Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Maros Gábor

Lebesgue-típusú felbontási tételek

MSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Tarcsay Zsigmond

Alkalmazott Analízis Tanszék

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A szakdolgozatom célja az úgynevezett Lebesgue-típusú felbontási tételek bemutatása. A véges métrékek jól ismert Lebesgue-felbontásához hasonlóan definiálhatjuk bizonyos terek pozitív eleminek Lebesgue-típusú felbontását egy úgynevezett reguláris, illetve szinguláris részre. A dolgozat felépítése a következő: először formák Lebesgue-felbontását definiáljuk és jellemezzük, majd összekapcsoljuk a lezárhatóság fogalmával.

A formák felbontása alapján definiáljuk pozitív operátorok Lebesgue-felbontását is, illetve egy pusztán operátorelméleti közelítést is bemutatunk.

Ezután reprezentálható formák reguláris és szinguláris részének reprezentálhatóságára adunk jellemzést, majd az itt kapott eredmények alapján reprezentálható pozitív funkcionálok Lebesgue-felbontását is jellemezzük.

Megmutatjuk a klasszikus, pozitív, véges mértékekre vonatkozó, Lebesgue-felbontási tétel és a reprezentálható pozitív funkcionálok Lebesgue-felbontásának kapcsolatát, karakterizáljuk a különböző felbontások egyértelműségét, majd végül mutatunk egy alkalmazást másodrendű elliptikus differenciáloperátorokra.

2. Formák Lebesgue-felbontása

Először formák Lebesgue-felbontását mutatjuk be. Forma alatt végig konjugáltan bilineáris pozitív szemidefinit formát, azaz első változójában lineáris, második változójában konjugáltan lineáris formát értünk, amely egy komplex lineáris $\mathscr{X}$ téren van értelmezve. A $\mathfrak{t}$ forma kvadratikus alakját a következő módon jelöljük:

$$\mathfrak{t}[\varphi] = \mathfrak{t}(\varphi, \varphi) \qquad \varphi \in \mathscr{X}.$$

Egy forma kvadratikus alakja a polarizációs egyenlőség alapján meghatározza minden pontban a felvett értékét:

$$\mathfrak{t}(\varphi, \varphi') = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \mathfrak{t}[\varphi + i^k\varphi'].$$

Ez alapján a $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{w}$ relációt úgy értjük, hogy

$$\mathfrak{t}[\varphi] \leq \mathfrak{w}[\varphi] \qquad \varphi \in \mathscr{X}.$$

2.1. Definíció. *Legyenek $\mathfrak{t}$ és $\mathfrak{w}$ formák. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{t}$ forma $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, ha létezik $(\mathfrak{t}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formák növekvő sorozata, amelyre $\mathfrak{t}_n \leq c_n\mathfrak{w}$ valamely $c_n \geq 0$ esetén, és $\mathfrak{t} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{t}_n$. A $\mathfrak{w}$ forma majorálja $\mathfrak{t}$ formát, ha létezik $c > 0$ szám, amelyre $\mathfrak{t} \leq c\mathfrak{w}$. A $\mathfrak{t}$ forma szinguláris $\mathfrak{w}$-re nézve, hogy ha egy $\mathfrak{s}$ formára teljesül, hogy $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{t}$ és $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{w}$, akkor $\mathfrak{s} = 0$ következik.*

2.1. A párhuzamos összeg és tulajdonságai

Ebben az alfejezetben azt mutatjuk meg, hogy egy $\mathfrak{t}$ forma felbontható

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_r + \mathfrak{t}_s$$

módon, ahol $\mathfrak{t}_r$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, illetve $\mathfrak{t}_s$ és $\mathfrak{w}$ szingulárisak, ezt nevezzük a formák Lebesgue-felbontásának. Ehhez bevezetjük az úgynevezett paralell összeg fogalmát, egy lemma segítségével.

2.2. Lemma. *Legyen $(\mathfrak{t}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő (fogyó) formák sorozata, amelynek egy $\mathfrak{s}$ forma felső korlátja. Ekkor a pontonkénti határértékek*

$$\mathfrak{t}(\varphi, \varphi) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{t}_n(\varphi, \varphi), \qquad \mathfrak{t}(\varphi, \varphi) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{t}_n(\varphi, \varphi)$$

léteznek, és formát definiálnak, amelyekre igaz, hogy $0 \leq \mathfrak{t} \leq \mathfrak{s}$*, illetve* $0 \leq \mathfrak{t} \leq \mathfrak{t}_n$.

Bizonyítás: $\mathfrak{t}(\varphi, \varphi)$ nyilván minden $\varphi \in \mathscr{X}$ esetén létezik. Mivel a $\mathfrak{t}_n$ sorozat minden tagjára teljesül a paralelogramma egyenlőség, így a határértékekre is, ezért a Jordan-Neumann-tétel alapján $\mathfrak{t}$ forma. $\square$

2.3. Állítás. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *formák* $\mathscr{X}$ *felett. Ekkor a* $\mathfrak{t} : \mathfrak{w}$ *paralell összeg*

$$(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[\varphi] = \inf_{g \in \mathscr{X}} \big\{ \mathfrak{w}[g + \varphi] + \mathfrak{t}[g] \big\} \qquad \varphi \in \mathscr{X}, \tag{2.1}$$

egy formát definiál.

Bizonyítás: A bizonyítás során $(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})$ formát ξ fogja jelölni. A paralell összeg definíciójából következik, hogy $\varphi \in \mathscr{X}$ esetén $\xi[\varphi] \geq 0$. Megmutatjuk, hogy $\sqrt{\xi}$ egy félnorma, melyre teljesül a paralelogramma egyenlőség, ami alapján a Jordan-Neumann-tételből már következik, hogy ξ egy forma.

Legyen $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ekkor

$$\xi[\lambda\varphi] = \inf_{g \in \mathscr{X}} \big\{ \mathfrak{w}[g + \lambda\varphi] + \mathfrak{t}[g] \big\} = \inf_{g \in \mathscr{X}} \big\{ (\mathfrak{w}[\lambda(g + \varphi)] + \mathfrak{t}[\lambda g] \big\} = |\lambda|^2 \xi[\varphi] \qquad \varphi \in \mathscr{X},$$

azaz $\sqrt{\xi}$ abszolút homogén.

Legyenek $\varphi, \psi \in \mathscr{X}$. Ekkor minden $g, h \in \mathscr{X}$ esetén teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
\xi[\varphi + \psi] &= \inf_{g \in \mathscr{X}} \big\{ \mathfrak{w}[g + \varphi + \psi] + \mathfrak{t}[g] \big\} \leq \mathfrak{w}[g + h + \varphi + \psi] + \mathfrak{t}[g + h] \\
&= \mathfrak{w}[g + \varphi] + 2\Re\mathfrak{w}(g + \varphi, h + \psi) + \mathfrak{w}[h + \psi] + \mathfrak{t}[g] + 2\Re\mathfrak{t}(g, h) + \mathfrak{t}[h] \\
&\leq \mathfrak{w}[g + \varphi] + 2\sqrt{\mathfrak{w}[g + \varphi]}\sqrt{\mathfrak{w}[h + \psi]} + \mathfrak{t}[g] + 2\sqrt{\mathfrak{t}[g]}\sqrt{\mathfrak{t}[h]} + \mathfrak{t}[h] \\
&\leq \mathfrak{w}[g + \varphi] + \mathfrak{t}[g] + 2\sqrt{\mathfrak{w}[g + \varphi] + \mathfrak{t}[g]}\sqrt{\mathfrak{w}[h + \psi] + \mathfrak{t}[h]} + \mathfrak{w}[h + \psi] + \mathfrak{t}[g] \\
&= \Big(\sqrt{\mathfrak{w}[g + \varphi] + \mathfrak{t}[g]} + \sqrt{\mathfrak{w}[h + \psi] + \mathfrak{t}[h]} \Big)^2,
\end{aligned}$$

azaz $g, h \in \mathscr{X}$-ben infimumot véve (2.1) egyenlőségből következik, hogy

$$\sqrt{\xi[\varphi + \psi]} \leq \Big(\sqrt{\xi[\varphi]} + \sqrt{\xi[\psi]} \Big) \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{X},$$

azaz $\sqrt{\xi}$ szubadditív, tehát félnorma.

