Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Császár Szilvia

Diszkrét dichotómia

MSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2017

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Kovács Sándornak, hogy az alapképzéses szakdolgozatom megírását követően is folytathattam vele az exponenciális dichotómia különböző területeinek megismerését, felkutatását az Önálló projekt c. kurzus keretei között, a Tudományos diákköri dolgozatom megírásakor, valamint az Olvasó által éppen kézben tartott diplomamunka elkészítéskor is.

Hálás vagyok lelkiismeretes oktatói és témavezetői munkájáért, hogy bármikor rendelkezésemre állt, és választ adott a felmerülő kérdéseimre.

Budapest, 2017. május 29.

Császár Szilvia

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Legyen valamely $d \geq 0$ egész esetén $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertálható mátrix, és tekintsük az

$$x_{n+1} = Ax_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

autonóm lineáris differenciaegyenlet-rendszert, valamint az ehhez tartozó

$$x_{n+1} = Ax_n + f_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{1.2}$$

inhomogén lineáris rendszert, ahol $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^d$ sorozat. Az alábbi két állítás ekvivalens:

(a) az A mátrix hiperbolikus, azaz

$$\sigma(A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset,$$

ahol $\sigma(A)$ az A mátrix spektrumát jelöli, azaz

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak}\},$$

valamint

$$\mathbb{T}^1 := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \neq 1\},$$

(b) létezik olyan $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ projektor, melyre

$$\sigma(A\big|_{\mathrm{Im}(P)}) \subset \mathbb{T}^- \qquad \text{ill.} \qquad \sigma(A\big|_{\mathrm{Ker}(P)}) \subset \mathbb{T}^+$$

teljesül, ahol

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^- &:= \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}, \\ \mathbb{T}^+ &:= \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1\}, \end{aligned}$$

továbbá minden korlátos $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^d$ sorozat esetén az (1.2) inhomogén rendszernek egyértelműen létezik korlátos megoldása, mely a következőképpen írható fel a P projekció segítségével:

$$\mu_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(n, m+1) f_m \qquad (n \in \mathbb{Z}), \tag{1.3}$$

ahol n, $m \in \mathbb{Z}$ esetén

$$G(n,m) = \begin{cases} A^n P (A^{-1})^m & (m \leq n) \\ -A^n (I - P)(A^{-1})^m & (n < m). \end{cases}$$

A két tulajdonság ekvivalenciájának igazolásához először tegyük fel, hogy fennáll az (a) állítás, ekkor az A mátrix spektruma felbontható

$$\sigma(A) = \sigma^+ \cup \sigma^- \tag{1.4}$$

alakban, ahol minden $\lambda \in \sigma(A)$ esetén

$$\lambda \in \sigma^- \Longleftrightarrow |\lambda| < 1 \qquad \text{ill.} \qquad \lambda \in \sigma^+ \Longleftrightarrow |\lambda| > 1. \tag{1.5}$$

Jelölje P a fenti (1.4) felbontáshoz tartozó Riesz-projekciót (vagy más elnevezéssel spektrálprojekciót, vö: [15]), azaz:

$$P := -\frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{\mathbb{T}^1} (A - zI)^{-1} dz.$$

Ekkor az (1.3)-ban megadott (μ_n) sorozat megoldása az (1.2) rendszernek, ugyanis

$$\begin{aligned}
A\mu_n + f_n &= \sum_{m \le n-1} A^{n+1} P A^{-(m+1)} f_m + \sum_{m \ge n} -A^{n+1}(I-P)A^{-(m+1)} f_m + f_n = \\
&= \sum_{m \le n-1} A^{n+1} P A^{-(m+1)} f_m + \sum_{m \ge n-1} -A^{n+1}(I-P)A^{-(m+1)} f_m - \\
&- A^{n+1}(I-P)A^{-(n+1)} f_n + f_n = \\
&= \sum_{m \le n} A^{n+1} P A^{-(m+1)} f_m + \sum_{m \ge n-1} -A^{n+1}(I-P)A^{-(m+1)} f_m = \mu_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Továbbá az (1.5) felbontásból következik, hogy tetszőleges n, $m \in \mathbb{Z}$ esetén fennállnak a

$$\begin{aligned}
\|A^{n-m}P\| &\le Ke^{-\alpha(n-m)} \qquad (n \ge m), \\
\|A^{n-m}(I-P)\| &\le Ke^{-\alpha(m-n)} \qquad (n \le m).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

egyenlőtlenségek alkalmas K, $\alpha > 0$ konstansok esetén. Így az (1.3)-ban megadott (μ_n) sorozat korlátossága következik a fenti (1.6) becslésekből és az $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sorozat korlátosságából. Továbbá az (1.6) egyenlőtlenségekből az is látható, hogy az (1.1) rendszernek csak a triviális megoldása korlátos, amiből következik az (1.2) inhomogén rendszer (1.3) megoldásának egyértelműsége. A fordított implikáció bizonyítása megtalálható [12]-ban.

Az exponenciális vagy diszkrét dichotómia fogalma a fent bemutatott tulajdonságot általánosítja nem-autonóm rendszerek esetében.

Differenciaegyenlet-rendszerek széles körben, számos kontextusban vizsgáltak mind az elméletet, mind az alkalmazásokat tekintve. Például differenciálegyenletek numerikus módszerekkel való vizsgálatakor a differenciaegyenletek elméletébe lépünk, de számos alkalmazott területen is megjelennek diszkrét idejű rendszerek, úgy mint a közgazdaságtanban, statisztikai problémákban, genetikában (vö: [1]).

A dolgozatban először megadjuk a továbbiakban használt jelöléseket, valamint néhány olyan alapvető eredményt a differenciaegyenletek elméletéből, melyekre a későbbiekben hivatkozunk.

A 2. fejezetben bemutatjuk azokat a szakirodalomban megtalálható definíciókat, melyek az exponenciális/diszkrét dichotómia fogalmát írják le, majd megvizsgáljuk ezek kapcsolatát. Végül a fejezet zárásaként néhány példán keresztül szemléltetjük az exponenciális dichotómia megjelenését különböző lineáris rendszerekben.

A dolgozat 3. fejezetében a címben szereplő fogalom ill. exponenciálisan dichotóm rendszerek tulajdonságairól írunk, többek között exponenciálisan dichotóm rendszerek megoldásainak monotonitását vizsgáljuk, valamint kapcsolatot teremtünk lineáris rendszerek stabilitása és az exponenciális dichotómia fogalma között.

A 4. fejezetben egy, az exponenciális dichotómia elméletéhez kapcsolódó érdekes, az exponenciális dichotómia stabilitását tárgyaló témakört járjuk körbe, mely röviden összefoglalva a következő kérdésre keresi a választ: egy exponenciálisan dichotóm rendszer együtthatóját milyen mértékben változtathatjuk meg (perturbálhatjuk) ahhoz, hogy a keletkező rendszer is exponenciálisan dichotóm legyen.

Végül a dolgozat utolsó fejezetében az exponenciális dichotómia egy alkalmazását mutatjuk be, nevezetesen homoklinikus pályák approximációját (nem feltétlenül lineáris) autonóm differenciaegyenlet-rendszerekben.

2. Jelölések, alapfogalmak

Jelen fejezetben összefoglaljuk azokat a lineáris differenciaegyenlet-rendszerek vizsgálatakor használatos jelöléseket, fogalmakat, tételeket, melyeket a dolgozat további részeiben alkalmazni fogunk.

2.1. Lineáris differenciaegyenlet-rendszerek

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $J \subset \mathbb{Z}$ diszkrét intervallum, azaz $J = J_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}$, ahol $J_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$ intervallum. A dolgozat nagy részében feltesszük, hogy $J \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_0^+, \mathbb{Z}_0^-\}$, ahol

$$\mathbb{Z}_0^+ := \{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \geq 0\}\,, \qquad \mathbb{Z}_0^- := \{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \leq 0\}\,,$$

és jelölje $L(X)$ az X-ből X-be képező korlátos, lineáris operátorokat, azaz

$$L(X) := \{A : X \to X : \ A \text{ folytonos, lineáris}\}.$$

Tetszőleges $n \in J$ esetén legyenek

$$A_n \in L(X)$$

egyenletesen korlátos operátorok, azaz tegyük fel, hogy

$$\sup_{n \in J} \|A_n\| < +\infty \tag{2.1}$$

teljesül, ahol valamely $A \in L(X)$ operátor normáján a

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \quad x \in X, \ \|x\| = 1\}$$

számot értjük (vö. [16]). Tekintsük az A_n operátorokkal definiált

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \in J) \tag{2.2}$$

homogén, lineáris differenciaegyenlet-rendszert. Jelölje

$$\Phi : J \to L(X)$$

a (2.2) rendszer alapmátrixát, azaz tetszőleges $n \in J$ esetén

$$\Phi(n) := A_{n-1} \cdot \ldots \cdot A_0 \qquad (n \geq 0),$$
$$\Phi(n) := A_0^{-1} \cdot \ldots \cdot A_{n-1}^{-1} \qquad (n \leq 0),$$

valamint jelölje

$$\Lambda : J \times J \to L(X)$$

a (2.2) rendszer Cauchy-operátorát, azaz tetszőleges $n, m \in J$, $n \geq m$ esetén legyen

$$\Lambda(n,m) := \begin{cases} A_{n-1} \cdot \ldots \cdot A_m & (n > m), \\ I & (n = m), \end{cases}$$

ahol $I \in L(X)$ identitásoperátor. A Φ és Λ operátorok között egyszerűen látható az alábbi összefüggés:

$$\Phi(n) = \Lambda(n,0) \qquad (n \in J).$$

A Cauchy-operátor segítségével (vö. pl. [22], [23]) tetszőleges $x \in X$ esetén a (2.2) rendszer $u_0 = x \in X$ feltételt kielégítő $(\mu_n)_{n \in J}$ megoldására a következő írható fel:

$$\mu_n = \Lambda(n,m)\mu_m \qquad (n, m \in J,\, n \geq m).$$

2.1. Megjegyzés. *Az A_n operátorok invertálhatóságát nem mindig tesszük fel. Azonban ha ez teljesül, akkor a Banach-féle homeomorfia tételből következik, hogy minden $n \in J$ esetén $A_n^{-1} \in L(X)$, azaz az A_n operátor inverze is folytonos, lineáris operátor. Továbbá feltéve az operátorok invertálhatóságát, a $\Lambda(n,m)$ Cauchy-operátor $n < m$ egészek esetén is definiálható az alábbi módon:*

$$\Lambda(n,m) = \Lambda(m,n)^{-1} = (A_{n-1} \cdot \ldots \cdot A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_{n-1}^{-1}.$$

2.2. Stabilitási fogalmak differenciaegyenlet-rendszerek esetében

A dolgozat egy későbbi fejezetében kapcsolatba fogjuk állítani az exponenciális dichotómia és az aszimptotikus stabilitás fogalmát. Ennek előkészítéseként jelen alfejezetben nagyrészt Edwards és Ford [10] valamint Lakshmikantham és Trigiante [18] munkájára hagyatkozva összefoglaljuk a legfontosabb fogalmakat és tételeket a differenciaegyenlet-rendszerek stabilitásával kapcsolatban.

A fejezet további részeiben tegyük fel, hogy $J = \mathbb{Z}_0^+$, továbbá valamely $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0$ esetén $X = \mathbb{R}^d$. Az alábbiakban bemutatott stabilitási fogalmak nemcsak a (2.2) alakú lineáris rendszerek esetében vizsgálhatóak, hanem általános alakú rendszereknél is, így tekintsük az

$$x_{n+1} = f(n, x_n) \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+) \tag{2.3}$$

rendszert, ahol $f : \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ függvény.

2.1. Definíció. (Stabilitás) *(vö: [10]) Tegyük fel, hogy $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \subset \mathbb{R}^d$ a (2.3) rendszer $\mu_0 := x \in \mathbb{R}^d$ kezdeti feltételhez tartozó megoldása. Azt mondjuk, hogy (μ_n) stabilis, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy a (2.3) rendszer tetszőleges olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \subset \mathbb{R}^d$ megoldására, melynek $\varphi_0 := y \in \mathbb{R}^d$ kezdeti feltételére $\|x - y\| < \delta$ áll fenn, teljesül, hogy*

$$\|\mu_n - \varphi_n\| < \varepsilon$$

tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén.

A (2.2) lineáris rendszer esetében a következő definíció található [18]-ben:

2.2. Definíció. *(vö: [18]) A (2.2) rendszer egy (μ_n) megoldása pontosan akkor globálisan stabilis, ha a rendszer minden (φ_n) megoldására $\|\mu_n - \varphi_n\|$ korlátos.*

2.2. Megjegyzés. *A [18] könyvben a fenti 2.2. definíció az*

$$x_{n+1} = A_n x_n + g_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+)$$

alakú inhomogén lineáris rendszerek esetében is adott, ahol $g : \mathbb{Z}_0^+ \to \mathbb{R}^d$ függvény. A dolgozatban azonban csak homogén rendszereket tekintünk, ezért nem térünk ki részletesen az inhomogén rendszerek vizsgálatára.

[10]-ben található az alábbi állítás, mely összeköti a két stabilitási fogalmat:

2.1. Állítás. *(vö: [10]) A (2.2) rendszer tetszőleges megoldása pontosan akkor stabilis a 2.1. definíció értelmében, ha az stabilis a 2.2. definíció értelmében.*

2.3. Megjegyzés. *A 2.2. definícióból következik, hogy lineáris rendszerek esetében a stabilitás globális tulajdonság, azaz ha a vizsgált rendszer egy (μ_n) megoldása stabilis,* *akkor tetszőleges $(\tilde{\mu}_n)$ megoldása is az, hiszen tetszőleges (φ_n) megoldás esetén felírható a*

$$\|\tilde{\mu}_n - \varphi_n\| \leq \|\tilde{\mu}_n - \mu_n\| + \|\mu_n - \varphi_n\|$$

egyenlőtlenség, mely az (μ_n) megoldás stabilitása miatt becsülhető egy n-től független konstanssal.

Az alábbiakban megadunk két további definíciót a (2.3) rendszer megoldásainak stabilitásával kapcsolatban.

2.3. Definíció. (Aszimptotikus stabilitás) *(vö: [10]) Legyen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \subset \mathbb{R}^d$ a (2.3) rendszer $\mu_0 := x \in \mathbb{R}^d$ kezdeti feltételhez tartozó megoldása. Azt mondjuk, hogy (μ_n) aszimptotikusan stabilis, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy a (2.3) rendszer tetszőleges olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \subset \mathbb{R}^d$ megoldására, melynek $\varphi_0 := y \in \mathbb{R}^d$ kezdeti feltételére $\|x - y\| < \delta$ áll fenn, teljesül, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mu_n - \varphi_n\| = 0.$$

2.4. Definíció. (Exponenciális stabilitás) *(vö: [10]) Legyen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \subset \mathbb{R}^d$ a (2.3) rendszer $\mu_0 := x \in \mathbb{R}^d$ kezdeti feltételhez tartozó megoldása. Azt mondjuk, hogy (μ_n) exponenciálisan stabilis, ha létezik a, $\delta > 0$, $\eta \in (0,1)$ konstansok, hogy a (2.3) rendszer tetszőleges olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \subset \mathbb{R}^d$ megoldására, melynek $\varphi_0 := y \in \mathbb{R}^d$ kezdeti feltételére $\|x - y\| < \delta$ fennáll, teljesül, hogy*

$$\|\mu_n - \varphi_n\| \leq a\|x - y\|\eta^n$$

tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén.

A [18] könyvben bizonyított az alábbi két tétel, melyek a (2.2) rendszer Cauchy-operátora normájának korlátosságával karakterizálják a stabilitás ill. az aszimptotikus stabilitás fogalmát lineáris rendszerek esetében.

2.1. Tétel. *(vö: [18]) A (2.2) rendszer stabilis, ha létezik olyan $M > 0$ hogy tetszőleges $n \geq 0$ esetén*

$$\|\Lambda(n, 0)\| \leq M. \tag{2.4}$$

2.2. Tétel. *(vö: [18]) A* (2.2) *rendszer aszimptotikusan stabilis, ha létezik olyan $M > 0$ és $\eta \in (0,1)$, hogy tetszőleges $n \geq 0$ esetén*

$$\|\Lambda(n,0)\| \leq M\eta^n. \tag{2.5}$$

A fenti, 2.2. tételből következik, hogy lineáris rendszerek esetében a 2.3. és 2.4. definíciók ekvivalensek, azaz igaz az alábbi állítás.

2.2. Állítás. *(vö: [10]) A* (2.2) *tetszőleges megoldása pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha exponenciálisan stabilis.*

2.4. Megjegyzés. *A 2.1. és 2.2. tételek megfordítás is igaz, azaz ha a* (2.2) *rendszer stabilis ill. aszimptotikusan stabilis, akkor teljesül a* (2.4) *ill. a* (2.5) *feltétel.*

Autonóm lineáris rendszerek aszimptotikus stabilitása könnyedén meghatározható az együtthatómátrix sajátértékeinek segítségével, nevezetesen a következő állításban leírtak alapján.

2.3. Állítás. *(vö: [10], [18]) Legyen $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, és tekintsük az*

$$x_{n+1} = Ax_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+) \tag{2.6}$$

autonóm lineáris rendszert. A (2.6) *rendszer pontosan akkor aszimptotikusan stabilis, ha az A mátrix tetszőleges λ sajátértékére $|\lambda| < 1$ teljesül.*

A fenti állítás nemautonóm egyenletek esetében már nem igaz, ezt illusztráljuk a következő példán.

2.1. Példa. *Tekintsük az*

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+)$$

nemautonóm homogén lineáris rendszert, ahol az együtthatómátrix a következőképpen definiált:

$$A_n := \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 9+7(-1)^n \\ 9-7(-1)^n & 0 \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+). \tag{2.7}$$

Egyszerű számolással adódik, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén a (2.7) mátrix determinánsára $\det(A_n) = 1/4$ teljesül, így A_n karakterisztikus polinomja:

$$k_{A_n}(z) = z^2 - \mathrm{sp}(A_n) + \det(A_n) = z^2 - \frac{1}{4} \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

melyből adódik, hogy a sajátértékekre $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ áll fenn. Látható tehát, hogy a (2.7) együtthatóval definiált rendszerre teljesülnek a 2.3. állítás feltételei, azaz az együtthatómátrix minden λ sajátértékére $|\lambda| < 1$ igaz. Azonban a példában szereplő rendszernek létezik nem korlátos megoldása, ugyanis a rendszer Cauchy-operátora:

$$\Lambda(n,0) = \begin{bmatrix} 2^{-2n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+ \ \textit{páros}),$$

$$\Lambda(n,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{-2n} & 0 \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+ \ \textit{páratlan}).$$

Így tetszőleges $\mu_0 := (x,y) \in \mathbb{R}^2$ kezdeti vektorból indulva a rendszer megoldása:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \begin{bmatrix} 2^{-2n} \cdot x \\ 2^n \cdot y \end{bmatrix} \quad \textit{ha} \quad n \textit{ páros}, \\ \mu_n &= \begin{bmatrix} 2^n \cdot y \\ 2^{-2n} \cdot x \end{bmatrix} \quad \textit{ha} \quad n \textit{ páratlan}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

amiből

$$\lim_{n \to +\infty} \|\mu_n\|_\infty = +\infty$$

adódik, így a vizsgált rendszer nem stabilis a 2.1. tételből következően.

Az exponenciális dichotómia tekinthető az aszimptotikus stabilitás fogalmának általánosításaként, ennek részleteire és a fenti példa vizsgálatára még visszatérünk a 4.4 alfejezetben.

3. Az exponenciális dichotómia fogalmának értelmezése

Lineáris differenciaegyenlet-rendszerek exponenciális dichotómiájának vizsgálata és a fogalom megjelenése Ta Li 1934-es [19] munkájára vezethető vissza, azonban az exponenciális dichotómia definiálása D. Henry 1981-es [12] könyvéhez köthető. Azóta a szakirodalomban számos helyen találhatóak új megfogalmazások, melyek többsége ekvivalens az első, Henry által leírt definícióval. A következő fejezet fő eredménye a legismertebb definíciók bemutatása, majd ezek kapcsolatának vizsgálata.

A fejezet további részeiben legyen $J \subset \mathbb{Z}$ (diszkrét) intervallum, valamint $n \in J$ esetén $A_n \in L(X)$ valamely $(X, \|\cdot\|)$ Banach-téren értelmezett operátorok, melyek egyenletesen korlátosak. Tekintsük az

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \in J) \tag{3.1}$$

lineáris differenciaegyenlet-rendszert.

3.1. Definíciók

3.5. Definíció. (Diszkrét dichotómia) *(vö.: [12]) Legyen $A_n \in L(X)$ $(n \in \mathbb{Z})$ operátorsorozat. Azt mondjuk, hogy az (A_n) operátorsorozatnak diszkrét dichotómiája van, ha léteznek $K > 0$, $0 < \theta < 1$ konstansok és*

$$P_n \in L(X) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

projekciók, hogy ha tetszőleges n, $m \in \mathbb{Z}$ esetén teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned} A_n P_n &= P_{n+1} A_n, && (3.2)\\ A_n &: \operatorname{Im}(P_n) \to \operatorname{Im}(P_{n+1}) \textit{ izomorfizmus}, && (3.3)\\ \|\Lambda(n,m)(I - P_m)x\| &\le K\theta^{n-m}\|x\| \qquad (n \ge m) && (3.4)\\ \|\Lambda(n,m)P_m x\| &\le K\theta^{m-n}\|x\| \qquad (n < m), && (3.5) \end{aligned}$$

ahol $\Lambda(n,m)P_m x = y \in \operatorname{Im}(P_n)$ pontosan akkor, ha $P_m x = \Lambda(m,n)y$, ami jól definiált a (3.3) *tulajdonság miatt.*

A következő definíció talán a legszélesebb körben használt a szakirodalomban.

3.6. Definíció. (Exponenciális dichotómia) *(vö. pl.: [13], [14]) Azt mondjuk, hogy a* (3.1) *rendszernek exponenciális dichotómiája van egy $J \subset \mathbb{Z}$ diszkrét intervallumon, ha*

- *létezik*

$$P_n \in L(X) \qquad (n \in J)$$

projekciósorozat és K, $\alpha > 0$ konstansok úgy, hogy tetszőleges $n \in J$ esetén teljesülnek az

$$A_n P_n = P_{n+1} A_n, \tag{3.6}$$

$$A_n : \operatorname{Ker} P_n \to \operatorname{Ker} P_{n+1} \text{ izomorfizmus}, \tag{3.7}$$

tulajdonságok /ekkor a (3.7) *tulajdonságból adódóan az*

$$\tilde{A}_n := A_n\big|_{\operatorname{Ker}(P_n)} \qquad (n \in J)$$

operátor invertálható, így $\Lambda(n,m)$ értelmezhető $n < m$ esetén is, mégpedig a következőképpen:

$$\Lambda(n,m) := \tilde{A}_m^{-1} \cdot \dots \cdot \tilde{A}_{n-1}^{-1} \Big/ ,$$

- *tetszőleges $n, m \in J$ esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$\|\Lambda(n,m)x\| \leq K e^{-\alpha(n-m)} \|x\| \qquad (n \geq m, \quad x \in \operatorname{Im}(P_m)), \tag{3.8}$$

$$\|\Lambda(n,m)x\| \leq K e^{-\alpha(m-n)} \|x\| \qquad (n \leq m, \quad x \in \operatorname{Ker}(P_m)). \tag{3.9}$$

Egy érdekes különbség látható a két megfogalmazás között: a 3.5. definíció tulajdonképpen nem a (3.1) rendszer exponenciális dichotómiáját definiálja, hanem a rendszert meghatározó (A_n) operátor-sorozat exponenciális dichotómiáját. Azonban lineáris differenciaegyenlet-rendszerek exponenciális dichotómiáját a 3.5. definícióhoz hasonlóan is megadhatjuk (vö: [20], [24]).

A következő két definíció az [5] cikkben található, melyek közül az első egy az exponenciális dichotómiánál általánosabb fogalmat ír le, míg a második ekvivalens az eddig bemutatott 3.5. és 3.6. definíciókkal, amit a 3.3. alfejezetben meg is fogunk mutatni.

