Belsőpontos módszer geometriai programozási feladatra

MSc Szakdolgozat

Deák Attila

Alkalmazott matematikus szak

Operációkutatás szakirány

Témavezető:

Illés Tibor, egyetemi docens

Operációkutatás Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A dolgozat első részében a geometriai programozás történetére térünk ki először, megemlítjük az eddigi közel 60 éves időszak fontosabb állomásait. Megemlítjük, hogy számos alkalmazással bír ez a terület, amelyre az utána következő 3 kisebb részben példát is mutatunk. Először az első mérföldkőnek tekinthető kémiai egyensúlyi egyenletet mutatjuk be és vezetjük vissza a duális geometriai programozás feladatra bizonyos átalakítással. A második példa a Klafszky Emil által vizsgált lineáris cseremodell egyensúlyi pontjának a vizsgálata. Ennél a feladatnál is visszavezetjük a problémát egy geometriai programozási feladatpárra. Legvégül arra mutatunk példát, hogy egy speciális lineáris programozási feladat hogyan vihető át pozinóm és geometriai programozási feladattá.

1.1. Történeti áttekintés

A geometriai programozás egy speciális típusa a nemlineáris programozási feladatoknak, amely konvex programozási feladattá alakítható a változók logaritmálásával. Az első megjelenése ennek a feladat osztálynak 1958-ban volt, amikor is W.B. White, S.M. Johnson és G.B. Dantzig cikkükben egy kémiai egyensúlyi egyenletet fogalmaztak át egy matematikai programozási feladattá. Ez volt tulajdonképpen a geometriai programozás duális feladata. Később többen is vizsgálták ezt a duális feladatot. 1960-ban néhány szerző [14] a geometriai egyenlőtlenséget használta fel különböző optimalizálási feladatok megoldására. 1966-ban R.J. Duffin, E.L. Peterson és C. Zener könyvükben összefoglalták az addigi eredményeket és egy átfogó művet alkottak a geometriai programozás primál/duál feladatáról, általánosításáról, illetve néhány alkalmazásról. 1973-ban jelent meg az első magyar nyelvű irodalom ebben a témában. A szerző, Klafszky Emil a kandidátusi értekezésében átdolgozta az addigi összes eredményt, és egy új fajta tárgyalásmódban építette fel a geometriai programozás pilléreit. Napjainkban ez a terület számos egyéb alkalmazással bír, például az antenna optimalizációban, kommunikációs rendszerekben, sorozat gyártási feladatokban, repülőgép alkatrész tervezésben (aerodinamika, ld. [6] cikk).

1.2. A kémiai egyensúlyi feladat

A fenti bezetőben szereplő W.B. White, S.M. Johnson és G.B. Dantzig [1] cikkükben ismertetett kémiai egyensúlyi egyenletet szeretnénk röviden ismertetni. Később, a matematikai háttér bevezetése után, erre a feladatra többször is utalni fogunk. Jelölésekben a [7] cikket követjük. A beszámolóban többször használjuk azt, hogy az $\mathcal{I} := \{1, 2, ..., n\}$-et particionáljuk $\mathcal{I}_k$ $(k = 1, 2, ..., p)$ diszjunkt indexhalmazok diszjunkt uniójára.

1. Probléma. Vegyük mol számok egy $\mathbf{x} := (x_1, ..., x_n)$ halmazát. Jelöljük P-vel a légnyomást, R-rel az egyetemes gázállandót, T-vel a hőmérsékletet (Kelvinben) és $\frac{F^0}{RT}$-val pedig a Gibbs-féle szabadenergia függvényt($\frac{F^0}{RT}$-ben). A feladat egyszerűbb tárgyalása érdekében használjuk a következő jelöléseket:

$$c_i := \left(\frac{F^0}{RT}\right)_i + \mathbf{log}\,(P)$$

$$f_i(\mathbf{x}) := x_i \left[c_i + \mathbf{log}\left(\frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}\right)\right] = x_i \left[\left(\frac{F^0}{RT}\right)_i + \mathbf{log}\left(\frac{P x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}\right)\right],$$

$$\overline{x} := \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\overline{x}_k := \sum_{j \in \mathcal{I}_k} x_j \ (k = 1, 2, .., p)$$

ahol

$$f_i : \mathbb{R}^n_{\oplus} \to \mathbb{R},$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \, \mathbf{x} \neq 0$$

és

$$F(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})$$

ekkor a teljes szabadenergia

$$(\frac{F}{RT})(x_i) := \sum_{i=1}^{n} (x_i c_i + x_i \mathbf{log}(x_i)) - \sum_{k=1}^{p} \overline{x}_k \mathbf{log}(\overline{x}_k). \text{ (teljes szabadenergia)}$$

Írjuk fel a következő lineáris programozási alapfeladatot:

$$\mathbf{min} \ \frac{F}{RT}(\mathbf{x})$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{x} \neq 0$$

ahol

- a_{ij} : j-edik elem atomjainak száma az i-edik molekula specieseinek ($j = 1, 2, ..., m$),
- b_j : j-edik elem teljes atomtömege, amely megjelenik a keverékben ($j = 1, 2, ..., m$),
- m : kémiai elemek száma.

A [2] könyvben a szerzők átalakították az előző feladatot. Vették a célfüggvény negatívszorosát e alappal ($x_i := e^{-t_i}$). Az egyszerűbb tárgyalásmód miatt t_i helyett használjuk megint x_i-t (ami nem ugyanaz mint korábban). Ekkor az előző feladat a következőre redukálódik:

$$\mathbf{max} \ v(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{x_i}\right)^{x_i} \prod_{k=1}^{p} \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_k} x_j\right)^{\sum_{j \in \mathcal{I}_k} x_j}$$

$$x_1 = 1, \ x_i \geq 0$$

$$\mathbf{x^T A} = 0$$

ahol

$$c_i = \begin{cases} e^{\left(\frac{-F^0}{RT}\right)_i \mathbf{log}(P)}, & i = 2, 3, ..., n \\ 1 & i = 1 \end{cases}$$

Az imént bemutatott probléma tulajdonképpen a következőkben bemutatásra kerülő standard geometriai programozási feladat duális feladata. Ezt a következőkben látni is fogjuk.

Végezetül mutatunk egy numerikus példát a kémiai egyensúlyi feladatra, melynek alapjául az [1] cikk szolgált.

2. Példa. Tekintsük azon gázokat, amelyek távoznak egy sztöchiometrikus $\mathbf{H_2N_4}$ és $\mathbf{O_2}$ égése során 3500 kelvin hőmérsékleten (T =3500) és 750 légköri nyomás (P =750) alatt. Az alábbi táblázatban összefoglaljuk, hogy az egyes speciesekhez mekkora Gibbs-féle szabadenergia érték tartozik, illetve mennyi a j-edik elem atomjainak száma az i-edik molekula specieseiben ($j = 1, 2, 3$). Az adatok az [1] cikkből származnak.

Speciesek ($i = 1, 2, ..., 10$)	$\frac{F^0}{RT}$	$a_{i1}, \mathbf{H}$	$a_{i2}, \mathbf{N}$	$a_{i3}, \mathbf{O}$
H	-10,021	1	0	0
$\mathbf{H}_2$	-21,096	2	0	0
$\mathbf{H_2O}$	-37,986	2	0	1
N	-9,846	0	1	0
$\mathbf{N}_2$	-28,653	0	2	0
NH	-18,918	1	1	0
NO	-28,032	0	1	1
O	-14,640	0	0	1
$\mathbf{O}_2$	-30,594	0	0	2
OH	-26,111	1	0	1

Emellett legyen $b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 1$.

A szerzők két módszert adtak meg cikkükben ennek a feladatnak (az általános feladatnak) a megoldására vonatkozóan. Ezek leírása megtalálható az [1] cikkben. Jelen esetben a célunk, hogy felírjuk erre a feladatra a geometriai programozási feladat duálisát.

Tekintsük a fent szereplő geometriai programozási duális feladatot, amelyet szeretnénk megoldani a mol számok (azaz x) szerint. A mol szám határozza meg, hogy hány mol anyag található egy adott tömegű anyagban. Ebben a felírásban a táblázat segítségével könnyen leolvasható az a_{ij}, b_j, c_i

$(i = 1, 2, ..., 10; j = 1, 2, 3)$ értéke. Az alábbi táblázatot felhasználva a fent szereplő duális feladat x-re megoldható, hiszen a célfüggvény csak c_i-től és x_i- től függ, azonban c_i kiolvasható a táblázatból. Emellett a feltételben szereplő A mátrix értékei a_{ij} miatt kiolvasható a korábbi táblázatból.

c_i	értéke	c_i	értéke
$i = 1$	1	$i = 6$	0.000004561190958312853
$i = 2$	0.000000516636247381837875	$i = 7$	0.00000000005022481511025528
$i = 3$	0.0000000000000238754229511440705	$i = 8$	0.00032884409546815
$i = 4$	0.0397189532462399	$i = 9$	0.00000000003874858823377534875
$i = 5$	0.0000000000269911552624431	$i = 10$	0.0000000034292413072065255

Azaz a következő feladat megoldható x-re.

$$\mathbf{max}\ \left(\frac{1}{x_1}\right)^{x_1}\left(\frac{0{,}000000516636247381837875}{x_2}\right)^{x_2}\cdots\left(\frac{0{,}00000000}{x_{10}}\right)^{x_{10}}\prod_{k=1}^{p}\left(\sum_{j\in\mathcal{I}_k}x_j\right)^{\sum\limits_{j\in\mathcal{I}_k}x_j}$$

$$x_1 = 1,\ x_i \geq 0$$

$$\mathbf{x^T}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Megjegyezzük, hogy az [1] cikkben a szerzők lineáris programozási módszert használva oldották meg az imént szereplő feladatot.

1.3 A lineáris cseremodell feladat

Az alábbi szakaszban egy termelési feladatot fogunk bemutatni, amelynek majd az egyensúlyi pontját keressük. A lineáris cseremodell feladattal Klafszky Emil a [15] cikkében foglalkozott, és visszavezette a feladatot egy geometriai programozási feladatra. A későbbi fejezetekben miután bevezetésre kerül a dualitás tétel a geometriai programozási feladatokra vonatkozóan, megmutatjuk, hogy a következőkben kapott két programozási feladat külön-külön karakterizálják az egyensúlyi pontot. Ez a feladat, mint majd látjuk, ekvivalens egy komplentaritási feladattal.

Gale a [32] könyvében közgazdasági és lineáris modelleket vizsgált a mátrix játékok és a lineáris programozási feladatok alkalmazásaként. Az ilyen modellek megértése miatt egy könnyebben tárgyalható, úgynevezett lineáris cseremodell feladatot épített ki a munkájában, amely abban az időben (60-as évek) egy fiatal területnek számított. A feladat elemzéséhez vegyünk egy gazdaságot, ahol adott egy termelő és számos fogyasztó. A termelő bizonyos számú árut állít elő, míg a fogyasztónak bizonyos mennyiségű jövedeleme van, amelyért árut vásárol. Ez az úgynevezett cseremodell. A linearitás abból adódik, hogy a fogyasztókhoz tartozó vásárlási vektora mellett a vásárló lineáris haszonhoz juthat.

Használjuk a következő jelöléseket:

- T : termelő,
- a_j: áruk, amelyeket a termelő előállít $(j = 1, 2, ..., n)$,
- m_j: $j-$edik áru egységnyi mennyisége $(j = 1, 2, ..., n)$,
- p_j: a_j áru egységnyi ára $(j = 1, 2, ..., n)$,
- F_i : fogyasztók $(i = 1, 2, ..., m)$,
- j_i : $i-$edik fogyasztó jövedelme, ezen vásárolhat árut $(i = 1, 2, ..., m)$,
- u_{ij}: F_i fogyasztónak ennyit ér az a_j áru (utilitási mátrix) $(i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$,
- x_{ij} : F_i fogyasztó az a_j áruból vásárolt mennyisége $(i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$.

Legyen továbbá :

- $U := (u_{ij} : i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$,
- $j := (j_i : i = 1, 2, ..., m)$,
- $m := (m_i : i = 1, 2, ..., m)$,
- $p := (p_j : j = 1, 2, ..., n) \geq 0$ (árvektor),
- $X := (x_{ij} : i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$.

Tegyük meg az alábbi megkötéseket:

1. $u_{ij} \geq 0$,
2. $\sum\limits_{i=1}^{m} u_{ij} > 0$ minden j-re,
3. $\sum\limits_{j=1}^{n} u_{ij} > 0$ minden i-re.

Vezessünk be három egyensúlyi definíciót:

1. (pénz egyensúly) $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_{ij} = j_i \ (i = 1, 2, .., m)$
2. (áru egyensúly) $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = m_j \ (j = 1, 2, ..., n)$
3. (össz kereslet-kínálat egyensúly) $\sum\limits_{j=1}^{n} m_j p_j = \sum\limits_{i=1}^{m} j_i$

A következő definícióhoz szükséges bevezetnünk, hogy egy vásárlási vektort (x_i) elfogadhatónak hívunk az $i-$edik fogyasztó számára, ha az összes árvektor között (amire $x \geq 0, px_i = j_i$) az $u_i x_i$ értéket maximalizálja.

3. Definíció. A $p \geq 0$ vektor egyensúlyi ár, ha van olyan $X \geq 0$ mátrix, hogy a pénz és az áru egyensúlyi megkötéseket teljesíti, és minden fogyasztó részére elfogadható. Az X elfogadható mátrixot egyensúlyi vásárlási mátrixnak hívjuk.

Az alábbi állítás arra ad szükséges és elégséges feltételt, hogy mikor létezik ilyen egyensúlyi vásárlási mátrix. A bizonyítás megtalálható a [15] cikkben.

4. Állítás. *X egyensúlyi vásárlási mátrix akkor és csak akkor, ha létezik olyan $y = (y_1, ..., y_m)$ vektor, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:*

- pénz egyensúlyi feltétel,
- áru egyensúlyi feltétel,
- $y_i p_j - u_{ij} \geq 0$,
- $y_i p_j = u_{ij} x_{ij}$,
- $x_{ij} \geq 0, p_j > 0, y_i > 0$.