A $\mathfrak{t}$ és $\mathfrak{w}$ formákra igaz, hogy

$$2\big(\mathfrak{w}[g+\varphi]+\mathfrak{t}[g]+\mathfrak{w}[h+\psi]+\mathfrak{t}[h]\big)=$$

$$=\mathfrak{w}[g+h+\varphi+\psi]+\mathfrak{t}[g+h]+\mathfrak{w}[g-h+\varphi-\psi]+\mathfrak{t}[g-h],$$

minden $g,h\in\mathscr{X}$-re. Ekkor g-ben és h-ban infimumot véve $\mathscr{X}$-ben, az előző egyenlőség bal oldala (2.1) egyenlőség szerint

$$2\big(\xi[\varphi]+\xi[\psi]\big).$$

A jobb oldal infimuma, (2.1) egyenlőséget felhasználva, pedig nagyobb vagy egyenlő mint

$$\inf_{g\in\mathscr{X}}\big\{\mathfrak{w}[g+h+\varphi+\psi]+\mathfrak{t}[g+h]\big\}+\inf_{g\in\mathscr{X}}\big\{\mathfrak{w}[g-h+\varphi-\psi]+\mathfrak{t}[g-h]\big\}=$$

$$=\xi[\varphi+\psi]+\xi[\varphi-\psi].$$

Ebből az alábbi egyenlőtlenség következik:

$$2\big(\xi[\varphi]+\xi[\psi]\big)\geq\xi[\varphi+\psi]+\xi[\varphi-\psi]\qquad\varphi,\psi\in\mathscr{X}.$$

Itt φ és ψ helyébe formálisan $(\varphi+\psi)/2$-t és $(\varphi-\psi)/2$-t helyettesítve, megkapjuk a másik irányú egyenlőtlenséget is

$$2\big(\xi[\varphi]+\xi[\psi]\big)\leq\xi[\varphi+\psi]+\xi[\varphi-\psi]\qquad\varphi,\psi\in\mathscr{X}.$$

A két egyenlőtlenséget kombinálva kapjuk, hogy

$$2\big(\xi[\varphi]+\xi[\psi]\big)=\xi[\varphi+\psi]+\xi[\varphi-\psi]\qquad\varphi,\psi\in\mathscr{X},$$

azaz teljesül a paralelogramma egyenlőség, vagyis ξ valóban forma a Jordan-Neumann-tétel szerint. $\square$

Az alábbi lemmában írjuk le a paralell összeg alapvető, elemi tulajdonságait.

2.4. Lemma. *Legyenek* $\mathfrak{t},\mathfrak{t}_n,\mathfrak{w},\mathfrak{w}_n,\mathfrak{u},\mathfrak{s}$ *formák,* λ,μ *pozitív számok. Ekkor*

(i) $\mathfrak{t}:\mathfrak{w}=\mathfrak{w}:\mathfrak{t}$;

(ii) $(\lambda\mathfrak{t}):(\lambda\mathfrak{w})=\lambda(\mathfrak{w}:\mathfrak{t})$;

(iii) $(\mathfrak{t} : \mathfrak{w}) : \mathfrak{u} = \mathfrak{t} : (\mathfrak{w} : \mathfrak{u})$;

(iv) $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} \leq \mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} \leq \mathfrak{w}$;

(v) $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{u} \Rightarrow \mathfrak{t} : \mathfrak{w} \leq \mathfrak{u} : \mathfrak{w}$;

(vi) $(\mathfrak{t} : \mathfrak{w}) + (\mathfrak{u} : \mathfrak{s}) \leq (\mathfrak{t} + \mathfrak{u}) : (\mathfrak{w} + \mathfrak{s})$;

(vii) $\mathfrak{t}_n \downarrow \mathfrak{t}, \mathfrak{w}_n \downarrow \mathfrak{w} \Rightarrow \mathfrak{t}_n : \mathfrak{w}_n \downarrow \mathfrak{t} : \mathfrak{w}$;

(viii) $(\lambda\mathfrak{t}) : (\mu\mathfrak{t}) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\mathfrak{t}$;

(ix) $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{t}, \mathfrak{u} \leq \mathfrak{w} \Rightarrow (1/2)\mathfrak{u} \leq \mathfrak{t} : \mathfrak{w}$;

(x) $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{t}, \mathfrak{u} \leq \mathfrak{w}, \mathfrak{t} : \mathfrak{w} \leq (1/2)\mathfrak{u} \Rightarrow \mathfrak{t} : \mathfrak{w} = 1/2\mathfrak{u}$.

Bizonyítás: (i),(ii) és (v) következnek a paralell összeg definíciójából.

(iii) (2.1) egyenlőségből következik, hogy bármely $\varphi \in \mathscr{X}$ esetén

$$\begin{aligned}\big((\mathfrak{t} : \mathfrak{w}) : \mathfrak{u}\big)[\varphi] &= \inf_{g\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{u}[g+\varphi] + (\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[g]\big\}\\ &= \inf_{g\in\mathscr{X}} \inf_{h\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{u}[g+\varphi] + \mathfrak{w}[g+h] + \mathfrak{t}[h]\big\}.\end{aligned}$$

$\mathfrak{t} : (\mathfrak{w} : \mathfrak{u})$-ra pedig

$$\begin{aligned}\big(\mathfrak{t} : (\mathfrak{w} : \mathfrak{u})\big)[\varphi] &= \inf_{h\in\mathscr{X}} \big\{(\mathfrak{w} : \mathfrak{u})[h+\varphi] + \mathfrak{t}[h]\big\}\\ &= \inf_{h\in\mathscr{X}} \inf_{g\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{u}[g+h+\varphi] + \mathfrak{w}[g] + \mathfrak{t}[h]\big\}\\ &= \inf_{h\in\mathscr{X}} \inf_{g\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{u}[g-h+\varphi] + \mathfrak{w}[g] + \mathfrak{t}[h]\big\}\\ &= \inf_{h\in\mathscr{X}} \inf_{g'\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{u}[g'+\varphi] + \mathfrak{w}[g'+h] + \mathfrak{t}[h]\big\},\end{aligned}$$

$g' = g - h$ helyettesítés mellett, tehát a két kifejezés megyezik.

(iv) A (2.1) egyenlőségben g helyébe $-\varphi$-t írva, következik, hogy $(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[\varphi] \leq \mathfrak{t}[\varphi]$.

(vi) Mivel a

$$\begin{aligned}&\inf_{g\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{w}[g+\varphi] + \mathfrak{t}[g]\big\} + \inf_{g'\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{s}[g'+\varphi] + \mathfrak{t}[g']\big\}\\ &\qquad\leq \big(\mathfrak{w}[g+g'+\varphi] + \mathfrak{t}[g+g']\big) + \big(\mathfrak{s}[g+g'+\varphi] + \mathfrak{u}[g+g']\big)\\ &\qquad= \big((\mathfrak{w}+\mathfrak{s})[g+g'+\varphi] + (\mathfrak{t}+\mathfrak{u})[g+g']\big)\end{aligned}$$

egyenlőtlenség minden $g, g' \in \mathscr{X}$-re igaz, ezért az infimumra is, így $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{u}$ esetén $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} \leq \mathfrak{u} : \mathfrak{w}$.

(vii) Ha $(\mathfrak{t}_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq \mathfrak{t}$ és $(\mathfrak{w})_{n\in\mathbb{N}} \geq \mathfrak{w}$, akkor $(\mathfrak{t}_n : \mathfrak{w}_n) \geq (\mathfrak{t} : \mathfrak{w})$ következik (v)-ből. A 2.2. Lemma alapján ekkor a $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{t}_n : \mathfrak{w}_n)$ határérték egy formát definiál. Minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $g_\epsilon \in \mathscr{X}$, amelyre

$$(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[\varphi] > \mathfrak{w}[g_\epsilon + \varphi] + \mathfrak{t}[g_\epsilon] - \epsilon.$$

Továbbá létezik olyan $n_{g_\epsilon,\epsilon} \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_{g_\epsilon,\epsilon}$ esetén

$$\mathfrak{w}_n[g_\epsilon + \varphi] + \mathfrak{t}_n[g_\epsilon] - \epsilon < \mathfrak{w}[g_{\epsilon+\varphi}] + \mathfrak{t}[g_\epsilon].$$

A két egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\inf_{g\in\mathscr{X}} \mathfrak{w}_n[g + \varphi] + \mathfrak{t}_n[g + \varphi] < (\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[\varphi] + 2\epsilon,$$

minden $n > n_{g_\epsilon,\epsilon}$ és $\epsilon > 0$-ra, azaz $\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{t}_n : \mathfrak{w}_n) \leq \mathfrak{t} : \mathfrak{w}$ is teljesül.