3.7. Definíció. (Előrevett exponenciális dichotómia) *(vö.: [5]) Legyen*

$$J := \{k \in \mathbb{Z} \; : \; k \geq k_0\},$$

ahol $k_0 \in \mathbb{Z}$, $k_0 \geq -\infty$. *Azt mondjuk, hogy a* (3.1) *rendszernek előrevett exponenciális dichotómiája van, ha létezik* K_1, $K_2 > 0$, $M \leq 1$, $0 < \alpha < 1 < \beta$ *konstansok és* $P_n \in L(X)$ $(n \in J)$, *hogy teljesülnek a*

$$P_{n+1}A_n = A_nP_n \qquad (n \in J), \tag{3.10}$$

$$\|\Lambda(n,m)P_mx\| \leq K_1\alpha^{n-m}\|P_mx\| \qquad (n \geq m \geq 0, \; x \in X), \tag{3.11}$$

$$\|\Lambda(n,m)(I-P_m)x\| \geq K_2^{-1}\beta^{n-m}\|(I-P_m)x\| \qquad (n \geq m \geq 0, \; x \in X), \tag{3.12}$$

$$\|P_n\| \leq M \qquad (n \in J). \tag{3.13}$$

tulajdonságok.

A következő definíció az előbbi 3.7. definíció módosítása, csupán egy plusz feltételt követelünk meg a P_n projekciókra.

3.8. Definíció. (Reguláris előrevett exponenciális dichotómia) *(vö.: [5]) Legyen*

$$J := \{k \in \mathbb{Z} \; : \; k \geq k_0\},$$

ahol $k_0 \in \mathbb{Z}$, $k_0 \geq -\infty$. *Azt mondjuk, hogy a* (3.1) *rendszernek reguláris előrevett exponenciális dichotómiája van, ha létezik* K_1, $K_2, > 0$, $0 < \alpha < 1 < \beta$ *konstansok és* $P_n \in L(X)$ $(n \in J)$, *hogy teljesülnek a következő tulajdonságok:*

$$P_{n+1}A_n = A_nP_n \qquad (n \in J), \tag{3.14}$$

$$\|\Lambda(n,m)P_mx\| \leq K_1\alpha^{n-m}\|P_mx\| \qquad (n \geq m \geq 0, \; x \in X), \tag{3.15}$$

$$\|\Lambda(n,m)(I-P_m)x\| \geq K_2^{-1}\beta^{n-m}\|(I-P_m)x\| \qquad (n \geq m \geq 0, \; x \in X), \tag{3.16}$$

$$\|P_n\| \leq M \qquad (n \in J), \tag{3.17}$$

továbbá a (P_n) *projekciósorozat kielégíti az alábbi ún. regularitási feltételt:*

$$\mathrm{Ker}(P_{n+1}) \subseteq \mathrm{Im}(A_n) \qquad (n \in J). \tag{3.18}$$

3.5. Megjegyzés. *1. az [5] cikkben külön vizsgálják azt az esetet, amikor a fenti 3.7. definícióban az* α, β *konstansokról csak annyit teszünk fel, hogy* $0 < \alpha < \beta$. *Az így megadott fogalmat előrevett exponenciális szeletelésnek nevezik a szerzők.*

2. Valamint az említett cikkben bebizonyítják, hogy a 3.8. definíció ekvivalens az exponenciális dichotómia 3.6. definíciójával. Erre az állításra még hivatkozunk a későbbiekben.

A következő definícióban a P_n projekciókat hagyjuk el, helyette alkalmas alterek segítségével határozzuk meg, hogy az eddig is szereplő, a (3.8) és (3.9) egyenlőtlenségek megfelelőinek mely altereken kell teljesülnie.

3.9. Definíció. *(vö.: [3]) Azt mondjuk, hogy a* (3.1) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* J *intervallumon, ha minden* $n \in J$ *esetén létezik* $X_n^1 \subset X$, $X_n^2 \subset X$, *hogy*

$$X = X_n^1 \oplus X_n^2, \tag{3.19}$$

valamint ha léteznek (n-től független) $K > 0$, $0 < q < 1$ *konstansok, hogy minden* $n, m \in J$ *esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$\|\Lambda(n,m)x\| \quad \leq Kq^{n-m}\|x\| \qquad (n \geq m,\ x \in X_n^1), \tag{3.20}$$

$$\|\Lambda(n,m)x\| \quad \geq \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{q^{n-m}}\|x\| \qquad (n \geq m,\ x \in X_n^2). \tag{3.21}$$

Az eddigi definíciókban csak annyit tettünk fel a (3.1) rendszert meghatározó A_n operátorokra, hogy minden $n \in J$ esetén $A_n \in L(X)$ teljesüljön, valamint hogy az $(A_n)_{n\in J}$ operátor-sorozat egyenletesen korlátos legyen. A következő definícióban feltesszük az operátorok invertálhatóságát is.

3.10. Definíció. (Exponenciális dichotómia) *(vö. pl.: [2], [22], [23]) Tegyük fel, hogy a* (3.1) *rendszert meghatározó* A_n *operátorok invertálhatóak, valamint hogy az* (A_n^{-1}) *operátorsorozat egyenletesen korlátos, azaz*

$$\sup_{n\in J} \|A_n^{-1}\| < +\infty$$

teljesül. Ha léteznek K_1, K_2, α_1, $\alpha_2 > 0$ konstansok és $P : X \to X$ projekció, hogy tetszőleges $m, n \in J$ esetén teljesülnek az

$$\|\Lambda(n,0)P\Lambda^{-1}(m,0)\| \le K_1 e^{-\alpha_1(n-m)} \qquad (m \le n), \tag{3.22}$$

$$\|\Lambda(n,0)(I-P)\Lambda^{-1}(m,0)\| \le K_2 e^{-\alpha_2(m-n)} \qquad (m \ge n), \tag{3.23}$$

egyenlőtlenségek, akkor azt mondjuk, hogy a (3.1) *rendszernek exponenciális dichotómiája van.*

Ha $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy a (3.1) *rendszernek közönséges dichotómiája van.*

3.6. Megjegyzés.
1. *A [2], [22], [23] cikkekben a fenti definíció $X := \mathbb{R}^d$ esetben definiált, de megadható tetszőleges X Banach-téren is.*
2. *Gyakran feltesszük a 3.10. definícióban szereplő konstansokra, hogy $K_1 = K_2 =: K$, $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$.*

3.2. Spektrális dichotómia

Legyen továbbra is $J \in \{\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}_0^+,\ \mathbb{Z}_0^-\}$ tetszőleges, rögzített intervallum és tekintsük a (3.1) homogén lineáris rendszert. Vezessük be az alábbi jelölést, melyet a továbbiakban felhasználunk:

$$l_\infty := l_\infty(J,X) := \{v = \{v_n\}_{n\in J} \ : \ v_n \in X,\ \sup_{n\in J}\|v_n\| < \infty\}.$$

3.7. Megjegyzés. *$l_\infty(J,X)$ Banach-tér a $\|v\|_\infty := \sup_{n\in J}\|v_n\|$ normával (vö.: [24]).*

Ebben az alfejezetben bemutatunk egy látszólag az eddigiektől teljesen eltérő definíciót, azonban ki fog derülni, hogy tulajdonképpen az ez által meghatározott fogalom is ekvivalens az exponenciális dichotómia fogalmával.

3.11. Definíció. (Spektrális dichotómia) *(vö.: [3], [20])*

1. *Legyen* $J = \mathbb{Z}$, *és az* $S_{\mathbb{Z}} : l_\infty(\mathbb{Z}, X) \to l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ *operátort definiáljuk a következőképpen:*

$$(S_{\mathbb{Z}}x)_n := A_{n-1}x_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)). \tag{3.24}$$

Ekkor a (2.1) *feltétel miatt* $S_{\mathbb{Z}} \in L(l_\infty(\mathbb{Z}, X))$. *Azt mondjuk, hogy a* (3.1) *rendszernek spektrális dichotómiája van, ha a* $\sigma(S_{\mathbb{Z}})$ *spektrum nem metszi a komplex egységkört.*

2. *Legyen* $J = \mathbb{Z}_0^+$, *és az* $S_{\mathbb{Z}_0^+} : l_\infty(\mathbb{Z}_0^+, X) \to l_\infty(\mathbb{Z}_0^+, X)$ *operátort definiáljuk a következőképpen:*

$$(S_{\mathbb{Z}_0^+}x)_n := \begin{cases} 0 & (n = 0), \\ A_{n-1}x_{n-1} & (n \geq 1), \end{cases} \tag{3.25}$$

ahol $x \in l_\infty(\mathbb{Z}_0^+, X)$. *Ekkor a* (2.1) *feltétel miatt* $S_{\mathbb{Z}_0^+} \in L(l_\infty(\mathbb{Z}_0^+, X))$. *Azt mondjuk, hogy a* (3.1) *rendszernek spektrális dichotómiája van, ha a* $\sigma(S_{\mathbb{Z}_0^+})$ *spektrum nem metszi a komplex egységkört.*

A következő két tétel összekapcsolja a spektrális és az exponenciális dichotómia (3.9. definícióban megadott) fogalmát.

3.3. Tétel. *(vö.: [3]) Legyen* $J = \mathbb{Z}$ *és tegyük fel, hogy a* (3.1) *rendszert meghatározó* A_n *operátorsorozatra teljesül, hogy minden* $n \in \mathbb{Z}$ *esetén* A_n *invertálható, és az inverz-operátorok egyenletesen korlátosak. Ekkor a 3.9. definíció pontosan akkor teljesül a vizsgált rendszerre, ha a 3.11. definíció.*

Ezután a [4] cikkben azt is megmutatták, hogy a két definíció ekvivalenciája az A_n operátorok invertálhatósága nélkül is teljesül, nevezetesen igaz az alábbi tétel.

3.4. Tétel. *(vö: [4]) Tekintsük a* (3.1) *rendszert, az azt meghatározó* $A_n \in L(X)$ *operátorokra tegyük fel, hogy*

$$\sup_{n \in J} \|A_n\| < +\infty.$$

Ekkor is fennáll, hogy a 3.9. definíció pontosan akkor teljesül a (3.1) *rendszerre, amikor a 3.11. definíció.*

3.3. A definíciók kapcsolata

Ebben az alfejezetben a fent bemutatott definíciók egymással való kapcsolatát vizsgáljuk, nevezetesen hogy azok közül mely definíciók milyen feltételek mellett ekvivalensek. Ennek során felhasználjuk a következő állítást.

3.4. Állítás. *(vö.: [14]) Ha feltesszük, hogy az $A_n \in L(X)$ operátorok egyenletesen korlátosak, továbbá hogy a* (3.1) *rendszerre teljesül a 3.6. definíció $\mathbb{Z}_0^+$-on, akkor a (P_n) projekció-sorozat egyenletesen korlátos, azaz fennáll a*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \|P_n\| < +\infty \tag{3.26}$$

tulajdonság.

3.8. Megjegyzés. *A fenti állításra a [14] cikkben található bizonyítás kis módosítással $J = \mathbb{Z}_0^-$ esetben is igaz, tehát az iménti állítás ezen intervallum esetén is fennáll. Így adódik, hogy $J = \mathbb{Z}$ esetben is igazolható a* (3.26) *egyenlőtlenség (így tetszőleges $J \subset \mathbb{Z}$ diszkrét intervallum esetén is).*

3.5. Tétel. *Legyen $J \in \{\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}_0^+,\ \mathbb{Z}_0^-\}$. Tekintsük a* (3.1) *rendszert, az azt definiáló $(A_n)_{n\in J} \subset L(X)$ operátorsorozatról tegyük fel, hogy egyenletesen korlátos, azaz igaz a* (2.1) *becslés. Ekkor a 3.5., 3.6., a 3.8., a 3.9. valamint $J \in \{\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}_0^+\}$ esetén a 3.11. definíciók ekvivalensek. Ha a rendszert definiáló operátorokról azt is feltesszük, hogy invertálhatóak és inverzeik is egyenletesen korlátosak, akkor az előbbi definíciókkal a 3.10. definíció is ekvivalens.*

Bizonyítás: Legyen $J \in \{\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}_0^+,\ \mathbb{Z}_0^-\}$ tetszőleges rögzített intervallum.

1. **lépés**: A 3.5. és a 3.6. definíciók ekvivalenciája.

Az ekvivalenciához három dolgot kell észrevennünk:

1. Ha a 3.5. definíció a (P_n) projekciósorozattal teljesül, akkor a 3.6. definíció az $(I - P_n)$ projekciósorozattal.

2. Tetszőleges rögzített $n \in J$ esetén

$$x \in \operatorname{Ker} P_n \Longleftrightarrow x \in \operatorname{Im}(I - P_n), \tag{3.27}$$

ugyanis legyen $x \in \operatorname{Ker} P_n$, ekkor

$$P_n x = 0 \Longrightarrow P_n x = P_n x' - P_n x' \Longrightarrow P_n x = P_n x' - P_n^2 x' \qquad (x' \in X),$$

azaz $x = (I - P_n)x'$, és így $x \in \operatorname{Im}(I - P_n)$. A fordított implikációhoz legyen $x \in \operatorname{Im}(I - P_n)$, ekkor valamely $x' \in X$ esetén

$$x = (I - P_n)x' \Longrightarrow P_n x = 0,$$

azaz $x \in \operatorname{Ker} P_n$.

3. Ha a 3.5. definíció K, θ konstansokkal igaz, akkor a 3.6. definíció $K > 0$ valamint az $\alpha := -\log(\theta) > 0$ konstansokkal, illetve ehhez hasonlóan ha a 3.6. definíció valamely K, α konstansokkal teljesül, akkor a 3.5. definíció a K, $\theta := e^{-\alpha}$ konstansokkal.

2**. lépés**: A 3.6. és a 3.8. definíciók ekvivalenciája.

Ahogyan azt már a 3.5. megjegyzésben említettük, az [5] cikk 4.2 tétele kimondja a 3.6. és a 3.8. definíciók ekvivalenciáját. Ennek egyik kulcsa, hogy a 3.8. definícióban szereplő (3.18) regularitási feltétel és a 3.6. definícióban megadott (3.7) tulajdonság ekvivalens. A másik fontos mozzanat, mely az [5] cikkben nem tárgyalt, a 3.4. állításban megfogalmazott eredmény, azaz ha a (3.1) rendszerre teljesül a 3.6. definíció, akkor

$$\sup_{n \in J} \|P_n\| < \infty$$

teljesül, így a 3.6. definícióból következik a 3.8. definícióban szereplő (3.17) feltétel.

3**. lépés**: A 3.6. és a 3.9. definíciók ekvivalenciája.

3/1**. lépés**:

Tegyük fel, hogy a 3.6. definíció teljesül. A 3.9. definícióban szereplő X_n^1 és X_n^2 alterek definiáljuk a következőképpen: $X_n^1 := \operatorname{Im} P_n$, $X_n^2 := \operatorname{Ker} P_n$. Ekkor nyilvánvalóan $X = X_n^1 \oplus X_n^2$ minden $n \in J$ esetén, továbbá a (3.8) és a (3.9) egyenlőtlenségek miatt a (3.20) és (3.21) egyenlőtlenségek teljesülnek.

3/2**. lépés**:

Tegyük fel, hogy a 3.9. definíció fennáll alkalmas K, q konstansokkal, X_n^1, X_n^2 alterekkel. A [14] cikk 3.2 tételének értelmében a 3.6. definíció teljesülésének igazolásához elegendő megmutatni, hogy az

$$X_0 := \{x \in X \ : \ \sup_{n\geq 0} \|\Lambda(n,0)x\| \leq +\infty\}$$

altérnek létezik direkt kiegészítője X-ben. Látható, hogy a 3.9. definíció miatt minden $n \in J$ esetén $X_0 = X_n^1$, így a definícióban szereplő feltételek miatt $X_0 \oplus X_n^2 = X$, tehát az első szükséges feltétel teljesül. Továbbá tekintsük a $T : l_\infty \to l_\infty$ operátort, mely a következőképpen definiált adott $u \in l_\infty$ esetén:

$$(Tu)_n := u_{n+1} - A_n u_n \qquad (n \in J). \tag{3.28}$$

A fent említett tétel alkalmazásához meg kell mutatnunk, hogy a T operátor szürjektív, azaz minden $f \in l_\infty$ esetén létezik $u \in l_\infty$, melyekre $Tu = f$, azaz minden $n \in J$ esetén

$$u_{n+1} = A_n u_n + f_n. \tag{3.29}$$

Az nyilvánvaló, hogy létezik olyan u, mely a fenti egyenlőséget teljesíti, így már csak azt kell megmutatnunk, hogy adott $f \in l_\infty$ esetén az ehhez tartozó u megoldása korlátos, azaz $u \in l_\infty$ teljesül. A 3.9. definícióban szereplő egyenlőtlenségek segítségével ez belátható, ugyanis a (3.29) egyenlőséget $u_{n+1} - A_n u_n = f_n$ alakba átírva adódik az

$$\|u_{n+1} - A_n u_n\| = \|f_n\| \leq \|f\|_\infty$$

egyenlőtlenség, melynek bal oldalát átalakítva:

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - A_n u_n\| \ &\geq \|u_{n+1}\| - \|A_n\|\|u_n\| \geq \\ &\|u_{n+1}\| - M\|\Lambda(n,0)u_0\| \geq \\ &\|u_{n+1}\| - MKq^n\|u_0\|,\end{aligned}$$

melyből $\|u_{n+1}\|$-re a következő becslés írható fel kihasználva, hogy a 3.9. definícióban szereplő q konstansra $q < 1$ igaz:

$$\|u_{n+1}\| \leq MKq^n\|u_0\| + \|f\|_\infty \leq MK\|u_0\| + \|f\|_\infty,$$

így adódik, hogy

$$\|u\|_\infty \leq MK\|u_0\| + \|f\|_\infty,$$

azaz $u \in l_\infty$.

A továbbiakban következik a tétel második felének bizonyítása, azaz mostantól tegyük fel, hogy a (3.1) rendszert megadó A_n $(n \in J)$ operátorok invertálhatóak, és az inverzeik egyenletesen korlátosak is.

4. **lépés**: A 3.10. és a 3.6. definíciók ekvivalenciája.

4/1. **lépés**:

Tegyük fel, hogy a (3.1) rendszerre teljesül a 3.6. definíció. Legyen

$$P := \Lambda^{-1}(0,0)P_0\Lambda(0,0), \tag{3.30}$$

azaz $P = P_0$. Ekkor tetszőleges $n, m \in J$, $n \geq m$ esetén

$$\Lambda^{-1}(n,0)P_n\Lambda(n,0) = \Lambda^{-1}(m,0)P_m\Lambda(m,0),$$

ugyanis legyen $n \in J$ tetszőleges, ekkor

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}(n,0)P_n\Lambda(n,0) &= (A_{n-1}A_{n-2}\cdots A_0)^{-1}P_n(A_{n-1}A_{n-2}\cdots A_0) = \\ &= A_0^{-1}\cdots A_{n-2}^{-1}(A_{n-1}^{-1}P_nA_{n-1})A_{n-2}\cdots A_0 = \\ &= A_0^{-1}\cdots A_{n-2}^{-1}P_{n-1}A_{n-2}\cdots A_0 = \\ &= \Lambda^{-1}(n-1,0)P_{n-1}\Lambda(n-1,0).\end{aligned}$$

Így tetszőleges $m \in J$, $m \leq n$ esetén

$$\Lambda^{-1}(n,0)P_n\Lambda(n,0) = \Lambda^{-1}(n-1,0)P_{n-1}\Lambda(n-1,0) = \cdots = \Lambda^{-1}(m,0)P_m\Lambda(m,0).$$

Lássuk be, hogy a (3.22) egyenlőtlenség igaz. Legyen $m \in J$ tetszőleges rögzített, $x \in \operatorname{Im} P_m$, azaz $\exists x_0 \in X$, hogy $x = P_m x_0$. Ekkor:

$$\begin{aligned}\Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(m,0)x &= \Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(m,0)P_m x_0 = \\ &= \Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(m,0)\Lambda(m,0)P\Lambda^{-1}(m,0)x_0 = \\ &= \Lambda(n,0)P\Lambda^{-1}(m,0)x_0,\end{aligned}$$

így felhasználva a (3.8) egyenlőtlenséget és a 3.4. állítást kapjuk, hogy tetszőleges $n \in J$, $n \geq m$ esetén

$$\begin{aligned}\|\Lambda(n,0)P\Lambda^{-1}(m,0)x_0\| &\leq Ke^{-\alpha(n-m)}\|P_m x_0\| \leq \\ &\leq KMe^{-\alpha(n-m)}\|x_0\|,\end{aligned}$$

azaz $K_1 := KM$, $\alpha_1 := \alpha$ választással teljesül a (3.22) egyenlőtlenség:

$$\|\Lambda(n,0)P\Lambda^{-1}(m,0)\| \leq KMe^{-\alpha(n-m)} \qquad (n,m \in J,\ n \geq m).$$

A (3.23) egyenlőtlenség bizonyításához legyen $m \in J$ tetszőleges rögzített, és $x \in \operatorname{Ker} P_m$. Ekkor a (3.27) tulajdonság miatt $x \in \operatorname{Im}(I - P_m)$, így létezik $x_0 \in X$, melyre

$$x = (I - P_m)x_0$$

teljesül. Továbbá tetszőleges $n \in J$ esetén igaz a következő egyenlőség:

$$\begin{aligned}\Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(m,0)x &= \Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(m,0)(I-P_m)x_0 = \\ &= \Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(m,0)x_0 - \Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(m,0)P_m x_0 = \\ &= \Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(m,0)x_0 - \Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(m,0)\Lambda(m,0)P\Lambda^{-1}(m,0)x_0 = \\ &= \Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(m,0)x_0 - \Lambda(n,0)P\Lambda^{-1}(m,0)x_0 = \\ &= \Lambda(n,0)(I-P)\Lambda^{-1}(m,0)x_0,\end{aligned}$$

így felhasználva a (3.9) egyenlőtlenséget és a 3.4. állítást kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|\Lambda(n,0)(I-P)\Lambda^{-1}(m,0)x_0\| &\leq Ke^{-\alpha(n-m)}\|(I-P_m)x_0\| \leq \\ &\leq K(1+M)e^{-\alpha(n-m)}\|x_0\|,\end{aligned}$$

így $K_2 := K(1+M)$, $\alpha_2 := \alpha$ választással adódik a (3.23) egyenlőtlenség:

$$\|\Lambda(n,0)P\Lambda^{-1}(m,0)\| \leq K(1+M)e^{-\alpha(n-m)} \qquad (n,m \in J,\ n \leq m).$$

Összefoglalva tehát megmutattuk, hogy a (3.1) rendszerre teljesül a 3.10. definíció a (3.30)-ban definiált P projekcióval, $\alpha_1 := \alpha$, $\alpha_2 := \alpha$, $K_1 := M$, $K_2 := 1 + M$ konstansokkal (ahol α, K a 3.6. definícióból származnak).

4/2. **lépés**

Tegyük fel, hogy a (3.1) rendszerre teljesül a 3.10. definíció. Legyen

$$P_n := \Lambda(n,0)P\Lambda^{-1}(n,0), \qquad (n \in J).$$

Ekkor a (3.22) és (3.23) egyenlőtlenségekből nyilvánvalóan következnek a (3.8) és (3.9) egyenlőtlenségek (vö.: [9]).

Végül megmutatjuk a 3.6. definícióban szereplő (3.6) és (3.7) tulajdonságok fennállását.

$$\begin{aligned} A_n P_n &= A_n \Lambda(n,0) P \Lambda^{-1}(n,0) = \\ &= \Lambda(n+1,0) P (A_0^{-1} \cdots A_{n-1}^{-1}) A_n^{-1} A_n = \\ &= \Lambda(n+1,0) P \Lambda^{-1}(n+1,0) A_n = \\ &= P_{n+1} A_n, \end{aligned}$$

tehát a (3.6) tulajdonság teljesül.