A következő állításból kiolvasható, hogy abban az esetben, ha van egyensúlyi vásárlási mátrixunk, akkor ez maximalizál egy bizonyos függvényt, azaz egy matematikai programozási feladatot old meg. Emellett szintén szükséges és elégséges feltételt ad X mátrix egyensúlyiságára. Csak közöljük az állítást, a bizonyítás megtalálható a [15] cikkben. A fő lépései a bizonyításnak a geometriai egyenlőtlenséget használja, amelyre a következő részben térünk ki.

5. Állítás. *Az X mátrix egyensúlyi vásárlói mátrix (feltéve, ha létezik), ha maximalizálja a $\prod_{i=1}^{m} (u_i x_i)^{j_i}$ függvény az áru egyensúlyi feltétel és az $x_{ij} \geq 0$ mellett.*

A célunk, hogy felírjunk egy geometriai programozási primál és duál feladatpárt. Ennek eléréséhez nézzünk két feladatot (A és B), amelyekről belátjuk, hogy fennáll köztük a dualitás tétel. Az A feladat esetében találnunk kell olyan $X \geq 0$ mátrixot és $p \geq 0$ vektort, hogy teljesüljenek a feltételek, míg a B feladat esetében találnunk kell olyan $y > 0$ és $z > 0$ vektorokat, hogy teljesüljenek az ottani feltételek.

A lineáris cseremodell operiációkutatási felírása (primál feladat):

Találjunk olyan $X \geq 0$ mátrixot és $p \geq 0$ vektort, hogy teljesüljenek az alábbiak.

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \log \left(\frac{p_j}{u_{ij}} \right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} = j_i \ (i = 1, 2, .., m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = m_j \ (j = 1, 2, ..., n)$$

Írjuk fel most a másik feladatot is.

A lineáris cseremodell operiációkutatási felírása (duál feladat):

$$\max \sum_{i=1}^{m} j_i \log\left(\frac{1}{y_i}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j m_j = \sum_{i=1}^{m} j_i$$

$$u_{ij} \leq y_i z_j \ (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$$

1. Mindkét feladatnak létezik optimális megoldása.
2. A keresett X, p, y, z akkor és csak akkor elégítik ki a feladatok célfüggvényeit (a hozzátartozót), ha $p = z$ és $y_i p_j = u_{ij} x_{ij}$.

Használjuk a következő jelöléseket:

$$j_i^{'} := \frac{j_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} j_i}, u_{ij}^{'} := \frac{u_{ij} m_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} j_i}, p_j^{'} := \frac{p_j m_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} j_i}, x_{ij}^{'} := \frac{p_j x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m} j_i} \ (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$$

Ennek következtében az A feladat korlátozó feltételei megváltoznak, pontosabban:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{'} = j_i^{'} \ (i = 1, 2, .., m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{'} = p_j^{'} \ (j = 1, 2, ..., n)$$

Tekintsük a célfüggvény megváltozását, felhasználva, hogy $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{'} = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} j_i^{'} = 1$, így

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{'} \left(-\log\left(u_{ij}^{'}\right)\right) + \log\left(\frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(p_j^{'}\right)^{p_j^{'}}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{'}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{'}}}\right)$$

A [15] cikkben a szerző egy praktikus ábrát (táblát) készített ennek a feladatnak a szemléltetéséhez, amiből leolvasható a primál feladat párja is az előző célfüggvénynek. A primál feladat a következő alakú, ehhez vegyük az $\zeta_1, ..., \zeta_m$ és $\xi_1, ..., \xi_n$ változókat, így

$$e^{\zeta_i+\xi_j+log\left(u'_{ij}\right)} \leq 1 \ (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} e^{-\xi_j} \leq 1$$

$$max \sum_{i=1}^{m} j'_i \zeta_i$$

1.4. Lineáris programozással való kapcsolat

A geometriai programozás számos alkalmazása mellett megemlíthető, hogy néhány speciális esetben egy lineáris programozási feladatot is visszavezethetünk rá. Az alábbiakban bemutatjuk, hogyan is működik ez. Tekintsük először a lineáris programozási feladatok egy lehetséges primál feladatát. Jelen szakaszban csak a primál feladattal foglalkozunk.

Primál feladat:

$$\min \sum_{j=1}^{m} a_{1j}^T x_j + c_1 =: b_0$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{2j}^T x_j + c_2 =: b_1$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{3j}^T x_j + c_3 =: b_2$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{nj}^T x_j + c_n =: b_{n-1}$$

ahol a_{ij} és c_i tetszőleges konstansok $(i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m)$.

Alakítsuk át ezt a primál feladatot a $b_i := log(B_i)$ segítségével, az így kapott feladat a következő:

Primál (geometriai) feladat:

$$\min B_0 := e^{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j}^T x_j + c_1}$$

$$B_1 := e^{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{2j}^T x_j + c_2} \leq 1$$

$$\vdots$$

$$B_{n-1} := e^{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{nj}^T x_j + c_n} \leq 1.$$

Ezt a feladatot fogjuk később használni mint geometriai programozási primál feladat Klafszky Emil nyomán, azonban érdemes megemlíteni, hogy eredetileg a [2] könyvben egy másik feladat szerepel. Ennek az oka az, hogy a szerzők monom és pozinóm függvények által tekintett geometriai programozási feladatpárt írtak fel. Ezeket a következő fejezetben részletesebben tárgyaljuk, azonban megemlítjük a korábban említett primál feladat pozinómos alakját. Emellett az eredeti felírt feladatból ezen szerzők által felírt feladat könnyen megkapható, használva azt, hogy $c_i := log(C_i)$, $x_j := log(u_j)$.

Primál (pozinóm) feladat:

$$\min C_1 u_1^{a_{11}} ... u_m^{a_{1m}}$$

$$C_2 u_1^{a_{21}} ... u_m^{a_{2m}} \leq 1$$

$$\vdots$$

$$C_n u_1^{a_{n1}} ... u_m^{a_{nm}} \leq 1.$$

2. A geometriai programozás primál- és duál feladata

Ebben a fejezetben a célunk a szakdolgozat matematikai vázának a felépítése. Ehhez elsőként bevezetjük a szükséges matematikai jelöléseket, tételeket, majd bemutatjuk a kiindulási pontként tekinthető monom és pozinóm feladatokat, melyeket később átolgozva Klafszky Emil a [3] tanulmányában átdolgozott, ezáltal egy egységesített jelölésrendszert vezetett be. Ezeket mi is feltüntetjük. A 2.4. alszakaszban kitérünk a geometriai programozás dualitás elméletére, majd néhány szót ejtünk a Lagrange duálról is. A 2.6. és a 2.7. alszakaszok a geometriai programozás marginális értékeivel foglalkozik, mint a regularitási tulajdonsággal és a perturbált feladattal. Az utolsó két alpontban kitenkintésként két speciális osztályáról írunk. Az egyik a sztochasztikus programozás, amelynél csak a feladatot írjuk fel, a másik pedig a kúp programozási feladat, amely egyfajta általánosításának is tekinthető a geometriai programozási feladatnak.

2.1. Matematikai bevezetés

Az alábbi fejezetben bevezetjük azokat a jelöléseket, definíciókat, állításokat, amelyekre a későbbiekben hivatkozni fogunk. Elsőként egy olyan tételt bizonyítunk be, amely ennek a témakörnek az egyik alappillléreként tekinthető. Ez a tétel általánosítja a számtani-mértani közepek közötti összefüggést és hasznos eszköz lesz a duálitás elmélet felépítéshez.

6. Tétel. *(Geometriai-egyenlőtlenség) Legyenek a_k, b_k $(k = 1, 2, ..., p)$ nemnegatív számok, ekkor*

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{p} a_k}{\sum_{k=1}^{p} b_k}\right)^{\sum_{k=1}^{p} b_k} \geq \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{b_k}. \tag{1}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$a_k \sum_{k=1}^{p} b_k = b_k \sum_{k=1}^{p} a_k \ (k = 1, 2, ..., p).$$

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk. Vegyük először a $p = 2$ esetet és tegyük fel, hogy $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$. Ekkor □

$$\frac{b_1}{b_1+b_2}\mathbf{log}\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + \frac{b_2}{b_1+b_2}\mathbf{log}\left(\frac{a_2}{b_2}\right) \leq \mathbf{log}\left(\frac{b_1}{b_1+b_2}\cdot\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1+b_2}\cdot\frac{a_2}{b_2}\right),$$

ahol felhasználtuk a logaritmus függvény konkáv tulajdonságát. Mivel ez a függvény még monoton is, azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{\frac{b_1}{b_1+b_2}}\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{\frac{b_2}{b_1+b_2}} \leq \frac{b_1}{b_1+b_2}\cdot\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1+b_2}\cdot\frac{a_2}{b_2}.$$

Átrendezve az előbbi egyenlőtlenséget az alábbi adódik

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{b_1}\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{b_2} \leq \left(\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}\right)^{(b_1+b_2)}.$$

Azaz teljesül a tételben szereplő feltétel. Vizsgáljuk meg az egyenlőség esetét. Ez akkor és csak akkor teljesülhet, ha $a_1b_2 = a_2b_1$. Ebből az egyenletből egyszerűen adódik az a_1b_1 és a_2b_2 hozzáadásával, hogy $a_k(b_1+b_2) = b_k(a_1+a_2), (k = 1, 2)$.

Használjuk fel az indukciós feltevést, eszerint $k-1$-re igaz marad az állítás. Vizsgáljuk meg a k esetet. Ekkor az előző $k = 2$ speciális eset alapján

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{p} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} b_k}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{p} b_k} \geq \left[\sum_{k=1}^{p-2}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{b_k}\right]\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{b_{k-1}+b_k}\right)^{(a_{k-1}+a_k)} \geq \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{b_k}.$$

Azaz általános esetben is igaz marad a tételben szereplő feltétel. Megvizsgálva az egyenlőség esetét azt kapjuk, hogy

$$a_k\sum_{k=1}^{p} b_k = b_k\sum_{k=1}^{p} a_k,$$

ahol felhasználtuk a $k = 2$ speciális esetben tapasztaltakat, illetve hogy a $k-1$ esetnél

$$a_k\sum_{k=1}^{p} b_k = b_k\sum_{k=1}^{p} a_k \ (k = 1, 2, ..., p-2)$$

és

$$(a_{k-1}+a_k)\sum_{k=1}^{p} b_k = (b_{k-1}+b_k)\sum_{k=1}^{p} b_k.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

■

7. Következmény. $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k \mathbf{log}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \geqq \left(\sum\limits_{k=1}^{p} a_k\right) \mathbf{log}\left(\frac{\sum_{k=1}^{p} a_k}{\sum_{k=1}^{p} b_k}\right).$

8. Definíció. Az előző egyenlőtlenséget log-sum egyenlőtlenségnek is nevezik.

Az egyenlőtlenségek halmazát egy sokszor használt, fontos darabbal zárjuk.

Hölder-egyenlőtlenség: Legyenek $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ nem negatív számok, $p, q > 1$ valós számok és legyen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

A következőkben néhány olyan definíciót mondunk ki, amelyre a továbbiakban csak hivatkozni fogunk. Elsőként definiáljuk a matematikai programozási kúpot és annak konvex, csúcsos és merev tulajdonságát.

9. Definíció. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$, ekkor

- K *kúp*, ha $x \in K$ esetén $\lambda x \in K$ teljesül bármely $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ esetén.
- K *kúp konvex*, ha $x \in K$, $y \in K$ esetén $x + y \in K$, azaz K konvex halmaz és kúp is egyszerre.
- K *0-csúcsú kúp*, ha nem tartalmaz az origón kívül egyetlen egy alteret sem.
- K *kúp csúcsos*, ha $K \cap \{-K\} = \{\emptyset\}$.
- K *kúp merev*, K belseje nem üres ($int\ K \neq \emptyset$).

Vezessük be most egy függvény konvex, konkáv és logaritmikusan konvex és logaritmikusan konkáv tulajdonságát. A későbbiekben használni fogjuk, hogy a geometriai programozási primál feladatának célfüggvénye logaritmikusan konvex.

10. Definíció. Legyen A egy konvex részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $f \geq 0$, ekkor az

- $f : A \to \mathbb{R}$ függvény *konvex* ha bármely $x, y \in A$-ra és bármely $\lambda \in [0,1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

- $f : A \to \mathbb{R}$ függvény *konkáv*, ha bármely $x, y \in A$-ra és bármely $\lambda \in [0,1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

11. Definíció. Legyen A egy konvex részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $f \geq 0$, ekkor az

- $f : A \to \mathbb{R}$ függvény *logaritmikusan konvex* (logkonvex), ha bármely $x, y \in A$-ra és bármely $\lambda \in [0,1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq [f(x)]^{\lambda} + [f(y)]^{1-\lambda},$$

- $f : A \to \mathbb{R}$ függvény *logaritmikusan konkáv* (logkonkáv), ha bármely $x, y \in A$-ra és bármely $\lambda \in [0,1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq [f(x)]^{\lambda} + [f(y)]^{1-\lambda}.$$

A logaritmikusan konkáv és konkáv függvények közötti kapcsolatot írja le az alábbi tétel. A bizonyítás megtalálható [12] a könyvben, illetve egyszerűen adódik a definíciók felhasználásával.

12. Tétel. *Legyen A egy konvex részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek.*

1. Ha $f \geq 0$ és logkonkáv, akkor $log f$ konkáv.
2. Ha $f \geq 0$ és konkáv, akkor f logkonkáv.

13. Példa. Legyen $f(x) = x^a$ $(a \geq 0)$ egy konvex függvény, azonban nem logaritmikusan konvex, mivel $log(f(x)) = log(x^a)$= $alog(x)$ nem egy konvex függvény. Emellett, ha $a \leq 0$, akkor $f(x)$ logaritmikusan konvex.

14. Definíció. Legyen $f_1, f_2, ..., f_p$ konvex függvények, $f_i : A \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., p$, ekkor tekintsük a következő egyenlőtlenség rendszert

$$f_1(x) \leq 0$$

$$f_2(x) \leq 0$$

$$...$$

$$f_p(x) \leq 0$$

A feltétel rendszert Slater-regularisnak nevezzük, ha létezik olyan $x^0 \in A$ belső pont, hogy $f_i(x^0) < 0$, ha f_i nemlineáris és $f_i(x^0) \leq 0$, ha f_i lineáris $(i = 1, 2, ..., p)$.

2.2. A monom és pozinóm programozási feladat

Az alábbi részben bevezetjük a monom és pozinóm függvényeket, amelyek Duffin, Peterson és Zener [2] szereplő geometriai programozási feladatpár alapjának tekinthető. Majd mutatunk néhány példát általánosabb alakú geometriai programozási feladatokra.