(viii) Az infimum mögötti kifejezést átrendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lambda t[g+\varphi] + \mu t[g] &= \lambda t[\varphi] + 2\lambda \Re t(g,\varphi) + (\lambda+\mu) t[g] \\
&= \lambda t[\varphi] + t\left[\sqrt{\lambda+\mu} g + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda+\mu}\varphi}\right] - \frac{\lambda^2}{\lambda+\mu} t[\varphi] \\
&= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} t[\varphi] + t\left[\sqrt{\lambda+\mu} g + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda+\mu}}\varphi\right].
\end{aligned}$$

A kifejezés infimumát véve az utolsó sor jobb oldala 0, így megkaptuk az állítást.

(ix) A (viii) pontot alkalmazva megkapjuk, hogy $\mathfrak{u} : \mathfrak{u} = (1/2)\mathfrak{u}$. Így (i) és (v) pontokat alkalmazva látható, hogy

$$\mathfrak{u} : \mathfrak{u} \leq \mathfrak{u} : \mathfrak{w} \leq \mathfrak{t} : \mathfrak{w}.$$

(x) A (ix) pontból tudjuk, hogy $(1/2)\mathfrak{u} \leq \mathfrak{t} : \mathfrak{w}$, így $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} \leq (1/2)\mathfrak{u}$ miatt egyenlőséget kapunk. $\square$

2.2. A $\mathfrak{D}_\mathfrak{w}\mathfrak{t}$ operátor

A paralell összeg tulajdonságai miatt a $(\mathfrak{t} : n\mathfrak{w})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő felülről korlátos formák sorozata, így definiálhatjuk a

$$\mathfrak{D}_\mathfrak{w}\mathfrak{t} = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\mathfrak{t} : n\mathfrak{w})$$

kifejezést, amely egy forma a 2.2. Lemma értelmében, $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}$ pedig egy jól definiált operátor a formák terén.

A következő lemma a $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}$ operátor alapvető, elemi tulajdonságait írja le.

2.5. Lemma. *Legyenek* $\mathfrak{t}, \mathfrak{w}, \mathfrak{u}, \mathfrak{s}$ *formák és* $\lambda > 0$ *szám. Ekkor teljesülnek a következők:*

(i) $\mathfrak{D}_{\lambda\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$;

(ii) $(\mathfrak{t} : n\mathfrak{w}) \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} \qquad n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{s}, \mathfrak{u} \leq \mathfrak{w} \Rightarrow \mathfrak{D}_{\mathfrak{u}}\mathfrak{t} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{s}$;

(iv) $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\lambda\mathfrak{t}) = \lambda\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$;

(v) $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} + \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{s} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t} + \mathfrak{s})$;

(vi) $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}$ *idempotens, azaz* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$.

Bizonyítás: (i) $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ definíciójából

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\mathfrak{t} : n\mathfrak{w}) = \lim_{n\to\infty}(\mathfrak{t} : n\mathfrak{w}) = \lim_{n\to\infty}(\mathfrak{t} : n\lambda\mathfrak{w}) = \mathfrak{D}_{\lambda\mathfrak{w}}\mathfrak{t},$$

hiszen létezik egy $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, monoton növő sorozat, hogy $n_k \leq \lambda k \leq n_k + 1$, ekkor teljesül, hogy

$$(\mathfrak{t} : n_k\mathfrak{w}) \leq (\mathfrak{t} : \lambda k\mathfrak{w}) \leq (\mathfrak{t} : (n_k + 1)\mathfrak{w}).$$

Az egyenlőtlenségben limeszt véve kapjuk, hogy

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \lim_{k\to\infty}(\mathfrak{t} : n_k\mathfrak{w}) \leq \lim_{k\to\infty}(\mathfrak{t} : \lambda k\mathfrak{w}) = \mathfrak{D}_{\lambda\mathfrak{w}}\mathfrak{t} \leq \lim_{k\to\infty}(\mathfrak{t} : (n_k + 1)\mathfrak{w}) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t},$$

amiből következik, hogy mindenhol egyenlőség van.

(ii) Mivel $\mathfrak{t} : n\mathfrak{w}$ monoton növő és $\mathfrak{t}$ egy felső korlátja, ezért

$$\mathfrak{t} : n\mathfrak{w} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} \leq \mathfrak{t}.$$

(iii) A 2.4. Lemma (v) pontjából következik, hogy

$$\mathfrak{t} \leq \mathfrak{s}, \mathfrak{u} \leq \mathfrak{w} \Rightarrow \mathfrak{t} : n\mathfrak{u} \leq \mathfrak{s} : n\mathfrak{w},$$

majd $n \in \mathbb{N}$-ben szuprémumot véve adódik az állítás.

(iv) A 2.4. Lemma (ii) pontjából következik, hogy

$$\lambda\mathfrak{t} : n\mathfrak{w} = \lambda\mathfrak{t} : \lambda\frac{n}{\lambda}\mathfrak{w} = \lambda\left(\mathfrak{t} : \frac{n}{\lambda}\mathfrak{w}\right),$$

majd n-ben szuprémumot véve kapjuk az állítást.

(v) A 2.4. Lemma (vi) pontjából adódik, hogy

$$\mathfrak{t} : n\mathfrak{w} + \mathfrak{s} : m\mathfrak{u} \leq (\mathfrak{t} + \mathfrak{s}) : ((n+m)\mathfrak{w}),$$

majd egymást követően szuprémumot véve $n, k \in \mathbb{N}$-ben kapjuk az állítást.

(vi) A (ii) és (iii) pontokból, illetve 2.4. Lemma (viii) pontjából következik, hogy

$$\mathfrak{t} : n\mathfrak{w} = \mathfrak{t} : (2n\mathfrak{w} : 2n\mathfrak{w}) = (\mathfrak{t} : 2n\mathfrak{w}) : 2n\mathfrak{w} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} : 2n\mathfrak{w} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}.$$

Szuprémumot véve n-ben kapjuk, hogy $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t})$. □

2.6. Lemma. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *formák. Ha* $\mathfrak{w}$ *majorálja a* $\mathfrak{t}$ *formát, azaz* $\mathfrak{t} \leq c\mathfrak{w}$ *valamely* $c > 0$ *esetén, akkor* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$*.*

Bizonyítás: Legyen $c > 0$ olyan, hogy $\mathfrak{t} < c\mathfrak{w}$. Ekkor a 2.4. Lemma (iv) és (viii) pontjai alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n}{n+c}\mathfrak{t} = \mathfrak{t} : \left(\frac{n}{c}\mathfrak{t}\right) \leq \mathfrak{t} : n\mathfrak{w} \leq \mathfrak{t},$$

azaz n-ben szuprémumumot véve kapjuk, hogy $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\mathfrak{t} : n\mathfrak{w}) = \mathfrak{t}$. □

2.7. Tétel. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *formák* $\mathscr{X}$ *felett.*

(i) *Ha* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$*, akkor* $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$*-abszolút folytonos.*

(ii) *Ha* $(\mathfrak{t}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *formák olyan sorozata, melyre* $\mathfrak{w}$ *majorálja* $\mathfrak{t}_n$*-t minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, és ha* $\mathfrak{t} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{t}_n$*, akkor* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$*. Ha* $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$*-abszolút folytons, akkor* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$*.*

Bizonyítás: (i) Tegyük fel, hogy $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$. Ekkor $\mathfrak{t}_n = \mathfrak{t} : n\mathfrak{w}$ egy monoton növő sorozat, melyre $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{t}_n = \mathfrak{t}$. Mivel $\mathfrak{t}_n \leq n\mathfrak{w}$, így $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos.

(ii) Tegyük fel, hogy $\mathfrak{t} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{t}_n$ olyan, hogy $\mathfrak{w}$ majorálja $\mathfrak{t}_n$-t minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}_n = \mathfrak{t}_n$ az előző lemma alapján. Most a 2.5. Lemmát alkalmazva

$$\mathfrak{t}_n = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}_n \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} \leq \mathfrak{t},$$

majd n-ben szuprémumot véve megkapjuk az állítást. $\square$

2.8. Tétel. *Legyenek* $\mathfrak{t}, \mathfrak{w}$ *és* $\mathfrak{s}$ *formák. Ekkor teljesül, hogy*

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t} : \mathfrak{w}) = (\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) : \mathfrak{w} = \mathfrak{t} : \mathfrak{w},$$

illetve

$$\mathfrak{t} : \mathfrak{w} \leq \mathfrak{s} : \mathfrak{w} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{s}.$$

Bizonyítás: Mivel $\mathfrak{w}$ majorálja $\mathfrak{t} : \mathfrak{w}$-t, így

$$\mathfrak{t} : \mathfrak{w} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t} : \mathfrak{w}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big((\mathfrak{t} : \mathfrak{w}) : n\mathfrak{w}\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big((\mathfrak{t} : n\mathfrak{w}) : \mathfrak{w}\big) \leq (\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) : \mathfrak{w} \leq \mathfrak{t} : \mathfrak{w},$$

tehát teljesül az első egyenlőség.