Mivel feltettük, hogy tetszőleges $n \in J$ esetén A_n izomorfizmus, elegendő leellenőrizni, hogy $A_n : \operatorname{Ker} P_n \to \operatorname{Ker} P_{n+1}$. Legyen $x \in \operatorname{Ker} P_n$, azaz $P_n x = 0$. Ekkor

$$P_{n+1}(A_n x) = (P_{n+1} A_n x) = A_n P_n x = A_n 0,$$

és mivel feltettük, hogy A_n izomorfizmus, tudjuk, hogy $A_n 0 = 0$, így

$$P_{n+1}(A_n x) = 0,$$

azaz $A_n x \in \operatorname{Ker} P_{n+1}$. Illetve ha $x \in X$ esetén $A_n x \in \operatorname{Ker} P_{n+1}$, azaz

$$P_{n+1} A_n x = 0,$$

akkor ebből következik a (3.6) tulajdonságot felhasználva, hogy

$$A_n P_n x = P_{n+1} A_n x = 0,$$

így $P_n x = 0$, azaz $x \in \operatorname{Ker} P_n$.

5. **lépés**: A 3.9. és a 3.11. definíciók ekvivalenciája. Ahogyan az előző alfejezetben kifejtettük (vö.: 3.3. és 3.4. tételek) a 3.9. és 3.11. definíciók ekvivalenciájának bizonyítása megtalálható az invertálhatóságot feltételező esetben a [3], valamint az általánosabb esetben a [4] cikkben.

3.9. Megjegyzés. *1. Az invertálhatósági feltételeket használó esetben a 3.9. és a 3.10. definíciók ekvivalenciájának bizonyítása megtalálható a [3] cikkben.*

2. a 3.6. definícióban szereplő $(P_n)_{n\in J}$ projekció-sorozatra és a 3.9. definícióban szereplő (3.19) *felbontásban megadott X_n^1 alterek között fennáll az az összefüggés, hogy tetszőleges $n \in J$ esetén a P_n projekció az X_n^1 altérre való vetítést adja meg. Azaz ha $x \in X$, akkor* (3.19) *miatt tetszőleges, rögzített $n \in J$ esetén egyértelműen létezik $x_1,\ x_2 \in X$, hogy $x_1 \in X_n^1$, $x_2 \in X_n^2$ és $x = x_1 + x_2$, továbbá $P_n x = x_1$.*

3.4. Példák

Ebben az alfejezetben néhány, a fejezetben korábban látott definíciókkal kapcsolatos észrevételt írunk le, továbbá példákon keresztül illusztráljuk az exponenciális dichotómia megjelenését konkrét rendszerekben.

Az első észrevételt a 3.10. definícióval kapcsolatosan tesszük, nevezetesen hogy az nem fogalmazható meg általánosabb, a 3.6. és a 3.5. definíciókban látott módon, azaz amikor az A_n operátorok invertálhatóságát nem tesszük fel. Ugyanis ha az A_n operátorokról csak annyit teszünk fel, hogy egyenletesen korlátosak és létezik $P : X \to X$ projekció, melyekre

$$A_n \ : \ \ker P \to \ker P \text{ izomorfizmus} \qquad (n \in J),$$

amiből következik, hogy $\tilde{A}_n := A_n|_{\ker P}$ invertálható, így ekkor

$$\tilde{\Lambda}(n,m) := \Lambda(n,m) : \ker P \to \ker P$$

$m < n$ esetén invertálható, nevezetesen:

$$\tilde{\Lambda}^{-1}(n,m) := \tilde{A}_m^{-1} \cdot \dots \cdot \tilde{A}_{n-1}^{-1},$$

akkor $\Lambda(n,m)$ definiálható $n < m$ esetén is, de csak a $\ker P$ altéren. A 3.10. definíció általánosítása emiatt a megszorítás miatt nem lehetséges, ugyanis a

$$P_n := \Lambda(n,0)^{-1} P \Lambda(n,0) \qquad (n \in J)$$

módon definiált projektor sorozat csak a $\ker P$ altéren lenne értelmezve, így ezt az átalakítást a 3.6. definícióban csak a (3.23) egyenlőtlenséghez tudnánk használni. A jelenséget a következő példában illusztráljuk.

3.2. Példa. *Tekintsük a* (3.1) *rendszert a következő alakban:*

$$x_{n+1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta} \end{pmatrix} x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}), \tag{3.31}$$

ahol $\beta > 0$ *paraméter.*

Ekkor nyilván A_n *nem invertálható, de a 3.6. definíció fennáll a*

$$P_n := P := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

projekciósorozattal. Továbbá teljesül, hogy $A_n|_{\ker P_n}$ *invertálható, azonban az egész* $X = \mathbb{R}^2$ *téren ez nem mondható el, így a 3.10. definícióban szereplő* (3.22) *egyenlőtlenséget nem lehet felírni.*

Fordítva természetesen igaz a fenti gondolatmenet, tehát a 3.6. definíció használható olyan rendszer esetében, melynek együtthatói invertálhatóak, ekkor azonban a (P_n) projekció-sorozat elemeire elég ellenőrizni a (3.6) tulajdonságot és a (3.8), (3.9) egyenlőtlenségek teljesülését. A [6] cikkben ennek alapján definiált az exponenciális dichotómia fogalma, mely definíciót a teljesség kedvéért most leírunk.

3.12. Definíció. *(vö: [6]) Azt mondjuk, hogy a* (3.1) *lineáris rendszernek exponenciális dichotómiája van egy* J *intervallumon, ha létezik* $(P_n)_{n\in J} \subset L(X)$ *projekciósorozat, és* K, $\alpha > 0$ *konstansok úgy, hogy tetszőleges* n, $m \in J$ *esetén teljesül a*

$$P_n \Lambda(n,m) = \Lambda(n,m) P_m \tag{3.32}$$

tulajdonság, valamint tetszőleges $n \geq m$ esetén a

$$\|\Lambda(n,m)P_m\| \leq Ke^{-\alpha(n-m)}, \tag{3.33}$$

$$\|\Lambda(m,n)(I-P_n)\| \leq Ke^{-\alpha(n-m)} \tag{3.34}$$

egyenlőtlenségek fennállnak. Ha $\alpha = 0$, akkor azt mondjuk, hogy a (3.1) rendszernek közönséges dichotómiája van.

A következő példában olyan exponenciálisan dichotóm rendszert mutatunk, melynek fázistere végtelen dimenziós.

3.3. Példa. *Legyen $T \in \mathbb{R}_+$, $V := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, ahol valamely $x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén*

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Jelölje továbbá $X := L^2(0,T;V)$ halmaz azon $f : (0,T) \to V$ mérhető függvények halmazát, melyekre $\|f(x)\|_V^2$ integrálható, valamint tekintsük az

$$\|f\|^2_{L^2(0,T;V)} := \int_0^T \|f(x)\|_V^2 dx$$

módon definiált normát. Ekkor az $(X, \|\cdot\|_{L^2(0,T;V)})$ tér Banach-tér (vö: [26]). Tekintsük a következő autonóm differenciaegyenlet-rendszert:

$$f_{n+1} := A \cdot f_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+), \tag{3.35}$$

ahol tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén $f_n \in L^2(0,T;V)$, valamint $A : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V)$ a következő operátor:

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Így valamely $F \in L^2(0,T;V)$ esetén $AF \in L^2(0,T;V)$ az alábbi módon definiált:

$$AF := (\frac{1}{2}F_1,\ 2F_2).$$

Ennek alapján egyszerűen látható, hogy AF valóban $L^2(0,T;V)$-beli, hiszen

$$\|AF\|_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T \|(\frac{1}{2}F_1(x),\ 2F_2(x))\|_2^2 dx \leq 2\|F\|_{L^2(0,T;V)} < +\infty.$$

Továbbá a (3.35) rendszer Cauchy-operátora:

$$\Lambda(n,0) = \begin{bmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+),$$

így tetszőleges $F \in L^2(0,T;V)$ függvény esetén

$$\Lambda(n,0)F = (2^{-n}F_1,\ 2^n F_2) \in L^2(0,T;V) \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+).$$

Megmutatjuk, hogy a (3.35) rendszernek exponenciális dichotómiája van a $\mathbb{Z}_0^+$ intervallumon a

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

projektorral. Ehhez legyen $F \in L^2(0,T;V)$, n, $m \in \mathbb{Z}_0^+$ egészek, melyekre $n \geq m$ és tekintsük a következő egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(n,m)PF\|^2_{L^2(0,T;V)} &= \int_0^T \|\Lambda(n,m)PF(x)\|_2^2 dx = \\ &= \int_0^T \|(2^{-(n-m)}F_1(x),0)\|_2 dx = \\ &= \int_0^T (2^{-(n-m)}F_1(x))^2 + 0^2 dx = \\ &= 2^{-2(n-m)} \int_0^T (F_1(x))^2 dx \leq \\ &\leq 2^{-2(n-m)} \int_0^T \|F(x)\|_2^2 dx = e^{-2\ln(2)(n-m)} \|F\|^2_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk a 3.12. definícióban szereplő (3.33) egyenlőtlenséget, hasonlóan látható be a (3.34) egyenlőtlenség is, továbbá egyszerű számolással adódik, hogy a (3.32) tulajdonság is teljesül. Így a (3.35) rendszernek valóban exponenciális dichotómiája van a megadott P projekcióval és a $K := 1$, $\alpha := \ln(2)$ konstansokkal.

3.4.1. Példa instabil exponenciálisan dichotóm rendszerre

A 2.2. alfejezet 2.1. példájában mutattunk egy rendszert, melyről beláttuk, hogy instabil, annak ellenére, hogy a rendszer együtthatómátrixa sajátértékeinek abszolút értéke 1-nél kisebb. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy az ott szereplő rendszernek exponenciális dichotómiája van a $\mathbb{Z}$ intervallumon. Tekintsük az

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

nem-autonóm homogén lineáris rendszert, ahol az együtthatómátrix a következőképpen definiált:

$$A_n := \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 9+7(-1)^n \\ 9-7(-1)^n & 0 \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{3.36}$$

A rendszer Cauchy-operátora:

$$\Lambda(n,0) = \begin{bmatrix} 2^{-2n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z} \text{ páros}),$$

$$\Lambda(n,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{-2n} & 0 \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z} \text{ páratlan}).$$

Mivel az A_n együtthatómátrixok invertálhatóak, a rendszer exponenciális dichotómiájának megmutatásához használhatjuk a 3.12. definíciót. A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy az abban szereplő (3.32) azonosság valamint a (3.33) és (3.34) egyenlőtlenségek teljesülnek a

$$P_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z} \text{ páros}),$$

$$P_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z} \text{ páratlan})$$

projekciósorozattal. Ehhez elsőként írjuk fel a $\Lambda(n,m)$ operátort különböző paritású n, $m \in \mathbb{Z}$ egészek esetén:

$$\Lambda(n,m) = \begin{bmatrix} 2^{2m-2n} & 0 \\ 0 & 2^{n-m} \end{bmatrix} \qquad n,\ m \,\text{páros},$$

$$\Lambda(n,m) = \begin{bmatrix} 0 & 2^{2m-2n} \\ 2^{n-m} & 0 \end{bmatrix} \qquad n,\ \text{páros},\ m \,\text{páratlan},$$

$$\Lambda(n,m) = \begin{bmatrix} 0 & 2^{n-m} \\ 2^{2m-2n} & 0 \end{bmatrix} \qquad n,\ \text{páratlan},\ m \,\text{páros},$$

$$\Lambda(n,m) = \begin{bmatrix} 2^{n-m} & 0 \\ 0 & 2^{2m-2n} \end{bmatrix} \qquad n,\ m \,\text{páratlan}.$$

Ezek felhasználásával felírjuk a $\Lambda(n,m)P_m$ és a $\Lambda(m,n)(I-P_n)$ mátrixokat $n \geq m$ esetén:

$$\Lambda(n,m)P_m = \begin{bmatrix} 2^{2m-2n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(m,n)(I-P_n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{m-n} \end{bmatrix} \qquad n,\ m \,\text{páros},$$

$$\Lambda(n,m)P_m = \begin{bmatrix} 0 & 2^{2m-2n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(m,n)(I-P_n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2^{m-n} & 0 \end{bmatrix} \qquad n,\ \text{páros},\ m \,\text{páratlan},$$

$$\Lambda(n,m)P_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2^{2m-2n} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(m,n)(I-P_n) = \begin{bmatrix} 0 & 2^{m-n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad n,\ \text{páratlan},\ m \,\text{páros},$$

$$\Lambda(n,m)P_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{2m-2n} \end{bmatrix}, \quad \Lambda(m,n)(I-P_n) = \begin{bmatrix} 2^{m-n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad n,\ m \,\text{páratlan}.$$

A fentiek alapján látható, hogy tetszőleges n, $m \in \mathbb{Z}$ esetén

$$P_n\Lambda(n,m) = \Lambda(n,m)P_m$$

fennáll, azaz teljesül a (3.32) azonosság, valamint

$$\begin{aligned} \|\Lambda(n,m)P_m\| &\leq K_1 \cdot \|\Lambda(n,m)P_m\|_\infty = K_1 e^{-2\ln(2)(n-m)}, \\ \\ \|\Lambda(m,n)(I-P_n)\| &\leq K_2 \cdot \|\Lambda(m,n)(I-P_n)\|_\infty = K_2 e^{-\ln(2)(n-m)} \end{aligned}$$

igaz tetszőleges $n \geq m$ egészek esetén, így alkalmas

$$\begin{aligned} K &:= \max\{K_1,\ K_2\}, \\ \alpha &:= \min\{\alpha_1\ \alpha_2\} = \min\{2\ln(2),\ \ln(2)\} = \ln(2) \end{aligned}$$

konstansokkal a vizsgált rendszerre fennáll a 3.12. definíció, így annak exponenciális dichotómiája van a megadott konstansokkal, projekciósorozattal a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon.

4. Tulajdonságok

Az exponenciális dichotómia fogalmának, valamint exponenciálisan dichotóm rendszereknek számos tulajdonsága vizsgált és bizonyított a szakirodalomban. A most következő fejezetben mi is ilyen tulajdonságokkal, illetve ezek lineáris rendszerekben való megjelenésével foglalkozunk. Az itt bizonyított tételek egy része saját eredmény, a szakirodalomban fellelhető ismeretek újragondolásával ill. továbbfejlesztésével keletkeztek. Eredményeink szemléltetésére néhány példát is adunk az egyes alfejezetekben.

4.1. Autonóm rendszer exponenciális dichotómiája

Állandó együtthatós lineáris rendszerek esetében adott a szakirodalomban egy feltétel, melynek segítségével meghatározható, hogy adott rendszer exponenciálisan dichotóm-e, továbbá ha igen, akkor az állítás segítségével az exponenciális dichotómia definíciójában szereplő projekció ill. projekciósorozat is kiszámítható.

4.5. Állítás. *(vö.: [25]) Legyen $J = \mathbb{Z}$, ill. valamely $d \in \mathbb{Z}^+$ esetén $X := \mathbb{R}^d$, és tekintsük az*

$$x_{n+1} = Ax_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4.1}$$

autonóm homogén lineáris rendszert, ahol $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. A (4.1) *rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája, ha az A mátrix hiperbolikus, azaz*

$$\sigma(A) \cap \mathbb{T}^1 = \emptyset,$$

ahol $\mathbb{T}^1$ jelöli a komplex egységkört, azaz

$$\mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z \ \neq 1\}.$$

Továbbá a 3.10. definícióban szereplő P, ill. a 3.6. definícióban szereplő $P_0 := P$ projekció a következőképpen áll elő:

$$P = -\frac{1}{2\pi\imath} \oint_{\mathbb{S}^1} (A - zI)^{-1} dz. \tag{4.2}$$

4.10. Megjegyzés. *A dolgozat fejezetében már írtunk hiperbolikus mátrix spektrumának felbontásáról, illetve a felbontáshoz tartozó Riesz-projekcióról. Az ott leírtak továbbra is* *érvényesek, és a fenti autonóm rendszerekről szóló 4.5. állítás kapcsán itt is érdemes felelevenítenünk őket. Ha az A mátrix hiperbolikus, akkor spektruma, $\sigma(A)$ felbontható a következőképpen:*

$$\sigma(A) := \sigma^+ \cup \sigma^-,$$

ahol σ^+ tartalmazza az 1-nél nagyobb illetve σ^- az 1-nél kisebb abszolút értékű sajátértékeket:

$$\lambda \in \sigma^+ \;\Rightarrow |\lambda| > 1, \quad \lambda \in \sigma^- \;\Rightarrow |\lambda| < 1.$$

A fenti állításban szereplő P projekció pedig a spektrum ezen felbontásához tartozó Riesz-féle projektor (vö: [15], [25]).

Az alábbi példán bemutatjuk a fenti állítást.

4.4. Példa. *Tekintsük a következő autonóm rendszert:*

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z},\ x_n, y_n \in \mathbb{R}). \tag{4.3}$$

A fenti rendszer együtthatóját jelöljük A-val, azaz:

$$A := \begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy A felső háromszög mátrix, így sajátértékei a főátlójában elhelyezkedő értékek, nevezetesen:

$$\lambda_1 := \frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 := 4,$$

így a mátrix hiperbolikus, azaz a 4.5. állításból kapjuk, hogy a (4.3) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon. A továbbiakban meghatározzuk az exponenciális dichotómia 3.12. definíciójában szereplő K, α, P paramétereket. Először a P projekciót számoljuk ki a* (4.2) *képlet segítségével. Ehhez a*

$$(A - zI)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - z & 3 \\ 0 & 4 - z \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1/2 - z)(4 - z)} \begin{bmatrix} 4 - z & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} - z \end{bmatrix} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

mátrix

$$\oint_{\mathbb{T}^1} (A - zI)\, \mathrm{d}z$$

integrálját számoljuk ki elemenként a komplex függvénytanból ismert eredmények felhasználásával.

$$\oint\limits_{\mathbb{T}^1} \frac{1}{\frac{1}{2}-z}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{|\frac{1}{2}-z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2}-z}\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} -\imath\,\mathrm{d}z = -4\pi\imath,$$

$$\oint\limits_{\mathbb{T}^1} -\frac{3}{(\frac{1}{2}-z)(4-z)}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{|\frac{1}{2}-z|=\frac{1}{2}} -\frac{3}{(\frac{1}{2}-z)(4-z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath\frac{3}{4-z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{12\pi\imath}{7},$$

$$\oint\limits_{\mathbb{T}^1} 0\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$\oint\limits_{\mathbb{T}^1} \frac{1}{4-z}\,\mathrm{d}z = 0,$$

így a keresett projekció az alábbi:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A K és α konstansok meghatározásához a 3.12. definícióban lévő (3.33) *és* (3.34) *egyenlőtlenségekben szereplő normákat számoljuk ki. Ehhez először a* (4.3) *rendszer Cauchy-operátorát határozzuk meg. Az A mátrix λ_1 és λ_2 sajátértékeihez tartozó sajátvektorai a következők:*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7/6 \end{bmatrix},$$

így az

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7/6 \end{bmatrix}$$

mátrixszal

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =: D,$$

így

$$\Lambda(n,0) = A^n = SD^nS^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{-n} & \frac{6}{7}(2^{2n} - 2^{-n} \\ 0 & 2^{2n} \end{bmatrix}.$$

Először a 3.12. definícióban szereplő első egyenlőtlenséget tekintjük $n, m \in \mathbb{Z}$ esetén:

$$\Lambda(n,0)P\Lambda^{-1}(m,0) \;=\; \begin{bmatrix} 2^{m-n} & \frac{6}{7}2^{m-n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (n > m),$$

így

$$\|\Lambda(n,0)P\Lambda^{-1}(m,0)\| \leq e^{-\ln(2)(n-m)},$$

tehát a definícióban szereplő első egyenlőtlenség teljesül a $K := 1$ és $\alpha := \ln(2)$ konstansokkal. Hasonlóan megmutatható, hogy a megadott paraméterekkel a definícióban szereplő második egyenlőtlenség is fennáll ugyanezen K és α konstansokkal.

4.2. Inhomogén rendszerek megoldása

Ebben a fejezetben bemutatunk a szakirodalomban megtalálható néhány fontos tételt, melyek az exponenciális dichotómiát adott J intervallumon valamely $f_n \in X$ $(n \in J)$ esetén a

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \in J) \tag{4.4}$$

homogén rendszerhez tartozó

$$x_{n+1} = A_n x_n + f_n \qquad (n \in J) \tag{4.5}$$

inhomogén rendszer megoldásának létezésével és egyértelműségével karakterizálják. A kérdéskör széles körben tárgyalt, vö. [13], [14]. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$l_p \;:= l_p(J,X) := \{v = \{v_n\}_{n\in J} \;:\; v_n \in X,\ \sum_{n\in J} \|v_n\|^p < \infty\},$$

$$l_\infty \;:= l_\infty(J,X) := \{v = \{v_n\}_{n\in J} \;:\; v_n \in X,\ \sup_{n\in J} \|v_n\| < \infty\},$$

továbbá ha $u \in l_p$, akkor $1 \leq p < \infty$ esetén

$$\|u\|_p := \left(\sum_{n\in J} \|u_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.6}$$

illetve $p = \infty$ esetén

$$\|u\|_\infty := \sup_{n\in J} \|u_n\|. \tag{4.7}$$

4.11. Megjegyzés. *$1 \le p < \infty$ esetben az l_p tér Banach-tér a (4.6)-ban definiált normával, és l_∞ Banach-tér a (4.7)-ban definiált normával.*

Az exponenciális dichotómia karakterizálását tárgyaló első állítás a [2] cikkből származik, a bizonyítás megtalálható pl. a [21] cikkben.

4.6. Állítás. *(vö.: [21]) Legyen valamely $d > 0$ egész esetén $X := \mathbb{R}^d$. A (4.4) rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája a $\mathbb{Z}$ intervallumon, ha a (4.5) rendszernek minden $f \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ esetén egyértelműen létezik $\mu \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ megoldása.*

Tegyük fel, hogy $J = \mathbb{Z}_0^+$. Legyen $1 \le p \le \infty$, $\mu = (\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \in l_p$, melyre fennáll, hogy

$$\mu_{n+1} = A_n \mu_n, \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+),$$

azaz minden $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén μ_n kielégíti a (4.4) rendszert. Jelölje $T : l_p \to l_p$ a következő operátort

$$(Tx)_n := x_{n+1} - A_n x_n, \qquad (n \in J), \tag{4.8}$$

ahol $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \in l_p$.

Ezekkel a jelölésekkel tehát adott $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}$ és $\varphi = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}$ esetén $T\varphi = f$ pontosan akkor, ha φ_n megoldása a (4.5) rendszernek minden $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén.

Tegyük fel, hogy a (4.4) homogén rendszernek exponenciális dichotómiája van a $P : X \to X$ projekcióval. Legyen $Z := \operatorname{Ker} P$, valamint

$$l_p^Z := \{x \in l_p \ : \ x_0 \in Z\}, \qquad (1 \le p \le \infty).$$

Jelölje $T_Z : l_p^Z \to l_p$ operátor a T megszorítását l_p^Z-re, azaz

$$T_Z : l_p^Z \to l_p \quad \text{, és} \quad T_Z x := Tx \quad (x \in l_p^Z). \tag{4.9}$$

Vezessük be még a következő jelölést $p = \infty$ esetben:

$$X_0(n_0) := \{x \in X : \sup_{n\ge n_0} \|\Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(n_0,0)x\| < \infty\}, \tag{4.10}$$

illetve $p < \infty$ esetben:

$$X_0(n_0) := \{x \in X : \sum_{n=n_0}^{\infty} \|\Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(n_0,0)x\|^p < \infty\}. \tag{4.11}$$

4.6. Tétel. *(vö.: [13], [14]) Legyen X tetszőleges Banach tér, $J = \mathbb{Z}_0^+$, $1 \leq p \leq +\infty$. Ekkor a* (4.4) *rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája, ha a* (4.8)*-ban definiált $T : l_p \to l_p$ operátor szürjektív, és $X_0(0)$ altérnek létezik direkt kiegészítője X-ben, azaz létezik olyan $Y \subset X$ altér, hogy*

$$X_0(0) \oplus Y = X.$$

A következő tétel csak $p < \infty$ esetben bizonyított a [13] cikkben, a dolgozat 5. fejezetében pedig bebizonyítjuk az alapján $p = \infty$ esetben is.

