Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A járványterjedés vizsgálata a numerikus analízis eszközeivel

MSc Szakdolgozat

Készítette: Csurkó Lilla
Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető: Dr. Faragó István
Egyetemi tanár
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

1

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek Faragó István Tanár Úrnak, akitől rengeteget tanulhattam mind szakmailag, mind emberileg egyetemi éveim alatt. Tengernyi feladata mellett hétről hétre foglalkozott velem, segítette munkám, hitt bennem és biztatott. Nem lehetek elég hálás neki önzetlenségéért.

Köszönettel tartozom még anyukámnak és apukámnak végtelen türelmükért és szeretetükért, amivel mindvégig támogattak tanulmányaim során.

Végezetül köszönöm magamnak a türelmet, hogy a nehézségek ellenére mindvégig kitartottam céljaim mellett és elértem azokat!

2

Motiváció

A járványterjedés jelensége jól leírható közönséges differenciálegyenlet rendszerekkel. Ezek a dinamikai modellek a lakosság egyes megbetegedésére vonatkozó típusainak számának időbeli alakulását vizsgálják. A modellekben a szokásos jelölés:

- Az első csoportban vannak a fogékony egyedek, akik megfertőzhetőek. Az angol *susceptible* szó miatt a szakirodalom ezt az állapotot S-sel jelöli.
- A második csoportban a fertőzöttek vannak. Ők adják át a betegséget az S-beli egyedeknek. Az angol $infected$ szó alapján I jelöli ezt az állapotot.
- A harmadik csoportban vannak az úgynevezett betegségből retiráltak. Ők azok, akik meghaltak, felépültek és immunissá váltak, vagy izolálódtak. A lényeg, hogy már nem tudnak fertőzést továbbítani. Ezt az állapotot jelöli R, mely a *removed* szóra utal.

Az egyik legközismertebb modell az úgynevezetett SIR-kompartment modell, melyet 1927-ben W. O. Kermack és A. G. McKendrick készített. Ebben a modellben a teljes populációt, melynek mérete N, három csoportba osztják. A fertőzött egyedek megbetegítik a fogékony egyedeket, a fertőzött egyedek pedig retiráltakká válnak, újra fogékonnyá nem. Tehát a betegség lefolyása, azaz a csoportok közötti mozgás egyirányú, mely a következőképpen értelmezhető

$$S \to I \to R.$$

Ezzel a modellel írható le például a kanyaró, vagy a pestis terjedése.
Dolgozatomban egy olyan modellt vizsgálok részletesebben, amelyben a populáció két csoportra van osztva, nevezetesen fertőzhetőekre (S) és fertőzöttekre (I). A fertőzőek megbetegíthetik a fogékonyakat, azonban fel is épülhetnek és újra fogékonnyá válnak, azaz $I \to S$ átalakulás is lehetséges. Tehát a csoportok közötti mozgás kétirányú. Fontos, hogy szerzett immunitás nincs és a halálozást nem vesszük figyelembe. Tehát a betegség terjedésének mechanizmusa:

$$S \to I \to S.$$

Az ilyen modelleket SIS modelleknek nevezzük.

3

SIS MODELL HOMOGÉN POPULÁCIÓ ESETÉN

3.1 Az SIS és SIR modellek közötti kapcsolat

A klasszikus SIR modellben a teljes populációt-melynek méretét jelölje N-homogénnek vesszük, bárki bárkit megfertőzhet. Ennek SIS változata az, amikor továbbra sem teszünk különbséget a populáció egyedei között, azaz ebben az esetben is bárki bárkit megfertőzhet és emellett nincsen retirált osztály, tehát aki az SIR modellben R-be került át, az ebben a modellben S-be kerül. Ekkor a modellre a következő differenciálegyenlet rendszer írható fel:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -kSI + \lambda I \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = kSI - \lambda I, \end{cases} \tag{1}$$

ahol λ jelöli a gyógyulási rátát, k pedig a fertőzés intenzitásának rátáját jelöli, mely értelmezhető valószínűségként is: mekkora valószínűséggel kapja el a betegséget a fogékony egyed, amikor találkozik egy fertőzött egyeddel. Ezen modell segítségével írható le például az influenza terjedése.
Az (1) egyenletrendszert alkotó egyenleteket összeadva kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S + I) = 0,$$

így $S + I = const = N$, ezért (1) a következő alakban írható:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = I(kN - \lambda) - kI^2 \tag{2}$$

A differenciálegyenletnek ott van egyensúlya pontja, ahol

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Az egyik egyensúlyi helyzet, amikor

$$I = 0,\ S = N \tag{3}$$

azaz amikor mindeki egészséges, nincsen fertőzés. A másik egyensúlyi helyzet esetén

$$I = N - \frac{\lambda}{k}, \; S = \frac{\lambda}{k}. \tag{4}$$

Vizsgáljuk meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását!
Ehhez tekintsük az (1) rendszer Jacobi-mátrixát a (3) egyensúlyi pontban! Ekkor

$$\mathbf{J}\begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -kN+\lambda \\ 0 & kN-\lambda \end{pmatrix},$$

így $S = N$ és $I = 0$ stabilis egyensúlyi helyzet, ha $kN - \lambda < 0$, mely pontosan akkor teljesül, amikor $\dfrac{kN}{\lambda} < 1$.
Vizsgáljuk a (4) egyensúlyi pontot! Ekkor

$$\mathbf{J}\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{k} \\ N - \frac{\lambda}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kN+\lambda & 0 \\ kN-\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

tehát $S = \dfrac{\lambda}{k}$ és $I = N - \dfrac{\lambda}{k}$ stabilis egyensúlyi helyzet, ha $-kN + \lambda < 0$, mely pontosan akkor teljesül, amikor $\dfrac{kN}{\lambda} > 1$.

A járványterjedés matematikai vizsgálatának egyik kulcsfontosságú eleme az úgynevezett alap reprodukciós ráta, melyet a szakirodalom R_0-lal jelöl. Ez adja meg, hogy egy fertőzött egyed várhatóan hány másik egyednek adja át a betegséget. Azaz ha R_0 értéke egynél kisebb, akkor a populációból a fertőzés eltűnik, azonban ha nagyobb egynél, akkor a populációban a betegség fenn áll.
Az (1) SIS modell esetén

$$R_0 = \frac{kN}{\lambda}.$$

Ezen ráta segítségével is megadhatjuk az egyensúlyi helyzetek stabilitását:

- $R_0 \leq 1$ esetén $I = 0, \quad S = N$ stabilis egyensúlyi helyzet
- $R_0 > 1$ esetén $I = N - \dfrac{\lambda}{k}, \quad S = \dfrac{\lambda}{k}$ stabilis egyensúlyi helyzet.

4

Diszkrét modellek

Az eddigiekben megismertük és megértettük az SIS-modellt homogén populáció esetén, azonban ezen dolgozatnak nem tárgya a folytonos differenciálegyenlet rendszer kvalitatív tulajdonságainak vizsgálata. A folytonos matematikai modell ötletet adott, közvetlen diszkretizációja segítségével építjük fel a diszkrét matematikai modelleket. Dolgozatunkban elsődleges célunk, hogy megadjuk azokat a feltételeket, amelyek mellett a diszkrét modellek kvalitatív módon tükrözik az eredeti (biológiai, járványterjedési) modellek legfontosabb kvalitatív tulajdonságait. A dolgozatunknak az sem célja, hogy a numerikus megoldásról ellenőrizze, hogy konvergál-e a folytonos matematikai modell megoldásához.
A továbbiakban különböző diszkretizációs elvek segítségével építjük fel a [0,T] időintervallumon a numerikus modelleket, és vizsgáljuk meg azokat.

4.1 Az explicit Euler módszer vizsgálata

Az (1) rendszerre alkalmazva az explicit Euler módszert, a

$$\begin{cases} \dfrac{S^{n+1}-S^n}{h} = -kS^nI^n + \lambda I^n \\ \\ \dfrac{I^{n+1}-I^n}{h} = kS^nI^n - \lambda I^n, \end{cases} \tag{5}$$

$n = 0, 1, \ldots, L-1$ numerikus modellt kapjuk, ahol L az időlépések száma a numerikus megoldás során, továbbá $h = T/L$ az időlépések hossza. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $h \equiv h_n$, azaz a rács ekvidisztáns. A kezdeti feltételek ismeretében S^0 és I^0 is adottak a követező módon: $S^0 = S(0)$ és $I^0 = I(0)$.

Vizsgáljuk meg, hogy a (5) diszkrét modell megőrzi-e a nemnegativitási tulajdonságot, illetve adjunk feltételt, mely garantálja ezt a kvalitatív tulajdonságot! Azt kell megvizsgálnunk, hogy I^n és S^n nemnegativitásából következik-e I^{n+1} és S^{n+1} nemnegativitása. Ehhez vizsgáljuk meg rendre az (5) rendszert alkotó egyenleteket!

Tekintsük az első egyenletet!

$$S^{n+1} = S^n - hkS^nI^n + h\lambda_I^n = (1 - hkI^n)S^n + h\lambda I^n$$

Ebben az esetben megőrződik a nemnegativitás, azaz ha S^n és I^n nemnegatívak, akkor S^{n+1} is nemnegatív, ha teljesül a következő feltétel

$$h < \frac{1}{kI^n}.$$

Tekintsük a második egyenletet! Ekkor

$$I^{n+1} = I^n + hkS^nI^n - h\lambda I^n = (1 - h\lambda)I^n + hkS^nI^n,$$

melyből adódik, hogy ha S^n és I^n nemnegatívak, akkor I_1^{n+1} nemnegativása is teljesül, ha

$$h < \frac{1}{\lambda}.$$

Tehát az időlépés hosszára vonatkozóan a posteriori felső korlátokat kaptunk, melyből az egyik nem független az n időlépéstől. Vegyük észre, hogy (5) egyenleteit összeadva megmutatható, hogy a teljes populáció létszáma konstans minden diszkrét időpillanatban, ugyanis az egyenleteket összeadva kapjuk, hogy

$$S^{n+1} + I^{n+1} = S^n + I^n,$$

tehát

$$S^n + I^n = const \equiv N.$$

Ebből a kvalitatív tulajdonságból következik, hogy

$$I^n \leq N. \tag{6}$$

Használjuk ezen becslést a h-ra kapott feltételben! Ekkor

$$h < \frac{1}{kN} \tag{7}$$

egyenlőtlenséget kapjuk.
Tehát a nemnegativitás megőrzésére elégséges a priori feltételt kaptunk, mely az időlépés hosszára felső korlátot ad, nevezetesen

$$h < \min\left\{\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{kN}\right\}.$$

4.1. Tétel *Ha a kezdeti feltételben $S(0) \geq 0$ és $I(0) \geq 0$, akkor az explicit Euler módszer a homogén SIS modellre megőrzi a nemnegativitást, ha*

$$h < \min\left\{\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{kN}\right\}.$$

A fenti eredmény szemléltetése céljából MATLAB programokat készítettem. A számítógépes tesztelésnél $\lambda = 0.2$ és $k = 0.1$ paramétereket választottam, továbbá a kezdeti feltételben $S(0)$ értéke 20, míg $I(0)$ értéke 1. Ekkor a feltétel: $h < 0.476$.

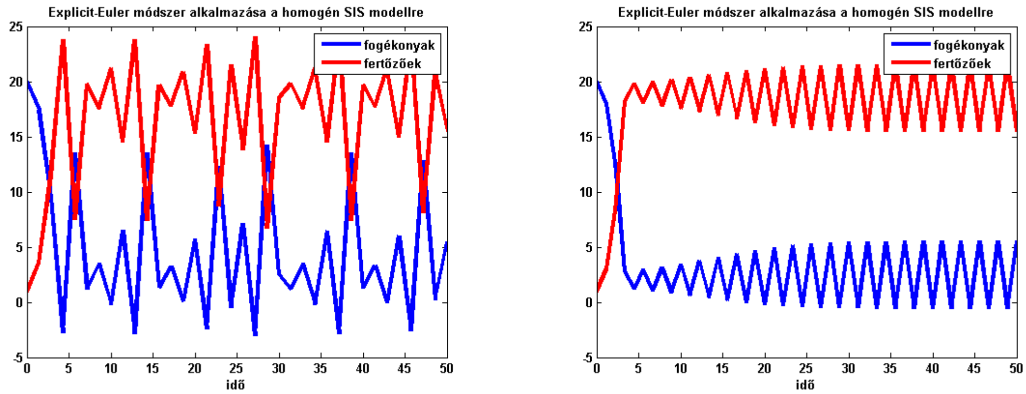

Figure 1: Explicit Euler módszer 35 illetve 45 időlépés esetén

Az 1. ábrán jól látható, hogy a módszer az előírt időlépéshossznál nagyobb megválasztása esetén torz eredményt ad, a megoldásgörbék oszcillálnak és egyes időrétegeken az egyedszámok negatívvá válnak.
Vizsgáljuk meg, hogy 1000 időlépés esetén, megkapjuk-e a folytonos SIS modell stabilitási tulajdonságát! $\lambda = 0.2$, $k = 0.1$ és $N = 10$ megválasztással az alap reprodukciós szám értéke $5 > 1$ tehát a belső egyensúlyi pontunk stabilis, melynek értéke 8, továbbá $\lambda = 0.8$, $k = 0.08$ és $N = 10$ megválasztással az alap reprodukciós szám értéke 1, tehát ez a folytonos modell szempontjából annak felel meg, amikor a fertőzés a populációból eltűnik.
A 2. ábrán jól látható, hogy megfelelően nagy időlépés esetén a (5) diszkrét modell visszaadja a folytonos modell stabilitási tulajdonságát.