Ha $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{s}$, akkor

$$\mathfrak{t} : \mathfrak{w} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} : \mathfrak{w} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{s} : \mathfrak{w} = \mathfrak{s} : \mathfrak{w}.$$

Megfordítva, ha $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} \leq \mathfrak{s} : \mathfrak{w}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathfrak{t} : n\mathfrak{w} \leq \mathfrak{s} : n\mathfrak{w},$$

amit indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 1$, akkor ez nyilván teljesül. Tegyük fel, hogy n-re is, ekkor a 2.4. Lemmát felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n+1}\mathfrak{t} : \mathfrak{w}\right) &= \left(\left(\frac{1}{n}\mathfrak{t}\right) : \mathfrak{w}\right) : \mathfrak{t} \leq \left(\left(\frac{1}{n}\mathfrak{s}\right) : \mathfrak{w}\right) : \mathfrak{t} \\ &\leq \left(\left(\frac{1}{n}\mathfrak{s}\right) : \mathfrak{w}\right) : \mathfrak{s} = \left(\frac{1}{n+1}\mathfrak{s} : \mathfrak{w}\right),\end{aligned}$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$\mathfrak{t} : (n+1)\mathfrak{w} \le \mathfrak{s} : (n+1)\mathfrak{w}.$$

A kifejezésben szuprémumot véve n-ben kapjuk a bizonyítandó állítást. $\square$

2.9. Következmény. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *formák* $\mathscr{X}$ *felett. Ekkor a* $\zeta : \mathfrak{w} = \mathfrak{t} : \mathfrak{w}$ *egyenletnek a* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ *forma a minimális megoldása.*

Bizonyítás: Az előző tétel szerint $\zeta = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ valóban megoldása az egyenletnek. Az állítás második részéből az is következik, hogy ha $\zeta : \mathfrak{w} = \mathfrak{t} : \mathfrak{w}$, akkor $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\zeta = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$. Mivel $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\zeta \le \zeta$, így $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} \le \zeta$. $\square$

A következő állításban megmutatjuk, hogy a $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ operátor segítségével a formák szingularitása jellemezhető:

2.10. Állítás. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *formák* $\mathscr{X}$ *felett. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *szingulárisak;*

(ii) $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} = 0$*;*

(iii) $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = 0$.

Bizonyítás: (i)⇒(ii) Ha $\mathfrak{t}$ szinguláris $\mathfrak{w}$-re nézve, akkor $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} \le \mathfrak{t}$ és $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} \le \mathfrak{w}$ miatt $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} = 0$.

(ii)⇒(iii) Tegyük fel hogy $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} = 0$. Ekkor a 2.9. Következmény miatt $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = 0$.

(iii)⇒(i) Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = 0$, és legyen $\mathfrak{s}$ olyan forma, melyre $\mathfrak{s} \le \mathfrak{t}$ és $\mathfrak{s} \le \mathfrak{w}$. Ekkor a 2.4. és 2.5. Lemmákból következik, hogy

$$\frac{1}{2}\mathfrak{s} \le \mathfrak{t} : \mathfrak{w} \le \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = 0,$$

azaz $\mathfrak{s} = 0$ vagyis $\mathfrak{t}$ és $\mathfrak{w}$ szingulárisak. $\square$

Az alábbi eredmény a fejezet főtétele:

2.11. Tétel. (Lebesgue-felbontás) *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *formák* $\mathscr{X}$ *felett. Ekkor a*

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} + (\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t})$$

$\mathfrak{t}$*-nek olyan felbontása, amelyben* $\mathfrak{t}$ *abszolút folytonos* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$*-re nézve, és* $\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ *szinguláris* $\mathfrak{w}$*-re nézve. Továbbá* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ *maximális azon formák közt, melyeknek* $\mathfrak{t}$ *felső korlátja, és* $\mathfrak{w}$*-abszolút folytonosak.*

Bizonyítás: A 2.5. Lemmából következik, hogy $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} \le \mathfrak{t}$. Mivel $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$, így a 2.7. Tétel alapján $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos. A 2.5. Lemmából szintén következik, hogy

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} + \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) + \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) \le \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t},$$

tehát $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) = 0$. A 2.10. Állításból adódik, hogy $\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ szinguláris $\mathfrak{w}$-re nézve. Ha $\mathfrak{u}$ olyan forma, amelynek $\mathfrak{t}$ felső korlátja, és $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, akkor

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{u} \le \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t},$$

azaz $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ valóban maximális ilyen tekintetben. $\square$

3. Lineáris relációk kanonikus felbontása

Ez a fejezet kitérőt tesz a lineáris relációk irányába. A lineáris relációkhoz kapcsolható fogalmakra, eredményekre szükség lesz a további fejezetekben, de a lineáris relációk kanonikus felbontása önmagában is érdekes eredmény. A továbbiakban $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ mindig Hilbert-tereket jelölnek az adott skaláris szorzattal.

3.1. Definíció. *Legyenek $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ Hilbert-terek. Ekkor egy $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ lineáris alteret lineáris relációnak nevezünk. Egy $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ lineáris reláció esetén bevezetjük az alábbi halmazokat:*

$$\operatorname{dom} U := \{f \in \mathscr{H} : \{f, f'\} \in U\}, \qquad \operatorname{ran} U := \{f' \in \mathscr{K} : \{f, f'\} \in U\};$$
$$\ker U := \{f \in \mathscr{H} : \{f, 0\} \in U\}, \qquad \operatorname{mul} U := \{f' \in \mathscr{K} : \{0, f'\} \in U\},$$

melyeket rendre az U reláció értelmezési tartományának, képterének, magterének illetve többértékű részének nevezünk. Az U^{-1} formális inverz egy $U^{-1} \subseteq \mathscr{K} \times \mathscr{H}$ lineáris reláció, amelyet úgy kapunk, hogy U komponenseit felcseréljük.

3.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ lineáris reláció zárt, ha U norma-zárt a $\mathscr{H} \times \mathscr{K}$ térben, ahol $(\cdot|\cdot)_{\mathscr{H}\times\mathscr{K}}$ a következőképpen van definiálva:*

$$(\{f, f'\}|\{g, g'\})_{\mathscr{H}\times\mathscr{K}} = (f|g)_{\mathscr{H}} + (f'|g')_{\mathscr{K}} \qquad \{f, f'\}, \{g, g'\} \in \mathscr{H} \times \mathscr{K}.$$

3.3. Definíció. *Legyen $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ lineáris reláció, ekkor az U^* adjungáltat a következőképpen definiáljuk:*

$$U^* = JU^\perp = (JU)^\perp,$$

ahol $J : \mathscr{H} \times \mathscr{K} \to \mathscr{K} \times \mathscr{H}$ olyan, hogy

$$J\{f, f'\} = \{f', -f\} \qquad \{f, f'\} \in \mathscr{H} \times \mathscr{K}.$$

$\overline{U} = U^{**} = (U^\perp)^\perp$ az U lineáris reláció lezártja.