4.7. Tétel. *(vö.: [13]) a* (4.4) *rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája a $P : X \to X$ projekcióval, melyre* $\operatorname{Ker} P = Z$, *ha a T_Z operátor invertálható.*

4.12. Megjegyzés. *1. Könnyen látható, hogy a T operátor szürjektivitásából következik a* (4.5) *inhomogén rendszer megoldhatósága, ugyanis tegyük fel, hogy a T operátor szürjektív, azaz minden $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \in l_p$ esetén létezik $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \in l_p$, melyre $T\varphi = f$, azaz melyre*

$$(T\varphi)_n = \varphi_{n+1} - A_n \varphi_n = f_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+),$$

azaz $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}_0^+}$ megoldása a (4.5) *rendszernek.*

2. Ha X véges dimenziós, akkor az $X_0(0)$ altérnek mindig létezik direkt kiegészítője X-ben, így a 4.6. tétel miatt a T operátor szürjektivitása szükséges és elégséges feltétele az exponenciális dichotómia fennállásának.

A következő állításban egy általános módszer látható olyan inhomogén lineáris rendszerek megoldására, melyekből származó homogén rendszereknek exponenciális dichotómiája van. Ez megtalálható szinte minden, az exponenciális dichotómiával foglalkozó szakirodalomban (vö. [2]).

4.7. Állítás. *(vö: [13], [14]) Legyen $1 \leq p \leq +\infty$. Tegyük fel, hogy a* (4.4) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a $J \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_0^+, \mathbb{Z}_0^-\}$ intervallumon K, $\alpha > 0$ konstansokkal és $P : X \to X$ projekcióval. Legyen $f \in l_p(J, X)$ tetszőleges rögzített. Ekkor a* (4.5) *rendszer egy megoldása előáll a következő alakban:*

$$y_n = \sum_{m \in J} G(n, m+1) f_m \qquad (n \in J), \tag{4.12}$$

ahol $G : J \times J \to L(X)$ a következő:

$$G(n,m) = \begin{cases} \Lambda(n,0) P \Lambda^{-1}(m,0) \quad (n \geq m), \\ \Lambda(n,0)(I-P)\Lambda^{-1}(m,0) \quad (n < m). \end{cases} \tag{4.13}$$

Az előzőek alapján ha az exponenciális dichotómia teljesüléséből az inhomogén rendszer egyértelmű megoldhatósága is következik, akkor az egyetlen megoldás (4.12) alakú.

4.3. Az exponenciális dichotómia paraméterei

Ebben az alfejezetben az exponenciális dichotómia definícióiban lévő paramétereket, nevezetesen a P projekciót ill. (P_n) projekció-sorozatot, valamint a J intervallumot vizsgáljuk. Ezek közül elsőként a projektorokkal foglalkozunk. A vizsgált tulajdonságot az alábbi példán vezetjük ill. mutatjuk be.

4.5. Példa. *Tekintsük a következő 2-dimenziós rendszert:*

$$x_{n+1} = e^{-1} x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}), \tag{4.14}$$

$$y_{n+1} = e y_n + x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{4.15}$$

Megmutatjuk, hogy a fenti, (4.14)–(4.15) rendszernek exponenciális dichotómiája van a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon alkalmas konstansokkal és projekcióval. Ehhez a 3.10. definíció teljesülését fogjuk leellenőrizni.

Első lépésként határozzuk meg a vizsgált rendszer alapmátrixát, ehhez alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 1 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Tehát a (4.16) rendszert meghatározó A_n operátorok a következőképpen néznek ki:

$$A_n = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 1 & e \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}), \tag{4.17}$$

azaz a rendszer állandó együtthatós, így minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $A_n = A$, ahol A az imént felírt (4.17) mátrix. A rendszer Cauchy-operátorának megadásához az A mátrix megfelelő *hatványait kell kiszámolni, melyek a következő alakba írhatók át:*

$$A^n = \begin{bmatrix} e^{-n} & 0 \\ \frac{1}{e-e^{-2}}(e^{n-1} - \frac{1}{e^{n-1}}) & e^n \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{4.18}$$

Ez az összefüggés könnyedén belátható teljes indukcióval. A hatványok inverzeinek kiszámolása után a rendszer Cauchy-operátora tetszőleges $n > m$ egészek esetén a következőképpen néz ki:

$$\Lambda(n,m) = \begin{bmatrix} e^{-(n-m)} & 0 \\ \frac{e}{1-e^{-2}}\left(e^{n-m} - \frac{1}{e^{n-m}}\right) & e^{n-m} \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Egyszerű számolással adódik, hogy a

$$K := 1 + \frac{e}{1-e^{-2}} \quad \textit{és az} \quad \alpha := 1$$

konstansokkal, valamint a

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{e}{1-e^{-2}} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

projekcióval a megadott rendszernek exponenciális dichotómiája van a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon.

Tekintsük a

$$P_m := \Lambda(m,0)P\Lambda(0,m) \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

projekciósorozatot. A megfelelő mátrixműveletek elvégzése után adódik, hogy tetszőleges $m \in \mathbb{Z}$ esetén P_m a következő alakot ölti:

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{e}{1-e^{-2}} + \frac{e^{2m-1}-e^{2m+1}}{1-e^{-2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Megmutatható, hogy a (4.16) rendszernek ezzel a P_m projekciósorozattal is exponenciális dichotómiája van, a részleteket a következő tételben tárgyaljuk.

4.8. Tétel. *Tekintsük a (4.4) rendszert, mely az $A_n \in L(X)$ operátorokkal definiált, melyekről feltesszük, hogy egyenletesen korlátosak, invertálhatóak, továbbá inverzeik is egyenletesen korlátosak. Tegyük fel továbbá, hogy a (4.4) rendszernek exponenciális dichotómiája van a 3.12. definíció értelmében, azaz alkalmas K, α konstansokkal és (P_n)*

projekciósorozattal teljesül a 3.12. definíció. Ekkor a

$$\tilde{P}_n := \Lambda(n,0)P_n\Lambda(n,0)^{-1} \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4.21}$$

projekciósorozattal és alkalmas $\tilde{K}$, $\tilde{\alpha}$ konstansokkal is teljesül a 3.12. definíció.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a (4.4) rendszerre teljesül a 3.12. definíció valamely K, α konstansokkal és (P_n) projekciósorozattal. Először megmutatjuk, hogy a 3.12. definícióban szereplő (3.33) és (3.34) egyenlőtlenségek a (4.21) projekciósorozattal is teljesülnek, majd a definícióban szereplő (3.32) tulajdonság fennállását ellenőrizzük.
Először a (3.33) egyenlőtlenséget tekintjük, ehhez legyen n, $m \in \mathbb{Z}$, melyekre $n \geq m \geq 0$. Vizsgáljuk a $\|\Lambda(n,m)\tilde{P}_m x\|$ mennyiséget, ahol $x \in X$ tetszőleges, rögzített.

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(n,m)\tilde{P}_m x\| &= \|\Lambda(n,m)\Lambda(m,0)P_m\Lambda(m,0)^{-1}x\| = \|\Lambda(n,0)P_m\tilde{x}\| \leq \\
&\leq Ke^{-\alpha n}\|\tilde{x}\| \leq Ke^{-\alpha n}\|\Lambda(m,0)^{-1}x\| \leq \\
&\leq Ke^{-\alpha n}\|A_{m-1}^{-1}\| \cdot \dots \cdot \|A_0^{-1}\|\|x\| \leq Ke^{-\alpha n}K' e^{\alpha' m}\|x\| = \\
&= \tilde{K}e^{-\tilde{\alpha}(n-m)}\|x\|,
\end{aligned}$$

ahol K', α' olyan konstansok, melyekre tetszőleges $m \in \mathbb{Z}$ esetén $\|\Lambda(0,m)\| \leq K'e^{\alpha' m}$. Mivel feltettük, hogy az A_n operátorok inverzei egyenletesen korlátosak, léteznek ilyen K', α' konstansok.

A fenti egyenlőtlenségből tehát látszik, hogy ebben az esetben teljesül a (3.33) egyenlőtlenség.Hasonlóan megy a (3.33) egyenlőtlenség bizonyítása tetszőleges $n \geq m$ egészek esetén, valamint a (3.34) egyenlőtlenség bizonyítása is. Végül egy egyszerű átalakítással bizonyítjuk, hogy a (3.32) tulajdonság is igaz marad:

$$A_n\tilde{P}_n = \Lambda(n+1,0)P_n\Lambda(n,0)^{-1} = \Lambda(n+1,0)P_n\Lambda^{-1}(n+1,0)A_n = \tilde{P}_{n+1}A_n.$$

4.13. Megjegyzés. *A fenti tétel értelmében a 3.12. definícióban szereplő (P_n) projekció-sorozat nem egyértelműen meghatározott. Azonban az nem következik a tételből, hogy a 3.10. definícióban szereplő P projekció sem egyértelmű, hiszen arra $P = P_0$ áll fenn, és a (4.21) megadásból látható, hogy $\Lambda(0,0) = I$ miatt $\tilde{P}_0 = P_0$ is teljesül.*

Az [5] cikk 2.7. számú példájában a cikk írója bemutatja, hogy a 3.8. definícióban található (3.18) feltétel nem minden esetben teljesül akkor sem, ha a definícióban található többi feltétel igaznak bizonyul. Az ott vizsgált a rendszert felhasználva a most következő példában is ezt vizsgáljuk kicsit részletesebben, összefüggést keresve más, az exponenciális dichotómiát karakterizáló tétellel.

4.6. Példa. *Tekintsük a következő együtthatókkal megadott rendszert:*

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & b_n & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

ahol $0 < \alpha < 1 < \beta$, *valamint*

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \leq 0) \\ \beta & (n > 0). \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy a rendszernek exponenciális dichotómiája van a

$$P_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (n \leq 0),$$

$$P_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (n > 0)$$

projekciókkal a $\mathbb{Z}_0^+$ *és* $\mathbb{Z}_0^-$ *intervallumokon (külön-külön). Azonban* $\mathbb{Z}$*-n nem, hiszen* $n = 0$ *esetben nem teljesül a regularitási feltétel, azaz*

$$\ker P_1 \not\subseteq \operatorname{Im} A_0.$$

A [21] cikkben található az alábbi tétel, mely egy más indoklást ad arra, hogy a fenti rendszernek miért nincsen a megadott projekciókkal exponenciális dichotómiája a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon.

4.9. Tétel. *(vö: [21]) A* (4.4) *rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája $\mathbb{Z}$-n, ha exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}_0^+$ intervallumon a P, valamint $\mathbb{Z}_0^-$ intervallumon a Q projekcióval, ahol*

$$\mathrm{rang}(P) = \mathrm{rang}(Q),$$

továbbá a rendszernek csak a triviális megoldása korlátos.

Látható tehát, hogy mivel az imént megadott projekciók rangja nem egyezik meg minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, a példában szereplő rendszernek nincsen exponenciális dichotómiája a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon.

A fenti, 4.6. példában az, hogy a rendszerre a $J = \mathbb{Z}$ intervallum esetén nem áll fent az exponenciális dichotómia azon múlott, hogy $n = 0$-nál, tehát ahol az együtthatómátrix megváltozott, nem teljesültek bizonyos feltételek (pl.: regularitási feltétel). Ez a gondolat motiválja az alábbi tételt.

4.10. Tétel. *Legyenek*

$$A_n \in L(X) \quad (n \leq 0) \quad \textit{és} \quad B_n \in L(X) \quad (n \geq 0)$$

egyenletesen korlátos operátorok. Tekintsük az ezek által meghatározott homogén lineáris differenciaegyenlet-rendszereket:

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \leq 0), \tag{4.22}$$

$$y_{n+1} = B_n y_n \qquad (n \geq 0). \tag{4.23}$$

Tegyük fel, hogy a (4.22) *rendszernek $\mathbb{Z}_0^-$-on a K_A, α_A konstansokkal és a $(P_n^A)_{n \in \mathbb{Z}_0^+}$ projekciósorozattal, míg a* (4.23) *rendszernek $\mathbb{Z}_0^+$-on a K_B, α_B konstansokkal és a $(P_n^B)_{n\mathbb{Z}_0^-}$ projekciósorozattal exponenciális dichotómiája van. Legyen $C_n \in L(X)$ $(n \in \mathbb{Z})$ a következő operátor sorozat:*

$$C_n := \begin{cases} A_n & (n \leq 0), \\ B_n & (n > 0), \end{cases}$$

és tekintsük az ez által meghatározott

$$x_{n+1} = C_n x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4.24}$$

rendszert. A (4.24) rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon, ha teljesül az alábbi két feltétel:

$$A_0 : \ker P_0^A \to \ker P_1^B \textit{izomorfizmus}, \tag{4.25}$$

$$P_1^B A_0 = A_0 P_0^A. \tag{4.26}$$

Bizonyítás: 1. **lépés:**

Tegyük fel, hogy a (4.24) rendszernek exponenciális dichotómiája van a $\mathbb{Z}$ intervallumon alkalmas K, α konstansokkal és P_n $(n \in \mathbb{Z})$ projekciósorozattal, azaz például a 3.6. definíció teljesül. Ekkor a (4.25) és (4.26) feltételek a 3.6. definícióban szereplő feltételek miatt igazak, továbbá a 4.22, ill. a 4.23 rendszerekre a $K_A := K_B := K$, $\alpha_A := \alpha_B := \alpha$ konstansokkal és $P_n^A := P_n^B := P_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ projekciósorozatokkal teljesül a 3.6. definíció, így a (4.22) és (4.23) rendszereknek exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}_0^-$-on ill. $\mathbb{Z}_0^+$-on.

2. **lépés**

Tegyük fel, hogy külön-külön a (4.22) és a (4.23) rendszerre teljesül a 3.6. definíció. A feltételekből következően a (3.6) és a (3.7) tulajdonságok nyilvánvalóan teljesülnek.

Továbbá az is egyszerűen látható, hogy a 3.6. definícióban szereplő (3.8) és (3.9) egyenlőtlenségek fennállnak minden olyan n, $m \in \mathbb{Z}$ esetén, melyekre n, $m \leq 0$ vagy n, $m \geq 0$, így részletesen csak azt az esetet kell megvizsgálni, ha $n \leq 0 \leq m$ vagy fordítva, ha $m \leq 0 \leq n$.

Legyen először $n, m \in \mathbb{Z}$, melyekre $m \leq 0 < n$, és tekintsük a 3.6. definícióban szereplő (3.8) egyenlőtlenséget. Felhasználva a feltételeket a következő írható fel:

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(n,m)P_m^A\| &= \|\Lambda(n,0)\Lambda(0,m)P_m^A\| \leq \\
&\leq \|\Lambda(n,0)\|\|\Lambda(0,m)P_m^A\| \leq \\
&\leq \|\Lambda(n,0)\|K_A e^{-\alpha_A(0-m)} \leq \\
&\leq \|A\|\|B\|^{n-1}K_A e^{\alpha_A m} \leq \\
&\leq M^n K_A e^{\alpha_A m},
\end{aligned}$$

ebből alkalmas $\alpha > 0$ és $K > 0$ konstansokkal adódik, hogy

$$\|\Lambda(n,m)P_m^A\| \leq Ke^{-\alpha(n-m)},$$

azaz $m \leq 0 < n$ esetén a 3.6. definícióban szereplő (3.8) egyenlőtlenség teljesül. A másik egyenlőtlenség, illetve az $n \leq 0 < m$ eset hasonlóan ellenőrizhető.

A fent vizsgált 4.6. példában a 4.10. tételben szereplő (4.26) feltétel nem teljesül, hiszen a példában

$$P_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad P_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

valamint $A_0 = I$. Így a 4.10. tételből is következik, hogy a 4.6 példában tekintett rendszer nem exponenciális dichotóm a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon.

4.4. Az exponenciális dichotómia kapcsolata lineáris rendszerek stabilitásával

a 4.8. állításban lévő (4.36) és (4.37) egyenlőségek alapján az exponenciális dichotómia fogalma a lineáris rendszerek stabilitásával is kapcsolatba hozható. A következő állítás ezt az összefüggést ragadja meg:

4.11. Tétel. *Az* $A_n \in L(X)$ $(n \in \mathbb{Z}_0^+)$ *egyenletesen korlátos, invertálható operátorsorozat által meghatározott*

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+) \tag{4.27}$$

lineáris rendszer pontosan akkor

(a) aszimptotikusan stabilis, ha a (4.27) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a* $P = I$ *projekcióval a* $J = \mathbb{Z}_0^+$ *intervallumon,*

(b) stabilis, ha a (4.27) *rendszernek közönséges dichotómiája van a* $P = I$ *projekcióval a* $J = \mathbb{Z}_0^+$ *intervallumon.*

Bizonyítás:

(a) **1. lépés.** Tegyük fel, hogy a (4.27) rendszer aszimptotikusan stabilis. Ekkor a 2.2. tétel alapján léteznek $K_1,\ \alpha > 0$ konstansok, melyekkel

$$\|\Lambda(n,0)\| \leq \tilde{K}_1 e^{-\alpha n} \qquad (n \geq 0).$$

Továbbá mivel az A_n operátorokról feltettük, hogy invertálhatóak és egyenletesen korlátosak, a Banach-féle homeomorfia tételből adódóan inverzeik is egyenletesen korlátosak, azaz létezik $\tilde{K}_2 > 0$, hogy

$$\|\Lambda(0,m)\| = \|\Lambda^{-1}(m,0)\| \leq K_2 \qquad (m \geq 0).$$

Így a $K := K_1 \cdot K_2$ választással igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\|\Lambda(n,0)\Lambda(0,m)\| \leq \|\Lambda(n,0)\| \cdot \|\Lambda(0,m)\| \leq K e^{-\alpha(n-0)} \leq K e^{-\alpha(n-m)} \qquad (n,m \geq 0).$$

A fentiekből adódóan a $P := I$ projekcióval, $K_1 := K_2 := K$, $\alpha_1 := \alpha_2 := \alpha$ konstansokkal teljesülnek a 3.10. definícióban szereplő egyenlőtlenségek:

$$\|\Lambda(n,0)P\Lambda(0,m)\| \leq K e^{-\alpha(n-m)} \qquad (n \geq m \geq 0),$$

$$\|\Lambda(n,0)(I-P)\Lambda(0,m)\| = \|0\| \leq K e^{-\alpha(n-m)} \qquad (m \geq n \geq 0),$$

így a (4.27) rendszernek exponenciális dichotómiája van.

2. lépés: Tegyük fel, hogy a (4.27) rendszer exponenciálisan dichotóm a $P = I$ projekcióval és K_1, K_2, α_1, $\alpha_2 > 0$ konstansokkal a $J = \mathbb{Z}_0^+$ intervallumon. Ekkor a (3.8) egyenlőtlenséget felírva kapjuk, hogy

$$\|\Lambda(n,m)\| = \|\Lambda(n,0)P\Lambda(0,m)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(n-m)} \qquad (n \geq m \geq 0),$$

azaz a rendszer aszimptotikusan stabilis.

(b) A stabilitással való kapcsolat bizonyítása az előzőhöz hasonlóan megy, az egyetlen lényeges különbség, hogy ebben az esetben a 2.2. tétel helyett a 2.1. tételt kell alkalmazni.

Ezzel beláttuk a tétel mindkét pontját.

Az alfejezet zárásaként egy példán keresztül bemutatom a fenti tételben megfogalmazottakat.

4.7. Példa. *Tekintsük az alábbi differenciaegyenlet-rendszert:*

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+), \tag{4.28}$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ paraméter. Látható, hogy a vizsgált rendszer autonóm, így a 4.5. állítás segítségével meg tudjuk állapítani, hogy létezik-e exponenciális dichotómiája és ha igen, akkor milyen P projekcióval. A rendszert meghatározó együttható mátrixot jelöljük A-val, ennek sajátértékei ill. sajátvektorai:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{3}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{-6a}. \end{bmatrix}$$

Így a 4.5. állítás alapján a rendszernek exponenciális dichotómiája van. Számítsuk ki a P projekciót, ehhez a

$$\oint_{\mathbb{T}^1} (A - zI)^{-1}\,\mathrm{d}z$$

integrált kell meghatározni, ahol

$$(A - zI)^{-1} = \frac{1}{(1/2 - z)(1/3 - z)} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - z & -a \\ 0 & \frac{1}{2} - z \end{bmatrix} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Ennek elemei a jobb felsőt kivéve egyszerűen kiszámíthatóak a 4.3 példához hasonlóan:

$$\oint_{\mathbb{T}^1} \frac{1}{\frac{1}{2} - z}\,\mathrm{d}z = \oint_{|1/2 - z| = 1/2} \frac{1}{\frac{1}{2} - z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} -\imath\,\mathrm{d}z = -4\pi\imath,$$

$$\oint_{\mathbb{T}^1} 0\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$\oint_{\mathbb{T}^1} \frac{1}{\frac{1}{3} - z}\,\mathrm{d}z = \oint_{|1/3 - z| = 1/3} \frac{1}{\frac{1}{3} - z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} -\imath\,\mathrm{d}z = -4\pi\imath,$$

A kimaradt elem kiszámításához pedig legyenek ε_1, $\varepsilon_2 >$ *számok úgy, hogy a*

$$|\frac{1}{2} - z| = \varepsilon_1 \quad \textit{és} \quad |\frac{1}{3} - z| = \varepsilon_2$$

körvonalak ne messék egymást, majd bontsuk fel a kiszámítandó mennyiséget az alábbi módon:

$$\oint_{\mathbb{T}^1} \frac{1}{(\frac{1}{3} - z)(\frac{1}{2} - z)}\,\mathrm{d}z = \oint_{|\frac{1}{2} - z| = \varepsilon_1} \frac{\frac{1}{\frac{1}{3} - z}}{\frac{1}{2} - z}\,\mathrm{d}z + \oint_{|\frac{1}{3} - z| = \varepsilon_2} \frac{\frac{1}{\frac{1}{2} - z}}{\frac{1}{3} - z}\,\mathrm{d}z =$$

$$= 2\pi\imath\left(\frac{1}{1/3 - z}\right)\Bigg|_{z = \frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{1/2 - z}\right)\Bigg|_{z = \frac{1}{3}} = 0.$$

Így a (4.28) *rendszernek a* $P = I$ *identikus projekcióval van exponenciális dichotómiája. Egyszerű számolással adódik, hogy a* (4.28) *rendszer Cauchy-operátora valamely* n, $m \in \mathbb{Z}$ *esetén:*

$$\Lambda(n, m) = \begin{bmatrix} 2^{m-n} & 6a(2^{m-n} - 3^{m-n}) \\ 0 & 3^{m-n} \end{bmatrix},$$

így $P = I$ *miatt, valamint elemi becslések felhasználásával kapjuk, hogy*

$$\|\Lambda(n, m)\| = \|\Lambda(n, 0)P\Lambda(0, m)\| \leq Ke^{-\ln(2)(n-m)} \qquad (n \leq m)$$

teljesül, azaz az exponenciális dichotómia 3.12. definíciójában szereplő egyenlőtlenségek igazak valamely $K > 0$ és $\alpha := \ln(2)$ konstansokkal, valamint hogy a (4.28) *rendszer aszimptotikusan stabilis a 2.4. megjegyzés alapján.*

4.5. Exponenciálisan dichotóm rendszerek megoldásainak monotonitása

Az utolsó alfejezetben exponenciálisan dichotóm rendszerek megoldásainak monotonitását, illetve aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk.

Legyen $X := \mathbb{R}^d$, minden $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén $A_n \in L(\mathbb{R}^d)$, melyekre az $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}$ operátorsorozat egyenletesen korlátos. Tegyük fel továbbá, hogy az A_n operátorok invertálhatóak, és inverzeik is egyenletesen korlátos operátorsorozatot alkotnak. Tekintsük az ezek által meghatározott

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+) \tag{4.29}$$

differenciaegyenlet-rendszert.

4.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* (4.29) *rendszernek exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}_0^+$-on. Ekkor az*

$$\begin{aligned} S_-(n) &:= \{\Lambda(n,0)Px_0 \in \mathbb{R}^{d\times d} \mid x_0 \in \mathbb{R}^d\} = \operatorname{Im}\Lambda(n,0)P, \\ S_+(n) &:= \{\Lambda(n,0)(I-P)x_0 \in \mathbb{R}^{d\times d} \mid x_0 \in \mathbb{R}^d\} = \operatorname{Im}\Lambda(n,0)(I-P) \end{aligned}$$

halmazokra tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$S_-(n) \oplus S_+(n) = \mathbb{R}^d$$

teljesül, továbbá ha μ a (4.29) *rendszer megoldása, akkor $\mu_0 \in S_-(0)$, ill. $\mu_0 \in S_+(0)$ esetén $\mu_n \in S_-(n)$, ill. $\mu_n \in S_+(n)$ áll fenn tetszőleges $n > 0$ esetén (azaz az S_- és S_+ halmazok invariánsak), valamint igazak az*

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mu_n\| = 0, \qquad \textit{ill.} \qquad \lim_{n\to+\infty} \|\mu_n\| = +\infty \tag{4.30}$$

aszimptotikus tulajdonságok.