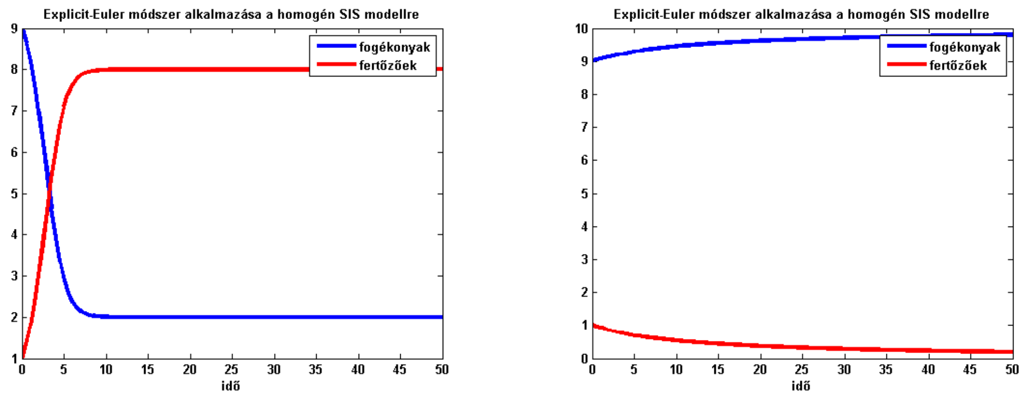

Figure 2: Explicit Euler módszer $R_0 > 1$ illetve $R_0 <= 1$ esetén

4.2 Egy lehetséges IMEX modell

Használjunk más véges differenciás numerikus módszert az (1) rendszerre! A feladatra az implicit-explicit, úgynevezett IMEX módszert alkalmazva

$$\begin{cases} \dfrac{S^{n+1} - S^n}{h} = -kS^{n+1}I^n + \lambda I^n \\[2ex] \dfrac{I^{n+1} - I^n}{h} = kS^n I^n - \lambda I^{n+1}, \end{cases} \tag{8}$$

$n = 0, 1, \ldots, L - 1$ numerikus modellt kapjuk.
Vizsgáljuk meg, hogy ez a diszkrét modell milyen feltételek mellett őrzi meg a nemnegativitást! Tekintsük a rendszert alkotó első egyenletet!

Jelölje

$$A_1 = 1 + hkI^n \quad \text{és} \quad F_1^n = S^n + h\lambda I^n.$$

Ezen jelölésekkel az első egyenlet az

$$A_1 S^{n+1} = F_1^n$$

alakban írható.

Az

$$A_2 = 1 + h\lambda \quad \text{és} \quad F_2^n = I^n + hkS^n I^n$$

jelöléseket bevezetve a második egyenlet az

$$A_2 I^{n+1} = F_2^n$$

alakban írható.

Ekkor a diszkrét rendszer a következő alakban írható fel:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{n+1} \\ I^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^n \\ F_2^n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A_n z = F_n.$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg, hogy ez a diszkrét modell milyen feltételek mellett őrzi meg a nemnegativitási tulajdonságot! Mivel A diagonális mátrix, ezért inverze az alábbi módon könnyen számítható

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{pmatrix}.$$

Ezen jelölésekkel tehát a nemnegativitás feltételei melyeket vizsgálnunk kell $F_i^n \geq 0$ és $A_i^{-1} > 0,\ i = 1, 2$.
Vizsgáljuk meg a két feltételt $i = 1$ esetén! Ekkor $A_1^{-1} > 0$ pontosan akkor teljesül, amikor

$$\frac{1}{1 + hkI^n} > 0.$$

Az első feltétel I^n nemnegativitása miatt tehát automatikusan teljesül, mivel a tört számlálója és nevezője is nemnegatív. A második feltétel $i = 1$ esetén $F_1^n \geq 0$ pontosan akkor teljesül, amikor

$$S^n + h\lambda I^n \geq (1 + h\lambda)N \geq 0.$$

Mivel a szorzat mindkét tényezője nemnegatív, így ez a feltétel is teljesül. Tehát S^n, I^n nemnegativitása garantálja, hogy S^{n+1}nemnegatív.
Tekintsük az $i = 2$ esetet! Ekkor az első feltétel $A_2^{-1} > 0$ pontosan akkor teljesül, amikor

$$\frac{1}{1 + h\lambda} > 0,$$

mely automatikusan teljesül, hiszen a tört számlálója és nevezője is nemnegatív. A második feltétel $i = 2$ esetén $F_2^n \geq 0$, mely pontosan akkor teljesül, amikor

$$I^n + hkS^n I^n \geq 0.$$

Ez I^n, S^n nemnegativitásából következik. Tehát a (8) IMEX módszernél a nemnegativitás tulajdonsága automatikusan teljesül, az időlépés hosszától függetlenül.

4.2. Tétel *Ha a kezdeti feltételben $S(0) \geq 0$ és $I(0) \geq 0$, akkor az IMEX módszer a homogén SIS modellre megőrzi a nemnegativitást tetszőleges h időlépés esetén.*

Az 1. ábrán láttuk, hogy az Explicit Euler módszer az előírt lépéshossznál nagyobb megválasztása esetén oszcilláló megoldásgörbét ad, mely nemnegatív értékeket is felvesz. A 3. ábrán jól látható, hogy ugyanazon időlépés esetén az IMEX által kapott megoldásgörbék simák és pozitívak. Vegyük észre, hogy $N = 21$ a futtatás során, azonban az árbán jól látható módon a fertőzőek egyedszáma eléri a 35 főt is. Ennek oka, hogy ez a diszkrét modell nem rendelkezik a tömegtartás kvalitatív tulajdonságával, hiszen

$$S^{n+1} + I^{n+1} \neq S^n + I^n = N.$$

Az össztömeg alakulását az egyes időrétegeken a következő táblázat mutatja:

n-edik időréteg	$N - (I^n + S^n)$
0	0
1	-0,25
2	0,27
3	4,41
4	11,07
5	14,40
6	15,18
7-35	15,35

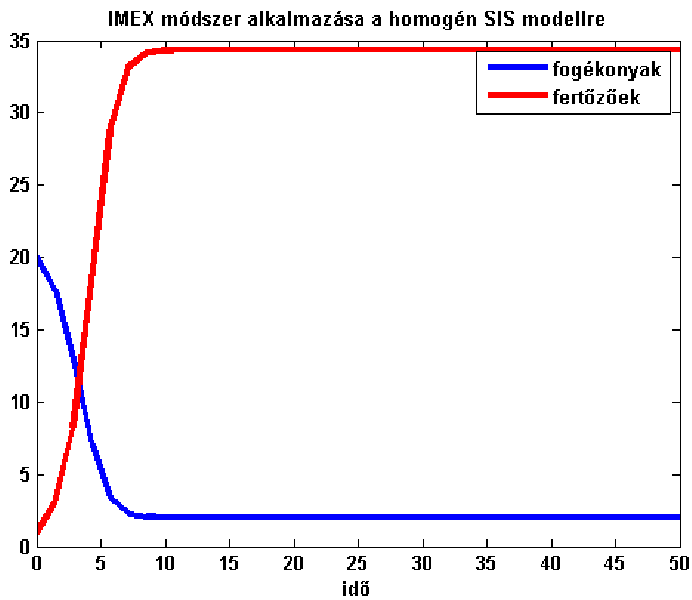

Figure 3: IMEX módszer 45 időlépés esetén

4.3 Egy másik lehetséges IMEX modell

Alkalmazzunk egy másik IMEX módszert az (1) rendszerre!
Ekkor a következő

$$\begin{cases} \dfrac{S^{n+1} - S^n}{h} = -kS^{n+1}I^n + \lambda I^n \\[2ex] \dfrac{I^{n+1} - I^n}{h} = kS^{n+1}I^n - \lambda I^n, \end{cases} \tag{9}$$

$n = 0, 1, \ldots, L-1$ numerikus modellt kapjuk.

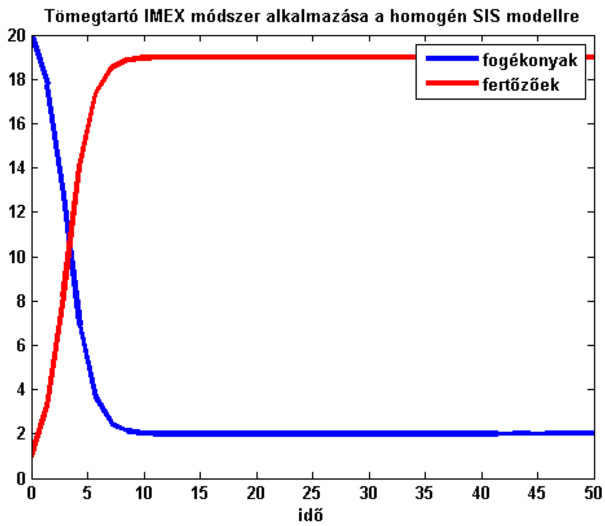

Figure 4: Tömegtartó IMEX módszer 45 időlépés esetén

Ezen modell már rendelkezik a tömegtartás kvalitatív tulajdonságával, hiszen $S^{n+1} + I^{n+1} = S^n + I^n = N$. Előzetes elvárásainknak megfelelően a 4. ábrán jól látható, hogy ezen modell megoldására már teljesül, hogy $S^n + I^n = 21$ minden diszkrét időpillanatban.

5

A FOLYTONOS GONORRHEA MODELL VIZSGÁLATA

A továbbiakban két részre osztjuk a lakosságot nemük alapján és olyan betegséget vizsgálunk, amely nem mindegyik egyed között terjed, hanem csak speciális esetben. Tipikus példa erre az esetre a szexuális úton terjedő fertőzések. Dolgozatunkban ezt az esetet vizsgáljuk részletesebben. Mi az azonos neműek közötti megbetegedést nem vizsgáljuk, azaz ez a modell nem alkalmas pl. az AIDS terjedésének modellezésére.

5.1 A Gonorrhea modell felépítése

A Gonorrhea fertőzés nemi úton terjed férfiak és nők között. Az egymásra ható csoportok tehát a férfiak (1) és a nők (2), mely csoportok egyedei lehetnek fogékonyak $(S_i,\ i = 1,2)$, illetve fertőzöttek $(I_i,\ i = 1,2)$.

Tekintsük az egyszerű Gonorrhea modellt, melyet Cooke és Yorke alkottak meg 1984-ben. Ez egy SIS modell, két egymásra ható populációval. Jelölje $S_i,\ i = 1,2$, illetve $I_i,\ i = 1,2$ a fogékonyak, illetve a fertőzöttek csoportját, ha a teljes populációt a férfiak (1) és a nők (2) alkotják. Ekkor a modellre a következő differenciálegyenlet rendszer írható fel:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t} = -k_{12}S_1I_2 + \lambda_1 I_1 \\[2ex] \dfrac{dI_1}{dt} = k_{12}S_1I_2 - \lambda_1 I_1 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t} = -k_{21}S_2I_1 + \lambda_2 I_2 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = k_{21}S_2I_1 - \lambda_2 I_2, \end{cases} \tag{10}$$

ahol $\lambda_i,\ i = 1,2$ jelöli a gyógyulási rátát, $k_{12},\ k_{21}$ pedig a fertőzés intenzitásának rátáját jelöli, melyek értelmezhetők valószínűségként is: mekkora valószínűséggel betegítik meg egymást a kapcsolatba kerülő egyedek? Ez a modell természetes általánosítása az előző szakaszban tárgyalt modellnek. Nyilvánvalóan az egyes nemeken belüli szám állandó, azaz

$$S_i + I_i = c_i, \quad i = 1, 2,$$

továbbá

$$c_1 + c_2 = N.$$

5.2 A folytonos Gonorrhea modell stabilitásának vizsgálata

A megoldás létezésének vizsgálatához tekintsük az (10) egyenletrendszer

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -\lambda_1 I_1 + k_{12}(c_1 - I_1)I_2 \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = -\lambda_2 I_2 + k_{21}(c_2 - I_2)I_1 \end{cases} \tag{11}$$

alakját.