Az alábbi állítás az operátorokra vonatkozó állítás analógja:

3.4. Állítás. *Legyen $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ lineáris reláció. Ekkor teljesül, hogy*

$$(\operatorname{ran} U)^\perp = \ker U^*, \qquad (\operatorname{dom} U)^\perp = \operatorname{mul} U^*,$$
$$(\operatorname{ran} U^*)^\perp = \ker \overline{U}, \qquad (\operatorname{dom} U^*)^\perp = \operatorname{mul} \overline{U}.$$

Bizonyítás: Definíció alapján

$$f' \in \ker U^* = \ker(JU)^{\perp} \Leftrightarrow (\{f', 0\}|\{g', -g\})_{\mathscr{K}\times\mathscr{H}} = 0 \qquad \{g, g'\} \in U,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha

$$(f'|g')_{\mathscr{K}} = 0 \qquad g' \in \mathscr{K}$$

azaz, ha $f' \in (\operatorname{ran} U)^{\perp}$. A második egyenlőséget megkapjuk, ha az elsőt alkalmazzuk U^{-1}-re, hiszen $\operatorname{dom} U = \operatorname{ran} U^{-1}$, és $\operatorname{mul} U = \ker U^{-1}$. A harmadik és negyedik egyenlőséget pedig megkapjuk, ha az első és második egyenlőségeket U^* lineáris relációra alkalmazzuk. □

3.5. Állítás. *Legyen $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ lineáris reláció. Ekkor teljesül, hogy*

$$\operatorname{ran} \overline{U} \subseteq \overline{\operatorname{ran} U} \qquad \operatorname{dom} \overline{U} \subseteq \overline{\operatorname{dom} U}$$

Bizonyítás: Legyen $g \in \operatorname{ran} \overline{U}$, azaz $\{f, g\} \in \overline{U}$ valamely f esetén. Ekkor létezik olyan $(\{f_n, g_n\})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$ sorozat, amelyre $\{f_n, g_n\} \to \{f, g\}$, azaz $g \in \overline{\operatorname{ran} U}$. A második tartalmazás következik az elsőből $T = U^{-1}$-re alkalmazva. □

3.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ lineáris reláció reguláris, ha lezártja egy operátor gráfja. Ekkor U egy lezárható operátor gráfja.*

3.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ lineáris reláció szinguláris, ha*

$$\operatorname{ran} U \subseteq \operatorname{mul} \overline{U},$$

azaz mivel $\operatorname{mul} \overline{U}$ zárt, ez ekvivalens azzal, hogy

$$\overline{\operatorname{ran} U} \subseteq \operatorname{mul} \overline{U}.$$

Mivel 3.5. Állítás alapján

$$\operatorname{mul} \overline{U} \subseteq \operatorname{ran} \overline{U},$$

ezért

$$\operatorname{mul} \overline{U} \subseteq \overline{\operatorname{ran} U}$$

is igaz, így U pontosan akkor szinguláris, ha

$$\overline{\operatorname{ran} U} = \operatorname{mul} \overline{U} \tag{3.2}$$

Most különböző karakterizációkat adunk arra, hogy egy U lineáris reláció mikor lesz szinguláris.

3.8. Állítás. *Legyen $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ lineáris reláció. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) *U szinguláris;*

(ii) $\operatorname{dom} U^* \subseteq \ker U^*$*;*

(iii) $\operatorname{dom} U^* = \ker U^*$*;*

(iv) $U^* = \operatorname{dom} U^* \times \operatorname{mul} U^*$

(v) $\overline{U} = \overline{\operatorname{dom} U} \times \operatorname{mul} \overline{U}$.

Bizonyítás: (i)⇒(ii) A (3.2) egyenlőség alapján $(\overline{\operatorname{ran} U})^{\perp} = (\operatorname{mul} \overline{U})^{\perp}$ ami ekvivalens azzal, hogy $\ker U^* = \overline{\operatorname{dom} U^*}$. Ebből következik, hogy $\operatorname{dom} U^* \subseteq \ker U^*$.

(ii)⇒(iii) A következtetés nyilván igaz, hiszen $\ker U^* \subseteq \operatorname{dom} U^*$ mindig teljesül.

(iii)⇒(iv) Legyen $\{f, g\} \in U^*$. Ekkor a (iii) pont miatt $f \in \ker U^*$, azaz $\{f, 0\} \in U^*$. Ebből következik, hogy $\{0, g\} \in U^*$, azaz $g \in \operatorname{mul} U^*$. Azt kaptuk, hogy $\{f, g\} \in \operatorname{dom} U^* \times \operatorname{mul} U^*$. Most legyen $\{f, g\} \in \operatorname{dom} U^* \times \operatorname{mul} U^*$. Ekkor definíció alapján $\{0, g\} \in U^*$. Továbbá (iii) miatt $f \in \ker U^*$, azaz $\{f, 0\} \in U^*$. A linearitás miatt ekkor $\{f, g\} \in U^*$.

(iv)⇒(v) Ha vesszük az U^{**} adjungáltat, akkor az adjungálás definíciója alapján

$$U^{**} = (\operatorname{mul} U^*)^{\perp} \times (\operatorname{dom} U^*)^{\perp}$$

ami a 3.4. állítás alapján a bizonyítandó állítás.

(v)⇒(vi) Ha (v) teljesül, akkor $\operatorname{ran} \overline{U} = \operatorname{mul} \overline{U}$, azaz $\operatorname{ran} U \subseteq \operatorname{mul} \overline{U}$, tehát teljesül a szingularitás definíciója. □

Az eddig bevezetett eszközök segítségével megmutatjuk, hogy egy lineáris reláció hogyan bontható fel egy operátorszerű összegre, olyan módon, hogy

$$U = A + B = \{\{f, g + h\} : \{f, g\} \in A, \{f, h\} \in B\},$$

továbbá A reguláris, B pedig szinguláris.

3.9. Tétel. (Lineáris relációk kanonikus felbontása) *Legyen $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ lineáris reláció. Legyen $P : \mathscr{K} \to \operatorname{mul} \overline{U}$ ortogonális projekció. Tekintsük U következő felbontását:*

$$U = U_{reg} + U_{sing},$$

ahol U_{reg} és U_{sing} a következő lineáris relációk:

$$U_{reg} := \big\{\{f, (I-P)f'\} : \{f, f'\} \in U\big\}, \tag{3.3}$$

$$U_{sing} := \big\{\{f, Pf'\} : \{f, f'\} \in U\big\}. \tag{3.4}$$

Ekkor $U_{reg} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ reguláris reláció, $U_{sing} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ pedig egy szinguláris reláció, amelyre teljesül, hogy

$$\operatorname{mul} U_{sing} = \operatorname{mul} U, \qquad \operatorname{mul} \overline{U}_{sing} = \operatorname{mul} \overline{U}.$$

Bizonyítás: Először azt mutatjuk meg, hogy U_{reg} lezártja egy operátor, tehát U_{reg} reguláris. Tegyük fel, hogy $\{f_n, f_n'\}_{n \in \mathbb{N}} \in U$ olyan sorozat, amelyre

$$\{f_n, (I-P)f_n'\} \to \{0, g\},$$

ekkor $g \in (\operatorname{mul} \overline{U})^{\perp}$. Továbbá az adjungált definíciója alapján, ha $\{h, h'\} \in U^*$, akkor

$$\begin{aligned} 0 &= (f_n'|h)_{\mathscr{K}} - (f_n|h')_{\mathscr{H}} \\ &= ((I-P)f_n'|h)_{\mathscr{K}} - (f_n|h')_{\mathscr{H}} + (Pf_n'|h)_{\mathscr{K}} \\ &= ((I-P)f_n'|h)_{\mathscr{K}} - (f_n|h')_{\mathscr{H}}, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy $(Pf_n'|h)_{\mathscr{K}} = 0$, ami a 3.4. Állításból adódik. Ekkor ha vesszük az $n \to \infty$ határértéket, már adódik, hogy $(g|h)_{\mathscr{K}} = 0$ minden $h \in U^*$ esetén. Ezek szerint $g \in (\operatorname{dom} U^*)^{\perp} = \operatorname{mul} \overline{U}$. Ebből következik, hogy $g = 0$, azaz U_{reg} lezárható operátor.

Most azt mutatjuk meg, hogy U_{sing} szinguláris. Ha $\{h, h'\} \in \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ elem, akkor $\{h, h'\} \in (U_{sing})^*$ pontosan akkor teljesül, ha

$$(h'|f)_{\mathscr{H}} = (h|Pf')_{\mathscr{K}} = (Ph|f')_{\mathscr{K}} \qquad \{f, f' \in U\},$$

azaz ha $\{Ph, h'\} \in U^*$. Ebből következik, hogy $h \in \operatorname{dom}(U_{sing})^*$, akkor és csak akkor, ha $Ph \in \operatorname{dom} U^*$. Ez ekvivalens azzal, hogy $Ph = 0$, hiszen $\operatorname{dom} U^* \subseteq (\operatorname{mul} \overline{U})^{\perp}$. Továbbá $Ph = 0$ ekvivalens azzal, hogy $\mathscr{H} \in (\operatorname{mul} \overline{U})^{\perp} = \overline{\operatorname{dom} U^*}$, emiatt teljesül, hogy

$$\operatorname{dom}(U_{sing})^* = \overline{\operatorname{dom} U^*}.$$

Analóg módon belátható, hogy $h \in \ker(U_{sing})^*$, pontosan akkor, ha $Ph \in \ker U^*$. Ha $Ph \in \ker U^*$, akkor $Ph \in \operatorname{dom} U^*$ és $Ph = 0$. Megfordítva, ha $Ph = 0$, akkor $Ph \in \ker U^*$. Emiatt teljesül, hogy

$$\ker(U_{sing})^* = \overline{\operatorname{dom} U^*}.$$

A két egyenlőség alapján azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{dom}(U_{sing})^* = \ker(U_{sing})^*,$$

azaz 3.8. Állítás alapján U_{sing} szinguláris.