Bizonyítás: 1. **lépés:** Belátjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén $S_-(n) \oplus S_+(n) = \mathbb{R}^d$. Ehhez legyen $z \in S_-(n) \cap S_+(n)$, így alkalmas w_1, $w_2 \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$z = \Lambda(n,0)Pw_1, \quad \text{és} \quad z = \Lambda(n,0)(I-P)w_2.$$

$\Lambda(n,0)$ regularitása miatt

$$Pw_1 = (I-P)w_1.$$

Kihasználva, hogy P projekció, azaz $P^2 = P$ teljesül, adódik a következő:

$$Pw_1 = P^2w_1 = Pw_2 - P^2w_2 = Pw_2 - Pw_2 = 0.$$

Így

$$z = \Lambda(n,0)Pw_1 = 0,$$

azaz

$$S_-(n) \cap S_+(n) = \emptyset.$$

Egyszerűen látható az is, hogy tetszőleges $\mathbb{R}^d$-beli pont felírható egy $S_-(n)$ és egy $S_+(n)$-beli összegeként, ugyanis legyen $\mu_n \in \mathbb{R}^d$ tetszőleges, ekkor $\Lambda(n,0)$ regularitása miatt a $\mu_0 := \Lambda(n,0)^{-1}\mu_n$ kezdeti feltétellel $\mu_n = \Lambda(n,0)\mu_0$, és így

$$\mu_n = \Lambda(n,0)\mu_0 = \Lambda(n,0)P\mu_0 + \Lambda(n,0)(I-P)\mu_0.$$

A két összefüggésből már adódik, hogy $S_-(n) \oplus S_+(n) = \mathbb{R}^d$.

2. **lépés:**

Tegyük fel, hogy $\mu := (\mu_n)$ a (4.29) rendszer megoldása, melyre $\mu_0 \in S_-(0)$, azaz alkalmas $w \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\mu_0 = \Lambda(0,0)Pw.$$

Így mivel μ megoldás, adódik, hogy

$$\mu_n = \Lambda(n,0)\mu_0 = \Lambda(n,0)\Lambda(0,0)Pw = \Lambda(n,0)Pw \qquad (n > 0),$$

azaz $\mu_n \in S_-(n)$ is teljesül. Hasonlóan látható be, hogy ha $\mu_0 \in S_+(0)$ akkor tetszőleges $n > 0$ esetén $\mu_n \in S_+(n)$ is fennáll.

3. **lépés:**

A (4.30) aszimptotikus tulajdonságok. Láttuk, hogy ha a (4.29) rendszerre teljesül a 3.10. definíció a P projekcióval, akkor a 3.12. definíció is fennáll a

$$P_n := \Lambda(n,0)P\Lambda(n,0)^{-1} \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+)$$

projekció-sorozattal. Legyen $x \in \mathbb{R}^d$ tetszőleges, tekintsük a $\mu_0 := P_0 x$ kezdőpontból induló megoldást, melyet $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}$ jelöl. Legyenek n, $m \in \mathbb{Z}_0^+$ tetszőleges rögzített egészek, melyekre $n \geq m$ teljesül. Vizsgáljuk meg a $\frac{\|\mu_n\|}{\|\mu_m\|}$ hányadost, hogy megtudjuk ezek egymáshoz való viszonyát. Ehhez előbb a 3.12. definícióban szereplő (3.6) tulajdonságot felhasználva alakítsuk át μ_n-t a következő módon:

$$\begin{aligned}
\mu_n = \Lambda(n,0)P_0x &= A_{n-1}A_{n-2}\cdot\ldots\cdot A_1A_0P_0x = \\
&= A_{n-1}A_{n-2}\cdot\ldots\cdot A_1P_1A_0x = \ldots \\
&= A_{n-1}A_{n-2}\cdot\ldots\cdot A_1P_mA_{m-1}\cdot\ldots\cdot A_1A_0x = \\
&= \Lambda(n,m)P_m\Lambda(m,0)x.
\end{aligned}$$

Az exponenciális dichotómia 3.6. definíciójában szereplő (3.8) egyenlőtlenség, illetve a fenti átalakítás felhasználásával az alábbi becslés írható fel tetszőleges $n \geq m \geq 0$ egészekre:

$$\begin{aligned}
\frac{\|\mu_n\|}{\|\mu_m\|} &= \frac{\|\Lambda(n,m)P_m\mu_m\|}{\|\mu_m\|} \leq \\
&\leq \frac{Ke^{-\alpha(n-m)}\|P_m\Lambda(m,0)x\|}{\|\mu_m\|} = \\
&= \frac{Ke^{-\alpha(n-m)}\|\Lambda(m,0)P_0x\|}{\|\mu_m\|} = \\
&= \frac{Ke^{-\alpha(n-m)}\|\mu_m\|}{\|\mu_m\|} = \\
&= Ke^{-\alpha(n-m)}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Ezzel beláttuk, hogy rögzített $m \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén

$$\|\mu_n\| \leq Ke^{-\alpha(n-m)} \cdot \|\mu_m\| \qquad (n \geq m),$$

így

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mu_n\| \leq \lim_{n\to+\infty} Ke^{-\alpha(n-m)} \cdot \|\mu_m\| = 0,$$

amiből $\|\mu_n\| \geq 0$ miatt következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mu_n\| = 0.$$

A második határérték hasonlóan adódik, így kapjuk a tétel bizonyítását.

A fenti bizonyításban szereplő, az aszimptotikus tulajdonságot bizonyító (4.31) egyenlőtlenségeket tekintve arra gondolhatnánk, hogy az adott megoldás nemcsak tart végtelenhez vagy 0-hoz, hanem ráadásul monoton növekedve ill. csökkenve tart az iménti határértékekhez. Azonban ez az állítás nem igaz, melyről az alábbi gondolatmenettel is meggyőződhetünk. Ha minden $n \geq m \geq 0$ esetén teljesülne, hogy $Ke^{-\alpha(n-m)} \leq 1$, akkor teljesülne a μ megoldás monotonitása, hiszen az azt jelentené, hogy tetszőleges ilyen egészek esetén $\|\mu_n\| \leq \|\mu_m\|$, azaz a vizsgált megoldás monoton csökkenő lenne. Ehhez nevezetesen $n > 0$, $m = 0$ esetben teljesülnie kell a $Ke^{-\alpha(n-m)} \leq 1$ feltételnek, azaz hogy $K \leq e^{\alpha}$, $K \leq e^{2\alpha}$, ... Elgondolkodtató eredményt kapunk, ugyanis miért ne lehetne olyan megoldás, melyre $K > e^{\alpha}$, azonban minden $k \geq 2$ esetén $K \leq e^{k\alpha}$ teljesül, azaz egymást követő lépéseknél előfordulhat hogy a megoldás normája nem növekedett, ezzel a monoton növekedés megbukik. Azonban nagyobb hézagok esetében fennáll az egyenlőtlenség és ezzel az aszimptotikus tulajdonságok is. A most következő példában a 4.12. tétel eredményeit, valamint az imént megfogalmazott, a megoldások monotonitásával kapcsolatos gondolatmenetet szemléltetjük.

4.8. Példa. *Tekintsük az alábbi* 1*-dimenziós rendszert:*

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+), \tag{4.32}$$

ahol az együtthatók az

$$A_0 := 1, \qquad A_n := \frac{n+1}{a_n + 1.1n} \qquad (n > 0), \tag{4.33}$$

módon definiáltak a

$$a_n := n \ mod \ 4 \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+) \tag{4.34}$$

leképezés felhasználásával. Első lépésként azt igazoljuk, hogy a megadott rendszernek exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}_0^+$-on. Ez most oly módon fog teljesülni, hogy a rendszer tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}$-ből induló $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}$ megoldására, melyre $\mu_0 = \xi$ teljesül, hogy $\lim_{n\to+\infty} \|\mu_n\| = 0$ azaz a rendszer aszimptotikusan stabilis. Ehhez elég megmutatni, hogy létezik egy $N \in \mathbb{Z}_0^+$ küszöbindex, hogy tetszőleges $n \geq N$ esetén $\|A_n\| < 1$. Megjegyezendő, hogy mivel a rendszer egydimenziós, tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_0^+$ index esetén $\|A_n\| = |A_n|$ és $\|x_n\| = |x_n|$.

Vegyük észre, hogy $a_n = 0,\ 1,\ 2$ vagy 3, így tetszőleges $n > 0$ esetén $a_n \geq 0$, valamint $A_0 = 1$. Ezeket felhasználva adódik, hogy

$$0 < A_n \leq \frac{n+1}{1.1n} < 1 \Longleftrightarrow n > 10,$$

azaz $n > 10$ esetén az A_n operátor normája legfeljebb 1, így onnantól biztosan csökkennek a megoldások. Vizsgáljuk tovább az $n \leq 10$ eseteket. Ha $n \neq 4,\ 8$, akkor $a_n \geq 1$, így

$$A_n \leq \frac{n+1}{1+1.1n} < 1 \Longleftrightarrow n < 1.1n,$$

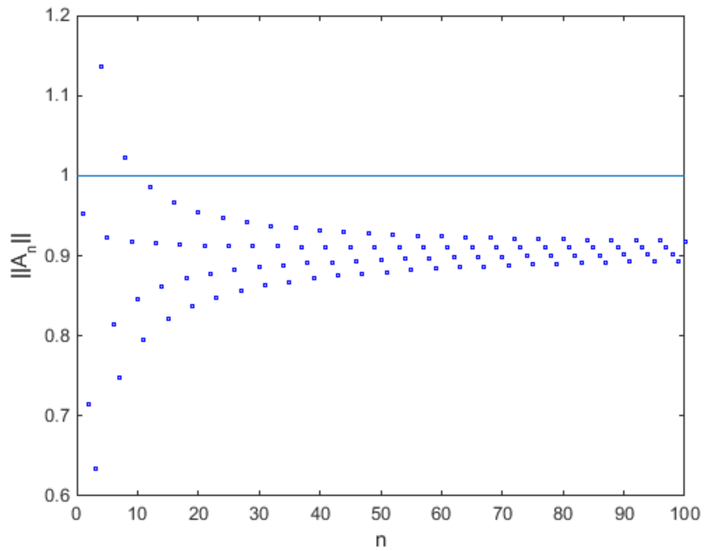
ami tetszőleges $n \leq 10$, $n \neq 4,\ 8$ esetén igaz, tehát ilyen n-ekre is teljesül hogy $\|A_n\| < 1$. A megmaradt eseteket kiszámolva adódik, hogy $\|A_4\| = \frac{25}{24}$ és $\|A_8\| = \frac{45}{44}$. Összefoglalva tehát elmondható, hogy ha $n = 4,\ 8$, akkor az operátornorma nagyobb 1-nél, azonban minden más esetben kisebb, ahogyan a 1. ábrán is láthatjuk.

Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy $n \geq 12$ esetén $\|A_n\| \leq 0.99$, így tetszőleges $n \geq m \geq 12$ egészek esetén

$$\|\Lambda(n,m)\| \leq 0.99^{n-m} \leq e^{-0.01004(n-m)}.$$

Számításokkal alátámasztható, de az operátorok normáját bemutató 1. ábrán is látszik, hogy minden $n \geq 0$ esetben $\|A_n\| \leq 1.2$ teljesül.

Mindezeket felhasználva elmondható, hogy tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}$ kezdőpontból induló meg-



1. ábra. A (4.32) rendszer A_n $(n \geq 0)$ operátorok normái. Látható, hogy ha $n \neq 4$, 8, akkor $\|A_n\| < 1$.

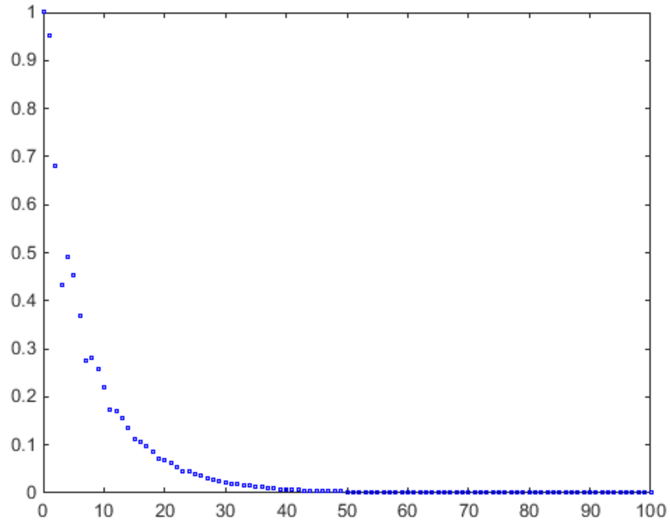
oldásra teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \|\Lambda(n,m)x\| &\leq \|\Lambda(n,m)\|\|x\| = \\ &= \|\Lambda(n,m)\|\|x\| \leq \\ &\leq Ke^{-\alpha(n-m)}\|x\| = \\ &= Ke^{-\alpha(n-m)}\|x\|, \end{aligned}$$

ahol $K := \frac{25}{24} \cdot \frac{45}{44} = \frac{375}{352} < 1.07$, $\alpha := 0.01004$. *Ezzel megmutattuk, hogy a rendszernek exponenciális dichotómiája van a* $J = \mathbb{Z}_0^+$ *intervallumon a* $P = I$ *projekcióval és az imént megadott konstansokkal.*

Határozzuk meg a 4.12. tételben szereplő $S_-(n)$ *és* $S_+(n)$ *halmazokat! Ehhez legyen* $n \in \mathbb{Z}_0^+$ *tetszőleges, rögzített index. Mivel* $A_n \neq 0$, $\mathrm{Im}(A_n) = \mathbb{R}$, *így* $\mathrm{Im}(\Lambda(n,0)) = \mathbb{R}$ *amiből*

$$S_-(n) = \mathrm{Im}(\Lambda(n,0)P) = \mathrm{Im}(\Lambda(n,0)) = \mathbb{R}$$



2. ábra. A (4.32) rendszer $\xi = 1$ kezdőpontból induló megoldás normái $0 \leq n \leq 100$ indexekre. Látható, hogy a megoldás 0-hoz tart, azonban nem monoton nemnövekedően.

adódik. Mivel $P = I$, az $S_+(n)$ halmazra az alábbi igaz:

$$S_+(n) = \mathrm{Im}(\Lambda(n,0)(I-P)) = \emptyset.$$

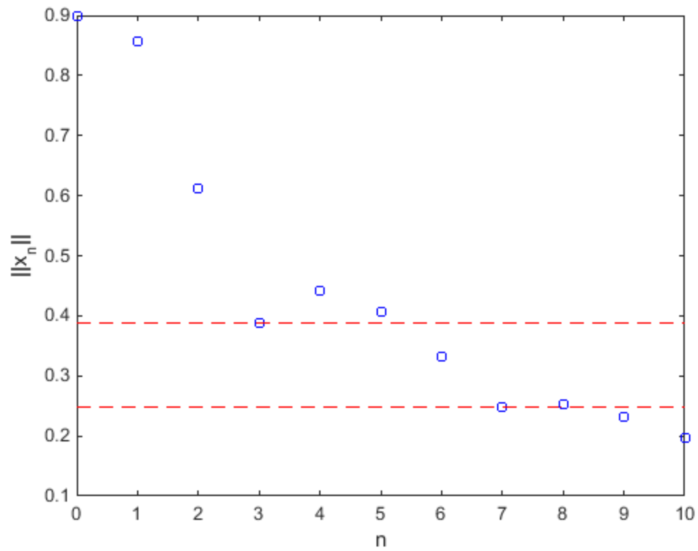
Könnyedén látható, hogy ezekre az $S_-(n)$ és $S_+(n)$ halmazokra teljesülnek a 4.12. tételben szereplő állítások.

Vizsgáljuk a megadott rendszer $\xi := 1$ pontból indított megoldását. Az előzőek alapján ez a megoldás 0-hoz tart, vö. 2 ábra. A 3 ábrán az $n \leq 10$ indexek esetén ábrázoltuk az A_n operátorok a normáját, a 4 ábrán pedig az exponenciális dichotómia bizonyításánál használt exponenciális függvény grafikonja található.

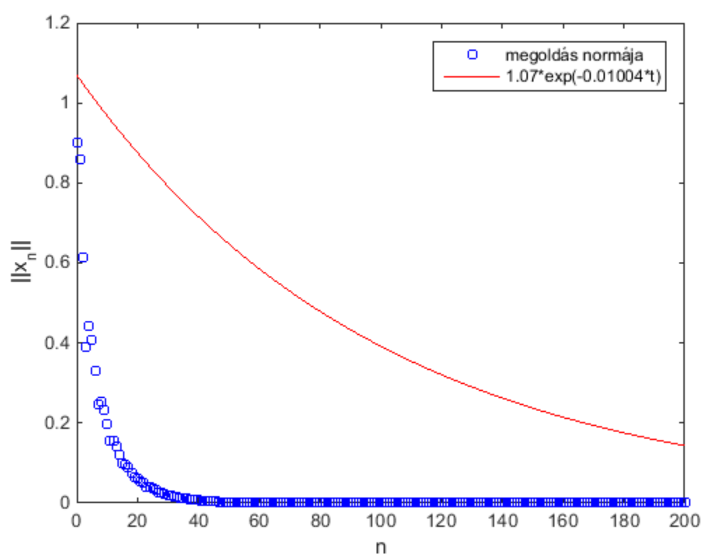
Az alfejezet eddigi részében az $X = \mathbb{R}^d$ Banach-teret tekintettük, azonban a szakirodalomban tetszőleges X Banach-tér esetében bizonyított egy eredmény az exponenciálisan dichotóm lineáris rendszerek megoldásainak monotonitásáról. Ez tulajdonképpen a fenti 4.12. tétel általánosítása, azonban más megfogalmazásban.

4.8. Állítás. *(vö: [4]) Legyen*

$$A_n \in L(X) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$



3. ábra. A (4.32) rendszer $\xi = 1$ kezdőpontból induló megoldás normái $0 \leq n \leq 10$ indexekre. Látható, hogy $n = 4, 8$ indexek estén növekszik a megoldás normája.



4. ábra. A (4.32) rendszer $\xi = 1$ kezdőpontból induló megoldás normái $0 \leq n \leq 200$ indexekre, továbbá piros vonallal az az exponenciális függvény, mellyel a megoldások normáit becsültük az exponenciális dichotómia fennállása bizonyításánál.

egyenletesen korlátos operátorsorozat, és tekintsük az

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4.35}$$

differenciaegyenlet-rendszert. Tegyük fel, hogy a (4.35) rendszernek exponenciális dichotómiája van a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon a P projekcióval és K, $\alpha > 0$ konstansokkal, továbbá jelölje Λ a rendszer Cauchy-operátorát. Ekkor tetszőleges $x \in X$ esetén

$$\lim_{n\to+\infty} \|\Lambda(n,0)Px\| = 0, \tag{4.36}$$

$$\lim_{n\to-\infty} \|\Lambda(n,0)(I-P)x\| = 0 \tag{4.37}$$

teljesül.

4.14. Megjegyzés. *A [4] cikkben a szerzők a fenti aszimptotikus tulajdonságokat a spektrális dichotómia fogalmának segítségével bizonyították.*

Az alfejezet zárásaként megvizsgáljuk, hogy a 4.8. állítás hogyan jelenik meg a 3.4 alfejezet 3.3. példájában szereplő rendszerben.

4.9. Példa. *Tekintsük a $V = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, továbbá az $(L^2(0,T;V), \|\cdot\|_{L^2(0,T;V)})$ tereket valamely $T \in \mathbb{R}_+$ esetén, ahol*

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= x_1^2 + x_2^2 \qquad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2) \\ \|f\|_{L^2(0,T;V)}^2 &= \int_0^T \|f(x)\|_2^2 \,\mathrm{d}x \qquad (f \in L^2(0,T;V)). \end{aligned}$$

Tekintsük a következő autonóm differenciaegyenlet-rendszert:

$$f_{n+1} := A \cdot f_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+), \tag{4.38}$$

ahol $A : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V)$ operátor az alábbi

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ahol tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén $f_n \in L^2(0,T;V)$. Megmutattuk, hogy a rendszer Cauchy-operátora:

$$\Lambda(n,0)F = (2^{-n}F_1,\ 2^n F_2) \qquad (F \in L^2(0,T;V)),$$

továbbá hogy a megadott lineáris rendszernek exponenciális dichotómiája van a $J = \mathbb{Z}_0^+$ intervallumon a

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

projektorral valamint a $K := 1$, $\alpha := \ln(2)$ konstansokkal. Megmutatjuk, hogy a 4.8. állításban szereplő (4.36) és (4.37) egyenlőségek is teljesülnek. Először vizsgáljuk meg a (4.36) egyenlőségben szereplő normát valamely $(F_1,\ F_2) =: F \in L^2(0,T;V)$ esetén:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(n,0)PF\|^2_{L^2(0,T;V)} &= \|\Lambda(n,0)(F_1,0)\|^2_{L^2(0,T;V)} = \\ &= \|(2^{-n}F_1,\ 0)\|^2_{L^2(0,T;V)} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|(2^{-n}F_1(x),\ 0)\|_2^2 = \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^{-2n}F_1^2(x) \leq 2^{-2n}\|F\|_{L^2(0,T;V)}, \end{aligned}$$

így

$$\lim_{n\to+\infty} \|\Lambda(n,0)Px\| = \lim_{n\to+\infty} 2^{-2n}\|F\|_{L^2(0,T;V)} = 0.$$

Hasonlóan igazolható a (4.37) egyenlőség is.

Az alfejezetben vizsgált, a 4.12. tételben bevezetett S_- és S_+ halmazok az $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertálható mátrixszal definiált

$$x_{n+1} = Ax_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4.39}$$

autonóm lineáris, exponenciálisan dichotóm rendszer stabilitásával, illetve az ezt meghatározó $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ hiperbolikus mátrix stabilis és labilis alterével is kapcsolatba állítható, ennek részleteit mutatjuk be a következő állításban.

4.9. Állítás. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertálható hiperbolikus mátrix, valamint egy az A valós normálalakját meghatározó bázis $H := \{u_1,\ \ldots,\ u_d\} \subset \mathbb{R}^d\}$. A 4.12. tételben szereplő $S_-(0)$ és $S_+(0)$ halmazokra:*

$$S_-(0) = E_s(A), \quad \textit{ill.} \quad S_+(0) = E_u(A),$$

ahol $E_s(A)$, ill. $E_u(A)$ jelöli az A mátrix

$$\begin{aligned} E_s(A) &= \operatorname{span}\{u_k \in H \;:\; |\lambda| < 1\}, \\ E_u(A) &= \operatorname{span}\{u_k \in H \;:\; |\lambda| > 1\} \end{aligned}$$

stabilis, ill. labilis alterét.

Bizonyítás: Az $S_-(0) = E_s(A)$ egyenlőséget látjuk be, az $S_+(0) = E_u(A)$ hasonlóan igazolható. Mivel H bázis, az egyenlőséget elég igazolni tetszőleges $u_k \in H$ vektor esetén. Először bebizonyítjuk, hogy $S_-(0) = \operatorname{Im}(P) \subset E_s(A)$ teljesül. Legyen $u_k \in H$ tetszőleges, melyre $u_k \in \operatorname{Im}(P)$ teljesül. Ekkor a 4.12. tételben szereplő aszimptotikus tulajdonságok miatt

$$\lim_{k\to\infty} \|\Phi(n)u_k\| = \lim_{k\to\infty} \|A^n u_k\| = 0 \tag{4.40}$$

teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy a kívánt $\operatorname{Im}(P) \subset E_s(A)$ tartalmazás nem teljesül az u_k vektorra, azaz $u_k \notin E_s(A)$ áll fenn. Ekkor $E_s(A) \oplus E_u(A) = \mathbb{R}^d$ miatt $u_k \in E_u(A)$ igaz, és így

$$\lim_{k\to\infty} \|A^n u_k\| = \infty$$

teljesül, ami ellentmond a (4.40)-nak. Emiatt $u_k \in E_s(A)$ igaz.