Legyenek $u_1, u_2, ..., u_p$ pozitív változók, $\mathbf{u} := (u_1, u_2, ..., u_p)$. Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f(\mathbf{u}) := cu_1^{a_1} u_2^{a_2} ... u_p^{a_p}, \text{ ahol } c > 0, a_l \in \mathbb{R}, l = 1, 2, ..., p \text{ (monom függvény)}$$

$$g(\mathbf{u}) := \sum_{k=1}^{p} c_k u_1^{a_1} ... u_k^{a_k}, \text{ ahol } c_k > 0 \text{ (pozinóm függvény)}$$

R.J. Duffin, E.L. Peterson és C. Zener [2] könyvükben monóm és pozinóm függvényeket vizsgáltak. Később a geometriai programozási primál- és duál feladatot is ezen függvényeken definiálták.

15. *Észrevétel.* A (1) egyenlőtlenség egy megfelelő alsó korlátot biztosít pozinóm feladat esetén.

16. Példa. Tekintsük a következő függvényt: $f(u) := 2u + \frac{2}{u}$. Alkalmazzuk az (1)-ben szereplő egyenlőtlenséget $p = 2$-re. Ekkor $f(u) \geq \sqrt{4u}\sqrt{\frac{4}{u}} = 4$. Vagyis a 4 egy alsó korlát $f(u)$-hoz pozitív u-k mellett, sőt legnagyobb alsó korlát is.

Definiáljuk a geometriai programozási primál feladatot standard (nem konvex) alakban (GP_{sp}) :

$$\mathbf{min}\ g_0(\mathbf{u})$$

$$g_i(\mathbf{u}) \leq 1,\ i = 1, 2, ..., m$$

$$f_i(\mathbf{u}) = 1,\ i = 1, 2, ..., n$$

17. Példa. Mutassunk egy egyszerű példát az előző feladatra.

$$\min\ x_1^{-1} x_2$$

$$2x_1^{-1} \leq 1, \tfrac{1}{3}x_1 \leq 1, x_1^2 x_2^{-\frac{1}{2}} + 3x_2^{\frac{1}{2}} x_3^{-1} \leq 1$$

$$x_1 x_2^{-1} x_3^{-2} = 1$$

Vegyük ennek a GP_{sp} feladatnak a duális párját (GP_{sd}):

$$\mathbf{max}\ v(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{n_p} \left(\frac{c_i}{u_i}\right)^{u_i} \prod_{k=1}^{p} u_k^{u_k}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_0} u_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n_p} u_i a_{ij} = 0,\ j = 1, 2, ..., m\ (\mathbf{Au} = 0)$$

$$u_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n_p$$

ahol

$$u_k := \sum_{i \in \mathcal{I}_k} u_i$$

Alakítsuk át a GP_{sd} feladatot konvex programozási feladattá az $\mathbf{x} := log(\mathbf{u})$ átalakítást végezve. Felhasználva azt, hogy $f(\mathbf{u}) = 1$ és $g(\mathbf{u}) \leq 1$, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{log} f(e^{\mathbf{x}}) = a^T\mathbf{x} - c = 0$$

$$\mathbf{log} g(e^x) = \mathbf{log} \sum_{k=1}^{p} e^{a_k^T x - c_k} \leq 0.$$

Megjegyezzük, hogy számos kibővített alakja van a korábban szereplő GP_{sp} geometriai programozási feladatnak. Ezek közül bemutatunk néhányat a [30] és [31] alapján, amelyben részletes alkalmazások is találhatóak az egyes típusokhoz.

Általánosított geometriai programozási feladat (GGP_{sp})

$$\mathbf{min}\ g_0(\mathbf{u})$$

$$g_i(\mathbf{u}) \leq 1,\ i = 1, 2, ..., m$$

$$f_i(\mathbf{u}) = 1,\ i = 1, 2, ..., n$$

ahol f_i általánosított pozinóm (pl. $\max\left\{1 + x_1, 3x_2 + x_1^{0,1}\right\}, \left(0,5x_1^{1,2} + 0,2x_2^{1,3}\right)^{1,2}$) és g_i monom.

Vegyes-egész geometriai programozási feladat ($MIGP_{sp}$)

$$\mathbf{min}\ g_0(\mathbf{u})$$

$$g_i(\mathbf{u}) \leq 1,\ i = 1, 2, ..., m$$

$$f_i(\mathbf{u}) = 1,\ i = 1, 2, ..., n$$

$$u_i \in D_{i,}\ i = 1, 2, ..., k$$

ahol f_i általánosított pozinóm, g_i monom és D_i diszkrét halmaz (ezeket a feladatokat legtöbbször nehéz megoldani, azonban heurisztus módszerek vannak a megoldásra).

Fordított geometriai programozási feladat (RGP_{sp})

$$\mathbf{min}\ g_0(\mathbf{u})$$

$$g_i(\mathbf{u}) \leq 1,\ i = 1, 2, ..., m$$

$$g_i(\mathbf{u}) \geq 1,\ i = m + 1, m + 2, ..., m + r$$

$$f_i(\mathbf{u}) = 1,\ i = 1, 2, ..., n$$

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} > 0$$

ahol a „fordítottság” alatt azt értjük, hogy a feladatban $g_i(\mathbf{u})$ egy konvex függvény, míg a $g_i(\mathbf{u}) \geq 1$ egy nem konvex halmazt határoz meg. Emellett f_i egy pozinóm, g_i monom függvény.

A [33] cikkben a szerzők bemutatták, hogy az előző feladat megoldható, mégpedig a korlátozó feltételek (konvex és a fordított konvex) szétválasztásával. A fordított konvex esetben a korlátozás és szétválasztás módszerével elérhető a globális optimumhoz való konvergencia, azonban ez elég lassúnak bizonyul. Továbbá azt is állították, hogy a nem konvex feltételeket bizonyos konvex feltételek halmazával lehet approximálni, ezáltal a globális optimum eléréséhez ezen appromációs feltételek megoldása szükséges. A [36] cikkben megtalálható az imént említett korlátozás és szétválasztásos algoritmus.

2.3. A Klafszky-féle programozási feladat

Ettől a ponttól kezdve áttérünk a klasszikus jelölésről, Klafszky Emil [3] értekezésében használt jelölésre. Tekintsük a primál- és duál feladatokat konvex formában. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$,$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ és tekintsük az $\mathbf{A}-$nak az $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, ..., n\}$ indexhalmazát particionáljuk szét $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, ..., \mathcal{I}_p$ indexhalmazoknak diszjunkt uniójára. Ekkor a két feladat a következő:

A **primál** feladat (GP_{cp}):

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_k} e^{a_i^T \mathbf{x} - c_i} \leq 1,$$

$$(k = 1, 2, ..., p)$$

$$\mathbf{max}\ \mathbf{b}^T \mathbf{x}.$$

A **duál** feladat (GP_{cd}):

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{y} \geq 0$$

$$\mathbf{min}\ \mathbf{d}^T \mathbf{y} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{log} \frac{\prod_{i \in \mathcal{I}_k} y_i^{y_i}}{(\sum_{i \in \mathcal{I}_k} y_i)^{\sum_{i \in \mathcal{I}_k} y_i}}$$

$$(k = 1, 2, ..., p)$$

A [3] tanulmányban a szerző egy ábrán szemlélteti a jelöléseket és az indexhalmazokat. A bevezetőben leírt kémiai egyensúlyi feladat célfüggvénye pontosan ennek a duális feladatnak a $p = 1$-re vett speciális esete.

15. állítás A GP_{cp} feladat célfüggvénye logaritmikusan konvex.

Bizonyítás

Amit bizonyítanunk kell, az a következő:

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i^T (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) - c_i} \leq \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i^T x_1 - c_i} \right)^{\lambda} \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i^T x_2 - c_i} \right)^{1-\lambda}.$$

Azaz

$$\sum_{i \in I_k} \left(e^{a_i^T x_1 - c_i} \right)^{\lambda} \left(e^{a_i^T x_2 - c_i} \right)^{1-\lambda} \leq \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i^T x_1 - c_i} \right)^{\lambda} \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i^T x_2 - c_i} \right)^{1-\lambda}.$$

Felhasználva a Hölder-egyenlőtlenséget, adódik a tétel.

∎

Definiálhatjuk a primál- és duál geometriai feladatnak a megoldáshalmazát, illetve az optimális megoldások halmazát is. Ehhez használjuk a következő jelölést.

$$\varphi_{dual}(\mathbf{y}) := \sum_{k=1}^{p} \mathbf{log} \frac{\prod\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i^{y_i}}{(\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i)^{\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i}}$$

18. Definíció. Legyen

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \sum_{i\in\mathcal{I}_k} e^{a_i^T\mathbf{x}-c_i} \le 1 \right\} \text{ a primál megoldáshalmaz,}$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \ge 0 \right\} \text{ a duál megoldáshalmaz.}$$

19. Definíció. Legyen

$$\mathcal{P}^* = \left\{ \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m : \mathbf{b}^T\mathbf{x}^* \ge \mathbf{b}^T\mathbf{x}, \mathbf{x} \in P \right\} \text{ a primál optimális megoldáshalmaz,}$$

$$\mathcal{D}^* = \left\{ \mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n : \varphi_{dual}(\mathbf{y}^*) + \mathbf{d}^T\mathbf{y}^* \le \varphi_{dual}(\mathbf{y}) + \mathbf{d^T}\mathbf{y}, \mathbf{y} \in D \right\} \text{ a duál optimális megoldáshalmaz.}$$

20. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott a duál feladat célfüggvénye. Ekkor*

1. $\varphi_{dual}(\mathbf{0}) = 0$,
2. $\varphi_{dual}(\mathbf{y}) \le 0$,
3. $\varphi_{dual}(\lambda\mathbf{y}) = \lambda\varphi_{dual}(\mathbf{y}), \lambda \ge 0$,
4. $\varphi_{dual}(\mathbf{y} + \overline{\mathbf{y}}) \le \varphi_{dual}(\mathbf{y}) + \varphi_{dual}(\overline{\mathbf{y}})$ ($\triangle$-egyenlőtlenség).

Bizonyítás A bizonyítást esetenként végezzük

A bizonyítás első része könnyen adódik, hiszen 0-t helyettesítve az eredmény is 0 lesz, mivel a számláló (és a nevező is) eltűnik.

A mádik rész bizonyításához vegyük a következő egyenlőtlenséget.

$$\frac{y_i}{\sum\limits_{i\in I_k} y_i} \leq 1$$

Ebből adódik, hogy

$$\left(\frac{y_i}{\sum\limits_{i\in I_k} y_i}\right)^{y_i} \leq 1$$

azaz

$$\frac{\prod\limits_{i\in I_k} y_i^{y_i}}{\left(\sum\limits_{i\in I_k} y_i\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} y_i}} \leq 1.$$

Vagyis logaritmálva mindkét oldalt megkapjuk, hogy

$$\varphi_{dual}(y) \leq 0.$$

Tekintsük a harmadik részt, amelyhez elemi átalakításokat hajtunk végre a logaritmus függvény tulajdonságait felhasználva.

$$\varphi_{dual}(\lambda y) = log\left(\frac{\prod\limits_{i\in I_k} \lambda y_i^{\lambda y_i}}{\left(\sum\limits_{i\in I_k} \lambda y_i\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} \lambda y_i}}\right) = log\left(\frac{\prod\limits_{i\in I_k} \lambda^{\lambda y_i} \prod\limits_{i\in I_k} y_i^{\lambda y_i}}{\left(\lambda \sum\limits_{i\in I_k} y_i\right)^{\lambda \sum\limits_{i\in I_k} y_i}}\right) = log\left(\frac{\lambda^{\lambda \sum\limits_{i\in I_k} y_i}\left(\prod\limits_{i\in I_k} y_i^{y_i}\right)^{\lambda}}{\lambda^{\lambda \sum\limits_{i\in I_k} y_i}\left(\left(\sum\limits_{i\in I_k} y_i\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} y_i}\right)^{\lambda}}\right) =$$

$$\lambda log\left(\frac{\prod\limits_{i\in I_k} y_i^{y_i}}{\left(\sum\limits_{i\in I_k} y_i\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} y_i}}\right) = \lambda\varphi_{dual}(y).$$

Legvégül bizonyítsuk be a negyedik részét a tételnek. Ehhez induljunk ki a baloldalból.

$$\varphi_{dual}(y+\bar{y}) = log\left(\frac{\prod\limits_{i\in I_k} (y_i+\bar{y}_i)^{y_i+\bar{y}_i}}{\left(\sum\limits_{i\in I_k} (y_i+\bar{y}_i)\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} (y_i+\bar{y}_i)}}\right) \leq log\left(\frac{\prod\limits_{i\in I_k} y_i^{y_i}}{\left(\sum\limits_{i\in I_k} y_i\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} y_i}}\right) + log\left(\frac{\prod\limits_{i\in I_k} \bar{y}_i^{\bar{y}_i}}{\left(\sum\limits_{i\in I_k} \bar{y}_i\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} \bar{y}_i}}\right).$$

Ami ekvivalens azzal, ha felhasználjuk a logaritmus függvény tulajdonságát, hogy

$$\frac{\prod\limits_{i\in I_k} (y_i+\bar{y}_i)^{y_i+\bar{y}_i}}{\left(\sum\limits_{i\in I_k} (y_i+\bar{y}_i)\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} (y_i+\bar{y}_i)}} \leq \frac{\prod\limits_{i\in I_k} y_i^{y_i} \prod\limits_{i\in I_k} \bar{y}_i^{\bar{y}_i}}{\left(\sum\limits_{i\in I_k} y_i\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} y_i}\left(\sum\limits_{i\in I_k} \bar{y}_i\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} \bar{y}_i}}.$$

Vezessünk be egy jelölést, amely a további könnyebb számoláshoz szükséges. Legyen $a_i := y_i + \bar{y}_i$, $b_i := \bar{y}_i$. Ezzel a jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{\prod\limits_{i\in I_k} a_i^{a_i}}{\prod\limits_{i\in I_k} (a_i-b_i)^{a_i-b_i} \prod\limits_{i\in I_k} b_i^{b_i}} \leq \frac{\left(\sum\limits_{i\in I_k} a_i\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} a_i}}{\left(\sum\limits_{i\in I_k} (a_i-b_i)\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} (a_i-b_i)} \left(\sum\limits_{i\in I_k} b_i\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} b_i}}.$$

Alkalmazzunk a geometriai egyenlőtlenséget, ebből visszahelyettesítés után az adódik, hogy

$$\left(\frac{\sum\limits_{i\in I_k} (y_i+\bar{y}_i)}{\sum\limits_{i\in I_k} y_i}\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} y_i} \geq \prod_{i\in I_k} \left(\frac{y_i+\bar{y}_i}{y_i}\right)^{y_i}.$$

Ismételten vezessünk be új jelölést. Legyen $a_i := y_i + \bar{y}_i$, $b_i := \bar{y}_i$. Ezzel a jelöléssel hasonlóan az előzőhöz azt kapjuk felhasználva a geometriai egyenlőtlenséget, hogy

$$\left(\frac{\sum\limits_{i\in I_k} (y_i+\bar{y}_i)}{\sum\limits_{i\in I_k} \bar{y}_i}\right)^{\sum\limits_{i\in I_k} \bar{y}_i} \geq \prod_{i\in I_k} \left(\frac{y_i+\bar{y}_i}{\bar{y}_i}\right)^{\bar{y}_i}.$$

Az utóbbi két egyenlőtlenségből adódik a bizonyítandó.