Mivel ebben az alakban a rendszer csupán két független ismeretlenre, nevezetesen I_1-re és I_2-re redukálódott, így lehetőségünk van a megoldások görbéit, azaz a trajektóriákat az (I_1, I_2) fázissíkon szemléltetni.

A továbbiakban tegyük fel, hogy I_1 és I_2 folytonosan differenciálható függvények. A rendszernek ott van egyensúlyi pontja, ahol

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = 0 \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

A (11) differenciálegyenlet rendszer lehetséges megoldásai [3]:

1. A megoldás nem korlátos, azaz az idő előre haladtával a megoldás minden határon túl nő.
2. A megoldás egy zárt görbe az egyensúlyi pont egy környezetében.
3. A megoldás egyensúlyi pont.

Először megmutatjuk, hogy az 1. típusú megoldás nem lehet a Gonorrhea modell megoldása, hiszen a trajektóriának a

$$\{0 \leq I_1 \leq c_1; 0 \leq I_2 \leq c_2\}$$

téglalapon belül kell maradni a fázissíkon, ha onnan indult. (Ezt nevezik invarianciának.) Ez természetes elvárás, hiszen azt jelenti a Gonorrhea modellre nézve, hogy a fertőzöttek száma a 0 és a maximálisan megfertőzhető egyedek száma között mozog. Vegyük észre, hogy $I_1 = 0$ és $I_2 = 0$ a modellben annak felel meg, hogy nincs fertőzés és ez a feladatnak egy lehetséges megoldása, tehát feltehető, hogy I_1 vagy I_2 nem nulla. Tegyük fel továbbá, hogy a folytonos modell $t = t_0$-ból indul. Ekkor

$$0 < I_1(t_0) < c_1, \; 0 < I_2(t_0) < c_2.$$

Először megmutatjuk, hogy ha $I_1(t_0) > 0$ és $I_2(t_0) > 0$, akkor $I_1(t) > 0$ és $I_2(t) > 0$ minden $t \geq t_0$ esetén.
Indirekt tegyük fel, hogy a folytonos modell nem őrzi meg a pozitivitást. Legyen $t^* > t_0$ az az időpont, amikor először fordul elő, hogy $I_1(t^*) = 0$, vagy $I_2(t^*) = 0$. Tekintsük az $I_1(t^*) = 0$ esetet! Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}I_1(t^*)}{\mathrm{d}t} = k_{12}c_1I_2(t^*) > 0.$$

Ez azt jelenti hogy t^*-ban I_1 lokálisan növekedő, azaz $t^*- < t^*$ esetén $I_1(t^*-) < 0$. Ez ellentmondás, mivel $I_1(t_0) > 0$, így ahhoz, hogy $I_1(t^*-)$ negatív legyen I_1-nek az egész $t_0 \leq t \leq t^*$ intervallumon 0-nak kell lennie. Ez ellentmond t^* definíciójának, mely szerint t^* az első ilyen időpont, tehát $I_1(t) > 0$ minden $t > t_0$ esetén.

A fenti érvelést módosítva hasonlóan megmutatható, hogy ha $I_1(t_0) < c_1$ és $I_2(t_0) < c_2$ akkor $I_1(t) < c_1$ és $I_2(t) < c_2$ minden $t \geq t_0$ esetén.

5.1. Következmény *A folytonos modell reális értéket ad I_1-nek és I_2-nek, így 1. típusú megoldás nem lehetséges.*

A továbbiakban megmutatjuk, hogy nem lehet határciklus[1]. A trajektória 2. típusú megoldás esetén azonosítható egy zárt görbével. Az önmagukba záródó görbék a fázissíkon oszcillációt jeleznek. Azaz, ha az oszcilláció periódusa T, akkor $I_1(t) = I_1(t + T)$ és $I_2(t) = I_2(t + T)$. Tekintsük a (11)

[1] Az n-dimenziós fázistér olyan zárt görbéjét, amelyet tartalmaz egy olyan nem végtelenül vékony térrész, amelyben más zárt görbe nincs, határciklusnak nevezzük.

differenciálegyenlet rendszer

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = F_1(I_1, I_2) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = F_2(I_1, I_2) \end{cases} \tag{13}$$

alakját.

Tegyük fel, hogy létezik (13)-nek periodikus megoldása, mely a fázissíkon egy zárt görbével reprezentálható. Jelölje ezt a megoldást C, továbbá jelölje R azt a tartományt amely magában foglalja C-t a határával együtt.

Mivel C megoldása a differenciálegyenlet rendszernek, így C mentén

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = F_1(I_1, I_2), \ \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = F_2(I_1, I_2), \tag{14}$$

azaz

$$\oint_C [F_2 \mathrm{d}I_1 - F_1 \mathrm{d}I_2] = \int_0^T \left[F_2 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - F_1 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}\right] \mathrm{d}t = \int_0^T [F_2 F_1 - F_1 F_2] \mathrm{d}t = 0, \tag{15}$$

ahol T a C megoldás periódusa.

Továbbá

$$\frac{\partial F_1}{\partial I_1} + \frac{\partial F_2}{\partial I_2} = -(\lambda_1 + k_{12} I_2 + \lambda_2 + k_{21}) I_1 < 0, \tag{16}$$

mivel a zárójelben minden mennyiség pozitív. Következtetésképpen

$$\int \int_R \left[\frac{\partial F_1}{\partial I_1} + \frac{\partial F_2}{\partial I_2}\right] \mathrm{d}I_1 \mathrm{d}I_2 < 0. \tag{17}$$

A fentieket felhasználva Green-tétel alkalmazásával könnyen megmutatható, hogy nem létezik C periodikus megoldása (13)-nek. Helyettesítsük a (17) kettős integrált C menti vonalintegrállal!

$$0 > \int \int_R \left[\frac{\partial F_1}{\partial I_1} + \frac{\partial F_2}{\partial I_2}\right] \mathrm{d}I_1 \mathrm{d}I_2 = \oint_C [F_2 \mathrm{d}I_1 - F_1 \mathrm{d}I_2] = 0. \tag{18}$$

Ez pedig nyilvánvalóan ellentmondás, amiből következik, hogy nem létezik C periodikus megoldása a Gonorrhea-modellnek.

Tehát kizártuk az 1. illetve 2. típusú megoldást.

5.2. Tétel *Ha (11) differenciálegyenlet rendszernek létezik megoldása, akkor a megoldás egyensúlyi pont.*

A rendszernek ott van egyensúlyi pontja, ahol (12) teljesül. Egy lehetséges egyensúlyi helyzet, amikor

$$I_1 = 0, \ I_2 = 0.$$

Ez az állapot annak felel meg, amikor mindenki egészséges, nincsen fertőzés. A (12)-nak létezik nemtriviális megoldása is, nevezetesen a

$$I_1 = \tilde{I}_1 = \frac{k_{12}k_{21}c_1c_2 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 k_{21} + k_{12}k_{21}c_2}, \tag{19}$$

$$I_2 = \tilde{I}_2 = \frac{k_{12}k_{21}c_1c_2 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 k_{12} + k_{12}k_{21}c_1} \tag{20}$$

pár megoldása (12)-nak, ez behelyettesítéssel könnyen ellenőrízhető.

Közismert, hogy egy lineáris, állandó együtthatós, közönséges differenciálegyenlet rendszernek mindig van exponenciális megoldása, tovvábbá az $I_1 = I_2 = 0$ megoldás stabilitása megfelel a linearizált rendszer $I_1 = I_2 = 0$ egyensúlyi megoldásának a stabilitásával.
A (11) rendszer Jacobi-mátrixa

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - k_{12}I_2 & k_{12}c_1 - k_{12}I_1 \\ k_{21}c_2 - k_{21}I_2 & -\lambda_2 - k_{21}I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix},$$

így a linearizált egyenletrendszer az

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\left(\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & k_{12}c_1 \\ k_{21}c_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{A}$ jelöli a Jacobi-mátrixot az $I_1 = I_2 = 0$ pontban.

Az $\mathbf{A}$ együttható mátrix karakterisztikus polinomja

$$\alpha^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha + \lambda_1\lambda_2 - k_{12}k_{21}c_1c_2,$$

melynek gyökei

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4k_{12}k_{21}c_1c_2}}{2}.$$

Nyilvánvaló, hogy mindkét gyök valós és

$$\alpha_1 < 0,\ \alpha_2 < 0 \text{ ha } k_{12}k_{21}c_1c_2 < \lambda_1\lambda_2,$$

továbbá

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 < 0 \text{ ha } k_{12}k_{21}c_1c_2 > \lambda_1\lambda_2.$$

Tehát a megoldások

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} e^{\alpha_1 t} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{\alpha_2 t}$$

alakúak, ahol A_1,A_2,B_1 és B_2 a $(0,0)$-tól való kezdeti távolságot jelöli.

5.3. Következmény *A folytonos modellnek a $(0,0)$ stabilis egyensúlyi pontja, ha $k_{12}k_{21}c_1c_2 < \lambda_1\lambda_2$ és instabilis, ha $k_{12}k_{21}c_1c_2 > \lambda_1\lambda_2$.*

A továbbiakban térjünk át a (19),(20) szerinti $(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$ belső, úgynevezett endemic egyensúlyi pont vizsgálatára!

5.4. Állítás *Tegyük fel, hogy $\lambda_1\lambda_2 < k_{12}k_{21}c_1c_2$, továbbá $0 < I_1(t_0) < c_1$ és $0 < I_2(t_0) < c_2$. Ekkor a (11) rendszer minden $(I_1(t),\ I_2(t))$ megoldása tart az $(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$ egyensúlyi megoldáshoz, midőn t tart a végtelenhez.*

Az állítás bizonyításához bontsuk fel olyan részekre az $0 < I_1(t) < c_1$, $0 < I_2(t) < c_2$ téglapot, ahol $I_1'(t)$ és $I_2'(t)$ állandó előjelű. Ezt a következő módon tesszük. Legyen (11)-ban $I_1'(t) = 0$. Innen fejezzük ki I_2-t I_1 függvényeként. Ekkor

$$I_2 = \frac{\lambda_1 I_1}{k_{12}(c_1 - I_1)} \equiv \phi_1(I_1).$$

Hasonlóan, legyen a (11) rendszerben $I_2'(t) = 0$. Ekkor

$$I_1 = \frac{\lambda_2 I_2}{k_{21}(c_2 - I_2)}, \text{ azaz } I_2 = \frac{k_{21}c_2 I_1}{\lambda_2 + k_{21}I_1} \equiv \phi_2(I_1).$$

Vegyük észre, hogy $\phi_1(I_1)$, $\phi_2(I_1)$ az I_1-nek monoton növő függvényei; $\phi_1(I_1)$ tart a végtelenhez midőn I_1 tart c_1-hez, továbbá $\phi_2(I_1)$ tart a c_2-höz, midőn I_1 tart a végtelenhez. Az is megfigyelhető, hogy az $y = \phi_1(I_1)$ és $y = \phi_2(I_1)$ görbék metszik egymást a $(0,0)$ illetve az $(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$ pontokban, ahol

$$\tilde{I}_1 = \frac{k_{12}k_{21}c_1c_2 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 k_{21} + k_{12}k_{21}c_2},\ \tilde{I}_2 = \frac{k_{12}k_{21}c_1c_2 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 k_{12} + k_{12}k_{21}c_1}.$$

Vegyük észre, hogy $\phi_2(I_1)$ gyorsabban nő, mint $\phi_1(I_1)$ az $I_1 = 0$ pontban, hiszen

$$\phi_2'(0) = \frac{k_{21}c_2}{\lambda_2} > \frac{\lambda_1}{k_{12}c_1} = \phi_1'(0).$$

Tehát $\phi_2(I_1)$ a $\phi_1(I_1)$ felett helyezkedik el, ha $0 < I_1 < \tilde{I}_1$ és alatta helyezkedik el, ha $\tilde{I}_1 < I_1 < c_1$. Az $(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$ a (11) egyensúlyi pontja, mivel I_1' és I_2' értéke is 0, ha $I_1 = \tilde{I}_1$ és $I_2 = \tilde{I}_2$.
Vegyük észre, hogy I_1' pozitív minden (I_1, I_2) pontban, mely a $y = \phi_1(I_1)$ görbe felett helyezkedik el és negatív a görbe alatti pontokban. Hasonlóan I_2' pozitív minden $y = \phi_2(I_1)$ görbe alatt elhelyezkedő (I_1, I_2) pontban, illetve negatív a görbe feletti pontokban. Tehát az $y = \phi_1(I_1)$ és $y = \phi_2(I_1)$ görbék a $0 < I_1 < c_1$, $0 < I_2 < c_2$ téglalapot négy olyan részre vágja, ahol I_1' és I_2' előjele állandó, jelölje ezeket a részeket $\mathbf{E}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$.