A fordított irány hasonlóan igazolható.

A fejezet zárásaként a 4.9. állításban leírtakat szemléltetjük a 4.4. példában vizsgált rendszeren.

4.10. Példa. *Tekintsük a 4.4. példában megadott*

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{Z},\ x_n, y_n \in \mathbb{R}) \tag{4.41}$$

autonóm rendszert. Megmutattuk, hogy a (4.41) *rendszernek exponenciális dichotómiája a $\mathbb{Z}_0^+$ intervallumon a*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

projekcióval. A 4.9. állítás bemutatásához vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} S_-(0) &= \operatorname{Im}(P) = \operatorname{span}\{(x,0) \;:\; x \in \mathbb{R}\}, \\ S_+(0) &= \ker(P) = \operatorname{span}\{(\tfrac{6}{7}x, x) \;:\; x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

teljesül. Továbbá mivel a rendszer együtthatómátrixának sajátértékeire és sajátvektoraira

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 4, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7/6 \end{bmatrix}$$

teljesül, így

$$E_s(A) = \operatorname{span}\{(x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}, \quad \textit{és} \quad E_u(A) = \operatorname{span}\{(x, \frac{7}{6}x) \ : \ x \in \mathbb{R}\},$$

amiből látható, hogy fennállnak a 4.9. állításban megfogalmazott eredmények.

4.15. Megjegyzés. *A 4.9. állítást az előző alfejezet 4.11. tételével is érdemes összehasonlítani, ugyanis ezek összekapcsolásával elmondható, hogy a (4.39) lineáris rendszer pontosan akkor aszimptotikusan stabilis a 4.11. tételből adódóan, ha exponenciális dichotómiája van a $P = I$ projekcióval, ez utóbbiból pedig a 4.9. állítás alapján következik, hogy a rendszert meghatározó A együttható-mátrix stabilis alterére $E_s(A) = \mathbb{R}^d$ teljesül.*

5. Az exponenciális dichotómia stabilitása

Az exponenciális dichotómia fogalmát tárgyaló szakirodalomban az egyik széles körben vizsgált általános kérdés az exponenciális dichotómia stabilitása, mely alatt az alábbiakat értjük. Legyen $J \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_0^+, \mathbb{Z}_0^-\}$ diszkrét intervallum, és tegyük fel, hogy tetszőleges $n \in J$ esetén adottak az A_n, $B_n \in L(X)$ invertálható operátorok, melyekből alkotott $(A_n)_{n\in J}$, $(A_n^{-1})_{n\in J}$, $(B_n)_{n\in J}$ és $(B_n^{-1})_{n\in J}$ operátorsorozatok egyenletesen korlátosak. A fejezetben az

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (n \in J) \tag{5.1}$$

homogén lineáris rendszert, valamint az (5.1) perturbációját, az

$$x_{n+1} = (A_n + B_n)x_n, \qquad (n \in J) \tag{5.2}$$

rendszert vizsgáljuk. Definiáljuk a $\mathfrak{B} : l_p(J, X) \to l_p(J, X)$ operátort valamely $(u_n)_{n\in J} \in l_p(J, X)$ az alábbi módon:

$$(\mathfrak{B}u)_n := B_n u_n \qquad (n \in J). \tag{5.3}$$

Ekkor a (B_n) sorozat egyenletes korlátossága miatt $\exists L > 0$ konstans, hogy tetszőleges $n \in J$ esetén

$$\|B_n\| \le L$$

teljesül, és így

$$\|\mathfrak{B}u\|_p^p = \sum_{n\in J} \|(\mathfrak{B}u)_n\|^p = \sum_{n\in J} \|B_n u_n\|^p \le L\|u\|_p^p < \infty,$$

azaz $((\mathfrak{B}u)_n)_{n\in J} \in l_p(J, X)$ teljesül, így az (5.3)-ban definiált $\mathfrak{B}$ operátor valóban

$$\mathfrak{B} : l_p(J, X) \to l_p(J, X)$$

típusú. A $\|B_n\|$ normák közös korlátját jelölje $\delta \in \mathbb{R}$, azaz

$$\sup_{n\in J} \|B_n\| := \delta < \infty. \tag{5.4}$$

Ekkor tetszőleges $u \in l_p(J, X)$ elemre

$$\|(\mathfrak{B}u)_n\| = \|B_n u_n\| \le \delta\|u_n\| \qquad (n \in J),$$

így $\mathfrak{B} : l_p(J,X) \to l_p(J,X)$ korlátos operátor, továbbá

$$\|\mathfrak{B}\|_p \leq \delta. \tag{5.5}$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy az (5.1) rendszernek exponenciális dichotómiája van, azaz teljesül az 3.10. definíció egy adott J intervallumon a $P : X \to X$ projekcióval, K_1, K_2, α_1, $\alpha_2 > 0$ konstansokkal. Az exponenciális dichotómia stabilitása alatt azt értjük, hogy ezen feltétel mellett, az (5.4)-ban definiált δ mennyiségre milyen feltételnek kell teljesülnie, hogy az (5.2) rendszernek is exponenciális dichotómiája legyen a J intervallumon. A szakirodalomban fellelhető perturbációs tételek célja, hogy különböző korlátokat adjanak δ-ra. A továbbiakban ezek közül fogok néhány, már bizonyított tételt ismertetni, majd egy általános esetben konkrét korlátot megadni δ-ra.

5.13. Tétel. *(vö.: [21]) Tegyük fel, hogy $J \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_0^+, \mathbb{Z}_0^-\}$, $X := \mathbb{R}^d$ valamely $d > 0$ esetén, továbbá, hogy minden $n \in J$ esetén $A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertálható, és létezik $C > 0$, hogy minden $n \in J$ esetén $\|A_n^{-1}\| < C$. Tegyük fel, hogy az* (5.1) *rendszernek exponenciális dichotómiája van J-n. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}$, melyre $0 < \varepsilon < \alpha$. Tekintsük a $(B_n)_{n\in J}$ operátorsorozatot, melyre minden $n \in J$ esetén igazak az alábbiak:*

- $\|B_n\| \leq C^{-1}$,
- $2K\dfrac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\|B_n\| \leq 1$,
- $2Ke^{\alpha}\dfrac{e^{-\varepsilon}+1}{e^{\varepsilon}-1}\|B_n\| \leq 1$.

Ekkor minden $n \in J$ esetén $A_n + B_n$ invertálható, és a perturbált rendszernek is exponenciális dichotómiája van a J intervallumon.

5.14. Tétel. *(vö.: [2]) Tegyük fel, hogy $J = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}^d$ valamely $d > 0$ esetén, továbbá, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertálható, és létezik $C > 0$, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\|A_n^{-1}\| < C$. Tegyük fel, hogy az* (5.1) *rendszernek exponenciális dichotómiája van a $\mathbb{Z}$ intervallumon. Tekintsünk egy $(B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ operátorsorozatot. Ha minden $\varepsilon > 0$ esetén teljesül, hogy*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|B_n\| \leq \min\{M^{-1}, K\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}+1} - \varepsilon\},$$

akkor az (5.2) *rendszernek is exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}$-n.*

5.16. Megjegyzés. *Látható, hogy a [2] cikkben a*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|B_n\| \leq \frac{1}{2K}\frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1}$$

feltételt a

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|B_n\| \leq \frac{1}{K}\frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \tag{5.6}$$

feltételre javították.

A következő két alfejezetben az (5.6) feltételt vizsgáljuk tetszőleges X Banach-téren értelmezett operátorok, valamint a $J = \mathbb{Z}_0^+$ ill. a $J = \mathbb{Z}$ intervallumokon.

5.1. Perturbációs tétel a $J = \mathbb{Z}_0^+$ intervallumon

A továbbiakban legyen X tetszőleges Banach-tér. Ezzel az esettel foglalkozó cikkek például: [13], [14]. Az [13] cikkben a $p < \infty$ eset tárgyalt. Bebizonyítják, ha az (5.4)-ban definiált δ mennyiség elegendően kicsi, akkor feltéve, hogy az (5.1) rendszernek exponenciális dichotómiája van, következik, hogy az (5.2) rendszernek is exponenciális dichotómiája van, pontos korlátot azonban nem adnak.

A [14] cikk a $p = \infty$ esetet vizsgálja. $p = \infty$ esetén megtalálható benne a 4.6. tétel bizonyítása, továbbá a 4.7. tétel levezethető a [13] cikkben található, jelen munkában is már megadott $p < \infty$-t feltevő 4.7. tétel bizonyítása alapján. Ezeknek felhasználásával pedig megadható egy perturbációs tétel $p = \infty$ esetben szintén a [13] cikk alapján. A fejezet következő részében tehát bebizonyítjuk a 4.7. tételt $p = \infty$ esetben, majd ennek és a 4.6. tételnek a felhasználásával megadunk egy perturbációs tételt, illetve egy konkrét korlátot δ-ra.

A továbbiaknak tegyük fel, hogy az (5.1) rendszert definiáló $A_n \in L(X)$ operátorok invertálhatóak, és az inverzeik egyenletesen korlátosak.

5.15. Tétel. *Az* (5.1) *rendszernek pontosan akkor van exponenciális dichotómiája a* $P : X \to X$ *projekcióval, melyre* $\operatorname{Ker} P = Z$*, ha a* $T_Z : l_\infty^Z \to l_\infty$ *operátor invertálható.*

Bizonyítás:

1. **lépés**

Tegyük fel, hogy az (5.1) rendszernek exponenciális dichotómiája van a $P : X \to X$ projekcióval (teljesül az 3.10. definíció), K, $\alpha > 0$ konstansokkal, és legyen $Z := \operatorname{Ker} P$. Ekkor a [14] cikkben található 2.2 következmény alapján

$$PX = X_0(0) \tag{5.7}$$

teljesül, azaz

$$X_0(0) = \operatorname{Im}(P),$$

ahol a (4.10) képlet alapján:

$$X_0(0) = \{x \in X : \sup_{n \geq 0} \|\Lambda(n,0)\Lambda^{-1}(0,0)x\| < \infty\}. \tag{5.8}$$

Nyilvánvalóan

$$X = \operatorname{Im}(P) \oplus \operatorname{Im}(I - P),$$

továbbá a P projektor (3.30) definícióját, valamint a (3.27) tulajdonságot felhasználva adódik, hogy

$$\operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker}(P),$$

így $Z = \operatorname{Ker}(P)$ miatt

$$X = X_0(0) \oplus Z$$

teljesül. Legyen $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \in l_\infty$ tetszőleges rögzített sorozat. A (4.6.) tételből adódóan a (4.8)-ben definiált T operátor szürjektív, így létezik $v = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \in l_\infty$, melyre $Tv = f$. Tekintsük továbbá az

$$u := (u_n)_{n \in \mathbb{Z}_0^+} := (\Lambda(n)\Lambda^{-1}(0)Pv_0)_{n \in \mathbb{Z}_0^+}$$

sorozatot. Itt $Pv_0 \in PX$, így (5.7) miatt $Pv_0 \in X_0(0)$, így $X_0(0)$ definíciója alapján $u \in l_\infty$ teljesül. Továbbá az u definíciója miatt $Tu = 0$, mivel Λ alapmegoldás. Továbbá

$$v_0 - u_0 = v_0 - Pv_0 = (I - P)v_0 \in \operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker}(P) = Z,$$

azaz $v_0 - u_0 \in Z$. Így $v - u \in l_\infty^Z$, valamint a (4.9)-ben definiált T_Z operátorra

$$T_Z(v - u) = T(v - u) = f$$

teljesül, így $T_Z : l_\infty^Z \to l_\infty$ szürjektív.

Legyen $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \in \operatorname{Ker} T_Z$, ekkor T_Z definíciója miatt minden $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén w_n megoldása az (5.1) rendszernek, azaz

$$w_n = \Lambda(n)\Lambda^{-1}(0)w_0 \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+) \tag{5.9}$$

teljesül. Továbbá $w \in \operatorname{Ker} T_Z$ miatt $w \in l_\infty^Z$, így $w_0 \in Z$. Másrészt $w \in l_\infty^Z$ miatt igaz, hogy

$$\|w\|_\infty = \sup_{n\geq 0} \|\Lambda(n)\Lambda^{-1}(0)Pw_0\| < \infty,$$

így az $X_0(0)$ altér (5.8) definíciója miatt $w_0 \in X_0(0)$ teljesül. Tehát összefoglalva

$$w_0 \in Z \cap X_0(0) \Longrightarrow w_0 = 0.$$

Így az (5.9) tulajdonság miatt $w \equiv 0$ nullsorozat, amiből következik, hogy T_Z injektív, és így invertálható.

2. **lépés**

Tegyük fel, hogy $T_Z : l_\infty^Z \to l_\infty$ invertálható. Ekkor $0 \notin A\sigma(T_Z)$ teljesül, ahol

$$A\sigma(T_Z) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (T_Z - \lambda I) \text{ alulról nem korlátos}\}.$$

Ugyanis ha $0 \in A\sigma(T_Z)$ teljesülne, az azt jelentené, hogy T_Z alulról nem korlátos, amiből következne, hogy T_Z nem invertálható, vö.: [15] . Mivel azonban ezt feltettük következik, hogy $0 \notin A\sigma(T_Z)$, azaz $\exists \eta > 0$, hogy minden $v \in l_\infty^Z$ esetén

$$\eta\|T_Z v\|_\infty \geq \|v\|_\infty. \tag{5.10}$$

Legyen

$$l_\infty^0 := \{f \in l_\infty \ : \ f_0 = 0\},$$

és tekintsük a $T_0 : l_\infty^0 \to l_\infty$ operátort, mely a T_Z operátor megszorítása l_∞^0-ra, azaz $u \in l_\infty^0 \subset l_\infty^Z$ esetén

$$T_0 u := T_Z u.$$

Mivel $\{0\} \subset Z$, az (5.10) becslés T_0-ra is igaz, azaz minden $v \in l_\infty^0$ esetén

$$\eta\|T_0 v\|_\infty \geq \|v\|_\infty.$$

Így $0 \notin A\sigma T_0$ is igaz. Felhasználva a [14] cikkben található 2.2. következményt kapjuk, hogy $X_0(0)$ zárt.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy $X = X_0(0) \oplus Z$. Legyen $x \in X$ tetszőleges, rögzített elem. Ha valamely $n_0 > 0$ esetén

$$\Lambda(n_0)\Lambda^{-1}(0)x = 0,$$

akkor minden $n \geq n_0$ esetén is

$$\Lambda(n)\Lambda^{-1}(0)x = \Lambda(n)\Lambda^{-1}(n_0)\Lambda(n_0)\Lambda^{-1}(0)x = 0,$$

teljesül, azaz $x \in X_0(0)$. Másképp minden $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén

$$\Lambda(n)\Lambda^{-1}(0)x \neq 0.$$

Legyenek $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}$, és $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}$ a következők:

$$u_n := \begin{cases} x & (n = 0), \\ 0 & (n > 0), \end{cases}$$

$$f_n := \begin{cases} -A_0 x & (n = 0), \\ 0 & (n > 0). \end{cases}$$

Nyilván $u \in l_\infty$ és $f \in l_\infty$, valamint

$$f_n = u_{n+1} - A_n u_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+) \tag{5.11}$$

teljesül, azaz $Tu = f$. Mivel T_Z szürjektív, létezik $v \in l_\infty^Z$, hogy $T_Z v = f$, így (5.11) miatt

$$T_Z v = Tu,$$

amiből pedig $u - v \in \operatorname{Ker} T$ következik, és így

$$(u - v)_n = \Lambda(n)\Lambda^{-1}(0)(u_0 - v_0) = \Lambda(n)\Lambda^{-1}(0)(x - v_0) \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+).$$

Továbbá $u, v \in l_\infty$ miatt adódik, hogy $u - v \in l_\infty$ teljesül, így $x - v_0 \in X_0(0)$, azaz

$$x = x - v_0 + v_0 \in X_0(0) + Z.$$

Legyen

$$y \in X_0(0) \cap Z,$$

ekkor a

$$w := (w_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} := ((\Lambda(n)\Lambda^{-1}(0)y)_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}$$

módon definiált sorozatra $w \in l_\infty^Z \cap \operatorname{Ker} T$. Emiatt $T_Z w = 0$, így T_Z invertálhatóságából következően $w = 0$, azaz

$$X_0(0) \cap Z = \{0\}$$

teljesül, amiből következik, hogy

$$X = X_0(0) \oplus Z.$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy a T operátor szürjektív, és az $X_0(0)$-nak létezik direkt kiegészítője X-ben, így a 4.6. tétel miatt az (5.1) rendszernek exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}_0^+$-en, valamilyen $P : X \to X$ projekcióval, $K,\ \alpha > 0$ konstansokkal. Továbbá a 4.6. tétel bizonyításából kiderül, hogy erre a P projekcióra teljesül $\operatorname{Ker}(P) = Z$ is fennáll. Ezzel az 5.15. tételt bebizonyítottuk.
Következzen tehát a perturbációs tétel a [13] cikkben található 3.7. tétel alapján.

5.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* (5.1) *rendszernek exponenciális dichotómiája van* $\mathbb{Z}_0^+$-*en a* $P : X \to X$ *projekcióval,* $K,\ \alpha > 0$ *konstansokkal. Ha az* (5.5)-*ben definiált* δ *mennyiségre*

$$\delta < \frac{1}{K} \cdot \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1}$$

teljesül, akkor az (5.2) *perturbált rendszernek is exponenciális dichotómiája van.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az (5.1) rendszernek exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}_0^+$-en a $P : X \to X$ projekcióval, valamint legyen $Z := \operatorname{Ker} P$. az 5.15. tétel alapján T_Z invertálható. Jelölje $T_{B,Z}$ az (5.2) perturbált rendszerhez tartozó operátort, azaz

$$T_{B,Z} : l_\infty^Z \to l_\infty$$

a következőképpen definiált egy $u \in l_\infty^Z$ elemen:

$$(T_{B,Z}u)_n := u_{n+1} - (A_n + B_n)u_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_0^+).$$

Tekintsük az (5.3)-ban definiált $\mathfrak{B}$ korlátos operátort. Nyilván $T_{B,Z} = T_Z - \mathfrak{B}$ teljesül a $T_{B,Z}$, T_Z és $\mathfrak{B}$ operátorok megadási módjából következően.

Így a perturbált rendszer exponenciális dichotómiájának elégséges feltétele, hogy a $T_Z - \mathfrak{B}$ operátor invertálható legyen. Mivel T_Z invertálható, ennek elégséges feltétele, hogy

$$\|\mathfrak{B}\| < \|T_Z^{-1}\|^{-1}.$$

teljesüljön (vö: [15]). A 4.7. állítás alapján a $Tu = f$ egyenlet egyértelmű korlátos megoldására

$$u_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}_0^+} G(n, m+1) f_m,$$

azaz adott $f \in l_\infty$ esetén

$$(T_Z^{-1} f)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}_0^+} G(n, m+1) f_m. \tag{5.12}$$

Belátható, hogy $((T_Z^{-1} f)_n)_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \in l_\infty^Z$. Először megmutatjuk, hogy $(T_Z^{-1} f)_0 \in Z$.

$$\begin{aligned}
(T_Z^{-1} f)_0 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_0^+} G(0, m+1) f_m = \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}_0^+} \Lambda(0)(I-P)\Lambda^{-1}(m+1) f_m = \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}_0^+} (I-P)\Lambda^{-1}(m+1) f_m,
\end{aligned}$$

ahol tetszőleges $m \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén $(I-P)\Lambda^{-1}(m+1) f_m \in \operatorname{Im}(I-P) = \operatorname{Ker} P = Z$, és mivel $\operatorname{Ker} P \subset X$ zárt altér,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_0^+} (I-P)\Lambda^{-1}(m+1) f_m \in \operatorname{Ker} P = Z$$

is teljesül. A továbbiakban pedig az iménti, (5.12)-ben látható felírás segítségével belátjuk, hogy

$$\|T_Z^{-1}\| \le K \cdot \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1}.$$

Legyen $f \in l_\infty$ tetszőleges, rögzített. Ekkor felírható a következő becslés:

$$\begin{aligned} \|T_Z^{-1} f\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \|(T_Z^{-1} f)_n\| = \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}_0^+} G(n, m+1) f_m \Big\|. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Az (5.13) mennyiség végességének bizonyításához először vizsgáljuk a

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}_0^+} G(n, m+1) f_m \Big\|$$

kifejezést tetszőleges, rögzített $n \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén.

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}_0^+} G(n, m+1) f_m \Big\| &\le \sum_{m\in\mathbb{Z}_0^+} \|G(n, m+1) f_m\| = \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \|G(n, m+1) f_m\| + \sum_{m=n}^{\infty} \|G(n, m+1) f_m\| = \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \|\Lambda(n) P \Lambda^{-1}(m+1) f_m\| + \\ &+ \sum_{m=n}^{\infty} \|\Lambda(n)(I-P)\Lambda^{-1}(m+1) f_m\| \le \\ &\le \Bigg(\sum_{m=0}^{n-1} \|\Lambda(n) P \Lambda^{-1}(m+1)\| + \\ &+ \sum_{m=n}^{\infty} \|\Lambda(n)(I-P)\Lambda^{-1}(m+1)\| \Bigg) \|f\|_\infty \le \\ &\le K \Bigg(\sum_{m=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-m-1)} + \sum_{m=n}^{\infty} e^{-\alpha(m+1-n)} \Bigg) \|f\|_\infty. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-m-1)}, \\ A_2 &:= \sum_{m=n}^{\infty} e^{-\alpha(m+1-n)}, \end{aligned}$$

így

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}_0^+} G(n,m+1)f_m \Big\| \leq K(A_1+A_2)\|f\|_\infty. \tag{5.15}$$

A továbbiakban az átláthatóság kedvéért vizsgáljuk külön-külön az A_1 és A_2 mennyiségeket.

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{k=0}^{n-1}(e^{-\alpha})^k = \frac{(e^{-\alpha})^n-1}{e^{-\alpha}-1} = \\ &= \frac{e^\alpha}{e^\alpha-1} - \frac{e^{-\alpha(n-1)}}{e^\alpha-1}, \\ A_2 &= \sum_{k=1}^{\infty}(e^{-\alpha})^k = e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-\alpha})^k = \\ &= e^{-\alpha}\frac{e^\alpha}{e^\alpha-1} = \frac{1}{e^\alpha-1}. \end{aligned}$$

A fentieket az (5.15) képletbe visszahelyettesítve:

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}_0^+} G(n,m+1)f_m \Big\| \leq K\cdot\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha-1} - \frac{e^{-\alpha(n-1)}}{e^\alpha-1}\right)\|f\|_\infty,$$

így

$$\begin{aligned} \|T_Z^{-1}f\|_\infty &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}_0^+}\left\{K\cdot\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha-1} - \frac{e^{-\alpha(n-1)}}{e^\alpha-1}\right)\|f\|_\infty\right\} = \\ &= K\cdot\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha-1}\cdot\|f\|_\infty. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Összefoglalva tehát kaptuk, hogy

$$\|T_Z^{-1}\|_\infty \leq K\cdot\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha-1}, \tag{5.17}$$

így $((T_Z^{-1}f)_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} \in l_\infty^Z$ teljesül, valamint az (5.17) egyenlőtlenségből átrendezéssel adódik, hogy

$$\|T_Z^{-1}\|_\infty^{-1} \geq \frac{1}{K}\cdot\frac{e^\alpha-1}{e^\alpha+1}. \tag{5.18}$$

Tehát ha

$$\delta < \frac{1}{K}\cdot\frac{e^\alpha-1}{e^\alpha+1},$$

akkor

$$\|\mathfrak{B}\|_\infty = \delta < \frac{1}{K} \cdot \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \leq \|T_Z^{-1}\|_\infty^{-1},$$

amiből következik, hogy a perturbált rendszernek exponenciális dichotómiája van.

5.17. Megjegyzés. *Az egyszerűbb esetet tárgyaló 5.14. tételben a δ mennyiségre megadott* (5.6) *feltétel tetszőleges Banach-tér esetén is elegendőnek bizonyult a $J = \mathbb{Z}_0^+$ intervallumon.*

5.2. Perturbációs tétel a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, hogy ha a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon tekintjük az (5.1) homogén lineáris rendszert, illetve annak az (5.2) perturbációját, akkor milyen feltételek teljesülése mellett garantálható az exponenciális dichotómia öröklődése. A továbbiakban tehát feltesszük, hogy az (5.1) rendszernek exponenciális dichotómiája van a $\mathbb{Z}$ intervallumon, K, $\alpha > 0$ konstansokkal és $P : X \to X$ projekcióval.