Megjegyezzük, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$y_i \sum_{i\in I_k} (y_i + \bar{y}_i) = (y_i + \bar{y}_i) \sum_{i\in I_k} y_i$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$y_i \sum_{i\in I_k} \bar{y}_i = \bar{y}_i \sum_{i\in I_k} y_i.$$

4-nél egyenlőség akkor teljesül, ha $y_i \sum\limits_{i\in \mathcal{I}_k} \overline{y}_i = \overline{y}_i \sum\limits_{i\in \mathcal{I}_k} y_i$.

■

21. Következmény. φ_{dual} *egy pozitív homogén (elsőfokú, ld. 3. pont) konvex függvény.*

Vezessük be a GP_{cp} feladat felső szinthalmazát, majd kimondunk egy vele kapcsolatos állítást. Emellett szükségünk lesz még a P_K halmazra is.

- $P_K := \{x \in P : b^T x \geq K\}$ a primál feladat felső szinthalmaza ($\mathcal{P}$-nek),

22. Állítás. *Adottak a korábbi szinthalmazok, ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $P_K \neq \emptyset$ korlátos $\Longrightarrow y^T A = b$-nek létezik $y > 0$ megoldása.
2. $0 \neq \mathcal{P}$ és korlátos$\Longleftrightarrow y^T A = 0,\ y \geq 0$ feladatnak van megoldása, hogy $y_i > 0$.
3. $P_K \neq \emptyset$ és $0 \neq \mathcal{P} \Longleftrightarrow y^T A - \varepsilon b = 0,\ y \geq 0$ feladat megoldható, hogy $y_i > 0$ (ε tetszőleges pici szám).

2.4. A dualitás tétel

Ebben a pontban felépítjük a geometriai programozási feladatok dualitás elméletét, kitérve a különféle dualitás tételekre.

A következőkben bebizonyítunk egy tételt, amely megmutatja, hogy nélkülözhetetlen a duál feladat bevezetése, emellett a geometriai programozási primál és duál feladat közötti kapcsolatot mutatja meg.

Gyenge dualitás tétel: Ha $\mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in D$, akkor

$$\mathbf{b}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{d}^T \mathbf{y} + \varphi_{dual}(\mathbf{y}).$$

Egyenlőség akkor teljesül, ha

$$e^{a_i^T \mathbf{x} - c_i} \cdot \sum_{i \in \mathcal{I}_k} y_i = y_i \ (k = 1, 2, ..., p).$$

Bizonyítás Alkalmazzuk a geometriai egyenlőtlenséget.

$$\frac{\left(\sum\limits_{i \in \mathcal{I}_k} y_i\right)^{\sum\limits_{i \in \mathcal{I}_k} y_i}}{\prod\limits_{i \in \mathcal{I}_k} y_i^{y_i}} \cdot e^{\left(\sum\limits_{i \in \mathcal{I}_k} a_i^T \mathbf{x} - \sum\limits_{i \in \mathcal{I}_k} y_i c_i\right)} = \prod_{i \in \mathcal{I}_k} \left(\frac{e^{a_i^T \mathbf{x} - c_i}}{y_i}\right)^{y_i} \cdot \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_k} y_i\right)^{\sum\limits_{k=1}^{p} y_i} \leq \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_k} e^{a_i^T \mathbf{x} - c_i}\right)^{\sum\limits_{i \in \mathcal{I}_k} y_i} \leq 1$$

Vizsgáljuk meg az egyenlőség esetét, két esetleg lehetséges :

1. $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i = 0,$

2. $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} e^{a_i^T\mathbf{x}-c_i} = 1.$

Emellett teljesül még az az egyenlőség is, hogy

$$e^{a_i^T\mathbf{x}-c_i}\sum_{i\in\mathcal{I}_k} y_i = y_i \sum_{i\in\mathcal{I}_k} e^{a_i^T\mathbf{x}-c_i}\ (k=1,2,...,p).$$

Azaz

$$e^{a_i^T\mathbf{x}-c_i}\sum_{i\in\mathcal{I}_k} y_i = y_i\ (k=1,2,...,p).$$

Amiből azt kapjuk, hogy

$$1 \geq \left(\prod_{i\in\mathcal{I}_k}\frac{\left(\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i\right)^{\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i}}{\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i^{y_i}}\right)\cdot e^{\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i a_i^T\mathbf{x}-\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i c_i} = \left(\prod_{i\in\mathcal{I}_k}\frac{\left(\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i\right)^{\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i}}{\prod\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i^{y_i}}\right)\cdot$$

$$e^{\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{y}^T\mathbf{d}} = \left(\prod_{i\in\mathcal{I}_k}\frac{\left(\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i\right)^{\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i}}{\prod\limits_{i\in I_k} y_i^{y_i}}\right)\cdot e^{\mathbf{b}^T\mathbf{x}-\mathbf{y}^T\mathbf{d}}.$$

Vegyük a logaritmusát az egyenlőtlenség jobb oldalának. Ekkor

$$\mathbf{b}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{d}^T\mathbf{y} + \sum_{k=1}^{p}\mathbf{log}\frac{\prod\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i^{y_i}}{\left(\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i\right)^{\sum\limits_{i\in\mathcal{I}_k} y_i}}.$$

■

A következő tétel tulajdonképpen azt fogalmazza meg, hogy az előzőekben szereplő esetben bizonyos feltételek mellett az egyenlőséget is elérhetjük.

Gyenge equilibrium tétel: Legyen $x' \in P, y' \in D, y' > 0$ és $e^{a_i^T x' - c_i} = \frac{y_i'}{\sum\limits_{i\in I_k} y_i'}$ $(k=1,2,...,p)$. Ekkor bármely $y \in D$ esetén

$$b^T x' = d^T y + \varphi_{dual}(y').$$

23. Definíció. A GP_{cp} és GP_{cd} feladat kanonikus, ha $\mathcal{P} \neq \varnothing$ és $\mathcal{D} \neq \varnothing$.

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt fogalmaz meg a primál geometriai feladatunkra.

24. Tétel. *A (konzisztens) primál feladat célfüggvénye* ($\mathbf{b}^T\mathbf{x}$) *akkor és csak akkor felülről korlátos, ha a duál feladat konzisztens.*

A tétel bizonyítása során felhasználjuk a Farkas-lemmát, amely a következőt mondja ki.

Farkas-lemma: Legyen adott egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor. Akkor az alábbi feladatok közül pontosan egy oldható meg.

1. $\mathbf{y}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq 0,$
2. $\mathbf{x}^T\mathbf{A} \leq 0, \mathbf{b}^T\mathbf{x} = 1.$

Szükségünk lesz még a következő segédtételre is.

25. Segédtétel. *Vegyünk egy* $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$*-t és* $\overline{\mathbf{x}}$ *elemet, amire* $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} \leq 0$*. Ekkor bármely* $\delta \geq 0$*-ra* $(\mathbf{x}+\delta\overline{\mathbf{x}}) \in \mathcal{P}$*. Vegyünk ismételten egy* $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$*-t. Ekkor* $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{d}$.

Bizonyítás Tekintsük először az egyik irányt. Tegyük fel, hogy a duál problémának nem létezik megoldása. Ebben az esetben az előbb említett Farkas-lemma szerint van olyan $\overline{\mathbf{x}}$, amire $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A} \leq 0, \mathbf{b}^T\mathbf{x}>0$. Ha azonban teljesül még az is, hogy $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, akkor a második felhasznált lemma első állítása szerint $\mathbf{x} + \delta\overline{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}$, valamely $\delta \geq 0$-ra. Tekintsük a célfüggvényt:

$$\lim_{\delta\to\infty} \mathbf{b}^T(\mathbf{x} + \delta\overline{\mathbf{x}}) = \lim_{\delta\to\infty} (\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\delta\overline{\mathbf{x}}) = \infty$$

Nézzük most a másik irányát a bizonyításnak. Tegyük fel most azt, hogy a duál probléma konzisztens. Ebből az következik, hogy van olyan $\overline{\mathbf{y}} \geq 0$, amelyre $\overline{\mathbf{y}}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}$. Hasonlóan az első irány bizonyításához, használjuk fel ismételten a második lemmát, de most a második állítására lesz szükségünk. Eszerint $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{d}$ teljesül bármely $x \in P$ mellett. Ekkor azonban azt kapjuk, hogy $\overline{\mathbf{y}}\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}\overline{\mathbf{x}} \leq \overline{\mathbf{y}}\mathbf{d}$. Vagyis a célfüggvény felülről korlátos.

$\blacksquare$

26. Következmény. *$\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ alulról/felülről korlátos $\Longleftrightarrow$$\mathbf{A}$ mátrix sorai által generált kúp a negatív/pozitív ortánsát tartalmazza.*

A következő állítás kapcsolatot létesít a két megoldás halmaz között.

27. Állítás. *$e^{a_i^T \mathbf{x} - c_i} \geq \varepsilon \Longleftrightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{A} = 0, \mathbf{y} \geq 0$ egyenletnek létezik η_i pozitív megoldása.*

A következőkben a duális geometriai programozási feladat megoldásával foglalkozunk. Vezessük be a kanonikus feladatpár fogalmát ehhez.

28. Definíció. Egy geometriai programozási feladatpárt kanonikusnak hívunk, ha a duál problémának létezik pozitív megoldása.

Tegyük fel, hogy tudunk információt a duál feladat megoldásáról. Ekkor mit mondhatunk a primál feladat megoldásáról? Ez a meggondolás tulajdonképpen a Farkas-lemmát használja, pontosabban.

29. Állítás. *Ha létezik $\mathbf{y} > 0$ megoldása az $\mathbf{y}^T \mathbf{A} = 0$ egyenletnek és $\mathbf{d}^T \mathbf{y} + \varphi_{dual}(\mathbf{y}) \geq 0$, akkor létezik olyan $\overline{\mathbf{x}}$, hogy $\sum\limits_{i \in \mathcal{I}_k} e^{a_i^T \overline{\mathbf{x}} - c_i} \leq 1$.*

Erős dualitás tétel: Tegyük fel, hogy a primál feltétel teljesíti a Slater-regularitási feltételt, emellett a célfüggvénye felülről korlátos P-n. Ekkor létezik olyan $\mathbf{y}^*$ optimális megoldás, amelyre

$$\sup_{x \in P} \mathbf{b}^T \mathbf{x} = \mathbf{d}^T \mathbf{y}^* + \varphi_{dual}(\mathbf{y}^*).$$

Bizonyítás Jelöljük a baloldali kifejezést s-el, azaz $\sup\limits_{x \in P} \mathbf{b}^T \mathbf{x} =: s$. Ekkor mivel s-en legkisebb felső korlátot vettünk, emellett a primál feladat korlátozó feltételét ismerjük, azt kapjuk, hogy

$$s - b^T x < 0$$

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i^T x - c_i} - 1 \leq 0.$$

Alakítsuk át ezt a rendszert a következőképpen:

$$s - b^T x < 0$$

$$\sum_{i \in I_k} e^{\alpha_i} - 1 \leq 0$$

$$\alpha_i \geq a_i^T x - c_i$$

$$0 \geq a_i^T x - c_i - \alpha_i \text{ (előzőből átrendezve).}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy az alábbi rendszer nem megoldható.

$$s - b^T x < 0$$

$$\sum_{i \in I_k} e^{\alpha_i} - 1 \leq 0$$

$$a_i^T x - c_i - \alpha_i \leq 0.$$

Használjuk fel a Konvex Farkas-tételt, miszerint létezik olyan λ_k, y_i, amelyre

$$s - b^T x + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\sum_{i \in I_k} e^{\alpha_i} - 1 \right) - \sum_{i=1}^{m} y_i \left(a_i^T x - c_i - \alpha_i \right) \geq 0.$$

Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$s + x^T \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_i^T - b \right) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\sum_{i \in I_k} e^{\alpha_i} - 1 \right) - \sum_{i=1}^{m} y_i \left(c_i + \alpha_i \right) \geq 0.$$

Legyen $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i a_i^T - b := 0$, mivel ha $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i a_i^T - b \neq 0$, akkor $y^T A = b$, $y \geq 0$ miatt $y \in D$. Ha $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i a_i^T - b = 0$, akkor

$$s + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\sum_{i \in I_k} e^{\alpha_i} - 1 \right) - \sum_{i=1}^{m} y_i \left(c_i + \alpha_i \right) \geq 0.$$

Két eset lehetséges jelen esetben.