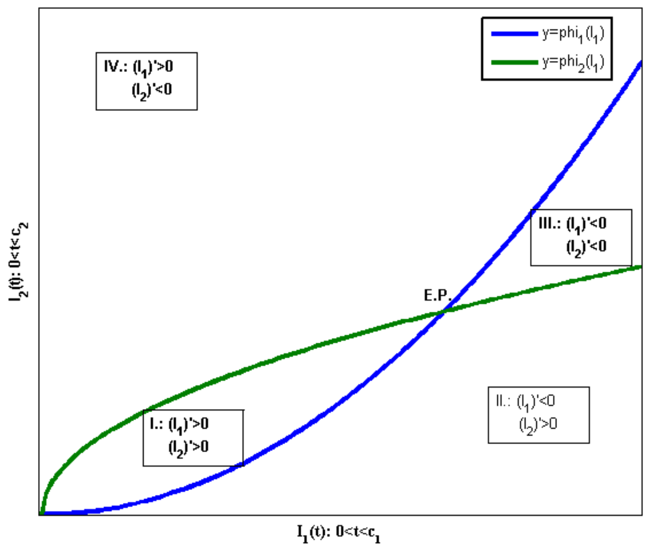

Figure 5: $0 < I_1 < c_1$, $0 < I_2 < c_2$ téglalap négy részre bontva a deriváltak előjele alapján

5.5. Lemma *A (11) rendszer bármely* $(I_1(t), I_2(t))$ *megoldása amely* $t = t_0$*-ban az* $\mathbf{E}_k$*. térrészből indul (*$k = 1, 2, 3, 4$*), abban a térrészben is marad minden* $t \geq t_0$ *esetén, továbbá a megoldás tart az* $(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$ *egyensúlyi megoldáshoz, midőn* t *tart a végtelenhez.*

A bizonyítást $k = 1$ esetén ismertetjük-$I_1' > 0$ és $I_2' > 0$ eset-, ugyanis a többi térrészre hasonló gondolatmenetet alkalmazva igazolható a lemma.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(I_1(t), I_2(t))$ megoldása a (11) rendszernek és elhagyja az $\mathbf{E}_1$ térrészt $t = t^*$-ban. Ekkor $I_1(t^*) = 0$, vagy $I_2(t^*) = 0$, hiszen a megoldás csak akkor hagyhatja el a térrészt, ha metszi az $y = \phi_1(I_1)$ vagy $y = \phi_2(I_1)$ görbét. Tegyük fel, hogy $I_1'(t^*) = 0$. Deriváljuk (11) mindkét oldalát t szerint és vizsgáljuk t^*-ban. Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_1(t^*)}{\mathrm{d}t^2} = k_{12}(c_1 - I_1(t^*))\frac{\mathrm{d}I_2(t^*)}{\mathrm{d}t}.$$

Ez a mennyiség pozitív, mivel $I_1(t^*) < c_1$ és I_2' pozitív az $y = \phi_1(I_1)$ görbén, $0 < I_1 < \tilde{I}_1$. Ebből következik, hogy $I_1(t)$-nek minimuma van $t = t^*$-ban. De ez nem lehetséges, mivel $I_1(t)$ növekszik, ha az $I_1(t), I_2(t)$ megoldás az I. térrészben van. $I_2(t)$-re ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva kapjuk, hogy minden megoldás mely az $\mathbf{E}_1$ térrészből indul $t = t_0$-ban, az nem hagyhatja el azt minden $t \geq t_0$ esetén.
Mivel $I_1(t) \leq \tilde{I}_1$, $I_2(t) \leq \tilde{I}_2$ és monoton növőek, így létezik ξ és η korlátjuk. Ez azt jelenti, hogy (ξ, η) egyensúlyi pontja a rendszernek. Azonban az ábrán jól látható, hogy (11)-nek csak a $(0, 0)$ és a $(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$ az egyensúlyi pontjai. Azonban (ξ, η) nem lehet a $(0, 0)$, mivel $I_1(t)$ és $I_2(t)$ is monoton növő függvénye t-nek. Ebből következik, hogy (ξ, η)=$(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$. □

A $\lambda_1, \lambda_2, k_{12}, k_{21}, c_1$ és c_2 együtthatók értékének megválasztása meglehetősen bonyolult feladat, azonban a közegészségügyi adatok alapján feltehető, hogy $\lambda_1\lambda_2$ értéke kisebb mint $k_{12}k_{21}c_1c_2$. Ez ekvivalens azzal, hogy

$$1 < \underbrace{\left(\frac{k_{12}c_1}{\lambda_2}\right)}_{\mathrm{M}}\underbrace{\left(\frac{k_{21}c_2}{\lambda_1}\right)}_{\mathrm{F}}.$$

A fenti M mennyiség interpretálhatja a férfiak átlagos számát, akik fertőző nővel létesítettek kapcsolatot és megfertőződtek, feltéve, hogy minden férfit fogékonynak tekintünk. Hasonlóan F interpretálhatja a nők átlagos számát, akik fertőző férfivel létesítettek kapcsolatot és megfertőződtek, feltéve, hogy minden nőt fogékonynak tekintünk. Vegyük észre, hogy ezen ráták segítségével megfogalmazhatjuk a Gonorrhea-modell (5.3) stabilitási tulajdonságát!

5.6. Következmény *Ha F és M ráták értéke nagyobb egynél, akkor a Gonorrhea tart egy nemnulla egyensúlyi helyzethez, továbbá ha F és M ráták értéke kisebb egynél, akkor a Gonorrhea fertőzés megszűnik.*

5.7. Megjegyzés *Vegyük észre, hogy F és M ráták teljesen összhangban vannak az első fejezetben definiált R_0 alap reprodukciós rátájával.*

6

Diszkrét modellek

A továbbiakban alkalmazzunk különböző numerikus módszereket a (10) rendszerre!

6.1 Az explicit Euler módszer vizsgálata

Az explicit Euler módszert alkalmazva a (10) rendszerre, a

$$\begin{cases} \dfrac{S_1^{n+1} - S_1^n}{h} = -k_{12} S_1^n I_2^n + \lambda_1 I_1^n \\[2ex] \dfrac{I_1^{n+1} - I_1^n}{h} = k_{12} S_1^n I_2^n - \lambda_1 I_1^n \\[2ex] \dfrac{S_2^{n+1} - S_2^n}{h} = -k_{21} S_2^n I_1^n + \lambda_2 I_2^n \\[2ex] \dfrac{I_2^{n+1} - I_2^n}{h} = k_{21} S_2^n I_1^n - \lambda_2 I_2^n \end{cases} \tag{21}$$

$n = 0, 1, \ldots, L-1$ numerikus modellt kapjuk, ahol L az időlépések száma a numerikus megoldás során, továbbá $h = T/L$ az időlépések hossza. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $h \equiv h_n$, azaz a rács ekvidisztáns.

Vizsgáljuk meg, hogy ez a diszkrét modell megőrzi-e a nemnegativitási tulajdonságot. Ehhez vizsgáljuk meg rendre a (21) egyenletrendszert alkotó egyenleteket! Kezdésként tekintsük az első egyenletet!

$$S_1^{n+1} = S_1^n - hk_{12} S_1^n I_2^n + h\lambda_1 I_1^n = (1 - hk_{12} I_2^n) S_1^n + h\lambda_1 I_1^n$$

Ebben az esetben megőrződik a nemnegativitás, azaz ha S_1^n, I_1^n, I_2^n rendre nemnegatívak, akkor S_1^{n+1} is nemnegatív, ha teljesül a következő feltétel

$$h < \frac{1}{k_{12} I_2^n}$$

Tekintsük a második egyenletet! Ekkor

$$I_1^{n+1} = I_1^n + hk_{12} S_1^n I_2^n - h\lambda_1 I_1^n = (1 - h\lambda_1) I_1^n + hk_{12} S_1^n I_2^n,$$

melyből adódik, hogy S_1^n, I_2^n és I_1^n nemnegativitása esetén I_1^{n+1} nemnegativása is teljesül, ha

$$h < \frac{1}{\lambda_1}.$$

Hasonló számolás alapján a harmadik egyetből a

$$h < \frac{1}{k_{21} I_1^n},$$

míg a negyedik egyenletből a

$$h < \frac{1}{\lambda_2}$$

feltételt nyerjük.

Tehát az időlépés hosszára vonatkozóan a posteriori felső korlátokat kaptunk, melyek nem függetlenek az n időlépéstől. Vegyük észre, hogy (21) egyenleteit összeadva megmutatható, hogy a teljes populáció létszáma konstans minden diszkrét időpillanatban, ugyanis az egyenleteket összeadva kapjuk, hogy

$$S_1^{n+1} + I_1^{n+1} + S_2^{n+1} + I_2^{n+1} = S_1^n + I_1^n + S_2^n + I_2^n,$$

tehát

$$S_1^n + I_1^n + S_2^n + I_2^n = const \equiv c_1 + c_2 = N.$$

Ebből a kvalitatív tulajdonságból következik, hogy

$$I_i^n \leq c_i, \quad i = 1, 2. \tag{22}$$

Használjuk ezen két becslést a megfelelő h-ra kapott feltételekben! Ekkor

$$h < \frac{1}{k_{12} c_2}, \quad h < \frac{1}{k_{21} c_1} \tag{23}$$

egyenlőtlenségeket kapjuk.
Tehát a nemnegativitás megőrzésére elégséges a priori feltételt kaptunk, mely az időlépés hosszára felső korlátot ad, nevezetesen

$$h < \min\left\{\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{k_{12} c_2}, \frac{1}{k_{21} c_1}\right\}.$$

6.1. Tétel *Ha a kezdeti feltételben $S_1(0), I_1(0), S_2(0), I_2(0) \geq 0$, akkor az explicit Euler módszer a Gonorrhea modellre megőrzi a nemnegativitást, ha*

$$h < \min\left\{\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{k_{12} c_2}, \frac{1}{k_{21} c_1}\right\}.$$

Ezen eredmény szemléltetése céljából MATLAB programokat készítettem. Különböző bemenő adatokra teszteltem a módszert. A számítógépes tesztelésnél nem hagytam figyelmen kívül, hogy Neisseria gonorrhoeae nevű baktérium másképpen hat a férfiakra mint a nőkre, tehát minden futtatás során

$$\lambda_1 = 0.2, \; \lambda_2 = 0.1,$$

illetve

$$k_{12} = 0.1, \; k_{21} = 0.09$$

paramétereket választottam. Az időintervallum mindkét numerikus módszer esetében a [0,50], és a populáció 32 főből áll.

Tesztelésem során a teljes populáció méret 0.1 részét veszem fertőzöttnek. Vizsgáljuk meg ezen bemenő adatok esetében a nemnegativitás megőrzésének feltételét! Azt kapjuk, hogy

$$h < \min\left\{\frac{1}{0.1 \cdot 16}, \frac{1}{0.09 \cdot 16}, \frac{1}{0.2}, \frac{1}{0.1}\right\} = 0.625$$

feltétel teljesülése esetén a nemnegativitás megőrződik.

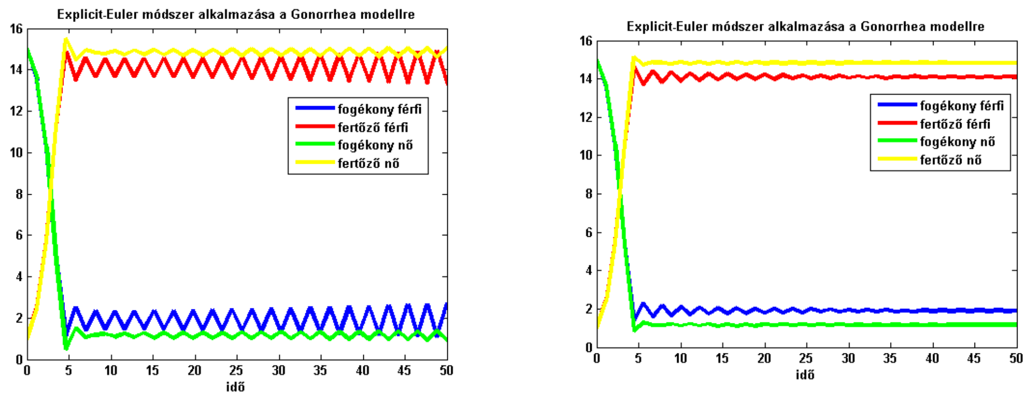

Figure 6: Explicit Euler módszer 43 illetve 45 időlépés esetén

Az 6. ábrán jól látható, hogy a módszer az előírt időlépéshossznál nagyobb megválasztása esetén torz eredményt ad.