Továbbá teljesül, hogy

$$\operatorname{mul} \overline{U}_{sing} = (\operatorname{dom}(U_{sing})^*)^\perp = (\overline{\operatorname{dom} U^*})^\perp = \operatorname{mul} \overline{U},$$

illetve

$$\operatorname{mul} U_{sing} = \big\{ Pf' : \{0, f'\} \in U \big\} = \big\{ f' : \{0, f'\} \in U \big\} = \operatorname{mul} U.$$

$\square$

4. Formák lezárhatósága

Ebben a fejezetben bevezetjük a formák lezárhatóságának fogalmát, amely ránézésre teljesen különböző a 2. fejezetben bevezetett abszolút folytonosság fogalmától, azonban megmutatjuk, hogy formák esetében az abszolút folytonosság és a lezárhatóság fogalma ekvivalens.

Ehhez először segéd Hilbert-tereket vezetünk be:

4.1. Definíció. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *formák* $\mathscr{X}$ *vektortéren. Ekkor a következő halamzok lesznek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *magterei:*

$$\ker \mathfrak{t} := x \in \mathscr{X} : \mathfrak{t}[x] = 0, \qquad \ker \mathfrak{w} := \{x \in \mathscr{X} : \mathfrak{w}[x] = 0\}.$$

Ezek lineáris alterek, hiszen ha $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$*, és* $\varphi, \psi \in \ker \mathfrak{t}$*, akkor*

$$\mathfrak{t}[c_1\varphi + c_2\psi] = c_1^2\mathfrak{t}[\varphi] + c_2^2\mathfrak{t}[\psi] + c_1\overline{c_2}\mathfrak{t}(\varphi,\psi) + \overline{c_1}c_2 t(\psi,\varphi) \leq$$

$$\leq c_1^2\mathfrak{t}[\varphi] + c_2^2\mathfrak{t}[\psi] + c_1\overline{c_2}\sqrt{\mathfrak{t}[\varphi]t[\psi]} + \overline{c_1}c_2\sqrt{t[\psi]t[\varphi]} = 0,$$

a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján.

Ha $\varphi, \psi \in \mathscr{X}$ *akkor:*

$$\mathfrak{t}(\varphi + \ker \mathfrak{t}, \psi + \ker \mathfrak{t}) = \mathfrak{t}(\varphi,\psi) + \mathfrak{t}(\ker \mathfrak{t}, \psi) + \mathfrak{t}(\varphi, \ker \mathfrak{t}) + \mathfrak{t}(\ker \mathfrak{t}, \ker \mathfrak{t}) = \mathfrak{t}(\varphi,\psi).$$

Ezek alapján definiálhatjuk az $\mathscr{X} / \ker \mathfrak{t}$ *és* $\mathscr{X} / \ker \mathfrak{w}$ *faktortereket, és a faktortereken értelmezett* $(\cdot|\cdot)_\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(\cdot,\cdot)$ *és* $\mathfrak{w}(\cdot,\cdot) = (\cdot|\cdot)_\mathfrak{w}$ *skaláris szorzatokat. Ezen pre-Hilbert terek teljessé tételét jelölje* $\mathscr{H}_\mathfrak{t}$ *és* $\mathscr{H}_\mathfrak{w}$*. Hasonlóan definiáljuk* $\mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}}$ *teret is, ahol* $\ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w}) = \ker \mathfrak{t} \cap \ker \mathfrak{w}$*.*

Definiáljuk az $U \subset \mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}} \times (\mathscr{H}_\mathfrak{w} \oplus \mathscr{H}_\mathfrak{t})$ *lineáris relációt a következőképpen:*

$$U = \Big\{\big\{h + \ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w}), (h + \ker \mathfrak{w} \oplus h + \ker \mathfrak{t})\big\} : h \in \mathscr{X}\Big\}. \tag{4.5}$$

Mivel U *egy izometria, ezért egy operátor gráfja, a lezártja* U^{**} *egy* $\mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}} \to \mathscr{H}_\mathfrak{w} \oplus \mathscr{H}_\mathfrak{t}$ *izometria. Jelölje* P *a* $\mathscr{H}_\mathfrak{w} \oplus \mathscr{H}_\mathfrak{t} \to (\operatorname{ran} U^{**})^\perp$ *ortogonális projekciót.*

4.2. Állítás. *Legyenek* $f, g \in \mathscr{X}$*, ekkor*

$$\|P(f + \ker \mathfrak{w}, g + \ker \mathfrak{t})\|^2 = (\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[f - g].$$

Bizonyítás: Ha $\varphi \in \ker \mathfrak{t}$ és $\psi \in \ker \mathfrak{w}$, akkor $\operatorname{ran} U^{**} = \overline{\operatorname{ran} U}$ miatt

$$\|P(f + \ker \mathfrak{w}, g + \ker \mathfrak{t})\|^2 = \operatorname{dist}\big((f+\psi, g+\varphi), \operatorname{ran} U\big)^2 =$$

$$= \inf_{h \in \mathscr{X}} \big\{\mathfrak{w}[f + h + \ker \mathfrak{w}] + \mathfrak{t}[h + g + \ker \mathfrak{t}]\big\} = \inf_{h \in \mathscr{X}} \big\{\mathfrak{w}[f + h] + \mathfrak{t}[h + g]\big\}.$$

$g + h$-t g'-vel helyettesítve kapjuk, hogy

$$\inf_{h \in \mathscr{X}} \big\{\mathfrak{w}[f - g + g'] + \mathfrak{t}[g']\big\} = (\mathfrak{w} : \mathfrak{t})[f - g].$$

□

4.3. Következmény. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ $\mathscr{X}$*-en értelmezett formák,* U *pedig a* (4.5) *pontban bevezetett izometrikus operátor. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:*

(i) $\mathfrak{t}$ *szinguláris* $\mathfrak{w}$*-re nézve;*

(ii) $\operatorname{ran} U^{**} = \mathscr{H}_{\mathfrak{w}} \oplus \mathscr{H}_{\mathfrak{t}}$.

Bizonyítás: A 2.10. Állítás alapján (i) ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} = 0$. Az előző állítás alapján pedig $\mathfrak{t} : \mathfrak{w} = 0$ ekvivalens azzal, hogy $P = 0$, azaz $\operatorname{ran} U^{**} = \mathscr{H}_{\mathfrak{w}} \oplus \mathscr{H}_{\mathfrak{t}}$. □

Definiáljuk a következő ι_t lineáris relációt:

$$\iota_{\mathfrak{t}} = \big\{\{\varphi + \ker(\mathfrak{t} + \mathfrak{w}), \varphi + \ker \mathfrak{w}\} \in \mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}} \times \mathscr{H}_{\mathfrak{w}} : \varphi \in \mathscr{X}\big\}. \tag{4.6}$$

Mivel $\ker(\mathfrak{t} + \mathfrak{w}) \subset \ker \mathfrak{w}$, így ι_t egy operátor gráfja, amely ráadásul egy $\mathscr{H}_{t+k} \to \mathscr{H}_k$ kontrakció, hiszen

$$\|\iota_t(\varphi + \ker(\mathfrak{t} + \mathfrak{w}))\|_{\mathscr{H}_{\mathfrak{w}}} = \|\varphi + \ker \mathfrak{w}\|_{\mathscr{H}_{\mathfrak{w}}} \leq \|\varphi + \ker(\mathfrak{t} + \mathfrak{w})\|_{\mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}}}.$$

Emiatt lezártja $\iota_{\mathfrak{t}}^{**}$ is kontrakció, $\operatorname{dom} \iota_{\mathfrak{t}}^{**} = \mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}}$, és $\operatorname{ran} \iota_t^{**}$ sűrű $\mathscr{H}_k$-ban. Ebből következik, hogy ι_t^{*} is kontrakció, $\operatorname{dom} \iota_t^{*} = \mathscr{H}_k$, $\operatorname{ran} \iota_t^{*}$ sűrű $\{\ker \iota_t^{**}\}^{\perp} \subseteq \mathscr{H}_{t+k}$-ban, és $\ker \iota_t^{*} = \{0\}$.