Az első esetben legyen $y_i > 0$, ekkor $\alpha_i := log\left(\frac{y_i}{\sum\limits_{i\in I_k} y_i}\right)$ $(i \in I_k)$,

$$s+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\left(\sum_{i\in I_k}\left(\frac{y_i}{\sum\limits_{i\in I_k} y_i}-1\right)\right)+\sum_{i=1}^{m} y_i\left(-c_i-log\left(\frac{y_i}{\sum\limits_{i\in I_k} y_i}\right)\right)\geq 0.$$

Azaz átrendezve azt kapjuk, hogy

$$s \geq c^T y + \varphi_{dual}(y).$$

A második eset, mikor $y_i = 0$ egy tetszőleges i-re. Ennek bizonyításához induljunk ki ismételten a következő egyenlőtlenségből.

$$s+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\left(\sum_{i\in I_k} e^{\alpha_i}-1\right)-\sum_{i=1}^{m} y_i\left(c_i+\alpha_i\right)\geq 0.$$

Ebből

$$s+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\left(\sum_{i\in I_k, y_i>0} e^{\alpha_i}-1\right)+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\sum_{i\in I_k, y_i=0} e^{\alpha_i}+\sum_{\substack{i=1\\ y_i>0}}^{m} y_i\left(-c_i-\alpha_i\right)\geq 0.$$

Mivel feltettük, hogy $y_i = 0$, ezért vegyünk olyan α_i-t, amelyre teljesül ($W > 0$ mellett), hogy

$$\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\sum_{\substack{i\in I_k\\ y_i=0}} e^{\alpha_i}\leq W.$$

Ekkor ugyanis szintén az teljesül, hogy

$$s + W \geq c^T y + \varphi_{dual}(y).$$

■

30. Következmény. *Tekintsük a P^* és D^* optimális megoldás halmazokat. Ekkor teljesülnek az alábbiak.*

- Legyen $x^* \in P^*, y^* \in D^*$. Ekkor

$$\left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x^* - c_i}\right)\left(\sum_{i\in I_k} y_i^*\right) = 0.$$

- Legyen D^*félterek metszete és $y_1 \in D^*, y_2 \in D^*$, ekkor

$$y_{i_1} \sum_{i\in I_k} y_{i_2} = y_{i_2} \sum_{i\in I_k} y_{i_1}.$$

Bizonyítás Az első rész könnyedén adódik, felhasználva a gyenge dualitás tételt és az erős dualitás tételt, ugyanis ebben az esetben azt kapjuk, hogy

$$e^{a_i^T x^* - c_i} \sum_{i\in I_k} y_i^* = y_i^*,$$

ahol $y^* \in D^*, x^* \in P^*$. Amiből az adóik, ha összegezünk, hogy

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x^* - c_i} \sum_{i\in I_k} y_i^* = \sum_{i\in I_k} y_i^*,$$

azaz átrendezve

$$\left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x^* - c_i}\right)\left(\sum_{i\in I_k} y_i^*\right) = 0.$$

A második rész bizonyításához szükségünk lesz az alábbi jelölésre. Legyen $\omega_i = e^{a_i^T x^* - c_i}$, ahol $x^* \in P^*$. Alkalmazzuk ismételten a gyenge dualitás tételt, amely szerint a következő feladatot kell megoldanunk:

$$\omega_i \sum_{i\in I_k} y_i = y_i \ (k = 1, 2, ..., p)$$

$$y^T A = b$$

$$y \geq 0.$$

Ennek a feladatnak az optimális megoldás halmaza D^*. 2 eset lehetséges, vagy $y_i = 0$, vagy $y_i > 0$, mivel ω_i pozitív. Az előbbi feladatnak vegyük két $y_1 \in D^*, y_2 \in D^*$ megoldását. Ebben az esetben a feltétel szerint $\frac{y_1+y_2}{2} \in D^*$. Azaz

$$d^T \left(\tfrac{y_1+y_2}{2}\right) + \varphi_{dual}\left(\tfrac{y_1+y_2}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left\{d^T (y_1+y_2) + \varphi_{dual}(y_1+y_2)\right\} \leq$$
$$\tfrac{1}{2}\left\{d^T y_1 + \varphi_{dual}(y_1) + d^T y_2 + \varphi_{dual}(y_2)\right\}.$$

Mivel mindkét oldal a duál feladat optimuma, így egyenlőség teljesül. Felhasználva egy korábbi segédtételt, azt kapjuk, hogy

$$y_{i_1} \sum_{i \in I_k} y_{i_2} = y_{i_2} \sum_{i \in I_k} y_{i_1} \ (k = 1, 2, ..., p).$$

A következő tétel az előző primál feladatra vonatkozónak a párja, amely kiindulási alapja a dualitás tétel vizsgálatának.

■

31. Tétel. *Tegyük fel, hogy a duál geometriai programozási feladatnak létezik pozitív megengedett megoldása, emellett a célfüggvénye felülről korlátos. Ekkor a primál feladatnak a célfüggvénye felveszi a maximumát bizonyos felvételi halmaz egy x' pontjában és* $b^T x' = \inf\limits_{y \in D} \left(d^T y + \varphi_{dual}(y)\right)$.

Klafszky Emil a [3] művében a dualitás tételt egy kicsit másként fogalmazta meg, azonban az ő általa tárgyalt, illetve a mi általunk vizsgált felírás teljesen ekvivalens, ezért csak érdekesség miatt közöljük.

Dualitás tétel: Tegyük fel, hogy adott a GP_{cp} és a GP_{cd} feladatpár.

1. GP_{cp} és GP_{cd} konzisztens $\Longrightarrow \sup\limits_{x \in P} b^T x = \inf\limits_{y \in D}\left(d^T y + \varphi_{dual}(y)\right)$.
2. Ha a GP_{cp} konzisztens és véges szuprémuma van $\Longrightarrow GP_{cd}$ is konzisztens és a primál szuprémuma megegyezik a duál infimumával.

Fordított dualitás tétel: Legyen $y \in D, y > 0$ (Slater-feltétel), és a duális feladat célfüggvénye alulról korlátos, akkor van olyan $x^* \in P$ ($x^* \in P^*$), hogy

$$b^T x^* = \inf_{y \in D} \left\{ d^T y + \varphi_{dual}(y) \right\}.$$

Végezetül kitérünk az úgynevezett szubkonzisztencia tulajdonságra, amely a következőt jelenti.

32. Tétel. *Ha a duál feladat konzisztens és $\mathcal{D} \neq 0$, emellet van olyan μ valós szám, hogy $\mu = \inf_{y \in D} \left\{ d^T y + \varphi_{dual}(y) \right\}$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan x vektor, amelyre*

1. $\sum_{i \in I_k} e^{a_i^T x - c_i} \leq 1 + \varepsilon$ és
2. $\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in P} b^T x = \mu$.

2.5. A Lagrange-függvény és Lagrange-duál

Az alábbi részben a célunk, hogy röviden bemutassuk a Lagrange-féle függvényt és ennek néhány tulajdonságát a GP_{cd} feladatunk célfüggvényére nézve.

Tekintsük újra, a 2.3-ban szereplő, geometriai programozási duál feladat egy jelölését.

$$\varphi_{dual}(\mathbf{y}) := \sum_{k=1}^{p} \mathbf{log} \frac{\prod_{i \in \mathcal{I}_k} y_i^{y_i}}{\left(\sum_{i \in \mathcal{I}_k} y_i\right)^{\sum_{i \in \mathcal{I}_k} y_i}}$$

Tekintsük a következő $\varphi(x, y) := b^T x + d^T y - y^T A x + \varphi_{dual}(y)$ függvényt, amelyet a geometriai programozási feladatpár Lagrange-függvényének nevezzük.

33. Definíció. A Lagrange-függvény nyeregponjának nevezzük az x', y' pontokat, ha teljesül rájuk, hogy

$$\varphi(x', y) \geq \varphi(x', y') \geq \varphi(x, y').$$

Az alábbi tétel ekvivalenciát fogalmaz meg a geometriai programozási feladat optimális megoldása és a Lagrange-függvény nyeregpontja között.

34. Tétel. *Az x', y' pár optimális megoldás akkor és csak akkor, ha Lagrange-függvény nyeregpontja.*

Bizonyítás Rövid számolás után a fenti definíciókból adódik, ugyanis elsőként tekintve a baloldali egyenlőtlenséget az adódik, hogy

$$b^T x' + d^T y - y^T Ax' + \varphi_{dual}(y) \geq b^T x' + d^T y' - y'^T Ax' + \varphi_{dual}(y'),$$

amelyből

$$d^T y + \varphi_{dual}(y) \geq d^T y' + \varphi_{dual}(y'),$$

azaz y' optimális megoldás. Tekintsük most a jobboldali egyenlőtlenséget, amelyből az adódik, hogy

$$b^T x' + d^T y' - y'^T Ax' + \varphi_{dual}(y') \geq b^T x + d^T y' - y'^T Ax + \varphi_{dual}(y'),$$

amelyből

$$b^T x' \geq b^T x,$$

azaz x' optimális megoldás.

$\blacksquare$

2.6. A regularitási tulajdonság

Ebben a pontban a célunk, hogy kitekintsünk és bevezessünk regularitási tulajdonságot a geometriai programozási feladatpárra. Elsőként definiáljuk, mit is értünk a GP_{cp} feladat regularitási tulajdonságán.

35. Definíció. A GP_{cp} reguláris, ha a következő feladatnak nem létezik megoldása:

$$Ax \leq 0$$

$$b^T x \geq 0$$

$$x \neq 0.$$

Hasonlóan a GP_{cd} feladatra is definiálható a regularitási tulajdonság.

36. Definíció. A GP_{cd} reguláris, ha a következő feladatnak nem létezik megoldása:

$$y^T A = 0$$

$$d^T y + \varphi_{dual}(y) \leq 0$$

$$y \geq 0$$

$$y \neq 0.$$

37. Definíció. Az együttes geometriai feladatpárt regulárisnak nevezzük, ha a GP_{cp} és a GP_{cd} feladat is reguláris.

Korábban már definiáltuk, mit értünk a GP_{cd} kanonikus tulajdonságán. Szükségünk van még a következő kifejezésre.

38. Definíció. A GP_{cp} szuperkonzisztens, ha a következő feladat megoldható

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i^T x - c_i} < 1 \ (k = 1, 2, ..., p).$$

A következő tétel összefoglalja az eddig szerepelt kifejezéseket, emellett a köztük lévő kapcsolatokra is rávilágít.

39. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a GP_{cp} és a GP_{cd} feladat tulajdonságai, ekkor az alábbiak igazak:*

1. GP_{cp} reguláris $\Longrightarrow$ GP_{cd} kanonikus.

2. GP_{cd} reguláris $\Longleftrightarrow$ GP_{cp} szuperkonzisztens.

Bizonyítás Elsőként a tétel első pontját bizonyítjuk be. Induljunk ki a baloldali feladatból.

$$Ax \leq 0$$

$$b^T x \geq 0$$

$$x \neq 0.$$

Ez a feladat mivel nem megoldható a feltétel szerint, így az $a_1, ..., a_n, -b$ vektorok által alkotott kúpnak a duálisa tartalmazza a zérust. Ezáltal

$$b - \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \beta(-b),$$

ahol $\alpha_i, \beta \geq 0$.

Átrendezve azt kapjuk, hogy

$$b = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1+\alpha i}{1+\beta} \right) a_i,$$

legyen ezentúl a zárójelben szereplő kifejezés értéke y_i^T, azaz $b = y^T A, y^T > 0$. Így tényleg kanonikus a duál feladat.

Térjünk át a második bizonyítandóra. Induljunk ki most abból, hogy a duális feladat reguláris, azaz

$$y^T A = 0$$

$$d^T y + \varphi_{dual}(y) \leq 0$$

$$y \geq 0$$

$$y \neq 0$$

feladat vagy nem konzisztens vagy a célfüggvény minimuma pozitív. Vegyük ennek a feladatnak a primál esetét (amely mindig konzisztens), amely a következőképpen néz ki.

$$max\ \alpha$$

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i^T x - c_i} < e^{-\alpha}.$$

Vegyünk 2 esetet. Egyrészt, ha a feladat nem duál konzisztens, akkor $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \sum\limits_{i \in I_k} e^{a_i^T x - c_i} = 0$. Másrészt, ha duál konzisztens, akkor szuperkonzisztens is. Azonban a primál feladatunk szuperkonzisztens, akkor

$$y^T A = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

$$y \geq 0$$

megoldására teljesül, hogy $d^T y + \varphi_{dual}(y) > 0$, amely ellentmondás a duális feladat tulajdonsága miatt. Ezzel beláttuk a tételt.

∎

Korábban definiáltuk már a GP_{cp} és GP_{cd} feladatok optimális (P^*, D^*) és megengedett (P, D) megoldásainak halmazát. A célunk, hogy ezekkel és az előző kifejezésekkel kapcsolatot létesítsünk. A tétel bizonyítása megtalálható a [26] cikkben.

40. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a GP_{cp} és a GP_{cd} feladat tulajdonságai, ekkor az alábbiak igazak:*

1. $\varnothing \neq P^*$ korlátos $\Longleftrightarrow GP_{cp}$ reguláris.
2. $\varnothing \neq P$, GP_{cp} reguláris $\Longrightarrow P^* \neq \varnothing$.
3. $\varnothing \neq D^*$ korlátos $\Longleftrightarrow GP_{cd}$ reguláris.
4. $\varnothing \neq D$, GP_{cd} reguláris $\Longrightarrow D^* \neq \varnothing$.

2.7. A perturbált feladat

Klafszky Emil a [26] tanulmányban perturbációs módszerekkel kapcsolatos kérdéseket vizsgált geometriai programozási feladatokra nézve. Korábban már több eredmény született lineáris programozási feladatokra ([18, 19, 22, 27]) , melynek lényege, hogy a pivotálás során keletkezett ciklizálást elkerüljük. Ezt a módszert a legtöbb szakirodalomban lexikografikus szimplex módszernek is nevezik. A módszer pontos leírása megtalálható a [20, 21] szakirodalmakban, de összefoglalva [20] alapján, hasonlóan működik, mint a szimplex módszer, kivéve, hogy lexikografikusan pozitív (egy vektor lexikografikusan pozitív, ha az első nemnulla komponense pozitív) táblából kezdünk és lexikografikus választási szabállyal (ld. [20]) vesszük a bázist elhagyó vektort.

Legyen $A, A^0 \in \mathbb{R}^{n\times m}-$ es mátrix, $b, b^0 \in \mathbb{R}^m$ és $d, d^0 \in \mathbb{R}^n$. Emellett legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges pici szám.

41. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott a GP_{cp} és GP_{cd} feladatunk. Ekkor ha az$\left[\left(A+\varepsilon A^0\right), (b+\varepsilon b^0), (d+\varepsilon d^0)\right]$ perturbált feladat konzisztens a $[0, \varepsilon_0)$ intervallumon $\Longleftrightarrow$ $[A, b, d]$ feladatra igazak a regularitási tulajdonságok.*

Bizonyítás A tétel belátásához használjuk fel a korábban szereplő konzisztencia definciót. Akkor az szerepelt, hogy a duál feladat akkor konzisztens, ha a primál feladatnak a célfüggvénye felülről korlátos, azaz a

$$Ax + \varepsilon A^0 x \leq 0$$

$$bx + \varepsilon b^0 x > 0$$

feladat nem oldható meg. Tegyük fel azonban, hogy van olyan $x \neq 0$, amelyre teljesül, hogy

$$Ax \leq 0$$

$$bx \geq 0.$$

Ebben az esetben az előző részt úgy kaphatjuk meg triviálisan, ha $A^0 = 0$ és $b^0x > 0$ feltételeket kielégítő A^0-t és b^0-t vesszük. Így azonban bármekkora ε-t is veszünk, nem tudjuk elérni a fenti feltételt, azaz muszáj, hogy a primál feladat reguláris legyen. Tekintsük most a primál feladat konzisztenciáját. Azt tudjuk, hogy $\sum\limits_{i\in I_k} e^{\left(a_i^T+\varepsilon a_i^0\right)x-\left(c_i+\varepsilon c_i^0\right)} \leq 0$ teljesül. Így a $\sum\limits_{i\in I_k} e^{a_i^T x-c_i} \leq e^{-\varepsilon}$ könnyen adódik, ha $A^0 = 0$, és $c_i = -1$. Ebben az esetben azonban a primál feladat szuperkonzisztens, amely azzal ekvivalens egy korábbi tétel szerint azzal, hogy a duál feladat reguláris. Ezzel beláttuk a tételt.

Az alábbi tétel az előző tételhez hasonlóan kapcsolatot fogalmaz meg a perturbált feladat és az eredeti geometriai programozási feladatunk között. A bizonyítás megtalálható a [26] cikkben.

■

42. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott a GP_{cp} és a GP_{cd} feladatunk. Ekkor igazak az alábbiak.*

1. Tegyük fel, hogy teljesülnek a regularitási tulajdonságok az $[A, b, d]$ feladatra, ekkor tetszőleges A^0, b^0, d^0 együtthatóhoz van olyan $[0, \varepsilon_0)$ intervallum, amelyre a perturbált feladatpárnak van optimális megoldása minden $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ esetén.

2. Legyen $x(\varepsilon)$ a program értéke. Ekkor

$$x'(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x(\varepsilon)-x(0)}{\varepsilon} = \max_{x\in P^*} \min_{y\in D^*} \left(b^0x + d^0y - yAx^0\right).$$

(Ezt a deriváltat nevezzük a geometriai programozás marginális értékének)

2.8. Sztochasztikus geometriai programozás

Az alábbi rövid alszakaszban kitekintünk egy speciális geometriai programozási feladatpárra. Vegyük ehhez a GP_{cp} feladatot annyi különbséggel, hogy a feltételben szereplő paraméternek a logaritmusát használjuk, azaz

$$log\left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x-c_i}\right) \leq 0 \ (k = 1, 2, ..., p)$$

$$max\ b^T x.$$

Alakítsuk át ezt a feladatot a következőképpen (jelölje P a valószínűséget, míg legyen ε egy tetszőleges pici szám).

$$P\left(log\left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x - c_i}\right) \leq 0\right) \geq 1-\varepsilon$$

$$max\ b^T x.$$

43. Állítás. *Ez utóbbi egy konvex programozási feladat.*

Bizonyítás Lássuk be ehhez, hogy a $log\left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x - c_i}\right)$ konvex, azaz teljesül, hogy

$$log\left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-(\lambda c_i^{(1)}+(1-\lambda)c_i^{(2)})}\right) \leq \lambda log\left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x_1 - c_i^{(1)}}\right) + (1-\lambda) log\left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x_2 - c_i^{(2)}}\right).$$

Felhasználva a logaritmus függvény tulajdonságát, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-(\lambda c_i^{(1)}+(1-\lambda)c_i^{(2)})} \leq \left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x_1 - c_i^{(1)}}\right)^{\lambda} + \left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x_2 - c_i^{(2)}}\right)^{1-\lambda}.$$

Ami ekvivalens azzal, hogy

$$\sum_{i\in I_k} \left(e^{a_i^T x_1 - c_i^{(1)}}\right)^{\lambda} \left(e^{a_i^T x_2 - c_i^{(2)}}\right)^{1-\lambda} \leq \left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x_1 - c_i^{(1)}}\right)^{\lambda} \left(\sum_{i\in I_k} e^{a_i^T x_2 - c_i^{(2)}}\right)^{1-\lambda}.$$

Ez pedig éppen a korábban szereplő Hölder-egyenlőtlenség.

■

2.9. Kitekintés: kúp programozás

Az eddigiekben geometriai programozási feladatokkal foglalkoztunk. Számos alkalmazást említettünk, emellett bizonyítottunk dualitási tételeket. Most a célunk az, hogy a gyenge dualitás tételét, a geometriai programozási feladatnak egy másfajta, úgynevezett kúp programozási feladat segítségével bizonyítsuk be. A kitekintés során a [28] forrást használtuk. Először vezessük be a kúp programozás elméletét, amely szintén egy nem lineáris, konvex programozási elmélet, hasonlóan a geometriaihoz.

Definiáljuk elsőként a primál geometriai kúpot.

44. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, G_p egy primál geometriai kúp, ha

$$G_p^n = \left\{ (x_p, \varphi_p) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ : \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{-x_{i_p}}{\varphi_p}} \leq 1 \right\}.$$

45. *Észrevétel.* $e^{\frac{-x_{i_p}}{0_p}} = 0$ definíció szerint.

46. Tétel. *G_p kúp konvex, zárt, csúcsos és szilárd.*

Ennek a tételnek a bizonyítása megtalálható a [28] cikkben. A fő lépéseiben a bizonyítás konvexitás esetében felhasználja a korábban szereplő konvex kúp definícióját, a második rész bizonyításához a zártság analitikai tulajdonságaiból indul ki, a harmadik bizonyítandó a csúcsos kúp definíciójában adódik, míg az utolsó esetben a szilárd kúp definíciója adja meg a bizonyítást. Definiáljuk ennek a kúpnak a belsejét.

47. Definíció. $intG_p^n = \left\{ (x_p, \varphi_p) \in \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}_+ : \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{-x_{i_p}}{\varphi_p}} < 1 \right\}.$

Vezessük most be a duál geometriai kúpot.

48. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, G_d egy duál geometriai kúp, ha

$$G_d^n = \left\{ (x_d, \varphi_d) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R} : \varphi_d \geq \sum_{x_{i_d} > 0} x_{i_d} log \left(\frac{x_{i_d}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i_d}} \right) \right\}.$$

Megjegyezzük, hogy néhány speciális esetben elmondható, hogy $n = 0$ esetben pont $\mathbb{R}_+$-t, $n = 1$ esetben $\mathbb{R}_+^2$-t kapjuk, míg duál kúp esetében szintén $n = 0$ esetben $(\mathbb{R}_+)_d = \mathbb{R}_+$-t, $n = 1$ esetben $\left(\mathbb{R}_+^2\right)_d = \mathbb{R}_+^2$-t kapjuk. Ezért ezt a két kúpot a [28] cikk önduálisnak is nevezi. Hasonlóan a primál kúphoz, a duál kúp is az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.

49. Tétel. *G_d kúp konvex, csúcsos, szilárd és zárt.*

Ennek a bizonyítása megtalálható a [28] cikkben. Hasonlóan az előző primál esethez, most is definiálhatjuk az előző kúpnak a belsejét.

50. Definíció. $intG_d^n = \left\{ (x_d, \varphi_d) \in \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R} : \varphi_d > \sum_{i=1}^n x_{i_d} log \left(\frac{x_{i_d}}{\sum_{i=1}^n x_{i_d}} \right) \right\}.$

Az eddigiekből annyi látható már elsőre, hogy a primál és duál geometriai kúp nagyon hasonlít a mi általunk vizsgált geometriai programozási primál és duál feladatra. Végül kimondunk egy tételt, amely a két kúp közötti ortogonalitási tulajdonságot írja le.

51. Tétel. *Legyen $a = (x_p, \varphi_p) \in G_p^n$, $b = (x_d, \varphi_d) \in G_d^n$. Ekkor $a^T b = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha az alábbi feltételek közül legalább az egyik teljesül.*

1. $\varphi_p = 0$ és $x_{i_p} x_{i_d} = 0$ minden $i-$re.
2. $\varphi_p > 0$ és $\sum\limits_{x_{i_d} > 0} x_{i_d} log \left(\frac{x_{i_d}}{\sum_{i=1}^n x_{i_d}} \right) = \varphi_d, \left(\sum\limits_{i=1}^n x_{i_d} \right) e^{\frac{-x_{i_d}}{\varphi_d} = x_{i_d}}$ minden $i-$re.

Bizonyítás

Elsőként tekintsük a bizonyítandó rész első pontját. Ebben az esetben $\varphi_p = 0$. Ekkor $a^T b = x_p^T x_d$. Használjuk fel, hogy az x_p és x_d vektorok nem negatívak. Ebből ugyanis következik, hogy $a^T b = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x_p x_d = 0$.

Abban az esetben, ha $\varphi_p > 0$, akkor két esetet kell figyelembe vennünk. Egyrészt ha $x_d = 0$, akkor $a^T b = \varphi_p \varphi_d$, amely akkor és csak akkor zérus, ha $(x_d, \varphi_d) = 0$. Másrészt, ha $x_d \neq 0$, akkor $a^T b = 0$ csak úgy fordulhat elő, ha

$$\inf_{\substack{(x_p, \varphi_p) \in G_p^n \\ \varphi_p > 0}} \frac{x_p^T x_d}{\varphi_p} + \varphi_d = 0$$

azaz

$$\varphi_d = \sum_{\varphi_{i_d} > 0} \varphi_{i_d} log \left(\frac{x_{i_d}}{\sum_{i=1}^n x_{i_d}} \right).$$

Az $a^T b = 0$, ha $\frac{x_{i_d}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i_d}}$ pozitív, azaz ha x_{i_d} pozitív, amiből kifolyólag

$$\varphi_d = \sum_{x_{i_d} > 0} x_{i_d} log \left(\frac{x_{i_d}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i_d}} \right)$$

érték infimuma 0 és az

$$e^{-\frac{x_{i_p}}{\varphi_p} = \frac{x_{i_d}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i_d}}}$$

felveszi az infimumát. Azonban véve a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i_d} \right) e^{-\frac{x_{i_p}}{\varphi_p}} = x_{i_d} \text{ és } (x_d, \varphi_d) = 0$$

speciális esetet, megkapjuk a második részét is a tételünknek.

■

A célunk, hogy megmutassuk a kapcsolatot a geometriai programozási feladat és a kúp programozási feladat között. Ehhez tekintsük a következő feladatokat. Elsőként a GP_{sp} feladatot:

$$\mathbf{min}\ g_0(\mathbf{u})$$

$$g_k(\mathbf{u}) \leq 1,\ k = 1, 2, ..., p,$$

ahol g_k pozinómok.

Ezt átalakítva a korábban szereplő transzformációval ($u_j = e^{x_j}$) megkaphatjuk a GP_{cp} feladatot.

$$\mathbf{min}\ G_0(\mathbf{x})$$

$$G_k(\mathbf{x}) \leq 1,\ k = 1, 2, ..., p,$$

ahol $G_k(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i\in I_k} e^{a_i^T x - c_i}$.

Foglalkozzunk mi az alábbi feladattal az előző helyett, amelyről belátható ([28]), hogy minden GP_{cp} feladat ilyen alakra hozható ($LinGP_{cp}$).

$$max\ \mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

$$G_k(\mathbf{x}) \leq 1,\ k = 1, 2, ..., p.$$

Legyen $s_i = c_i - a_i^T x$ bármely i-re. Ekkor az előző feladat a következőre redukálódik.

$$max\ \mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{c}$$

$$\sum_{i\in I_k} e^{-s_i} \leq 1,\ k = 1, 2, ..., p.$$

Így a primál kúp programozási feladat a következő ($ConeGP_{cp}$):

$$max\ \mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

$$\binom{\mathbf{A}^T}{0}\mathbf{x} + \binom{\mathbf{s}}{\mathbf{v}} = \binom{\mathbf{c}}{\mathbf{e}}$$

$$(s_{I_k}, v_k) \in G_p^{n_k},\ (k = 1, 2, ..., p),$$

ahol e a csupa 1 vektor és $n_k = \#I_k$.

A duális kúp programozási feladat bevezetéséhez szükségünk van az alábbi jelölésekre.

Legyen $x' = x, s' = s, A' = (A0), b' = b, d' = \binom{d}{e}$ és $K^* = G_p^{n_1} \times ... \times G_p^{n_p}$ (kúp).

Ezáltal a duál kúp programozási feladat a következő ($ConeGP_{cd}$):

$$min\ \left(d^T e^T\right)\binom{y}{z}$$

$$(A0)\binom{y}{z} = b$$

$$(y_{I_k}, z_k) \in \left(G_p^{n_k}\right)^*, \ (k = 1, 2, ..., p).$$

Ez a feladat egyszerűsíthető a következővé ($LinGP_{cd}$):

$$min\ d^T y + e^T z$$

$$Ay = b$$

$$y_{I_k} \geq 0$$

$$z_k \geq \sum_{\substack{y_i > 0 \\ i \in I_k}} y_i log\left(\frac{y_i}{\sum\limits_{i \in I_k} y_i}\right)$$

$$(k = 1, 2, .., p)$$

Amely feladat még egyszerűbben felírva az alábbi módon néz ki:

$$min\ d^T y + \sum_{k=1}^{p} \sum_{\substack{y_i > 0 \\ i \in I_k}} y_i log\left(\frac{y_i}{\sum\limits_{i \in I_k} y_i}\right)$$

$$Ay = b$$

$$y \geq 0$$

$$(k = 1, 2, .., p)$$

Így visszakaptuk a korábban szereplő duális feladatunkat (GP_{cd})

Elérkeztünk oda, hogy kimondjuk a gyenge dualitás tételt és bizonyítsuk is.