6.2 Egy lehetséges IMEX modell

Használjunk más véges differenciás diszkretizáló numerikus módszert a (10) rendszerre! A feladatra egy implicit-explicit, úgynevezett IMEX módszert alkalmazva

$$\begin{cases} \dfrac{S_1^{n+1} - S_1^n}{h} = -k_{12} S_1^{n+1} I_2^n + \lambda_1 I_1^n \\[2ex] \dfrac{I_1^{n+1} - I_1^n}{h} = k_{12} S_1^n I_2^n - \lambda_1 I_1^{n+1} \\[2ex] \dfrac{S_2^{n+1} - S_2^n}{h} = -k_{21} S_2^{n+1} I_1^n + \lambda_2 I_2^n \\[2ex] \dfrac{I_2^{n+1} - I_2^n}{h} = k_{21} S_2^n I_1^n - \lambda_2 I_2^{n+1} \end{cases} \tag{24}$$

$n = 0, 1, \ldots, L-1$ numerikus sémát kapjuk, ahol L az időlépések száma, $h = T/L$ pedig az időlépések hossza. A fenti módszer ötlete, hogy amikor S_i illetve I_i, $i = 1, 2$ deriváltját közelítjük, akkor az a bal oldalon implicit tagként szerepeljen, tehát vegyük azt az $(n+1)$.-edik időrétegen, míg a többi tagot az n.-ediken.

Vizsgáljuk meg, hogy a diszkrét modell milyen feltételek mellett őrzi meg a nemnegativitást!

Ehhez vizsgáljuk meg külön-külön a rendszert alkotó egyenleteket! Az első egyenletre felírva a módszert

$$\frac{S_1^{n+1} - S_1^n}{h} = -k_{12} S_1^{n+1} I_2^n + \lambda_1 I_1^n,$$

azaz

$$S_1^{n+1}(1 + hk_{12} I_2^n) = S_1^n + h\lambda_1 I_1^n.$$

Jelölje

$$A_1 = 1 + hk_{12} I_2^n \ ,$$

$$F_1^n = S_1^n + h\lambda_1 I_1^n.$$

Ezen jelölésekkel az első egyenlet az

$$A_1 S_1^{n+1} = F_1^n$$

alakban írható.

A numerikus módszer a rendszert alkotó második egyenletre

$$\frac{I_1^{n+1} - I_1^n}{h} = k_{12} S_1^n I_2^n - \lambda_1 I_1^{n+1},$$

azaz

$$I_1^{n+1}(1 + h\lambda_1) = I_1^n + hk_{12} S_1^n I_2^n.$$

Az

$$A_2 = 1 + h\lambda_1,$$

$$F_2^n = I_1^n + hk_{12} S_1^n I_2^n$$

jelöléseket bevezetve a második egyenlet az

$$A_2 I_1^{n+1} = F_2^n$$

alakban írható.
Vizsgáljuk a harmadik egyenletet! Ekkor

$$\frac{S_2^{n+1} - S_2^n}{h} = -k_{21} S_2^{n+1} I_1^n + \lambda_2 I_2^n,$$

azaz

$$S_2^{n+1}(1 + hk_{21} I_1^n) = S_2^n + h\lambda_2 I_2^n.$$

Jelölje

$$A_3 = 1 + hk_{21} I_1^n,$$

$$F_3^n = S_2^n + h\lambda_2 I_2^n$$

Ezen jelölésekkel a harmadik egyenlet a következő alakra hozható

$$A_3 S_2^{n+1} = F_3^n.$$

A negyedik egyenletre a módszer

$$\frac{I_2^{n+1} - I_2^n}{h} = k_{21} S_2^n I_1^n - \lambda_2 I_2^{n+1},$$

azaz

$$I_2^{n+1}(1 + h\lambda_2) = I_2^n + hk_{21} S_2^n I_1^n$$

Az

$$A_4 = 1 + h\lambda_2,$$

$$F_4^n = I_2^n + hk_{21}S_2^n I_1^n$$

jelöléseket bevezetve a rendszert alkotó utolsó egyenlet az

$$A_4 I_2^{n+1} = F_4^n$$

alakban írható.
Ekkor a diszkrét rendszer a következő alakban írható fel

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{n+1} \\ I_1^{n+1} \\ S_2^{n+1} \\ I_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^n \\ F_2^n \\ F_3^n \\ F_4^n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A_n z = F_n.$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg, hogy ez a diszkrét modell milyen feltételek mellett őrzi meg a nemnegativitási tulajdonságot! Mivel A diagonális mátrix, ezért inverze az alábbi módon könnyen számítható

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_4} \end{pmatrix}.$$

Ezen jelölésekkel tehát a nemnegativitás feltételei melyeket vizsgálnunk kell $F_i^n \geq 0$ és $A_i^{-1} > 0,\ i = 1, 2, 3, 4$.
Vizsgáljuk meg a két feltételt $i = 1$ esetén! Ekkor A_1 inverzének pozitivitása pontosan akkor teljesül, amikor

$$\frac{1}{1 + hk_{12}I_2^n} > 0.$$

Az első feltétel I_2^n nemnegativitása miatt tehát automatikusan teljesül, mivel a tört számlálója és nevezője is nemnegatív. A második feltétel $i = 1$ esetén F_1^n nemnegativitása, mely pontosan akkor teljesül, amikor

$$S_1^n + h\lambda_1 I_1^n \geq (c_1 + c_2) + h\lambda_1(c_1 + c_2) = (1 + h\lambda)(c_1 + c_2) \geq 0.$$

Mivel a szorzat mindkét tényezője nemnegatív, így ez a feltétel is teljesül. Tehát S_1^n, I_1^n, és I_2^n nemnegativitása garantálja, hogy S_1^{n+1}nemnegatív.
Tekintsük az $i = 2$ esetet! Ekkor az első feltétel $A_2^{-1} > 0$ pontosan akkor teljesül amikor

$$\frac{1}{1 + h\lambda_1} > 0,$$

tehát ez a feltétel automatikusan teljesül, hiszen a tört számlálója és nevezője is nemnegatív. A második feltétel $i = 2$ esetén $F_2^n \geq 0$, mely pontosan akkor teljesül, amikor

$$I_1^n + hk_{12}S_1^n I_2^n \geq 0.$$

Ez I_1^n,S_1^n, illetve I_2^n nemnegativitásából következik.
A harmadik és a negyedik egyenletre csupán indexcserékkel és ugyanezen indoklásokkal kapjuk, hogy a feltételek automatikusan teljesülnek.

Tehát míg az explicit módszernél az időlépés hosszára vonatkozóan felső korlátot kaptunk, mely garantálja a nemnegativitás megőrzését, addig a fenti IMEX módszernél ez a kvalitatív tulajdonság teljesül az időlépés hosszától függetlenül.

6.2. Tétel *Ha a kezdeti feltételben* $S_1(0), I_1(0), S_2(0), I_2(0) \geq 0$, *akkor az IMEX módszer a Gonorrhea modellre megőrzi a nemnegativitást tetszőleges* h *időlépés esetén.*

Az előzőekben-a 6. ábrán-láthattuk, hogy ha az explicit Euler módszer futtatásánál a nemnegativitás megőrzéséhez elégséges feltételként megadott h értékénél nagyobbat választunk, akkor a numerikus megoldás torz lesz. Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik az IMEX módszer ugyanazon időlépések esetén! Az ábrákon jól látható, hogy elvárásainknak megfelelően az IMEX

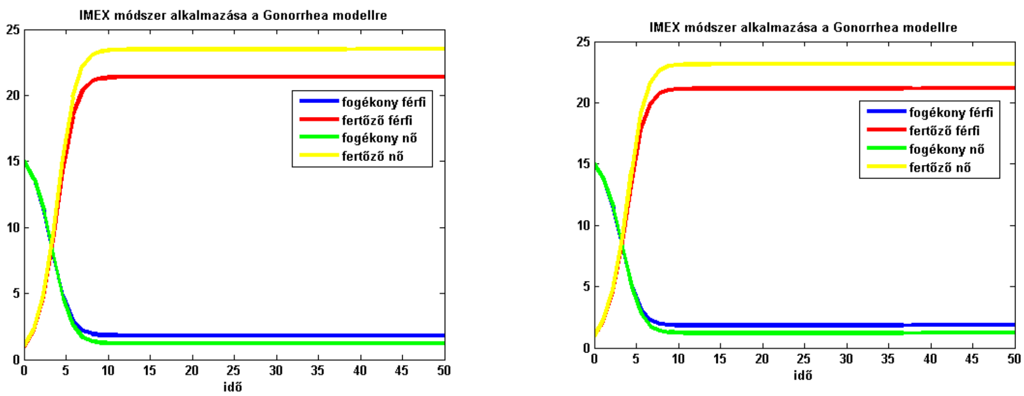

Figure 7: IMEX módszer 43 illetve 45 időlépés esetén

módszer alkalmazása esetén a numerikus megoldás során kapott függvények simák, ellentétben az ugyanezen időlépésekre az explicit Euler módszer futtatásával nyert numerikus megoldással.

Vegyük észre, hogy (24) egyenleteit rösszeadva

$$S_1^{n+1} + S_2^{n+1} + I_1^{n+1} + I_2^{n+1} \neq S_1^n + S_2^n + I_1^n + I_2^n = c_1 + c_2 = N,$$

tehát nem igaz, hogy minden diszkrét időpillanatban N a populáció létszáma, így az IMEX módszer ezen változata a tömegtartás kvalitatív tulajdonságával nem rendelkezik. Ezen tulajdonság hiányát is szemlélteti a 7. ábra, hiszen a futtatás során $N = 32$, de ez csak a 0-adik időrétegen teljesül. Az össztömeg alakulását az egyes időrétegeken a következő táblázat mutatja:

n-edik időréteg	$N - (I_1^n + I_2^n + S_1^n + S_2^n)$
0	0
1	-0,20
2	0,43
3	4,15
4	10,93
5	15,99
6	17,94
7	18,48
8-35	18,66

6.3 Egy másik lehetséges IMEX módszer

Alkalmazzunk egy másik implicit-explicit módszert a (10) feladatra! Ekkor a

$$\begin{cases} \dfrac{S_1^{n+1} - S_1^n}{h} = -k_{12} S_1^{n+1} I_2^n + \lambda_1 I_1^n \\[2ex] \dfrac{I_1^{n+1} - I_1^n}{h} = k_{12} S_1^{n+1} I_2^n - \lambda_1 I_1^n \\[2ex] \dfrac{S_2^{n+1} - S_2^n}{h} = -k_{21} S_2^{n+1} I_1^n + \lambda_2 I_2^n \\[2ex] \dfrac{I_2^{n+1} - I_2^n}{h} = k_{21} S_2^{n+1} I_1^n - \lambda_2 I_2^n \end{cases} \tag{25}$$

$n = 0, 1, \ldots, L-1$ numerikus sémát kapjuk, ahol L az időlépések száma, $h = T/L$ pedig az időlépések hossza.

A módszer ötlete, hogy az $i = 1$-re vonatkozó egyenleteknél vegyük ugyanazt a tagot, nevezetes S_1-et az implicit $(n+1)$.-edik időrétegen, hiszen így a modell rendelkezik a tömegtartás tulajdonságával, azaz minden diszkrét időpillanatban N a populáció létszáma.
Vizsgáljuk meg, hogy a (25) diszkrét modell milyen feltételek mellett őrzi meg a nemnegativitást!

Az 6.2 alfejezet jelöléseit használva a (25) rendszer a következő alakban irható fel:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{A_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{n+1} \\ I_1^{n+1} \\ S_2^{n+1} \\ I_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^n \\ \widehat{F_2}^n \\ F_3^n \\ \widehat{F_4}^n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A_n z = \widehat{F_n}.$$

Ezen jelölésekkel tehát a nemnegativitás feltételei melyeket vizsgálnunk kell $\widehat{F_i}^n \geq 0$ és $\widehat{A_i}^{-1} > 0 \quad i = 2,4$, hiszen az $i = 1,3$ esetet már 6.2 alfejezetben megvizsgáltuk és azt kaptuk, hogy a feltétel automatikus teljesül!
Tekintsük az $i = 2$ esetet! Ekkor $\widehat{A_2} = \widehat{A_2}^{-1} = 1 > 0$ feltétel teljesül. Mivel

$$\widehat{F_2^n} = (1 - h\lambda_1)I_1^n + hk_{12}S_1^{n+1}I_2^n,$$

így $\widehat{F_2^n} \geq 0$ pontosan akor teljesül, amikor

$$\frac{1}{\lambda_1} > h.$$

Illetve $i = 4$ esetén $\widehat{A_4} = \widehat{A_4}^{-1} = 1 > 0$ és $\widehat{F_4^n} \geq 0$ pontosan akkor teljesül, amikor

$$\frac{1}{\lambda_2} > h.$$

Tehát a nemnegativitás megőrzésére elégséges a priori feltételt kaptunk, mely az időlépés hosszára felső korlátot ad.

