toborozták, majd párba osztották őket, és egyik felük a tanár, másik felük a tanuló szerepét kapta, látszólag véletlenszerűen. A valóságban úgy történt, hogy a résztvevő párja színész volt, aki mindenképp a tanulót játszotta. A kísérletvezető elmagyarázta a résztvevőknek, hogy a büntetés hatását vizsgálják a tanulásra, majd átkísérte őket a másik szobába, ahol különböző kapcsolók voltak 15 volttól 450 voltig. Ebből a szobából rá lehetett látni a tanulóra. A kísérletvezető megkérte a vizsgálatban résztvevő személyt, hogy olvasson fel megtanulandó szópárokat a tanulónak, és ha a tanuló rosszul mondja vissza őket, akkor büntesse egyre növekvő feszültségű áramütéssel. Ha a résztvevő meg akart állni, akkor a kísérletvezető látszólag biztosította, hogy a felelősség nem az övé. A résztvevők több mint fele eljutott odáig, hogy kiadja a halálos áramütést. Ha közgazdaságtani szemléletből értelmezzük a jelenséget, akkor az eddig tárgyalt modell segítségével is magyarázatot adhatunk a jelenségre. A résztvevők egyike sem akart valójában rámérni halálos áramütést a tanulóra, de a döntésüket egyre halogatták. Miért? A kísérlet abbahagyásának komoly szociális költsége lett volna, de annak a költsége, hogy még a következő kapcsolót megnyomja, és majd akkor abbahagyja, látszólag kisebb. A résztvevők naiv ügynökök módjára viselkedtek.

Akerlof [1] több hasonló dinamizmusú példát is hoz: különböző vallási szekták, extrém csoportok példáit. Akerlof a halogatással magyarázza ezeknek a csoportoknak fennmaradását: annak ellenére, hogy az egyes csoporttagokban rendszerint van belső ellenállás a csoport eszkalálódó akcióival szemben, de a csoporttagok mégsem szállnak ki időben: a csoportból való kiközösítés ára nagyobb, mint a következő akciót még megcsinálni a csoporttal és utána kiszállni.

A naiv és a szofisztikált ügynök, a modellből megismerhető szuboptimális viselkedése egybevág a pszichológiai tapasztalatokkal és tanulmányokkal. Airley és munkatársai [3] a következőket vizsgálták: (a) Hajlandóak-e az emberek akár szigorú határidőket szabni saját maguknak, hogy a saját halogatásukat kijátsszák? (b) Hatékonyan javították-e a feladat elvégzését ezek a határidők? (c) Optimálisak ezek a határidők? Airley és munkatársai szerint az első két kérdésre igen a válasz, a harmadikra nem. Ezek az eredmények összhangban vannak a szofisztikált ügynök modell eredményeivel, a szofisztikált ügynök: (a) tisztában van azzal, hogy halogat (b) kisebb a költséghányadosa, mint a naiv ügynöknek (c) a költséghányadosa nem feltétlenül optimális.

Irodalomjegyzék

[1] G.A. Akerlof, *Procrastination and obedience*, The American Economic Review Papers and Proceedings, 1991., 81(2), 1-19

[2] Susanne Albers és Dennis Kraft, *Motivating Time-Inconsistent Agents: A Computational Approach.* arXiv:1601.00479, 2016.

[3] D. Ariely and Klaus Wertenbroch *Procrastination, deadlines, and performance: self-control by precommitment* Psychological Science, 13(3):219?224, May 2002.

[4] Albert A., Babocsay Á. és munkatársai, *Gazdaságpszichológia*, Osiris, 2003., 1. fejezet

[5] Shane Frederick, George Loewenstein és Ted O'Donoghue, *Time discounting and time preference*, Journal of Economic Literature, 2002. 40(2):351-401.

[6] Mark Heimann, *Using Rewards to Motivate Present-Biased Agents*, szakdolgozat, Washington University in St. Louis, 2015.

[7] Milgram, Behavioral Study of Obeidence, The Journal of Abnormal and Social Psychology, 1963. 371-378.

[8] Jon Kleinberg és Sigal Oren, *Time-Inconsistent Planning: A Computational Problem in Behavioral Economics*, Proc. 15th ACM Conference on Economics and Computation (EC), 2014., 547-564

[9] Jon Kleinberg, Sigal Oren és Manish Raghavan, *Planning Problems for Sophisticated Agents with Present Bias*, arXiv:1603.08177, 2016.

[10] Ted O'Donoghue és Matthew Rabin, *Doing it now or later*, American Economic Review, 1999., 89(1):103-124

[11] Ted O'Donoghue és Matthew Rabin, *Choice and procrastination*, Quarterly Journal of Economics, 2001., 116(1):121-160

[12] R. A. Pollak, *Consistent planning*, Review of Economic Studies, 1968. 35(2):201?208

[13] P. Tang, Y. Teng, S. Xiao és Y. Xu, *Computational issues in time-inconsistent planning*, arXiv:1411.7472, 2014.