Az előbbi alfejezetben tárgyalt esethez hasonlóan itt is a perturbációs tétel alappillére az exponenciális dichotómia karakterizációjáról értekező állítás. Továbbra is feltesszük az A_n operátorok invertálhatóságát, és az inverzek egyenletes korlátosságát.

5.10. Állítás. *(vö.: [12])A következő két állítás ekvivalens:*

1. *az* (5.1) *rendszernek exponenciális dichotómiája van,*

2. *minden $f \in l_\infty$ esetén az* (5.1) *homogén rendszerhez tartozó*

$$x_{n+1} = A_n x_n + f_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{5.19}$$

inhomogén rendszernek egyértelműen létezik $x \in l_\infty$ megoldása.

A következőekben az 5.10. állítást felhasználva megadunk és [2] alapján bebizonyítunk egy perturbációs tételt.

5.17. Tétel. *Legyen X tetszőleges Banach-tér, $J = \mathbb{Z}$ intervallum. Tegyük fel, hogy az (5.1) rendszernek exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}$-n a K, $\alpha > 0$ konstansokkal, és P projekcióval. Ekkor, ha az (5.5)-ben definiált δ mennyiségre*

$$\delta < \frac{1}{K} \cdot \frac{e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha} + 1} \tag{5.20}$$

teljesül, akkor az (5.2) rendszernek is exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}$-n.

Bizonyítás: Az 5.16. tétel bizonyításában szereplő (5.14) és (5.17) becslések alapján vegyük észre, hogy az (5.20) feltételből következik, hogy

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha|n-m-1|} \|B_m\| < \frac{1}{K}. \tag{5.21}$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$L_B := \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha|n-m-1|} \|B_m\|. \tag{5.22}$$

Így (5.21) miatt $L_B < \frac{1}{K}$ teljesül.

Legyen $f \in l_\infty$, tekintsük az

$$x_{n+1} = A_n x_n + f_n \tag{5.23}$$

inhomogén rendszert. Ekkor az 5.10. állítás alapján adódik, hogy az (5.23) rendszernek egyértelműen létezik l_∞-beli megoldása, jelölje ezt $x := (x_n^0)_{n\in\mathbb{Z}}$. Továbbá az 5.16. tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan itt is teljesül, hogy

$$\|G(n, m+1)\| \le K e^{-\alpha|n-m-1|} \qquad (n, m \in \mathbb{Z}), \tag{5.24}$$

amiből a következő egyenlőtlenség számolható:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}} G(n, m+1) \Big\| \le K \cdot \frac{e^{\alpha} + 1}{e^{\alpha} - 1}. \tag{5.25}$$

Így $\|x^0\|_\infty$-ra felírható az alábbi becslés:

$$\|x^0\|_\infty \le K \cdot \frac{e^{\alpha} + 1}{e^{\alpha} - 1} \|f\|_\infty.$$

Tekintsük az

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n x_n^0$$

inhomogén rendszert. Az 5.10. állítás alapján ennek is egyértelműen létezik l_∞-beli megoldása, ezt jelölje $x^1 := (x^1_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Továbbá x^1 zárt alakját is ismerjük:

$$x^1_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G(n, m+1) B_m x^0_m \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

így az (5.24) és az (5.25) becslések alapján

$$\|x^1\|_\infty \leq K \cdot \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} \|f\|_\infty K \cdot L_B$$

teljesül. Hasonlóan $i = 2, 3, \ldots$ esetén tekintsük az

$$x_n = A_n x_n + B_n x^{i-1}_n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

inhomogén rendszert melynek az

$$x^i_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G(n, m+1) B_m x^i_m \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

sorozat egyértelmű l_∞-beli megoldása, melyre fennáll az

$$\|x^i\|_\infty \leq K \cdot \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} \|f\|_\infty (K \cdot L_B)^i$$

becslés. Definiáljuk az $x := (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sorozatot az alábbi módon:

$$x_n := x^0_n + \sum_{i=1}^{\infty} x^i_n.$$

Kihasználva, hogy $KL_B < 1$, valamint az x^i sorozatokra bizonyított korlátokat

$$\|x\|_\infty \leq K \cdot \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} \|f\|_\infty \sum_{i=0}^{\infty} (K \cdot L_B)^i =$$

$$K \cdot \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1} \|f\|_\infty \cdot \frac{1}{1 - KL_B}$$

adódik. Továbbá mivel x egyértelmű megoldása az (5.2) rendszernek, így az 5.10. állításból kapjuk, hogy az (5.2) perturbált rendszernek is exponenciális dichotómiája van.

Összefoglalva tehát elmondható, hogy a véges dimenziós esetben látott (5.6)

$$\delta < \frac{1}{K} \cdot \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1}$$

feltétel elégségességét az exponenciális dichotómia öröklődéséhez tetszőleges Banach-tér és a $J = \mathbb{Z}^+_0$ ill. a $J = \mathbb{Z}$ intervallumon is bebizonyítottuk.

6. Homoklinikus pályák approximációja

A dolgozat utolsó fejezetében jórészt a TDK dolgozatom témájáról, az abban elért eredményekről és az azzal kapcsolatos további terveimről szeretnék beszélni. A dolgozat célja az volt, hogy adott $d \in \mathbb{N}$, ill. $g, h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ leképezésekkel, pontosabban $\mathfrak{C}^1$-diffeomorfizmusokkal definiált

$$g(x_{n+1}) = h(x_n) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{6.1}$$

ún. implicit differenciaegyenlet-rendszer homoklinikus pályáinak numerikus közelítésére szolgáló módszert adjon. Ennek eléréséhez egy, az

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{6.2}$$

autonóm rendszer homoklinikus pályáinak numerikus közelítésére szolgáló – J. Beyn és szerzőtársai által kidolgozott (vö. [6]) – módszert vettünk alapul, amelyet (6.1) alakú implicit rendszerek numerikus vizsgálatára fejlesztettünk tovább. Először ennek részleteit szeretném bemutatni, majd ezután egy konkrét példán keresztül illusztrálni a módszer működését.

6.1. Explicit differenciaegyenlet-rendszerek vizsgálata

Az egyszerűbb tárgyalás, ill. az átláthatóság érdekében elsőként a már említett [6] cikkben található módszer legfontosabb mozzanatait foglaljuk össze.

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ leképezés $\mathfrak{C}^1$-diffeomorfizmus, és tekintsük az

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{6.3}$$

autonóm differenciaegyenlet-rendszert, majd legyen $\xi \in \mathbb{R}^d$ hiperbolikus egyensúlyi helyzete f-nek, azaz tegyük fel, hogy $f(\xi) = \xi$ és a $J_f(\xi)$ Jacobi-mátrix minden $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértékére $|\lambda| \neq 1$ teljesül. Az exponenciális dichotómia bizonyos módon kapcsolatba hozható a (6.3) rendszer jobb oldalán álló f leképezés ξ hiperbolikus egyensúlyi helyzetével. Az alábbiakban ezt fejtjük ki röviden. Tekintsük az

$$u_{n+1} = J_f(\xi)u_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{6.4}$$

állandó együtthatós rendszert. A (6.4) rendszer Cauchy-operátorát jelölje

$$\Lambda(n,m) := J_f(\xi)^{n-m} \qquad (n,m \in \mathbb{Z}).$$

Mivel $\xi \in \mathbb{R}^d$ hiperbolikus fixpont, ezért alkalmas, a $\lambda_s, \lambda_u \in \mathbb{R}$, $\lambda_s < 1 < \lambda_u$ feltételnek eleget tévő számok esetén a $J_f(\xi)$ Jacobi-mátrix minden λ sajátértékére $|\lambda| < \lambda_s$ vagy $|\lambda| > \lambda_u$ teljesül. Jelölje W_s, ill. W_u a $J_f(\xi)$ stabil, ill. instabil alterét, azaz legyen

$$W_s := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{n\to+\infty} \Lambda(n,0)x = 0 \right\}, \qquad \text{ill.} \qquad W_u := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{n\to-\infty} \Lambda(n,0)x = 0 \right\}.$$

Ekkor $\mathbb{R}^d = W_s \oplus W_u$, továbbá minden $x_s \in W_s$ és $x_u \in W_u$ esetén

$$\|J_f(\xi)^n x_s\| \leq \lambda_s^n \|x_s\| \quad (n \geq 0), \qquad \text{ill.} \qquad \|J_f(\xi)^n x_u\| \leq \lambda_u^n \|x_u\| \quad (n \leq 0). \tag{6.5}$$

Így a 4.5. állításból és a ξ hiperbolikusságából következik, hogy a (6.4) rendszernek exponenciális dichotómiája van. A fenti (6.5) egyenlőtlenségekből az is látható, hogy az exponenciális dichotómia paraméterei a következők:

$$K := 1, \qquad \alpha := \min(-\ln(\lambda_s), \ln(\lambda_u)),$$

és a P projekció a W_s altérre való merőleges vetítés operátora.

A fejezetben ismertetett módszerhez szükség van néhány fogalomra, melyek jól ismertek a differenciaegyenlet-rendszerek elméletéből, azonban a teljesség kedvéért leírjuk ezek definícióját is.

6.13. Definíció. (Homoklinikus pálya.) *A* (6.3) *rendszer egy* $x_{\mathbb{Z}} := (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *megoldásának értékkészletét a rendszer* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *egyensúlyi pontjára illeszkedő homoklinikus pályájának nevezzük, ha*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi \qquad \textit{és} \qquad \lim_{n\to-\infty} x_n = \xi \tag{6.6}$$

teljesül.

6.14. Definíció. *Legyen* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *a* (6.3) *rendszer hiperbolikus egyensúlyi helyzete, továbbá legyen* $x_{\mathbb{Z}} := (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *a rendszer olyan homoklinikus megoldása, amelyhez tartozó pálya illeszkedik* ξ*-re. Azt mondjuk, hogy* $x_{\mathbb{Z}}$ *transzverzális, ha az*

$$u_{n+1} = J_f(x_n) u_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{6.7}$$

lineáris rendszernek exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}$*-n.*

Általában a szakirodalomban a (6.3) rendszer adott ξ egyensúlyi ponthoz transzverzális homoklinikus megoldását a ξ-hez tartozó stabil és instabil sokaságok segítségével definiálják. Az [6] cikkben a szerzők megmutatták, hogy a szokásos definíció egyenértékű a fenti 6.14. definícióval.

A továbbiakban a (6.3) rendszer transzverzális homoklinikus pályáinak közelítésére szolgáló eljárást fogjuk megadni. Ehhez definiáljuk adott $J \subset \mathbb{Z}$ (diszkrét) intervallum esetén az

$$S_J := \{(x_n)_{n\in J} : \ \|x_J\|_\infty := \sup_{n\in J} \|x_n\| < \infty\} \tag{6.8}$$

teret. A (6.3) rendszert a $\Gamma : S_{\mathbb{Z}} \to S_{\mathbb{Z}}$ operátor segítségével a

$$\Gamma(x_{\mathbb{Z}}) = 0 \qquad (x_{\mathbb{Z}} \in S_{\mathbb{Z}}) \tag{6.9}$$

alakba írjuk, ahol

$$\Gamma(x_{\mathbb{Z}}) := (x_{n+1} - f(x_n))_{n\in\mathbb{Z}} \qquad (x_{\mathbb{Z}} \in S_{\mathbb{Z}}). \tag{6.10}$$

Mivel csak véges intervallumon tudjuk valamely rendszer pályáit numerikusan közelíteni, a (6.10) operátort egy véges $J := [n_-, n_+]$ intervallumon ($n_-, n_+ \in \mathbb{Z}$, $n_- < 0 < n_+$) vizsgáljuk a $\Gamma_J : S_J \to S_J$ operátor segítségével, melyet

$$\Gamma_J(x_J) := (x_{n+1} - f(x_n)\ (n \in \{n_-, \dots, n_+ - 1\}), b(x_{n_-}, x_{n_+})) \qquad (x_J \in S_J) \tag{6.11}$$

definiál, ahol $b : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d$ alkalmas ($\mathfrak{C}^1$-beli) valamilyen peremfeltételt megadó leképezés. A dolgozatban az alábbi periodikus peremfeltételt leíró b leképezést tekintettük:

$$b(x_{n_-}, x_{n_+}) := x_{n_+} - x_{n_-}. \tag{6.12}$$

A (6.3) rendszer homoklinikus megoldásának közelítéséhez a (6.11) operátor magterét keressük.

Az [6] cikk 3.4 tételében a szerzők a b leképezésre tett alkalmas feltételek mellett a fentiekben megadott numerikus közelítés alkalmazhatóságát garantálják.

6.2. Implicit differenciaegyenlet-rendszerek vizsgálata

Az előzőekben láthattunk egy módszert, melynek segítségével a (6.3) differenciaegyenlet-rendszer transzverzális homoklinikus pályáit lehet numerikusan közelíteni. A továbbiakban ezt terjesztjük ki általánosabb alakú

$$g(x_{n+1}) = h(x_n) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{6.13}$$

implicit differenciaegyenlet-rendszerek pályáinak közelítésére, ahol $g,\ h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ leképezések $\mathfrak{C}^1$-diffeomorfizmusok. Mindezt az előadás végén alkalmazni fogjuk az alábbi esetben. Tekintsünk egy $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ alkalmas (sima) függvénnyel definiált

$$\dot{x} = F(x) \tag{6.14}$$

autonóm differenciálegyenlet-rendszert. Tegyük fel, hogy a (6.14) rendszernek $\xi \in \mathbb{R}^d$ hiperbolikus fixpontja, továbbá, hogy létezik egy ξ-hez homoklinikus megoldása. A (6.13) diszkrét idejű és a (6.14) folytonos idejű rendszerek között úgy teremtünk kapcsolatot, hogy a (6.14) rendszert valamilyen numerikus módszerrel közelítjük, így egy differenciaegyenlet-rendszert kapunk. A fejezet végén vizsgált példa esetében trapéz szabályt alkalmaztunk. Mivel a módszer implicit, a (6.3) rendszernél általánosabb, (6.13) alakú differenciaegyenlet-rendszerhez jutunk, ahol g, h az alkalmazott numerikus módszertől függő leképezések. Ezért van szükség az előző alfejezetben látott metódus implicit rendszerekre való általánosításának.

A továbbiakban tehát az előzőekben bemutatott eljárást alkalmazzuk a (6.13) rendszerre, azaz belátjuk, hogy megfelelő feltételek mellett a (6.13) rendszer homoklinikus megoldásainak vizsgálata visszavezethető egy alkalmasan választott f leképezéssel adott (6.3) rendszer vizsgálatára.

Ahhoz azonban, hogy a (6.13) rendszer egy ξ hiperbolikus egyensúlyi pontjára illeszkedő transzverzális homoklinikus megoldását, először definiálnunk kell ezeket a fogalmakat a (6.13) rendszer esetében is.

6.15. Definíció. (Implicit rendszer hiperbolikus fixpontja) *Legyenek $g,\ h$ leképezések $\mathfrak{C}^1$-diffeomorfizmusok. Tegyük fel, hogy $\xi \in \mathbb{R}^d$ fixpontja g-nek és h-nak, továbbá a $J_g(\xi)$ mátrix reguláris és a*

$$J_g(\xi) \cdot J_h(\xi)$$

mátrixnak nincsen 1 *abszolútértékű sajátértéke. Ekkor azt mondjuk, hogy ξ a* (6.13) *rendszer hiperbolikus fixpontja.*

Az alábbi állításban kapcsolatot teremtünk adott g és h leképezésekkel definiált (6.13) implicit rendszer hiperbolikus fixpontjai és egy alkalmasan választott f függvénnyel adott (6.3) alakú explicit rendszer hiperbolikus fixpontjai között.

6.11. Állítás. *Legyenek g, $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ leképezések $\mathfrak{C}^1$-diffeomorfizmusok, és tegyük fel, hogy $\xi \in \mathbb{R}^d$ hiperbolikus fixpontja a* (6.13) *implicit rendszernek. Ekkor ξ az $f := g^{-1} \circ h$ függvénnyel definiált* (6.3) *rendszernek is hiperbolikus fixpontja.*

Az előző állítás értelmében tehát ha ξ hiperbolikus fixpontja a (6.13) rendszernek, akkor hiperbolikus egyensúlyi helyzete az $f := g^{-1} \circ h$ diffeomorfizmussal megadott (6.3) rendszernek is. Tekintsük az

$$u_{n+1} = J_f(\xi)u_n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{6.15}$$

autonóm lineáris rendszert, melynek Cauchy-operátorát jelölje

$$\Lambda(n, m) := J_f(\xi)^{n-m} \qquad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

Így az előző alfejezethez hasonlóan itt is megadható μ_s, $\mu_u \in \mathbb{R}$, melyekre $\mu_s < 1 < \mu_u$, és a $J_f(\xi)$ Jacobi-mátrix minden λ sajátértékére $|\lambda| < \mu_s$ vagy $|\lambda| > \mu_u$. Jelölje W_s^i, ill. W_u^i a $J_f(\xi)$ stabil, ill. instabil alterét, azaz legyen

$$W_s^i := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{n \to +\infty} \Lambda(n, 0)x = 0 \right\}, \qquad \text{ill.} \qquad W_u^i := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{n \to -\infty} \Lambda(n, 0)x = 0 \right\}.$$

Ekkor $\mathbb{R}^d = W_s^i \oplus W_u^i$, továbbá minden $x_s \in W_s^i$ és $x_u \in W_u^i$ esetén

$$\|J_f(\xi)^n x_s\| \leq \mu_s^n \|x_s\| \quad (n \geq 0), \qquad \text{ill.} \qquad \|J_f(\xi)^n x_u\| \leq \mu_u^n \|x_u\| \quad (n \leq 0).$$

Így a 4.5. állításból és ξ hiperbolikusságából következik, hogy a (6.15) rendszernek exponenciális dichotómiája van $\mathbb{Z}$-n.

Az alábbiakban definiáljuk a homoklinikus megoldás fogalmát (6.13) alakú implicit rendszerek esetében, majd megvizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat állhat fenn a (6.13) implicit rendszer és alkalmasan választott f függvénnyel megadott (6.3) explicit rendszer homoklinikus megoldásai között.

6.16. Definíció. (Implicit rendszer homoklinikus megoldása) *Legyenek g, h leképezések $\mathfrak{C}^1$-diffeomorfozmusok és tekintsük az ezek által definiált* (6.13) *rendszert. Azt mondjuk, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a* (6.13) *rendszer $\xi \in \mathbb{R}^d$ hiperbolikus fixpontjához tartozó homoklinikus megoldása, ha tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén*

$$g(x_{n+1}) = h(x_n), \qquad \textit{valamint} \qquad (\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to-\infty} x_n = \xi)$$

teljesül.

6.12. Állítás. *Tegyük fel, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a* (6.13) *rendszer $\xi \in \mathbb{R}^d$-hez homoklinikus megoldása, és legyen $f := g^{-1} \circ h$. Ekkor $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a* (6.3) *rendszernek is $\xi \in \mathbb{R}^d$-re illeszkedő homoklinikus megoldása.*

Végül pedig definiáljuk egy adott ξ egyensúlyi ponthoz transzverzális homoklinikus pálya fogalmát a (6.13) rendszer esetében.

6.17. Definíció. (Implicit rendszer transzverzális homoklinikus pályája.) *Legyenek a g, h leképezések $\mathfrak{C}^1$-diffeomorfizmusok és tekintsük az ezek által definiált* (6.13) *rendszert. Továbbá legyen $x_\mathbb{Z} := (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a* (6.13) *rendszer $\xi \in \mathbb{R}^d$-re illeszkedő homoklinikus pályája. Azt mondjuk, hogy $x_\mathbb{Z}$ transzverzális, ha az a 6.14. definíció értelmében transzverzális homoklinikus megoldása az $f := g^{-1} \circ h$ függvény által meghatározott* (6.3) *alakú rendszernek.*

6.3. A módszer kiterjesztése

A fejezet utolsó részében a már ismertetett módszert alkalmazzuk a (6.13) rendszer adott transzverzális homoklinikus pályájának közelítésére. Definiáljuk a (6.10) és a (6.11) operátorok implicit rendszerek vizsgálatához szükséges megfelelőjét. Legyen $\Lambda : S_\mathbb{Z} \to S_\mathbb{Z}$ operátor a következő:

$$\Lambda(x_\mathbb{Z}) := (g(x_{n+1}) - h(x_n))_{n\in\mathbb{Z}} \qquad (x_\mathbb{Z} \in S_\mathbb{Z}), \tag{6.16}$$

ennek segítségével a (6.13) rendszer a következő alakban írható fel:

$$\Lambda(x_\mathbb{Z}) = 0 \qquad (x_\mathbb{Z} \in S_\mathbb{Z}).$$

Mivel továbbra is csak véges intervallumon lehetséges a numerikus közelítés, definiáljuk a $\Lambda_J : S_J \to S_J$ operátort tetszőleges $x_J \in S_J$ esetén:

$$\Lambda_J(x_J) := (g(x_{n+1}) - h(x_n)\,(n \in \{n_-, \ldots, n_+ - 1\},\ b(x_{n_-}, x_{n_+}),), \tag{6.17}$$

ahol $J := [n_-, n_+]$ véges intervallum, pontosabban $n_-, n_+ \in \mathbb{Z}$, $n_- < 0 < n_+$. A numerikus közelítés során az alábbi egyenlet megoldását keressük adott J esetén:

$$\Lambda_J(x_J) = 0 \qquad (x_J \in S_J). \tag{6.18}$$

Az előzőekben tárgyalt explicit esethez hasonlóan b itt is valamilyen alkalmasan megválasztott peremfeltétel. A módszer alkalmazását bemutató példákban a

$$b(x_{n_-}, x_{n_+}) := x_{n_+} - x_{n_-} \tag{6.19}$$

periodikus peremfeltételt használjuk.
Adott $x_J \in S_J$ esetén a (6.19) peremfeltétellel $\Lambda_J(x_J)$ az alábbi módon írható fel:

$$\Lambda_J(x_J) = \begin{bmatrix} g(x_{n_-+1}) - h(x_{n_-}) \\ \vdots \\ g(x_{n_+}) - h(x_{n_+-1}) \\ x_{n_+} - x_{n_-} \end{bmatrix}. \tag{6.20}$$

Mivel a (6.20) nemlineáris egyenletet kell megoldanunk, a numerikus közelítés előállításához Newton-módszer alkalmazása szükséges. Ebben a $J_{\Lambda_J}(x_J)$ Jacobi-mátrixot is használnunk kell, mely a következőképpen néz ki:

$$J_{\Lambda_J}(x_J) = \begin{bmatrix} -J_h(x_{n_-}) & J_g(x_{n_-+1}) & & & \\ & -J_h(x_{n_-+1}) & J_g(x_{n_-+2}) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -J_h(x_{n_+-1}) & J_g(x_{n_+}) \\ -I & & & & I \end{bmatrix}, \tag{6.21}$$

ahol I jelöli az $\mathbb{R}^{d\times d}$-beli egységmátrixot, valamint az üresen maradó részeken 0-k szerepelnek.

Végül megadunk egy, a módszer alkalmazhatóságát tárgyaló tételt.