6.3. Tétel *Ha a kezdeti feltételben* $S_1(0), I_1(0), S_2(0), I_2(0) \geq 0$, *akkor a módosított IMEX módszer a Gonorrhea modellre megőrzi a nemnegativitást, ha*

$$h < min\left\{\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}\right\}.$$

6.4. Megjegyzés *Az időlépésre kapott felső korlát elvi korlát, a dolgozatban használt értékek esetén teljesül, hiszen a gyógyulási ráták reciprokának értéke* 5 *illetve* 10, *a futtatásoknál pedig* $T = 50$. *Tehát a feltétel azt adja, hogy az időlépések számának* 10*-nél nagyobbnak kell lennie, hogy a módszer megőrizze a nemnegativitást. A gyakorlatban ennél jóval nagyobb lépésszámot szokás választani.*

6.4 A Theta-módszer vizsgálata

Kombináljuk az IMEX módszert az úgynevezett Theta-módszerrel!

$$\begin{cases} \dfrac{S_1^{n+1} - S_1^n}{h} = -k_{12} I_2^n (\theta S_1^{n+1} + (1-\theta) S_1^n) + \lambda_1 I_1^n \\[2ex] \dfrac{I_1^{n+1} - I_1^n}{h} = k_{12} S_1^n I_2^n - \lambda_1 (\theta I_1^{n+1} + (1-\theta) I_1^n) \\[2ex] \dfrac{S_2^{n+1} - S_2^n}{h} = -k_{21} I_1^n (\theta S_2^{n+1} + (1-\theta) S_2^n) + \lambda_2 I_2^n \\[2ex] \dfrac{I_2^{n+1} - I_2^n}{h} = k_{21} S_2^n I_1^n - \lambda_2 (\theta I_2^{n+1} + (1-\theta) I_2^n) \end{cases} \tag{26}$$

$n = 0, 1, \ldots, L-1$, továbbá $\theta \in [0, 1]$ adott paraméter.

Vizsgáljuk meg, hogy különböző theta paraméter értékek esetén hogyan alakul a nemnegativitás! Vegyük észre, hogy két paraméter értékre ezt már tudjuk, hiszen $\theta = 0$ megválasztással éppen az explicit Euler módszert, míg $\theta = 1$ megválasztása esetén az IMEX módszer első változatát kapjuk, ezért felmerül a kérdés, hogy vajon megadható-e a theta paraméterértékre egy küszöbindex, melytől a nemnegativitás megőrződik a h lépésköz megválasztásától függetlenül. Ezen célból vizsgáljuk meg (26) rendszert alkotó egyenleteket!
Az első egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$S_1^{n+1}(1 + hk_{12}\theta I_2^n) = S_1^n(1 - hk_{12} I_2^n (1-\theta)) + h\lambda_1 I_1^n$$

Az

$$\widetilde{A_1} = (1 + hk_{12}\theta I_2^n),\ \widetilde{F_1^n} = S_1^n(1 - hk_{12} I_2^n (1-\theta)) + h\lambda_1 I_1^n$$

jelöléseket bevezetve az első egyenlet az

$$\widetilde{A_1} S_1^{n+1} = \widetilde{F_1^n}$$

alakban írható.
Átrendezéssel a második egyenlet az

$$I_1^{n+1}(1 + h\lambda 1\theta) = hk_{12} I_2^n S_1^n + I_1^n(1 - h\lambda_1(1-\theta))$$

alakra hozható. Bevezetve az

$$\widetilde{A_2} = (1 + h\lambda 1\theta),\ \widetilde{F_2^n} = hk_{12} I_2^n S_1^n + I_1^n(1 - h\lambda_1(1-\theta))$$

jelöléseket kapjuk, hogy

$$\widetilde{A_2} I_1^{n+1} = \widetilde{F_2^n}.$$

Hasonló módon a harmadik egyenlet

$$\widetilde{A_3} S_2^{n+1} = \widetilde{F_3^n}$$

alakra hozható, ahol

$$\widetilde{A_3} = (1 + hk_{21}\theta I_1^n),\ \widetilde{F_3^n} = S_2^n(1 - hk_{21}I_1^n(1-\theta)) + h\lambda_2 I_2^n,$$

míg a negyedik egyenlet

$$\widetilde{A_4} I_2^{n+1} = \widetilde{F_4^n},$$

ahol

$$\widetilde{A_4} = (1 + h\lambda 2\theta),\ \widetilde{F_4^n} = hk_{21}I_1^n S_2^n + I_2^n(1 - h\lambda_2(1-\theta)).$$

Ekkor a diszkrét rendszer felírható a következő alakban

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{A_3} & \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{A_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{n+1} \\ I_1^{n+1} \\ S_2^{n+1} \\ I_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{F_1^n} \\ \widetilde{F_2^n} \\ \widetilde{F_3^n} \\ \widetilde{F_4^n} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \widetilde{A_n} z = \widetilde{F_n}.$$

Mivel $\widetilde{A}$ mátrix diagonális, így az előző fejezetben leírtak alapján a nemnegativitás feltételei melyeket vizsgálnunk kell

$$\widetilde{F_i^n} \geq 0 \text{ és } \widetilde{A_i^{-1}} > 0,\ i = 1,2,3,4.$$

Vizsgáljuk meg a két feltételt $i = 1$ esetén! Ekkor $\widetilde{A_1}^{-1} > 0$ pontosan akkor teljesül, amikor

$$\frac{1}{1 + hk_{12}\theta I_2^n} > 0.$$

Az első feltétel I_2^n nemnegativitása miatt tehát automatikusan teljesül, mivel a tört számlálója és nevezője is nemnegatív. A második feltétel $i = 1$ esetén $\widetilde{F_1^n} \geq 0$ pontosan akkor teljesül, amikor

$$S_1^n(1 - hk_{12}I_2^n(1-\theta)) + h\lambda_1 I_1^n \geq 0,$$

azaz, ha

$$\frac{1}{k_{12}I_2^n(1-\theta)} > h.$$

Felhasználva, hogy $I_2^n < c_2$, a következő feltételt kapjuk

$$c_2 k_{12}(1-\theta) < h.$$

Tehát $I_1^n, I_2^n, S_1^n, S_2^n$ nemnegativitásából csak $\theta = 1$ megválasztással következik S_1^{n+1} nemnegativitása a h lépésköz megválasztásától függetlenül.
Tekintsük az $i = 2$ esetet! Ekkor az első feltétel $\widetilde{A_2}^{-1} > 0$ pontosan akkor teljesül, amikor

$$\frac{1}{1+h\lambda_1}\theta > 0.$$

Ez automatikusan teljesül, hiszen a tört számlálója és nevezője is nemnegatív.
A második feltétel $i = 2$ esetén $\widetilde{F_2^n} \geq 0$ pontosan akkor teljesül, amikor

$$hk_{12} I_2^n S_1^n + I_1^n(1 - h\lambda_1(1-\theta)) \geq 0,$$

azaz, ha

$$\frac{1}{\lambda_1(1-\theta)} > h.$$

Tehát ebben az esetben is csak $\theta = 1$ esetén őrződik meg feltétel nélkül a nemnegativitás.

6.5. Tétel *Ha a kezdeti feltételben $S_1(0), I_1(0), S_2(0), I_2(0) \geq 0$, akkor a Theta-módszer csak $\theta = 1$ esetén őrzi meg feltétel nélkül a nemnegativitást.*

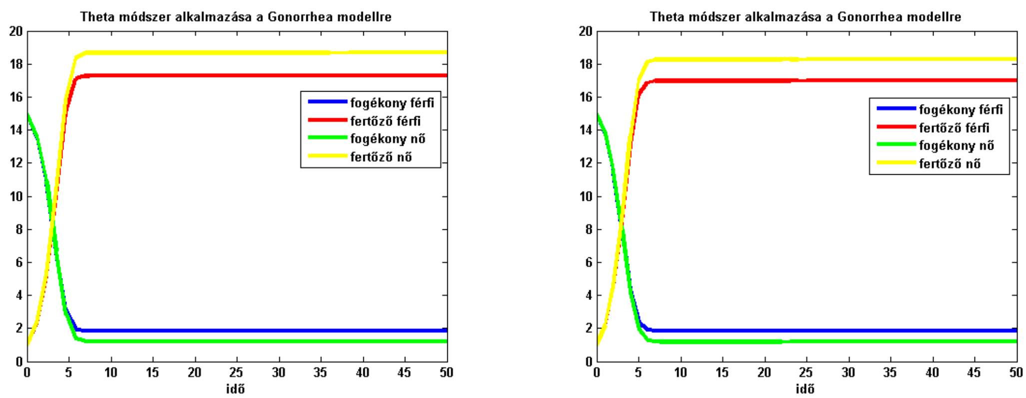

Figure 8: θ módszer 43 illetve 45 időlépés esetén $\theta = 0.5$

Ez egy elégséges feltétel a nemnegativitás megőrzéséhez, de nem szükséges, ugyanis a 4. ábrán jól látható, hogy $\theta = 0.5$ megválasztása esetén megegyezik a numerikus megoldás az IMEX módszerrel nyert megoldással.

6.6. Megjegyzés *A θ paraméter 1-hez való közelítése esetén a h időlépés felső korlátja jelentősen megnő, tehát érdemes a numerikus módszerben a paraméter értékét nagynak választani.*

7

Stabilitási tulajdonság ellenőrzése a numerikus modellen

Vizsgáljuk meg, hogy a (24) modell visszaadja-e a második fejezetben tárgyalt stabilitási tulajdonságot!
Tekintsük először azt az esetet, amikor a folytonos modell tart egy nemnulla egyensúlyi helyzethez. Ehhez az kell, hogy

$$F = \frac{k_{12}c_1}{\lambda_2} > 1 \text{ és } M = \frac{k_{21}c_2}{\lambda_1} > 1$$

teljesüljön. A $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.1$, $k_{12} = k_{21} = 0.1$, $c_1 = c_2 = 10$ megválasztással a feltételek teljesülnek, hiszen F értéke 10-zel, míg M értéke 5-tel lesz egyenlő. Az (19), illetve (20) egyenlőségekbe ezeket az értékeket helyettesítve a folytonos modell egyensúlyi pontja is kiszámítható, nevezetesen $\tilde{I}_1 = 8.16$, illetve $\tilde{I}_2 = 8.91$.

A (10) feladat megoldására a (24) numerikus modellt használtam és a fentiazaz az $F > 1$ illetve $M > 1$ feltételeket kielégítő-bemenő adatokkal futtatást végeztem, mely során az időintervallum $[0, 50]$, továbbá 5000 az időlépések száma. Az 5. ábrán jól látható, hogy a numerikus modell ebben az esetben visszaadja a folytonos modell stabilitási tulajdonságát, az egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis, továbbá az értékük is megegyezik.
Tekintsük most azt az esetet, amikor F illetve M értéke kisebb, mint 1! Ekkor a folytonos modellnek a $(0, 0)$ aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontja. Ha $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 0.8$, $k_{12} = 0.07$, $k_{21} = 0.08$, $c_1 = c_2 = 10$, akkor $F = 0.89$ és $M = 0.875$, tehát a feltételek teljesülnek. A 6. ábrán jól látható, hogy a numerikus modell ebben az esetben is visszaadja a folytonos modell stabilitási tulajdonságát, hiszen a Gonorrhea fertőzés eltűnik. Ugyanezen bemenő adatokkal teszteltem a θ módszert $\theta = 0.5$ és $\theta = 0$ esetén. Elvárásainknak megfelelően ugyanezeket az ábrákat kapjuk, tehát az általam vizsgált numerikus módszerek visszaadják a folytonos Gonorrhea modell stabilitási tulajdonságát megfelelő lépésköz választása esetén.