4.4. Lemma. $\ker \iota_t^{**}$ *megadható a következőképpen:*

$$\ker \iota_{\mathfrak{t}}^{**} = \big\{\lim_{n\to\infty} \{\varphi_n + \ker(\mathfrak{t} + \mathfrak{w})\} \in \mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}} : \mathfrak{t}[\varphi_n - \varphi_m] \to 0, \quad \mathfrak{w}[\varphi_n] \to 0 \qquad n, m \to \infty\big\}$$

Bizonyítás: A $\varphi \in \ker \iota_{\mathfrak{t}}^{**}$ tartalmazás azt jelenti, hogy $\{\varphi, 0\} \in \mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}} \times \mathscr{H}_{\mathfrak{w}}$, és valamely $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{X}$ sorozatra

$$(\mathfrak{t}+\mathfrak{w})[\varphi - \varphi_n] \to 0 \qquad \mathfrak{w}[\varphi_n] \to 0,$$

azaz $\varphi = \lim_{n\to\infty}\{\varphi_n + \ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w})\} \in \mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}}$, ahol

$$\mathfrak{t}[\varphi_n - \varphi_m] + \mathfrak{w}[\varphi_n - \varphi_m] \to 0 \qquad \mathfrak{w}[\varphi_n] \to 0,$$

ami ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{t}[\varphi_n - \varphi_m] \to 0$ és $\mathfrak{w}[\varphi_n] \to 0$. □

Legyen $Q_{\mathfrak{t}} : \mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}} \to \ker \iota_{\mathfrak{t}}^{**}$ ortogonális projekció. Ekkor $\mathfrak{t}_{sing}$ formát a következőképpen definiáljuk:

$$\mathfrak{t}_{sing}(\varphi, \psi) = \big(Q_{\mathfrak{t}}(\varphi + \ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w}))|Q_{\mathfrak{t}}(\psi + \ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w}))\big)_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}} \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{X}. \tag{4.7}$$

A $\mathfrak{t}_{sing}$ formát a $\mathfrak{t}$ forma $\mathfrak{w}$-re vonatkozó szinguláris részének hívjuk.

4.5. Tétel. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ $\mathscr{X}$*-en értelmezett formák. Ekkor* $\mathfrak{t}_{sing}$ *megadható a következő módon:*

$$\mathfrak{t}_{sing}[\varphi] = \mathfrak{t}[\varphi] + \inf_{h\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{w}[\varphi + h] - \inf_{g\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{t}[g] + \mathfrak{w}[g+h]\big\}\big\} \qquad \varphi \in \mathscr{X}. \tag{4.8}$$

Továbbá az is igaz, hogy $0 \le \mathfrak{t}_{sing} \le \mathfrak{t}$.

Bizonyítás: Mivel $\iota_{\mathfrak{t}}^{*}\langle \operatorname{ran} \iota_{\mathfrak{t}} \rangle$ sűrű $\{\ker \iota_{\mathfrak{t}}^{**}\}^{\perp} \subseteq \mathscr{H}_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}}$ altérben, ezért

$$\begin{aligned}
&\big(Q(\varphi + \ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w}))|Q(\varphi + \ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w}))\big)_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}} = \\
&= \inf_{h\in\mathscr{X}} \big\{\big((\varphi + \ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w})) + \iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})|(\varphi + \ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w})) + \iota_{t}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})\big)_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}}\big\} = \\
&= \inf_{h\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{t}[\varphi] + \mathfrak{w}[\varphi] + \mathfrak{w}(\varphi, h) + \mathfrak{w}(h, \varphi) + \big(\iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})|\iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})\big)_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}}\big\} \\
&= \mathfrak{t}[\varphi] + \inf_{h\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{w}[\varphi + h] - \mathfrak{w}[h] + \big(\iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})|\iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})\big)_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}}\big\}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Mivel $\operatorname{dom} \iota_{\mathfrak{t}}$ sűrű $\mathscr{H}_{t+k}$-ban, ezért

$$\begin{aligned}
0 &= \inf_{g\in\mathscr{X}} \big\{\big((g + \ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w})) + \iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})|(g + \ker(\mathfrak{t}+\mathfrak{w})) + \iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})\big)_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}}\big\} \\
&= \big(\iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})|\iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})\big)_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}} + \inf_{g\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{t}[g] + \mathfrak{w}[g] + \mathfrak{w}(g, h) + \mathfrak{w}(h, g)\big\} \\
&= -\mathfrak{w}[h] + \big(\iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})|\iota_{\mathfrak{t}}^{*}(h + \ker \mathfrak{w})\big)_{\mathfrak{t}+\mathfrak{w}} + \inf_{g\in\mathscr{X}} \big\{\mathfrak{t}[g] + \mathfrak{w}[g+h]\big\}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

A (4.9) és (4.10) egyenlőségekből kapjuk, hogy

$$\mathfrak{t}_{sing}[\varphi] = \mathfrak{t}[\varphi] + \inf_{h\in\mathscr{X}} \left\{\mathfrak{w}[\varphi + h] - \inf_{g\in\mathscr{X}} \left\{\mathfrak{t}[g] + \mathfrak{w}[g + h]\right\}\right\},$$

ezzel beláttuk az állítás első felét.

Egyrészt $t_{sing} \geq 0$ a definíciója alapján, másfelől

$$t_{sing}[\varphi] \leq \mathfrak{t}[\varphi] + \mathfrak{w}[\varphi + h] - \inf_{g\in\mathscr{X}} \left\{\mathfrak{t}[g] + \mathfrak{w}[g + h]\right\}, \qquad \varphi \in \mathscr{X},$$

teljesül $h \in \mathscr{X}$ esetén. A $h = -\varphi$ választással megkapjuk, hogy $\mathfrak{t}_{sing} \leq \mathfrak{t}$. □

4.6. Definíció. *Definiáljuk a következő formát:*

$$\mathfrak{t}_{reg}[\varphi] = \mathfrak{t}[\varphi] - \mathfrak{t}_{sing}[\varphi], \qquad \varphi \in \mathscr{X}.$$

A $\mathfrak{t}_{reg}$ formát a $\mathfrak{t}$ forma $\mathfrak{w}$ formára vonatkozó reguláris részének hívjuk.

4.7. Tétel. *Legyenek $\mathfrak{t}$ és $\mathfrak{w}$ $\mathscr{X}$-en értelmezett formák. Ekkor*

$$\mathfrak{t}_{reg}[\varphi] = \sup_{h\in\mathscr{X}} \left\{(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[h] - \mathfrak{w}[\varphi + h]\right\} \quad \varphi \in \mathscr{X}, \tag{4.11}$$

és

$$0 \leq \mathfrak{t}_{reg} \leq \mathfrak{t}. \tag{4.12}$$

Bizonyítás: A (4.8) egyenlőségből és $\mathfrak{t}_{reg}$ definíciójából következik, hogy

$$\mathfrak{t}_{reg}[\varphi] = \sup_{h\in\mathscr{X}} \left\{ \inf_{g\in\mathscr{X}} \{\mathfrak{t}[g] + \mathfrak{w}[g + h]\} - \mathfrak{w}[\varphi + h]\right\}, \qquad \varphi \in \mathscr{X}, \tag{4.13}$$

ami a $\mathfrak{t} : \mathfrak{w}$ paralell összeg definíciója alapján éppen (4.11) egyenlőségnek felel meg.

Mivel $0 \leq \mathfrak{t}_{sing} \leq \mathfrak{t}$, ezért $0 \leq \mathfrak{t}_{reg} = \mathfrak{t} - \mathfrak{t}_{sing} \leq t$ is igaz. □

4.8. Definíció. *Azt mondjuk hogy a $\mathfrak{t}$ forma lezárható $\mathfrak{w}$-re nézve, ha bármely $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{X}$-beli sorozatra teljesül, hogy*

$$\mathfrak{t}[\varphi_n - \varphi_m] \to 0 \quad \wedge \quad \mathfrak{w}[\varphi_n] \to 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{t}[\varphi_n] \to 0. \tag{4.14}$$

A lezárható elnevezést az alábbi indokolja:

4.9. Állítás. *Legyenek* $\mathfrak{t}, \mathfrak{w}$ *az* $\mathscr{X}$ *vektortéren értelmezett formák. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathfrak{t}$ *forma* $\mathfrak{w}$*-lezárható;*

(ii) $T := \big\{\{\varphi + \ker \mathfrak{w}, \varphi + \ker \mathfrak{t}\} : \varphi \in \mathscr{X}\big\} \subseteq \mathscr{H}_{\mathfrak{w}} \times \mathscr{H}_{\mathfrak{t}}$ *egy lezárható operátor gráfja.*

4.10. Tétel. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ $\mathscr{X}$*-en értelmezett formák. Ekkor* $\mathfrak{t}_{reg}$ *lezárható* $\mathfrak{w}$*-re nézve, és következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathfrak{t}$ *lezárható* $\mathfrak{w}$*-re nézve;*

(ii) $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{reg}$.