Gyenge dualitás tétel Legyen x megengedett megoldása a GP_{cp} feladatnak és y megengedett megoldása a GP_{cd} feladatnak, ekkor

$$b^T x \leq d^T y + \sum_{k=1}^{p} \sum_{\substack{y_i > 0 \\ i \in I_k}} y_i log\left(\frac{y_i}{\sum\limits_{i \in I_k} y_i}\right),$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\left(\sum_{i \in I_k} y_i\right) e^{a_i^T x - c_i} = y_i, \; (k = 1, 2, ..., p).$$

Bizonyítás Ha adott egy x megengedett megoldásunk $GP_{cp}-$hez, abból egy (x, s, v) megengedett megoldást készíthetünk $ConeGP_{cp}-$hez. Hasonlóan, ha van y megengedett megoldásunk $GP_{cd}-$hez, abból egy (y, z) megengedett megoldást készíhetünk $ConeGP_{cd}-$hez, mégpedig úgy, ha használjuk a

$$z_k = \sum_{\substack{y_i > 0 \\ i \in I_k}} y_i log\left(\frac{y_i}{\sum\limits_{i \in I_k} y_i}\right)$$

értéket. Hívjuk meg ekkor a gyenge dualitás tételt a $ConeGP_{cp}$ és $ConeGP_{cd}$ feladatokra az (x, s, v) és (y, z) megengedett megoldások mellett, ekkor azt kapjuk, hogy

$$b^T x \leq d^T y + \sum_{k=1}^{p} \sum_{\substack{y_i > 0 \\ i \in I_k}} y_i log\left(\frac{y_i}{\sum\limits_{i \in I_k} y_i}\right).$$

Vizsgáljuk meg azt, hogy mikor szerepel egyenlőség. Ehhez tekintsük a korábban szereplő ortogonalitási tulajdonságról szóló tételt, ahol csak a második feltétel vonatkozik ránk (azaz ahol $\varphi_p > 0$). Az ott szereplő második egyenlet teljesül (z_k választása miatt). Ezáltal egyenlőség tényleg akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\left(\sum_{i \in I_k} y_i\right) e^{-\frac{s_i}{v_i}} = y_i, \; (i \in I_k, k = 1, 2, ..., p),$$

amely ekvivalens a tételben szereplő bizonyítandó feltétellel.

■

3. A geometriai duális feladat tulajdonságai

3.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben a célunk, hogy feltételes optimalizálási feladatot tudjunk megoldani. Az egyik lehetséges útja, az úgynevezett büntető függvények elmélete. Ezek segítségével alakíthatjuk a feladatunkat feltétel nélküli optimalizálási feladattá. Mellette automatikusan teljesül, hogy a célfüggvény minimumhelye az eredeti feladat megoldása maradjon. Egy másik érv a büntető függvények (legfőképpen a logaritmikus büntető függvények) mellett, hogy a későbbiekben felépített belsőpontos algoritmushoz tartozó analitikus centrum és centrális út struktúrájához nagy segítséget nyújt. Ugyanis Sonnevend szerint, ha van belső pontunk és van egy limeszpontja a centrális útnak, akkor az analitikus centrum jól meghatározott.

A [8], [5] cikkben a szerzők megmutatták, hogy a GP_{sd} (és így persze a GP_{cd}) feladat a következő alakra hozható a célfüggvény átalakításával. Ekkor egy lineárisan feltételes konvex feladatot kapunk.

$$\mathbf{min}\ \mathbf{d}^T\mathbf{y} + \sum_{k=1}^{p} \left[\sum_{i\in\mathcal{I}_k} y_i \mathbf{log}(y_i) - \left(\sum_{i\in\mathcal{I}_k} y_i \right) \mathbf{log} \left(\sum_{i\in\mathcal{I}_k} y_i \right) \right]$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

52. Definíció. Egy ϕ függvényt büntető függvénynek nevezünk, ha

- szigorúan konvex,
- $\phi \in C^\infty$,
- sima,
- $\lim_{x\to 0} \phi'(x) \to \infty$,
- $\lim_{x\to 0} \phi(x) \to \infty$.

53. Példa. $\phi(x) := -log(x)$. Erre a függvényre teljesülnek az alábbi definíció követelményei, tehát büntető függvény.

54. *Észrevétel.* A GP_{cd} feladat a következőre változik:

Létezik $\overline{\mathbf{y}} > 0$, hogy

$$\overline{\mathbf{y}}^T \mathbf{A} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{min}\ \mathbf{d}^T \mathbf{y} + \varphi_{dual}(\mathbf{y}) - \phi \sum_{i \in \mathcal{I}_k} y_i.$$

55. Példa. $\phi(x) := \frac{1}{x^a}$, ahol $a > 0$. Ez a függvény is a büntető függvény tulajdonságokkal rendelkezik.

56. Definíció. Legyen $\mathbb{R}$ egy véges dimenziós valós vektortér, C ennek egy nyílt nem-üres konvex részhalmaza. Ekkor az $\phi : int(C) \to \mathbb{R}$ egy $\kappa-$önkorlátozó függvényt definiál akkor és csak akkor, ha ϕ háromszorosan folytonosan differenciálható, szigorúan konvex és bármely $x \in int(X)-$re $\phi(x) \to \infty$ $(x \to \partial X)$, ahol ∂X jelöli X határát, emellett teljesül az alábbi feltétel:

$$\nabla^3 \phi(x)[h, h, h] \leq 2\kappa \left(\nabla^2 \phi(x)[h, h] \right)^{3/2}.$$

57. Definíció. Legyen $\mathbb{R}$ egy véges dimenziós valós vektortér, C ennek egy nyílt nem-üres konvex részhalmaza. Ekkor az $\phi : int(C) \to \mathbb{R}$ egy $(\kappa, \nu)-$önkorlátozó függvényt definiál akkor és csak akkor, ha ϕ háromszorosan folytonosan differenciálható, szigorúan konvex és bármely $x \in int(X)-$re $\phi(x) \to \infty$ $(x \to \partial X)$, emellett teljesül az alábbi két feltétel:

$$\nabla^3 \phi(x)[h, h, h] \leq 2\kappa \left(\nabla^2 \phi(x)[h, h] \right)^{3/2}$$

$$\nabla \phi(x)^T \left(\nabla^2 \phi(x) \right)^{-1} \nabla \phi(x) \leq \nu$$

58. *Észrevétel.* A lineáris és konvex kvadratikus függvények 0-önkorlátozók.

59. Példa. (konvex kvadratikus függvény) Legyen $\phi(x) = \delta + \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{2}$, ahol $\delta \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix. Ekkor $\nabla \phi(x) = \mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\nabla^2 \phi(x) = \mathbf{A}$, $\nabla^3 \phi(x) = 0$. Azaz valóban 0-önkorlátozó függvény ϕ.

Nézzünk egy egyszerű példát $1-$önkorlátozó függvényre.

60. Példa. Legyen $f(x) = x - \mathbf{log}(1 + x)$, $-1 < x \in \mathbb{R}$. Ekkor $\nabla f(x) = \frac{x}{1+x}$, $\nabla^2(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $\nabla^3(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}$, vagyis $\kappa = 1$.

A következő lemma egy szükséges és elégséges feltételt fogalmaz meg az önkorlátozó függvényre vonatkozóan.

61. Állítás. *Legyen $\mathbb{R}$ egy véges dimenziós valós vektortér, C ennek egy nyílt nem-üres konvex részhalmaza. Ekkor az $\phi : int(C) \to \mathbb{R}$ egy $\kappa-$önkorlátozó függvényt definiál akkor és csak akkor, ha bármely $x \in C$ és $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}^n$ esetén*

$$\nabla^3 \phi(x)[h_1, h_2, h_3] \le 2\kappa \left(\sqrt{h_1^T \nabla^2 \phi(x) h_1}\right)\left(\sqrt{h_2^T \nabla^2 \phi(x) h_2}\right)\left(\sqrt{h_3^T \nabla^2 \phi(x) h_3}\right)$$

Nesterov és Nemirovsky a [4]-ben megmutatták, hogy a logaritmikus barrier függvény önkorlátozó tulajdonságú a primál geometriai programozási feladatra, emellett az [5]-ben a szerzők megmutatták, hogy a logaritmikus barrier függvény önkorlátozó tulajdonságú a duál geometriai programozási feladatra nézve.

62. Tétel. *A GP_{cd}-hoz tartozó logaritmikus barrier függvény $2-$önkorlátozó.*

Bizonyítás Tekintsük az alábbi függvényt.

$$\varphi(x) = \sum_{i \in I[k]} x_i log(x_i) - \left(\sum_{i \in I[k]} x_i\right) log \left(\sum_{i \in I[k]} x_i\right) - \sum_{i \in I[k]} log(x_i).$$

Alkalmazzuk erre az előző állítást, azaz

$$f(x) := \sum_{i \in I[k]} x_i log(x_i) - \left(\sum_{i \in I[k]} x_i\right) log \left(\sum_{i \in I[k]} x_i\right)$$

és legyen $\alpha = 3$. Ekkor az állítás szerint a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\left| \sum_{i \in I[k]} \frac{h_i^3}{x_i^2} - \frac{\left(\sum\limits_{i \in I[k]} h_i\right)^3}{\left(\sum\limits_{i \in I[k]} x_i\right)^2} \right| \le 3 \left(\sum_{i \in I[k]} \frac{h_i^2}{x_i} - \frac{\left(\sum\limits_{i \in I[k]} h_i\right)^2}{\sum\limits_{i \in I[k]} x_i} \right) \sqrt{\sum_{i \in I[k]} \frac{h_i^2}{x_i^2}}.$$

Alakítsuk át ezt az egyenlőtlenséget a $h_i := y_i x_i$, $t_i := \frac{x_i}{\sum\limits_{j \in I[k] \setminus \{i\}} x_j}$, ekkor

$$y^{3^T} t - \left(y^T t\right)^3 \le 3 \left(y^{2^T} t - \left(y^T t\right)^2\right) \sqrt{y^T y}.$$

Használjuk fel, hogy $y^T y = E(y)$, ekkor

$$E(y^3) - E(y)^3 \leq 3\left(E(y^2) - E(y)^2\right)\sqrt{\sum_{i\in I[k]} y_i^2}.$$

A jobboldali kifejezést becsüljük alulról.

$$\left(E(y^2) - E(y)^2\right)\sqrt{\sum_{i\in I[k]} y_i^2} \geq \left(E(y^2) - E(y)^2\right) \underset{i\in I[k]}{max} y_i.$$

Használjuk fel a várható érték tulajdonságát, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(E(y^2) - E(y)^2\right) \underset{i\in I[k]}{max} y_i = E\left((y - E(y))^2 \underset{i\in I[k]}{max} y_i\right) \geq E\left((y - E(y))^2 y\right) =$$

$$= E(y^3) - 2E(y)E(y^2) + E(y)^3.$$

A következő lépésben ismételten a fenti kifejezés jobboldalát becsüljük alulról $\alpha = 2$ mellett.

Így

$$2\left(E(y^2) - E(y)^2\right)\sqrt{\sum_{i\in I[k]} y_i^2} \geq \left(E(y^2) - E(y)^2\right) E(y) = 2E(y)E(y^2) - 2E(y)^3.$$

Majd $\alpha = 3$ mellett is becsüljük alulról.

Így

$$3\left(E(y^2) - E(y)^2\right)\sqrt{\sum_{i\in I[k]} y_i^2} \geq E(y^3) - E(y)^3,$$

amivel beláttuk a bizonyítandót.

■

Megjegyzés: A [9] cikkben a szerzők hibásan állították, hogy nem teljesül az önkorlátozó tulajdonság a fenti feladatra.

3.2. Belsőpontos algoritmus geometriai programozási feladatokra

3.2.1. Bevezetés

Az első belsőpontos algoritmus Karmarkar nevéhez köthető, aki a [34] cikkében lineáris programozási feladatot oldott meg polinomiális időben. Később többen vizsgálták, hogy ez az algoritmus hogyan vihető át a logaritmikus barrier algoritmusokhoz, melyek eredményeseknek bizonyultak az általános nemlineáris programozási feladatok megoldásainál. Nesterov és Nemirowskii a [4] könyvükben általános konvex programozási feladatok belsőpontos módszereit vizsgálták, emellett megmutatták, hogy bizonyos simasági feltételek teljesülése esetén az egyes konvex programozási feladatokat megoldja a logaritmikus barrier algoritmus. Áttörésnek számított 1991-ben K.O. Kortanek, X. Xu, Y. Ye [8] cikkében szereplő primál-duál lineáris feltételeket használó konvex programozási algoritmusok . A következőekben célunk ennek az algoritmusnak a bemutatása és a szükséges háttér felépítése. A szerzők cikkükben a klasszikus pozinóm geometriai programozási feladatpárból indultak ki. Az eljárásuk fő lépése az úgynevezett predictor-corrector módszer mellett, hogy a Newton módszert használják fel.

3.2.2. A belsőpontos algoritmus

A [8] cikkben a GP_{cp}, GP_{cd} feladatnál egy általánosabb problémát vizsgáltak a szerzők. Ennek oka az, hogy azt állították, hogy minden geometriai programozási feladat visszavezethető ilyen feladattá. Ezáltal, ha erre a feladatra tudunk mutatni használható belsőpontos algoritmust, akkor az működni fog a mi geometriai programozási feladatunkra is.

Tekintsük a következő lineáris feltételekkel rendelkező konvex programot ($IPGP_{cp}$)

$$min\ f(y)$$

$$Ay = b$$

Az $IPGP_{cp}$ feladattól a következő tulajdonságokat várjuk el:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, b \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$

- f egy konvex, folytonos függvény,
- f-nek folytonos parciális deriváltjai vannak,
- $-\infty < min\ f(y) < \infty$,
- $min\ f(y) = \infty \Longleftrightarrow IPGP_{cp}$ inkonzisztens.

Megjegyezzük, hogy az előbbi feltételek között nem kötöttük ki a simasági feltételt, amely garantálná azt, hogy polinomiális algoritmusunk legyen. Azonban Kortanek [8] cikkében nem is ígért polinomiális algoritmust és nem használ simasági tulajdonságot. Egy kicsivel e cikk megjelenése után J. P. Vial a [39] cikkében Kortanekhez hasonló primál-duál algoritmust adott általános sima konvex optimalizálási feladatokra vonatkozóan. Azután Vial és Anstreicher a [38] cikkükben továbbfejlesztették Vial korábbi algoritmusát, ezáltal globális konvergenciát értek el. A későbbi években többen foglalkoztak simasági feltételt felhasználva nem konvex optimalizálási feladatok belsőpontos módszerének vizsgálatával. Mi jelen szakdolgozatban a Kortanek, Xu és Ye [8] által írt algoritmusra térünk ki.