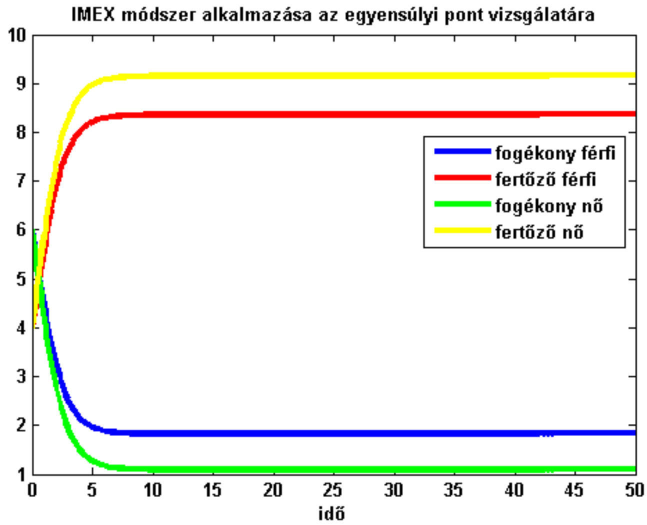

Figure 9: A numerikus modell egyensúlyi helyzete $F > 1$, $M > 1$ esetén

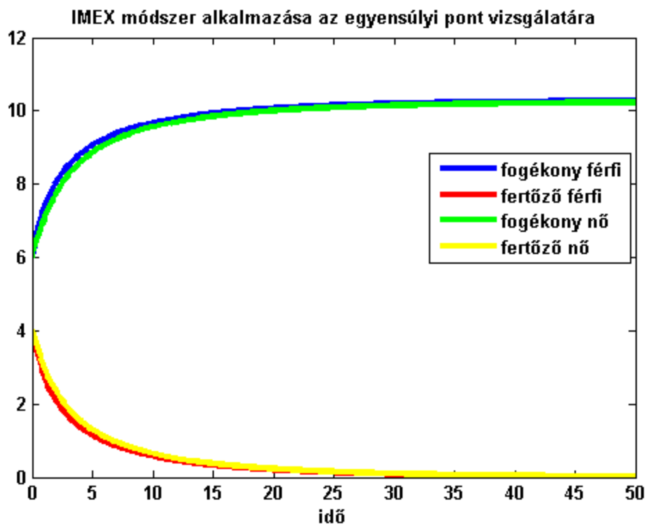

Figure 10: A numerikus modell egyensúlyi helyzete $F < 1$, $M < 1$ esetén

8

AZ SIS MODELL n KÜLÖNBÖZŐ CSOPORT ESETÉN

8.1 A Gonorrhea modellje hetegorén populáció esetén

A továbbiakban egy inhomogén populációt vizsgálunk, amit feltételezéseink szerint n darab homogén részpopuláció alkot, tehát az azonos részpopulációban lévő egyének gyógyulási rátája és a fertőzés intenzitásának rátája megegyezik. Ez az eddigiekben tárgyalt modell általánosítása, $n = 2$ esetén a klasszikus Gonorrhea modellt kapjuk. Természetes feltételezéseink az általánosított modellről a következőek:

1. Az i-edik részpopuláció fogékony, illetve fertőző egyedszámát a t. ($t \geq 0$) időpontban jelölje $S_i(t)$, illetve $I_i(t)$. A részpopulációk konstans méretűek, azaz $c_i = S_i(t) + I_i(t) \in \mathbb{N}^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Természetes módon, ha az i-edik részpopuláció fogékony egyede megfertőződik, akkor az i-edik részpopulációban marad, fertőzött egyedként.

2. Születés és halál az i-edik részpopulációban egyenlő arányban fordul elő S_i illetve I_i-ben, továbbá minden újszülöttet fogékonynak tekintünk. Jelölje $\mu_i > 0$ a teljes i. részpopuláció halálozási rátáját, tehát ez a paraméter független S_i illetve I_i-től. Hogy a konstans populáció méret fenn tartható legyen, kompenzáljuk a halálozási rátát születési rátával, melynek értéke egyezzen meg μ_i értékével.

3. A j-edik osztály $j = 1, 2, \ldots, n$ fertőző egyedei továbbíthatják a betegséget az i. osztályba $i = 1, 2, \ldots, n$. Jelölje a fertőzés intenzitásának rátáját $k_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots n$. Tehát a fertőzés ereje ami az i-edik részpopuláció fogékony egyedeire hat:

$$g_i(I_1, I_2, \ldots, I_n) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} I_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

4. Az i-edik csoport gyógyulási rátáját jelölje $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

5. Tegyük fel, hogy az előzőekben definiált paraméterek mindegyike független az időtől.

Az 1.-5. feltételek figyelembe vételével a Gonorrhea járvány terjedésére a következő differenciálegyenlet rendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t} = -\displaystyle\sum_{j=1}^{n} k_{ji} S_i I_j + \lambda_i I_i \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} k_{ji} S_i I_j - \lambda_i I_i \end{cases} \tag{27}$$

Mivel az egyes részpopulációk konstans méretűek, azaz $c_i = I_i + S_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ így (27) a következő alakban írható:

$$\frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} = -\lambda_i I_i + \sum_{j=1}^{n} k_{ji} c_i I_j - \sum_{j=1}^{n} k_{ji} I_i I_j, \tag{28}$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

A rendszert az $(I_1, I_2, \ldots, I_n) \in \Lambda_n = \prod_{i=1}^{n}[0, c_i] = \{I \in \mathbb{R}^n | 0 \leq I_i \leq c_i, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ esetben vizsgáljuk.

8.1. Lemma *A (28) rendszer pozitívan invariáns* Λ_n*-n.*

Bizonyítás. Mutassuk meg, hogy ha $I(0) \in \Lambda_n$, akkor $I(t) \in \Lambda_n$ minden $t > 0$ esetén. Legyen

$$\partial\Lambda_{n1} = \{I \in \Lambda_n | I_i = 0\},$$
$$\partial\Lambda_{n2} = \{I \in \Lambda_n | I_i = c_i\}.$$

Jelölje a kifelé mutató normálist

$$\eta_i^1 = (0, \ldots, -1, \ldots, 0) \text{ és } \eta_i^2 = (0, \ldots, +1, \ldots, 0).$$

Nagumo-tétele [2]szerint elég megmutatnunk, hogy $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén

$$\left(\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} . \ \eta_i \right) \leq 0, \ I \in \partial\Lambda_{n1} \cup \partial\Lambda_{n2},$$

[2]Legyen C kompakt halmaz és tekintsük a dx/dt=f(x) egyenletet. Ekkor C invariáns, ha minden $y \in \partial C$ esetén az f(y) vektor tangenciális, vagy a halmazba mutat.

ahol $\eta_i = \eta_i^1$, ha $I_i = 0$ és $\eta_i = \eta_i^2$, ha $I_i = c_i$. Vizsgáljuk meg a két esetet!

$$\left(\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \cdot \eta_i^1 \right) = -\sum_{j=1}^{n} k_{ji} c_i I_j \leq 0,$$

továbbá

$$\left(\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \cdot \eta_i^2 \right) = -\lambda_i c_i < 0.$$

Tehát minden megoldás ami $\partial\Lambda_{n1} \cup \partial\Lambda_{n2}$-ből indul az Λ_n-n belül marad. $\square$

A lemma garantálja, hogy a fertőzőek száma az egyes csoportokban nem lehet negatív, vagy nagyobb, mint a teljes csoport mérete.

8.2. Definícó *Jelölje G_i az i. csoport egyéneinek halmazát $i = 1, 2, \ldots, n$. Azt mondjuk, hogy G_i megfertőzi G_j-t akkor és csak akkor, ha $k_{ij} > 0$. Ellenkező esetben G_i nem fertőzi meg G_j-t.*

8.3. Definícó *Jelölje G a populáció összes egyedének halmazát, azaz $G = \cup_{i=1}^{n} G_i$. Azt mondjuk, hogy G összefüggő, ha $\{1, 2, \ldots, n\}$ minden megfelelő S részhalmazára, (azaz S nemüres, és a komplementere S' sem üres) létezik $i \in S$ és $j \in S'$, hogy $k_{ij} \neq 0$.*

Mostantól feltesszük, hogy G összefüggő. Hiszen ha nem az, akkor az egyes összefüggő komponenseket külön vizsgáljuk.

8.4. Lemma *Legyen $I = I(t)$ megoldása a (28) rendszernek és tegyük fel, hogy $I(0) \neq 0$. Ekkor $I(t)$ nem lehet Λ_n határán bármilyen pozitív időintervallum esetén.*

Bizonyítás. Legyen

$$\partial\Lambda_n = \partial\Lambda_{n1} \cup \partial\Lambda_{n2}.$$

Tegyük fel, hogy $I_i(t) = c_i,\ t \in [t_0, t_1]$ valamilyen i-re. Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0,\ t \in [t_0, t_1],$$

továbbá a (28) figyelembevételével

$$0 = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\lambda_i c_i + \sum_{j=1}^{n} k_{ji} c_i I_j - \sum_{j=1}^{n} k_{ji} c_i I_j,\ t \in [t_0, t_1],$$

azaz $-\lambda_i c_i = 0$, ami ellentmondás, hiszen a szorzatot alkotó mindkét mennyiség pozitív. Ebből következik,hogy I_i nem lehet azonosan c_i véges időintervallum alatt.
Tegyük fel, hogy $I_i(t) = 0\ t \in [t_0, t_1]$ valamilyen i-re. Legyen

$$S = \{i | I_i(t) = 0,\ t \in [t_0, t_1]\} \text{ és } S' = \{1, 2, \ldots, n\} - S.$$

Mivel $I(t) \neq 0$, így S' nem üres és mivel $i \in S$ valamilyen i értékre, így S sem üres. Tehát létezik $l \in S$, és $h \in S'$ hogy $k_{hl} \neq 0$ (mivel G összefüggő). Ebből következik. hogy $dI_l/dt \neq 0$ és létezik $T \in [t_0, t_1]$, ahol $I_h(T) \neq 0$, így

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}I_l}{\mathrm{d}t}\right|_{t=T} = \sum_{j=1}^{n} k_{jl} I_j(T) c_l.$$

De $k_{jl} I_j \geq 0$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén, így

$$\left.\frac{\mathrm{d}I_l}{\mathrm{d}t}\right|_{t=T} \geq k_{hl} I_h(T) > 0,$$

ami nyilvánvalóan ellentmond a fenti egyenlőségnek. Tehát S-nek üresnek kell lenni, továbbá olyan I_i nem létezhet, mely azonosan nullává válik egy időintervallum alatt. □

8.5. Megjegyzés *A fenti lemma bizonyítása* $n = 2$ *esetén éppen az* 5.2 *fejezetben tárgyalt invarianciáról szóló bizonyítást adja.*

A fenti lemma azt mutatja, hogy nem lehet olyan csoport, aminek pozitív időintervallum alatt minden egyede fertőzővé válik, továbbá olyan sem lehet, melynek minden egyede fertőzéstől mentessé válik, hacsaknem $I(0) = 0$, azaz $t = 0$ esetén minden csoportban az összes egyén fogékony.

A továbbiakban vizsgáljuk meg a megoldások aszimptotikus viselkedését! Tudjuk, hogy az $I = 0$ egy konstans megoldás. Mutassuk meg, hogy vagy a triviális $I = 0$ globálisan aszimptotikus stabilis megoldása a rendszernek Λ_n-en, vagy ha ez az eset nem áll fenn, akkor létezik egy másik megoldás, melyet jelöljön r. Ekkor $I = r$ globálisan aszimptotikusan stabilis $\Lambda_n - \{0\}$-n.
Legyen $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)^T$ és $A := a_{ij}$, ahol $a_{ij} = k_{ji} c_i$, ha $i \neq j$ és $a_{ii} = k_{ii} c_i - \lambda_i$, továbbá $N(I)$ legyen egy oszlopvektor,a következő komponensekkel:

$$-\sum_{j=1}^{n} k_{ji} I_j I_i.$$

Akkor a (28) rendszer a következő alakban írható

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = AI + N(I). \tag{29}$$

Jelölje $s(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re} \alpha_i$, ahol α_i $i = 1, 2, \ldots, n$ jelöli az A mátrix sajátértékeit.

8.6. Tétel *[5] A (29) rendszer esetén 2 lehetőség van:*

1. $s(A) \leq 0$ *esetén* $I = 0$ *globálisan aszimptotikusan stabilis* Λ_n*-en*

2. $s(A) > 0$ *esetén létezik konstans* $r \in \Lambda_n - \{0\}$ *megoldás. Ekkor* r *globálisan aszimptotikusan stabilis* $\Lambda_n - \{0\}$*-en.*

A tétel azt mutatja, hogy a járvány vagy megszűnik, vagy ha ez nem igaz és a fertőzőek száma legalább egy részpopuláció esetén nem nulla, akkor a járvány népbetegség lesz, sőt a fertőzőek és a fogékonyak száma minden csoportban egy nem nulla konstanshoz fog tartani.

A 8.6 tétel bizonyításához ismertetünk egy tételt, mely garantálja bizonyos autonóm rendszerek konstans megoldásának létezését.

8.7. Tétel *Tekintsük a*

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = AI + N(I) \tag{30}$$

rendszert, ahol $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ *mátrix és* $N(I)$ *folytonosan differenciálható* $D \subset \mathbb{R}^n$ *tartományon. Tegyük fel, hogy*

1. $C \subset D$ *kompakt konvex halmaz pozitívan invariáns a (30) rendszer tekintetében és* $0 \in C$

2. $\lim_{I \to 0} ||N(I)||/||I|| = 0$

3. *létezik* $r > 0$ *és* ω *sajátvektora* A^T*-nek, hogy* $(\omega \cdot I) \geq r||I||$ *minden* $I \in C$ *esetén*

4. $(\omega \cdot N(I)) \leq 0$ *minden* $I \in C$ *esetén*

5. *Az* $I = 0$ *a legnagyobb pozitívan invariáns halmaz, amit a* $H = \{\in C | \omega \cdot N(I) = 0\}$ *magában foglal.*

Ekkor vagy $I = 0$ *globálisan aszimptotikus* C*-n, vagy minden* $I_0 \in C - \{0\}$ *esetén (30) minden* $\psi(t, I_0)$ *megoldására* $\liminf_{t \to \infty} ||\psi(t, I_0|| \geq m$*, ahol* $m > 0$ *független* I_0*-tól, továbbá (30) rendszernek létezik* $I = r$*,* $r \in C - \{0\}$ *konstans megoldása.*

A továbbiakban néhány mátrixokkal kapcsolatos eredményt ismertetünk, hogy alkalmazhassuk a 8.7 tételt a 8.6 tétel bizonyítására.