6.18. Tétel. *Legyenek* $g,\ h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *leképezések* $\mathfrak{C}^1$*-diffeomorfizmusok. Tegyük fel, hogy* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *a* (6.13) *rendszer hiperbolikus fixpontja, és* $\hat{x}_{\mathbb{Z}}$ *a* ξ *egyensúlyi helyzetre illeszkedő transzverzális homoklinikus pálya. Továbbá legyen* $b \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^d)$*, melyre* $b(\xi, \xi) = 0$*, és definiáljuk a reguláris* $B \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ *leképezést az alábbi módon:*

$$B(x_s + x_u) := \partial_1 b(\xi, \xi) x_s + \partial_2 b(\xi, \xi) x_u \qquad (x_s \in W_s^i,\ x_u \in W_u^i).$$

Ekkor léteznek $\delta,\ k, K > 0$ *konstansok és* $N \in \mathbb{N}$ *küszöbindex, hogy a* (6.17) *egyenletnek egyértelműen létezik*

$$x_J \in B_\delta(\hat{x}_{|J}) := \{x \in S_J \ : \ \|\hat{x}_{|J} - x\| \leq \delta\}$$

megoldása minden olyan $J = [n_-, n_+]$ *intervallumon, melyre* $N \leq -n_-, n_+ \in \mathbb{N}$*, továbbá tetszőleges* $x_J \in B_\delta(\hat{x}_{|J})$ *sorozatra fennállnak az*

$$\|(\Lambda_J)'(x_J)^{-1}\| \leq k, \qquad \textit{ill.} \qquad \|\hat{x}_{|J} - x_J\|_\infty \leq K \|b(x_{n_-}, x_{n_+})\|$$

becslések.

6.4. A módszer alkalmazása

Végül a fent bemutatott implicit rendszerekre vonatkozó eljárást szeretném egy konkrét példán keresztül bemutatni. Ennek során egy adott differenciálegyenlet-rendszert trapéz szabállyal vizsgálunk. Mivel a választott differenciálegyenlet-rendszernek létezik transzverzális homoklinikus pályája, azt várjuk, hogy a közelítő módszer által szolgáltatott differenciaegyenlet-rendszerben is jelenik meg homoklinikus pálya. Ebből adódóan a kapott rendszerre az előbbiekben megadott eljárást sikeresen tudjuk majd alkalmazni.

Tekintsük a következő differenciálegyenlet-rendszert (vö. [11]):

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= 2x - 3x^2 - y(x^3 - x^2 + y^2 - c), \end{cases} \tag{6.22}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ paraméter. Az

$$f(x, y) := (f_1(x, y), f_2(x, y)) := \begin{bmatrix} 2y \\ 2x - 3x^2 - y(x^3 - x^2 + y^2 - c) \end{bmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{6.23}$$

vektormező bevezetésével a (6.23) rendszer

$$\dot{x} = f_1(x,y), \qquad \dot{y} = f_2(x,y)$$

alakú. Egyszerű számolással adódik, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén (6.22)-nek két egyensúlyi helyzete van:

$$\xi_1 = (0,0) \qquad \text{és} \qquad \xi_2 = (2/3, 0).$$

Mivel f leképezés Jacobi-mátrixára

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 - 6x - 3x^2y + 2xy & -x^3 + x^2 - 3y^2 + c \end{bmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{R}), \tag{6.24}$$

ezért

$$J_f(\xi_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & c \end{bmatrix}, \qquad J_f(\frac{2}{3}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & \frac{4}{27} + c \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy $\det(J_f(\xi_1)) = -4 < 0$, ezért a ξ_1 egyensúlyi helyzet minden c paraméter-érték esetén nyeregpont. Továbbá a $J_f(\xi_1)$ mátrix

$$z^2 - cz - 4 \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{6.25}$$

karakterisztikus polinomjának

$$z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 16}}{2} \tag{6.26}$$

gyökeit vizsgálva adódik, hogy mivel $c^2 + 16 > 0$ tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ paraméter mellett, ξ_1 hiperbolikus fixpontja f-nek. A $J_f(\xi_2)$ Jacobi-mátrix vizsgálatával az is látható, hogy ξ_2 aszimptotikusan stabilis, ill. labilis, ha $c < -4/27$, ill. $c > -4/27$ teljesül, ui.

$$\det(J_f(\xi_2)) = 4 > 0 \qquad \text{és} \qquad \mathrm{sp}(J_f(\xi_2)) = \frac{4}{27} + c.$$

Megmutattuk, hogy a $c^* := -4/27$ paraméter-értéknél PAH-bifurkáció lép fel: ξ_2 elveszti stabilitását, és egy periodikus megoldás bifurkálódik, a részletes számolás megtalálható a Függelékben.

Továbbá igazolható (vö: [8]), hogy $c \to 0$ határesetben megjelenik a (6.22) rendszernek a $\xi_1 = (0,0)$ egyensúlyi helyzetére illeszkedő homoklinikus megoldása.

6.4.1. Trapéz szabállyal kapott rendszer vizsgálata

Közelítsük a (6.22) rendszer trapéz szabállyal, jelölje $\delta > 0$ az időlépés hosszát, valamint $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ az n-edik időpontban a megoldás közelítését. Ekkor

$$g(x_{n+1}, y_{n+1}) = h(x_n, y_n) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{6.27}$$

alakú differenciaegyenlet-rendszerhez jutunk, ahol

$$g(x,y) = \begin{bmatrix} x - \delta y \\ y - \frac{\delta}{2}(2x - 3x^2 - y(x^3 - x^2 + y^2 - c)) \end{bmatrix}, \tag{6.28}$$

$$h(x,y) = \begin{bmatrix} x + \delta y \\ y + \frac{\delta}{2}(2x - 3x^2 - y(x^3 - x^2 + y^2 - c)) \end{bmatrix}. \tag{6.29}$$

A kapott differenciaegyenlet-rendszerben az origóra illeszkedő homoklinikus megoldást szeretnénk a fent bemutatott módszerrel keresni. Ehhez teljesülnie kell, hogy az origó hiperbolikus fixpont legyen, ezért ezt leellenőrizzük. Az nyilvánvalóan látszik, hogy az origó fixpontja a rendszernek, így a 6.15. definíció értelmében azt kell megnézni, hogy a $J_g(0,0)$ mátrix reguláris és a

$$J_g(0,0) \cdot J_h(0,0)$$

mátrixnak nincsen 1 abszolút értékű sajátértéke. A

$$(J_g)(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta \\ -\delta & 1 - \frac{\delta}{2}c \end{bmatrix}$$

mátrix

$$\det((J_g)(0,0)) = 1 - \frac{\delta c}{2} - \delta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \delta \neq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{2} + 4}\right),$$

determinánsát vizsgálva látható, hogy azaz δ-t megfelelően választva a $(J_g)(0,0)$ mátrix reguláris. A másik vizsgálandó mátrix:

$$M_c := J_g^{-1}(0,0) \cdot J_h(0,0) = \frac{1}{1 - \frac{\delta c}{2} - \delta^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta}{2}c + \delta^2 & 2\delta \\ 2\delta & 1 + \frac{\delta}{2}c + \delta^2 \end{bmatrix}.$$

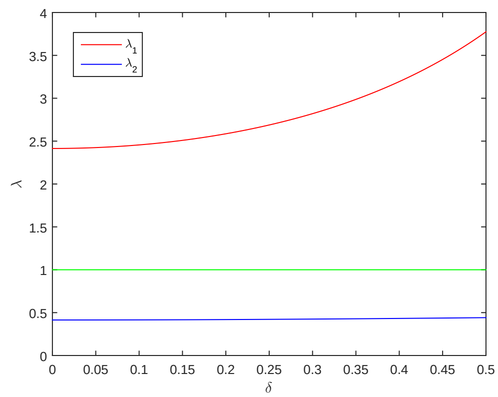
Mivel a folytonos rendszerben $c = 0$ paraméter esetén jelenik meg homoklinikus pálya, a diszkrét rendszert is ezen paraméterválasztás mellett tekintjük, azaz az M_0 mátrixot kell hiperbolikusság szempontjából vizsgálnunk:

$$M_0 = \frac{1}{1-\delta^2}\begin{bmatrix} 1-\delta^2 & 2\delta \\ 2\delta & 1+\delta^2 \end{bmatrix}, \tag{6.30}$$

melynek sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+\delta^2 \pm \sqrt{2(1+\delta^2)}}{1-\delta^2}.$$

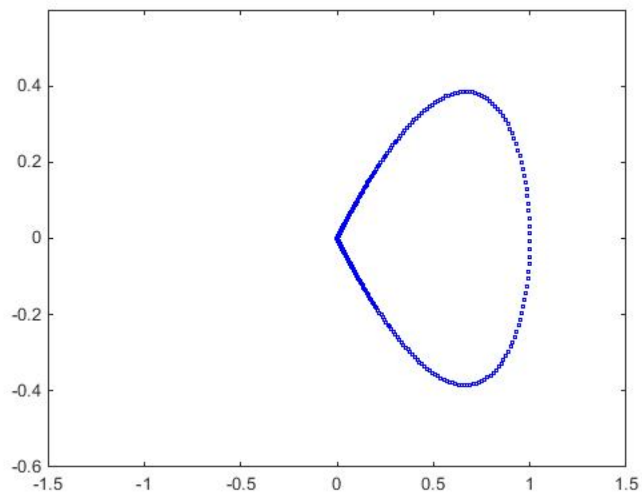
A sajátértékek a 5. ábrán láthatjuk, amely jól mutatja, hogy megfelelő δ paraméter esetén a mátrixnak nincsen 1 abszolút értékű sajátértéke.



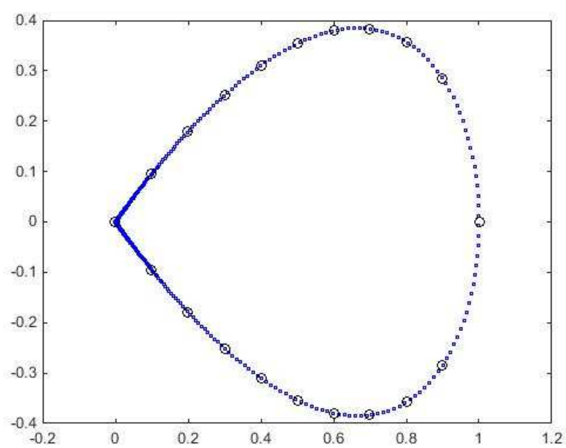
5. ábra. A (6.30) mátrix sajátértékei $\delta \in [0, 0.5]$ értékek mellett.

6.4.2. Numerikus kísérletek

A fentiekben megadott, a trapéz szabály alkalmazásával nyert implicit differenciaegyenlet-rendszerre az ebben a fejezetben bemutatott eljárást alkalmaztuk. Egy eredmény a 6. ábrán látható. Továbbá arra is végeztünk numerikus kísérleteket, hogy az új módszer által adódó homoklinikus megoldás az eredeti, (6.22) folytonos rendszer homoklinikus megoldása-e, pontosabban, hogy a két pálya ugyanazon görbén halad-e. Ezek a kísérletek igenlő választ adtak, melyet a 7. ábra is jól mutat, melyen kékkel jelöltük az új módszer eredményét, a fekete körökkel jelölt pontok pedig a (6.22) folytonos rendszer homoklinikus megoldásának egyes pontjai.



6. ábra. A (6.27) rendszer homoklinikus megoldásának közelítése



7. ábra. A folytonos rendszerben megjelenő homoklinikus pálya a diszkrét rendszer homoklinikus pályája is, ezt az új módszer is mutatja

Függelék (Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció kimutatása)

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a (6.22)-ben megadott

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= 2x - 3x^2 - y(x^3 - x^2 + y^2 - c) \end{cases} \tag{6.31}$$

differenciálegyenlet-rendszerben $c^* := -4/27$ paraméter-értéknél Poincaré-Andronov-Hopf-bifurkáció lép fel: a $\xi_2 := (2/3, 0)$ egyensúlyi elveszti stabilitását, és egy periodikus megoldás bifurkálódik. Valóban, a c^* értéknél a $J_f(\frac{2}{3}, 0)$ mátrix

$$p(z) := z^2 - \mathrm{sp}(J_f(\xi_2))z + \det(J_f(\xi_2)) = z^2 - \left(\frac{4}{27} + c\right)z + 4 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

karakterisztikus polinomjának egy komplex konjugált gyökpárja van: $\pm\imath\omega$. Ahhoz, hogy megállapítsuk, szuper- vagy szubkritikus bifurkáció lép-e fel, az alábbiakban meghatározzuk az l_1 első Ljapunov együtthatót, melynek előjelében rejlik a válasz. l_1 a következő módon számítható (vö.: [17]):

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{2\omega} \cdot \Re\left[\langle p, C(q,q,\overline{q})\rangle - 2\left\langle p, B\left(q, \mathfrak{A}^{-1}B(q,\overline{q})\right)\right\rangle\right. \\ &\quad \left. + \left\langle p, B\left(\overline{q}, (2\imath\omega I_2 - \mathfrak{A})^{-1} B(q,q)\right)\right\rangle\right] \end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

ahol I_2 jelöli az $\mathbb{R}^{2\times 2}$-beli egységmátrixot, valamint a $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bilineáris funkcionál a

$$B_i(u,v) := \sum_{j,k=1}^{2} \left.\frac{\partial^2 f_i(\zeta, c^*)}{\partial\zeta_j \partial\zeta_k}\right|_{\zeta=\xi_2} u_j v_k \quad (i \in \{1,2\})$$

képlettel, míg a $C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a

$$C_i(u,v,w) := \sum_{j,k,l=1}^{2} \left.\frac{\partial^3 f_i(\zeta, c^*)}{\partial\zeta_j \partial\zeta_k \partial\zeta_l}\right|_{\zeta=\xi_2} u_j v_k w_l \quad (i \in \{1,2\})$$

képlettel definiált, továbbá $p, \overline{q} \in \mathbb{C}^2$ az $\mathfrak{A} := J_f(\xi_2\,; c^*)$ mátrix $\imath\omega$ és $-\imath\omega$ sajátértékekhez tartozó bal, és jobb oldali sajátvektorai, azaz fennállnak a

$$\mathfrak{A}q = \imath\omega q, \qquad \mathfrak{A}^T p = -\imath\omega p \tag{6.33}$$

egyenlőségek, továbbá a

$$\langle p, q \rangle = 1 \tag{6.34}$$

normalizáló feltétel, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a szokásos skaláris szorzat $\mathbb{C}^2$-ben. Az $l_1 < 0$, ill. $l_1 > 0$ esetben szuper-, ill. szubkritikus bifurkációról beszélünk. Így a példában szereplő rendszer PAH-bifurkációja típusának meghatározásához a fenti mennyiség kiszámítása szükséges. Első lépésként megadjuk a $B = (B_1, B_2)$ és $C = (C_1, C_2)$ leképezéseket. Mivel $f_1(x, y) = 2y$, azaz elsőfokú polinom, $B_1(u, v) = C_1(u, v) = 0$ tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^2$ esetén. B_2 együtthatóinak számítása:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 f_2(\zeta, c^*)}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1}\right|_{\zeta=\xi_2} &= \left.\frac{\partial}{\partial \zeta_1}(2 - 6\zeta_1 - 3\zeta_2\zeta_1^2 + 2\zeta_1\zeta_2)\right|_{\zeta=\xi_2} = \\
&= -6 - 6\zeta_1\zeta_2 + 2\zeta_2|_{\zeta=\xi_2} = -6, \\
\left.\frac{\partial^2 f_2(\zeta, c^*)}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}\right|_{\zeta=\xi_2} &= \left.\frac{\partial}{\partial \zeta_2}(2 - 6\zeta_1 - 3\zeta_2\zeta_1^2 + 2\zeta_1\zeta_2)\right|_{\zeta=\xi_2} = \\
&= -3\zeta_1^2 + 2\zeta_1|_{\zeta=\xi_2} = 0, \\
\left.\frac{\partial^2 f_2(\zeta, c^*)}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_1}\right|_{\zeta=\xi_2} &= \left.\frac{\partial^2 f_2(\zeta, c^*)}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}\right|_{\zeta=\xi_2} = 0, \\
\left.\frac{\partial^2 f_2(\zeta, c^*)}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_2}\right|_{\zeta=\xi_2} &= \left.\frac{\partial}{\partial \zeta_2}(-\zeta_1^3 + \zeta_1^2 - 3\zeta_2^2 + c^*)\right|_{\zeta=\xi_2} = \\
&= -6\zeta_2|_{\zeta=\xi_2} = 0.
\end{aligned}$$

Hasonlóan alább C_2 együtthatói:

$$\left.\frac{\partial^3 f_2(\zeta,c^*)}{\partial\zeta_1\partial\zeta_1\partial\zeta_1}\right|_{\zeta=\xi_2} = \left.\frac{\partial}{\partial\zeta_1}(-6-6\zeta_1\zeta_2+2\zeta_2)\right|_{\zeta=\xi_2} = -6\zeta_2|_{\zeta=\xi_2} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^3 f_2(\zeta,c^*)}{\partial\zeta_1\partial\zeta_1\partial\zeta_2}\right|_{\zeta=\xi_2} = \left.\frac{\partial}{\partial\zeta_1}(-3\zeta_1^2+2\zeta_1)\right|_{\zeta=\xi_2} = -6\zeta_1+2|_{\zeta=\xi_2} = -4,$$

$$\left.\frac{\partial^3 f_2(\zeta,c^*)}{\partial\zeta_1\partial\zeta_2\partial\zeta_1}\right|_{\zeta=\xi_2} = \left.\frac{\partial^3 f_2(\zeta,c^*)}{\partial\zeta_2\partial\zeta_1\partial\zeta_1}\right|_{\zeta=\xi_2} = \left.\frac{\partial^3 f_2(\zeta,c^*)}{\partial\zeta_1\partial\zeta_1\partial\zeta_2}\right|_{\zeta=\xi_2} = -4,$$

$$\left.\frac{\partial^3 f_2(\zeta,c^*)}{\partial\zeta_1\partial\zeta_2\partial\zeta_2}\right|_{\zeta=\xi_2} = \left.\frac{\partial}{\partial\zeta_1}(-6\zeta_2)\right|_{\zeta=\xi_2} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^3 f_2(\zeta,c^*)}{\partial\zeta_2\partial\zeta_2\partial\zeta_1}\right|_{\zeta=\xi_2} = \left.\frac{\partial^3 f_2(\zeta,c^*)}{\partial\zeta_2\partial\zeta_1\partial\zeta_2}\right|_{\zeta=\xi_2} = \left.\frac{\partial^3 f_2(\zeta,c^*)}{\partial\zeta_1\partial\zeta_2\partial\zeta_2}\right|_{\zeta=\xi_2} = -4,$$

$$\left.\frac{\partial^3 f_2(\zeta,c^*)}{\partial\zeta_2\partial\zeta_2\partial\zeta_2}\right|_{\zeta=\xi_2} = \left.\frac{\partial}{\partial\zeta_2}(-6\zeta_2)\right|_{\zeta=\xi_2} = -6.$$

A p, q sajátvektorok a (6.33) képletek alapján:

$$q = (1,\imath), \qquad p = (a, a\imath)$$

alkalmas $a \in \mathbb{R}$ konstanssal, mellyel teljesül a (6.34) normalizáló feltétel, azaz, hogy

$$\langle p,q\rangle = a + (\imath)\overline{(a\imath)} = 2a = 1,$$

amiből $a = 1/2$ adódik.

Az alábbiakban a (6.32)-beli formulával megadott l_1 számítását részletezzük. $C_2(q,q,\overline{q}) = -10\imath$, így $C(q,q,\overline{q}) = (0,-10\imath)$, amiből

$$\langle p, C(q,q,\overline{q})\rangle = -5. \tag{6.35}$$

Mivel $B_2(q,\overline{q}) = -6$, így $B(q,\overline{q}) = (0,-6)$, melyből

$$\mathfrak{A}^{-1}B(q,\overline{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} = (3,0)^T$$

adódik, így

$$\langle p, \mathfrak{A}^{-1} B(q, \overline{q}))\rangle = 3/2. \tag{6.36}$$

Az utolsó részlet meghatározásához először kiszámítjuk a $(2\imath\omega I_2 - \mathfrak{A})^{-1}$ mátrixot:

$$(2\imath\omega I_2 - \mathfrak{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 4\imath & 2 \\ -2 & 4\imath \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2\imath & 1 \\ -1 & -2\imath \end{bmatrix}.$$

Innen

$$(2\imath\omega I_2 - \mathfrak{A})^{-1} \cdot B(q, q) = (-1, 2\imath)^T,$$

majd

$$B(q, (2\imath\omega I_2 - \mathfrak{A})^{-1} \cdot B(q, q)) = -3\imath \tag{6.37}$$

adódik. A (6.35), (6.36) és (6.37) eredményeket összevetve kapjuk, hogy

$$l_1 = \frac{1}{2\omega}\Re(-5 - 2 \cdot 3/2 - 3\imath) = \frac{1}{4} \cdot 8 = -2 < 0,$$

így a PAH-bifurkáció szuperkritikus, azaz a bifurkálódó periodikus megoldás orbitálisan aszimptotikusan stabilis.

Hivatkozások

[1] Agarwal, R. P.: *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications.*Second edition, Marcel Dekker, New York, 2000.

[2] Alonso, A. I.; Jialin Hong,Obaya, R.: *Exponential Dichotomy and Trichotomy for Difference Equations*, Computers and Mathematics with Applications, **38**, 41–49, 1999.

[3] Aulbach, B.; ; Zabreiko, P. P.: *The concept of spectral dichotomy for linear difference equations*, J. Math. Anal. and Appl., **185**, 275–287, 1994.

[4] Aulbach, B.; Van Minh, N.: *The concept of spectral dichotomy for linear difference equations II*, J. Difference Equ. Appl., **2**, 251–262, 1996.

[5] Aulbach, B.; Kalkbrenner, J.: *Exponential Forward Splitting for Noninvertibel Difference Equations*, Comp. and Math. with Appl., **42**, 743–754, 2001.

[6] Beyn, W-J.; Kleinkauf, J-M.: *The numerical computation of homoclinic orbits of maps*, SIAM J. Numer. Anal. **34**, 1207–1236, 1997

[7] Császár, Sz.: *Exponenciális dichotómia* (BSc szakdolgozat), 2015. (`https://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2015/csaszar_szilvia.pdf`)

[8] Császár, Sz.; Kovács, S.: *Approximating homoclinic orbits of autonomous systems via discrete dichotomies*, J. Difference Equ. Appl. (to submit)

[9] Daleckii, Ju. L.; Krein, M. G.: *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*, Translations of mathematical monographs, **43**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1974

[10] Ford, N.J., Edwards, J.T.: *Boundedness and stability of solutions to difference equations* Journal of Computational and Applied Mathematics, **140**, 275?289, 2002.

[11] Hale, J. K.; Koçak, H.: *Dynamics and bifurcations*, Texts in Applied Mathematics, **3**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[12] HENRY, D.: *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **840**, Springer Berlin, 1981.

[13] HUY, N. T.; HA, V. T. N.: *Exponential dichotomy of difference equations in l_p-phase spaces on the half-line*, Advances in Difference Equations, 1–14, 2006.

[14] HUY, N. T.; MINH, N. V.: *Exponential dichotomy of difference equations and applications on the half-line*, Advances in Difference Equations, Computers and Mathematics with Applications, **42**, no. 3-5., 301–311, 2001.

[15] KATO, T.: *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, New York, 1980.

[16] KOVÁCS, S.: *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, (2013) ISBN: 978-963-284-445-9

[17] KUZNETSOV, Y. A.: *Elements of applied bifurcation theory*, Third edition. Applied Mathematical Sciences, **112**, Springer-Verlag, New York, 2004.

[18] LAKSHMIKANTHAM, V., TRIGIANTE, D.: *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications*, Academic Press, San Diego, 1988.

[19] LI, T.: *Die Stabilitätsfrage bei Differenzengleichungen*, Acta Math., **63**, 99–141, 1934.

[20] NA, P. L.: *An Application of the Spectral Dichotomy Theory for Difference Equation*, Vietnam Journal of Mathematics **25**:4, 371–377, 1997.

[21] PALMER, K. J.: *Exponential dichotomies, the Shadowing-lemma and transversal homoclinic points* in "Dynamics Reported", **1**, 265–306, 1988.

[22] PAPASCHINOPOULOS, G.; SCHINAS, J: *Criteria for an exponential dichotomy of difference equations*, Czechslovak Mathematical Journal, **35:2**, 295 – 299, 1985.

[23] PAPASCHINOPOULOS, G.: *Dichotomies in Terms of Lyapunov Functions for Linear Difference Equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **152**, 524 – 535, 1990.

[24] Pötzsche, C.: *Smooth Roughness of Exponential Dichotomies, revisited*, Discrete and Continouos Dynamical Systems series B, **20**, 853–859 2015.

[25] Pötzsche, C.: *Smooth Roughness of Exponential Dichotomies, revisited*, Discrete and Continouos Dynamical Systems series B, **20**, 853–859 2015.

[26] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II B*, Springer, 1990.