Tekintsük a korábban szereplő $IPGP_{cp}$ a feladatnak a Lagrange-duálját ($IPGP_{cd}$)

$$max\ b^T x - y^T \nabla f(y) + f(y)$$

$$A^T x - \nabla f(y) + z = 0$$

$$x \text{ tetszőleges}, \ y > 0, z \geq 0.$$

Ezenkívűl szükségünk lesz az alábbi jelölésekre. Legyen (y, x, z) egy ponthármas, ekkor

- $residual_P(y) := b - Ay$,
- $residual_D(y, x, z) := \nabla f(y) - A^T x - z$,
- $\mu(y, z) := \frac{y^T z}{m}$,
- $y^T \nabla f(y) - b^T x$ (dualitási rés).

Ahogyan a bevezetőben leírtuk, szükségünk van a Karush-Kuhn-Tucker-féle (KKT) rendszerre. Ez az alábbi módon definiálható:

$$r_{IPGP_{cp}}(y) = 0$$

$$r_{IPGP_{cd}}(y, x, z) = 0$$

$$Yz = 0 \ (Y = diag(y))$$

$$y > 0, z \geq 0.$$

Megjegyezzük, hogy a harmadik sorát a rendszernek komplementaritási feltételnek szoktuk nevezni. Ezenkívűl bevezetjük a perturbált KKT-rendszert is, amely kiindulási alapját képezi a későbbi belsőpontos algoritmusunknak. A [35] cikkben szerepel egy primál-duál belsőpontos algoritmus, amely megoldja a KKT rendszert kiindulva egy belső pontból.

A perturbált KKT-rendszer az alábbi.

$$r_{IPGP_{cp}}(y) = \varphi r^0_{IPGP_{cp}} \ (=: r_{IPGP_{cp}}(y^0), y^0 = e)$$

$$r_{IPGP_{cd}}(y, x, z) = \varphi r^0_{IPGP_{cd}} \ (=: r_{IPGP_{cd}}(y^0, x^0, z^0), y^0 = e, x^0 = 0, z^0 = \mu^0 e, \mu^0 = \mu(y^0, z^0))$$

$$Yz = \mu e \ (Y = diag(y))$$

$$y > 0, z \geq 0, 0 < \varphi \leq 1.$$

63. Állítás. *Feltéve, hogy teljesülnek az $IPGP_{cp}$ tulajdonságai, a perturbált KKT-rendszernek van egyértelmű (y, z) megoldása $\varphi \in [0, 1]$ és $\mu \in (0, \mu^0]$ mellett. Ezenkívűl, ha A teljes sorrangú, akkor x is egyértelmű.*

Az állítás bizonyítása megtalálható a [8] cikkben. Vezessük be a korlátosan szubkonzisztens kifejezést az $IPGP_{cp}, IPGP_{cd}$ feladatokra nézve.

64. Definíció. Az $IPGP_{cp}, IPGP_{cd}$ feladatok korlátosan szunkonzisztensek, ha létezik olyan korlátos sorozat ($\widetilde{y}^k > 0, \widetilde{x}^k, \widetilde{z}^k \geq 0$), hogy

1. $r_{IPGP_{cp}}(\widetilde{y}^k) \to 0$,
2. $r_{IPGP_{cd}}(\widetilde{y}^k, \widetilde{x}^k, \widetilde{z}^k) \to 0$,
3. $\mu(\widetilde{y}^k, \widetilde{z}^k) \to 0$.

Ahhoz, hogy belsőpontos algoritmust tudjunk bemutatni, fontos, hogy legyen egy centrális utunk. A következő állítás összekapcsolja ezt a definíciót az előbbi korlátosan szubkonzisztens kifejezéssel.

65. Állítás. *Ha az $IPGP_{cp}$ és az $IPGP_{cd}$ feladatok korlátosan szubkonzisztensek, akkor a centrális út $(y(\varphi), z(\varphi))$ pontjai és az $x(\varphi)^T r^0_{IPGP_{cp}}$ érték is korlátos. Sőt, az $y^T \nabla f(y) - b^T x = \varphi\eta(y, x, z)$ 0-hoz konvergál, ahol $\eta(y, x, z) = y^T r^0_{IPGP_{cd}} - x^T r^0_{IPGP_{cp}} + y^T z$.*

Az állítás bizonyítása megtalálható a [8] cikkben. A közeli célunk egy dualitás tételhez közeli azonosság kimondása. Ehhez azonban definiálnunk kell 2 feladat osztályt és a hozzájuk tartozó szükséges segéd definíciókat. Elsőként vezessük be a szubkonzisztencia tulajdonságot.

66. Definíció. Az $IPGP_{cp}$ feladat szubkonzisztens, ha van olyan $\{y^k\}_k$ sorozat, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} r_{IPGP_{cp}}(y^k) = 0$. Ezeknek a halmazát jelöljük $AF(IPGP_{cp})$-vel. Ekkor $\overline{IPGP}_{cp} := \inf\limits_{\{y^k\}_k \in AF(IPGP_{cp})} \liminf\limits_{k} f(y^k)$.

Megjegyezzük, hogy ha $IPGP_{cp}$ nem konzisztens, akkor $\overline{IPGP}_{cp} = \infty$. Ehhez hasonlóan a duál feladatról a következő mondható.

Algoritmus 1 Belsőpontos algoritmus geometriai programozási feladatra

Adott $f(y), A, b$ és $(x, y, z) \leftarrow (x^0, y^0, z^0)$, ahol (x^0, y^0, z^0) egy kezdőpont.

While nem teljesül a megállási kritérium **do**

1. $H \leftarrow \nabla^2 f(y)$
2. Legyen $\eta = 1, \gamma = 0$ és oldjuk meg az alábbi egyenletet$(\delta_x^a, \delta_y^a, \delta_z^a)$-ra: $\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A^T & -H & I \\ 0 & Z & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta residual_P \\ \eta residual_D \\ \gamma\mu e - Yz \end{pmatrix}.$
3. Legyen $\alpha_y^a := max \left\{ \frac{-y_i}{\left(\delta_y^a\right)_i} : (\delta_y^a)_i < 0 \right\}$, $\alpha_z^a := max \left\{ \frac{-z_i}{(\delta_z^a)_i} : (\delta_z^a)_i < 0 \right\}$ és $\alpha^a := min \left\{ \alpha_y^a, \alpha_z^a \right\}$.
4. Határozzuk meg a $\mu^a := \frac{\left(y + \alpha^a \delta_y^a\right)^T (z + \alpha^a \delta_z^a)}{m}$.
5. Legyen $\gamma := \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^a}{\mu} \right), \eta := 1 - \gamma$.
6. Oldjuk meg az alábbi egyenletet: $\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A^T & -H & I \\ 0 & Z & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta residual_P \\ \eta residual_D \\ \gamma\mu e - Yz \end{pmatrix}.$
7. Legyen $\alpha_y := max \left\{ \frac{-y_i}{\left(\delta_y^a\right)_i} : (\delta_y^a)_i < 0 \right\}$, $\alpha_z := max \left\{ \frac{-z_i}{(\delta_z^a)_i} : (\delta_z^a)_i < 0 \right\}$ és $\alpha_R := min \left\{ \alpha_y, \alpha_z \right\}$.
8. Vegyünk olyan α_N-et, hogy az $(y(\alpha_N), x(\alpha_N), z(\alpha_N))$ kielégítse az $Yz \geq \sigma\mu, \|Yz - \mu e\| \leq \beta e$ $(\sigma \in (0, 1], \beta \in (0, \infty))$ egyenlőtlenségeket.
9. Vegyünk olyan α_C-t, hogy az $(y(\alpha_C), x(\alpha_C), z(\alpha_C))$ kielégítse az $\varphi_P y^T z \geq \|residual_P(y)\|$, $\varphi_D y^T z \geq \|residual_D(y, x, z)\|$ és $\varphi_C y^T z \geq y(\alpha_C)^T z(\alpha_C)$ egyenlőtlenségeket.
10. Legyen $\alpha := min \left\{ \lambda\alpha_R, \alpha_N, \alpha_C \right\}$, ahol $\lambda \in (0, 1)$.
11. Állítsuk be a következő értékeket $x \leftarrow x + \alpha\delta_x, y \leftarrow y + \alpha\delta_y, z \leftarrow z + \alpha\delta_z$.
12. Legyen $\sigma := \nabla f(y) - A^T x$, hajtsuk végre a következő pontbeli lépéseket:

for i from 1 to n **do**

if $\sigma_i \geq 0$ **then**

$$z_i := \begin{cases} \sigma_i, & \sigma_i \in \left(\frac{z_i}{\lambda}, \lambda z_i \right) \\ \frac{z_i}{\sigma}, & \sigma_i \leq \frac{z_i}{\lambda} \\ \lambda z_i, & \sigma_i \geq z_i \lambda. \end{cases}$$

end if

end do

end do.

Hivatkozások

[1] W.B. White, S.M. Johnson, G.B. Dantzig, Chemical Equilibrium in Complex Mixtures, J. Chem. Phys., 28 (1958)

[2] R.J. Duffin, E.L. Peterson, C. Zener, Geometric Programming, John Wiley, New York, 1966.

[3] E. Klafszky, Geometriai Programozás, Kandidátusi értekezés, SZTAKI Tanulmányok, 1973.

[4] Y. Nesterov, A. Nemirovskii, Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, SIAM, 1994.

[5] D. den Hertog, F. Jarre, C. Roos, T. Terlaky, A sufficient condition for self-concordance, with application to some classes of structured convex programming problems, Mathematical Programming 69., 1995.

[6] Warren Hoburg, Aircraft Design Optimization as a Geometric Program Ph.D. thesis, Electrical Engineering and Computer Science, UC Berkeley, 2013.

[7] J.J. Dinkel, R. Lakshmanan, Analysis of parameter changes in chemical systems via geometric programming, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 9, No. 4, 1975.

[8] K.O. Kortanek, X. Xu, Y. Ye, An Infeasible Interior-Point Algorithm for Solving Primal and Dual Geometric Programs, Mathematical Programming, 1996.

[9] K.O. Kortanek, H. No, A second order affine scaling algorithm for the geometric programming dual with logarithmic barrier, Optimization 23., 1990.

[10] T. Illés, Geometriai programozás előadás jegyzet

[11] D. den Hertog, Interior Point Approach to Linear, Quadratic and Convex Programming, Springer Science + Business Media Dordrecht, 1994.

[12] A. Prékopa, Stochastic Programming, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, 2010.

[13] T. Illés, Lineáris optimalizálás elmélete és belsőpontos algoritumusai, Operations Research, 2014-04.

[14] A. K. Ojha, K. K. Biswal, Posynomial Geometric Programming Problems with Multiple Parameters, Journal of Computing, Volume 2, Issue 1, 2010.

[15] E. Klafszky, A lineáris cseremodell egyensúlyi árának meghatározása geometriai programozással, Alkalmazott Matematikai Lapok 7 (1981), 139-157.

[16] Eisenberg E., Gale D., Consensus of subjective probabilities: The par-mutuel method, Ann. Math. Stat. 30 (1959)

[17] Steven B., Lieven V., Convex Optimization, Cambridge University Press 2004.

[18] A. Charles, Optimality and degeneracy in linear programming, Econometrica, 20 (1952)

[19] G. B. Dantzig, A. Orden, P. Wolfe, The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints, Pacific Journal of Mathematics 5 (1955)

[20] T. Szántai, Az operációkutatás matematikai módszerei (bővített óravázlat), 1999.

[21] A. Prékopa, Lineáris programozás, Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968.

[22] Harlan D. Mills, Marginal values of matrix games and linear programs, Linear Inequalities and Related Systems, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956.

[23] E. de Klerk, C. Roos, T. Terlaky, Nemlineáris optimalizálás, Operációkutatás No. 5., 2004.

[24] T. Nagy, Lagrange dualitás, Miskolci Egyetem jegyzete

[25] M. Kovács, Operációkutatás 2. (programtervező matematikusok számára) jegyzete, 2005.

[26] E. Klafszky, Marginális értékek a geometriai programozásban, MTA Számítástechniaki Központ, Közlemények 9, 1972

[27] A. C. Willams, Marginal values in linear programming, J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 11, 1963.

[28] F. Glineur, Proving Strong Duality for Geometric Optimization Using a Conic Formulation, Annals of Operations Research 105, 2001.

[29] T. Illés, Nemlineáris programozás 1. előadás diák.

[30] S. P. Boyd, S. J. Kim, L. Vandenberghe, A. Hassibi, A Tutorial on Geometric Programming, Optimization Engineering 8., 2007.

[31] S. P. Boyd, S. J. Kim, S. S. Mohan, Geometric Programming and Its Applications to EDA Problems, DATE Tutorial (slides), https://web.stanford.edu/~boyd/papers/pdf/date05.pdf, 2005

[32] Gale D., Theory of Linear Economic Models, New York, McGraw-Hill, 1960.

[33] J. P. Vanderhaegen, R. W. Brodersen, Automated Design of Operational Transconductance Amplifiers using Reversed Geometric Programming, Design Automation Conference, 2004. Proceedings. 41st., San Diego, CA, USA.

[34] N. Karmarkar, A polynomial-time algorithm for linear programming. Combinatorica, 4:373-395, 1984.

[35] K. O. Kortanek, F. Potra, Y. Ye, On some efficient interior point methods for nonlinear convex programming, Linear Algebra and its Applications 152 (1991), 169-189.

[36] Y. Wang, K. Zhang, Y. Gao, Global Optimization of Generalized Geometric Programming, Computers and Mathematics with Applications 48 (2004), 1505-1516.

[37] O. Bahn, J. L. Goffin, J. P. Vial, O. Du Merle, Experimental behavior of an interior point cutting plane algorithm for convex programming: an application to geometric programming, Discrete Applied Mathematics 49 (1994), 3-23.

[38] K. M. Anstreicher, J. P. Vial, On the convergence of an infeasible primal-dual interior-point method for convex programming, Optimization Methods and Software, Volume 3, Issue 4, 1994.

[39] J. P. Vial, Computational experience with a primal-dual algorithm for smooth convex programming. Optimization Methods and Software, 3:273-283, 1994.