Adott $A \in \mathbb{R}^{nxn} = (a)_{ij}$ mátrix irreducibilis, ha minden lehetséges $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ részhalmaz esetén létezik $i \in S$ és $j \in S' = \{1, 2, \ldots, n\} - S$,, hogy $a_{ij} \neq 0$. Ha α_i az A mátrix sajátértékei, akkor $\rho(A) = \max_i |\alpha_i|$ az A spektrálsugara. Az A mátrix nem-negatív ($A \geq 0$) akkor és csak akkor, ha $a_{ij} \geq 0$ minden i és j esetén.

8.8. Tétel ***(Perron[7] és Frobenius[8])*** *Legyen A nem-negatív, irreducibilis nxn-es mátrix. Ekkor*

1. *Létezik A-nak pozitív sajátértéke, mely éppen A spektrál sugarával egyenlő.*
2. *$\rho(A)$-hoz létezik ω pozitív sajátvektor.*
3. *$\rho(A)$ egyszeres sajátértéke A-nak.*

8.9. Következmény *Legyen A irreducubulis nxn-es mátrix és tegyük fel, hogy $a_{ij} \geq 0$, ha $i \neq j$. Ekkor létezik ω pozitív sajátértéke A-nak, mely $s(A) = \max Re\alpha_i$ sajátértékhez tartozik.*

Még egy ismert eredményre szükségünk van a 8.6 tétel bizonyításához.

8.10. Tétel *Tegyük fel, hogy Ω kompakt halmaz pozitívan invariáns a (30) rendszer tekintetében, továbbá létezik olyan $V : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, melynek elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak és $V'(I) \leq 0$ Ω-ban. Legyen $E = \{I \in \Omega | V'(I) = 0\}$ és jelölje M a legnagyobb invariáns halmazt E-ben. Ekkor a (30) minden Ω-ból induló megoldása M-hez tart, midőn t tart a végtelenhez.*

Megjegyezzük, hogy ha $V(I)$ folytonos, akkor a 8.10 tétel igaz marad, ha V'-t $V'_{(1)}$-vel helyettesítjük, ahol

$$V'_{(1)} := \limsup_{h \to 0+} \frac{V(I(t+h)) - V(I(t))}{h}.$$

A 8.6 tétel bizonyítása:

A 8.7 tétel 1. feltétele teljesül $C = \Lambda_n$ megválasztással. Világos, hogy a 2. és a 4. feltétel telesül. A 3. feltételhez megjegyezzük, hogy A^T irreducibilis akkor és csak akkor, ha A az. Legyen $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ az A^T azon sajátvektora, melyet a 8.9 következmény ad. Jelölje $\omega_0 = \min_i \omega_i > 0$. Ekkor $I \in \Lambda_n$ esetén

$$(\omega \cdot I) \geq \omega_0 \sum_i I_i \geq \omega_0 \Big(\sum I_i^2 \Big)^{1/2}.$$

Következtetésképpen

$$(\omega \cdot I) \geq r||I||$$

minden $I \in \Lambda_n$ esetén, ahol $r = \omega_0$. Az 5. feltétel ellenőrzéséhez legyen $H = \{I \in \Lambda | (\omega \cdot N(I)) = 0\}$. Ha $I \in H$, akkor $\sum_{j=1}^n k_{ji} I_j I_i \omega_i = 0$, minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén, de mivel az összegben minden tag nem-negatív, így $k_{ji} I_j I_i = 0$ minden i, j esetén. Tegyük fel, hogy $I \neq 0$, azaz létezik h, melyre

$I_h \neq 0$. Ekkor $k_{hi}I_i = 0$ minden i esetén. Mivel G összefüggő, így létezik m, melyre $k_{hm} \neq 0$, tehát $I_m = 0$. Ezért ha $I \in H$, akkor $I \in \partial\Lambda_n$. A 8.4 lemma miatt az egyetlen invariáns halmaz ami H-ban van az $I = 0$, így az 5. feltétel is teljesül.
Tehát a 8.7 minden feltétele teljesül $\alpha = s(A)$ esetén. Ekkor vagy $s(A) \leq 0$ és az $I = 0$ globálisan aszimptotikusan stabilis Λ_n-n, vagy $s(A) > 0$ és létezik $I = r \in \Lambda_n - \{0\}$ konstans megoldása a rendszernek. Bebizonyítjuk, hogy $I = r$ globálisan aszimptotikusan stabilis $\Lambda_n - \{0\}$-n.
Először bebizonyítjuk, hogy $s(A) > 0$ esetén csak $I = 0$ és $I = r$ konstans megoldások vannak Λ_n-en. Tegyük fel, hogy $I = r$ és $I = h$ két konstans megoldása (29)-nek, továbbá $r \neq 0 \neq h$. Ha $r \neq h$, akkor létezik i, hogy $r_i \neq h_i$. Feltehetjük, hogy $h_1 > r_1$, sőt azt is, hogy $h_1/r_1 \geq h_i/r_i$. Mivel h és r konstans megoldások,

$$0 = -\lambda_1 h_1 + (c_1 - h_1)\sum_{j=1}^{n} k_{j1}h_j = -\lambda_1 r_1 + (c_1 - r_1)\sum_{j=1}^{n} k_{j1}r_j, \tag{31}$$

így

$$0 = -\lambda_1 r_1 + (c_1 - h_1)\sum_{j=1}^{n} k_{j1}h_j\frac{r_1}{h_1} = -\lambda_1 r_1 + (c_1 - r_1)\sum_{j=1}^{n} k_{j1}r_j. \tag{32}$$

Mivel $(h_i/h_1)r_1 \leq h_i$ és $c_1 - h_1 < c_1 - r_1$, így

$$(c_1 - h_1)\sum_{j=1}^{n} k_{j1}h_j\frac{r_1}{h_1} < (c_1 - r_1)\sum_{j=1}^{n} k_{j1}r_j. \tag{33}$$

Ez ellentmondás, tehát a (29) rendszernek csak egyetlen konstans megoldása van, $I = (r_1, \ldots, r_n)$ a $\Lambda_n - \{0\}$-n.
Vizsgáljuk meg a megoldások aszimptotikus viselkedését! Ehhez definiáljuk a következő függvényeket

$$M : \Lambda_n \to \mathbb{R},\ M(I) = max_i\frac{I_i}{r_i},$$

illetve

$$m : \Lambda_n \to \mathbb{R},\ m(I) = min_i\frac{I_i}{r_i}.$$

Ekkor $M(I)$ és $m(I)$ folytonosak, továbbá mindkét függvénynek léteznek a jobboldali deriváltjai a megoldások mentén.
Ha $I = I(t)$ a (29) megoldása, akkor szükség esetén a koordináták átrendezése után feltehetjük, hogy adott t_o és megfelelően kis $\epsilon > 0$ esetén

$$M(I(t)) = \frac{I_1(t)}{r_1},\ t \in [t_0, t_0 + \epsilon].$$

Ekkor

$$M'(I(t_0)) = \frac{I_1'(t_0)}{r_1}, \ t \in [t_0, t_0 + \epsilon].$$

A (28) alak figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$r_1 \frac{I_1'(t_0)}{I_1(t_0)} = -\lambda_1 r_1 + [c_1 - I_1(t_0)] \sum_{j=1}^{n} k_{j1} \frac{I_j(t_0)}{I_1(t_0)} r_1.$$

Ekkor $M(I(t_0)) > 1$ esetén

$$r_1 \frac{I_1'(t_0)}{I_1(t_0)} < -\lambda_1 r_1 + [c_1 - r_1] \sum_{j=1}^{n} k_{ji} r_j = 0,$$

és mivel $r_1 > 0$ és $I_1(t_0) > 0$, így $I_1'(t_0) < 0$. Következtetésképpen ha $M(I(t_0)) > 1$, akkor

$$M'_{(1)}(I(t_0)) = \limsup_{h \to 0+} \frac{M(I(t_0 + h)) - M(I(t_0))}{h} < 0.$$

Hasonlóan bizonyítható, hogy ha $M(I(t_0)) = 1$, akkor $m'_{(1)}(I(t_0)) \leq 0$. Ha $m(I(t_0)) < 1$, akkor $m'_{(1)}(I(t_0)) > 0$, továbbá $m(I(t_0)) = 1$ esetén $m'_{(1)}(I(t_0)) \geq 0$.
Jelölje

$$V(I) = \max\{M(I) - 1, 0\}, \ W(I) = \max\{1 - m(I), 0\}.$$

Ekkor $V(I)$ és $W(I)$ nem-negatívak és folytonosak $I \in \Lambda_n$ esetén. Megjegyezzük, hogy $V_1'(I) \leq 0$, illetve $W_1'(I) \leq 0$. Legyen

$$H_V = \{I \in \Lambda_n | V'_{(1)}(I) = 0\}, \ H_W = \{I \in \Lambda_n | W'_{(1)}(I) = 0\}.$$

Ekkor

$$H_V = \{I | 0 \leq I_i \leq r_i\}, \ H_W = \{I | r_i \leq I_i \leq c_i\} \cup \{0\}.$$

A 8.10 tétel felhasználásával kapjuk, hogy a (29) rendszer minden megoldása ami Λ_n-en indul, az $H_v \cap H_W-$ hez tart és $H_v \cap H_W = \{k\} \cup \{0\}$. De ha $I(t) \neq 0$, akkor a 8.7 tételből tudjuk, hogy $liminf_{t \to \infty} ||I(t)|| \geq m > 0$. Következtetésképpen a (29) rendszer minden $I(t)$ megoldására, amire $I(0) \in \Lambda_n - \{0\}$ igaz, hogy $\lim_{t \to \infty} = r$. Megmutatható, hogy $I = r$ stabilis megoldás Λ_n-en, így $I = r$ globálisan aszimptotikusan stabilis $\Lambda_n - \{0\}$-n.

9

Összefoglalás

Dolgozatunkban különböző járványterjedési modelleket vizsgáltunk meg. A jól ismert SIR modellből kiindulva bevezettük az SIS modellt homogén populáció esetén, azaz először azt tettük fel, hogy az SIR modell esetén nincs retirált osztály, aki egyszer megfertőződött, az gyógyulása után újra fertőzhetővé válik és bárki bárkinek átadhatja a betegséget. Ezen modell segítségével írható le például az influenza terjedése. Utána azt az esetet vizsgáltuk, amikor kétfajta ember létezik, és nem mindenki fertőzhet meg mindenkit, és nem is azonos valószínűséggel. Ezen modell segítségével írható le például a Gonorrhea terjedése. Végezetül bevezettük ezen modellek általánosítását, amikor a populáció inhomogén, melyet feltételezéseink szerint n darab homogén részpopuláció alkot. A folytonos matematikai modellek ötletet adtak, közvetlen diszkretizációjuk segítségével különböző diszkrét matematikai modelleket építettünk fel. Dolgozatunkban megadtuk azokat a feltételeket, amelyek mellett a diszkrét modellek kvalitatív módon tükrözik az eredeti (biológiai, járványterjedési) modellek legfontosabb kvalitatív tulajdonságait. Eredményeinket számítógépes kísérletekkel illusztráltuk és támasztottuk alá.

Irodalomjegyzék

[1] Vincenzo Capasso: *Mathematical Structures of Epidemis Systems* - Springer (1993)

[2] Hethcote-Yorke: *Gonorrhea Transmission Dynamics and Control* - Springer-Verlag (1984)

[3] James C. Frauenthal: *Mathematical Modeling in Epidemiology* 89 p. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1980)

[4] R.Ramakishore: *Mathematical model of gonorrhea in a hetero sexuals with time dependent* population

[5] Ana Lajmanovich and James A. Yorke: *Deterministic Model for Gonorrhea in a Nonhomogeneous Population* - MATHEMATICAL BIOSCIENCES 28, 221-236 (1976)

[6] Martin Braun: *Differential Equations and Their Applications* - Springer (1993)

[7] Perron Oskar: *Zur Theorie der Matrices*- Mathematische Annalen, 64 (2): 248–263 (1907)

[8] Frobenius Georg: *Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen* Sitzungsber. König. Preuss. Akad. Wiss.: 456–477 (1912)

Nyilatkozat

Név: Csurkó Lilla
ELTE Természettudományi Kar, szak: Alkalmazott matematikus MSc
NEPTUN azonosító: I9V9ZH
Szakdolgozat címe: A járványterjedés vizsgálata a numerikus analízis eszközeivel

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2017. 05. 01.

a hallgató aláírása