Bizonyítás: (ii)⇒(i) Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{X}$ olyan sorozat, amelyre $\mathfrak{t}_{reg}[\varphi_n - \varphi_m] \to 0$, $\mathfrak{w}[\varphi_n] \to 0$, és legyen $\epsilon > 0$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n, m \geq N$, akkor $\mathfrak{t}_{reg}[\varphi_n - \varphi_m] < \epsilon$. A (4.11) egyenlőség miatt következik, hogy minden $h \in \mathscr{X}$ és $n, m \geq N$ esetén

$$(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[h] - \mathfrak{w}[\varphi_n - \varphi_m + h] < \epsilon.$$

Ha $m \to \infty$, akkor $\mathfrak{w}[\varphi_n] \to 0$ miatt minden $h \in \mathscr{X}$ és $n \geq N$ esetén

$$(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[h] - \mathfrak{w}[\varphi_n + h] \leq \epsilon.$$

Ekkor a (4.11) egyenlőség alapján

$$\mathfrak{t}_{reg}[\varphi_n] = \sup_{h\in\mathscr{X}} \big\{(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[h] - \mathfrak{w}[\varphi_n + h]\big\} \leq \epsilon,$$

azaz $\mathfrak{t}_{reg} \to 0$, tehát $\mathfrak{t}_{reg}$ lezárható $\mathfrak{w}$-re nézve. Ha tehát $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{reg}$, akkor $\mathfrak{t}$ lezárható.

(i)⇒(ii) Tegyük fel, hogy $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$-lezárható, ekkor elég azt belátni, hogy $\mathfrak{t}_{sing} = 0$. A (4.7) egyenlőség alapján ehhez azt kell belátni, hogy $\ker \iota_{\mathfrak{t}}^{**} = \{0\}$. Ez következik ha a 4.4. Lemmában adott egyenlőségből, hiszen ha $\mathfrak{t}$ lezárható $\mathfrak{w}$-re nézve, akkor teljesül hogy

$$(\mathfrak{t} + \mathfrak{w})[\varphi_n + \ker(\mathfrak{t} + \mathfrak{w})] = \mathfrak{t}[\varphi_n + \ker \mathfrak{t} \cap \ker \mathfrak{w}] + \mathfrak{w}[\varphi_n + \ker \mathfrak{t} \cap \ker \mathfrak{w}] \to 0,$$

a $\mathfrak{t}[\varphi_n - \varphi_m] \to 0$ és $\mathfrak{w}[\varphi] \to 0$ feltételek mellett. □

4.11. Tétel. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *formák* $\mathscr{X}$ *vektortéren. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathfrak{t}$ *forma* $\mathfrak{w}$*-abszolút folytonos;*

(ii) $\mathfrak{t}$ *lezárható* $\mathfrak{w}$*-re nézve.*

Bizonyítás: (i)⇒(ii) Ha $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, akkor létezik $(\mathfrak{t}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formák olyan sorozata és $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$ számsorozat, hogy minden $\varphi \in \mathscr{X}$ esetén

$$\mathfrak{t}_n[\varphi] \leq \alpha_n \mathfrak{w}[\varphi], \qquad \mathfrak{t}_n[\varphi] \nearrow \mathfrak{t}[\varphi].$$

Ekkor a $\mathfrak{t}_n$ formák nyilván lezárhatóak, $\mathfrak{w}$-re nézve, ezért $\mathfrak{t}_n = (\mathfrak{t}_n)_{reg}$ a 4.10. Tétel alapján. Ebből következik, hogy $\mathfrak{t}_n = (\mathfrak{t}_n)_{reg} \leq \mathfrak{t}_{reg}$ a (4.12) egyenlőség alapján. Ekkor $\mathfrak{t}[\varphi] = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{t}_n[\varphi] \leq \mathfrak{t}_{reg}[\varphi]$, amiből már következik, hogy $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{reg}$, azaz $\mathfrak{t}$ lezárható a 4.10. Tétel miatt.

(ii)⇒(i) Legyen $\mathfrak{t}$ lezárható $\mathfrak{w}$-re nézve, azaz $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{reg}$. Ekkor a 2.8. Tétel alapján $(\mathfrak{D}_\mathfrak{w}\mathfrak{t}) : \mathfrak{w} = \mathfrak{t} : \mathfrak{w}$, ezért a (4.12) egyenlőség miatt $(\mathfrak{D}_\mathfrak{w}\mathfrak{t})_{reg} = \mathfrak{t}_{reg}$. Itt a 2.5. Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathfrak{t} \geq \mathfrak{D}_\mathfrak{w}\mathfrak{t} \geq (\mathfrak{D}_\mathfrak{w}\mathfrak{t})_{reg} = \mathfrak{t}_{reg} = \mathfrak{t},$$

tehát $\mathfrak{D}_\mathfrak{w}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$, ezért $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos. □

Ha $\mathfrak{t}$ és $\mathfrak{w}$ az $\mathscr{X}$ téren értelmezett formák, akkor $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{reg} + \mathfrak{t}_{sing}$ ezek szerint egy Lebesgue-típusú felbontás lesz. A következő tétel azt mondja ki, hogy ez a felbontás megegyezik a 2.11. Tételben szereplő Lebesgue-felbontással.

4.12. Tétel. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *formák* $\mathscr{X}$ *vektortéren értelmezve. Ekkor igaz, hogy*

$$\mathfrak{D}_\mathfrak{w}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{reg}, \qquad \mathfrak{t} - \mathfrak{D}_\mathfrak{w}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{sing},$$

azaz $\mathfrak{t}_{reg}$ *forma* $\mathfrak{w}$*-abszolút folytonos,* $\mathfrak{w}$ *és* $\mathfrak{t}_{sing}$ *pedig szingulárisak.*

Bizonyítás: Mivel $\mathfrak{t}_{reg} \leq \mathfrak{t}$, ezért nyilván $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}_{reg} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$. A $\mathfrak{t}_{reg}$ forma lezárható $\mathfrak{w}$-re nézve, ezért $4.11.$ Tétel miatt $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, így $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}_{reg} = \mathfrak{t}_{reg}$ a 2.7. Tétel alapján. Mivel $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, ezért lezárható is $\mathfrak{w}$-re nézve, így $(\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t})_{reg} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} \leq \mathfrak{t}_{reg}$, tehát összegezve:

$$\mathfrak{t}_{reg} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}_{reg} \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} \leq \mathfrak{t}_{reg},$$

azaz $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{reg}$. $\square$

5. Pozitív korlátos operátorok Lebesgue-felbontása

Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér a $(\cdot|\cdot)$ skaláris szorzattal, $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ korlátos pozitív operátorok. Azt mondjuk, hogy B majorálja A-t, ha $(Af|f) \leq c(Bf|f)$ minden $f \in \mathscr{H}$ esetén, valamely $c > 0$ számra. Az A operátor B-abszolút folytonos, ha létezik monoton növekvő $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív korlátos operátorok sorozata, melyeket B majorál, és $\sup(A_n f|f) = (Af|f)$. Az A operátor szinguláris B-re nézve, ha bármely $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ esetén

$$0 \leq C \leq A \quad \wedge \quad 0 \leq C \leq B \Rightarrow C = 0.$$

Az előző fejezetekben használt definíciók megegyeznek operátorok esetében a következő szereposztással:

$$\mathfrak{t}(f,g) = (Af|g) \quad \mathfrak{t}_n(f,g) = (A_n f|g) \quad \mathfrak{w}(f,g) = (Bf|g) \quad f, g \in \mathscr{H},$$

pontosabban fogalmazva $\mathfrak{t}$ pontosan akkor abszolút folytonos (szinguláris) $\mathfrak{w}$ formára nézve, ha az A operátor abszolút folytonos (szinguláris) B operátorra nézve. Ez a 4.11. Tétel miatt pedig ekvivalens az A operátor B-lezárhatóságával:

$$(Ax_n|x_n) \to 0 \quad \wedge \quad (B(x_n - x_m)|x_n - x_m) \to 0 \quad \Rightarrow \quad (Ax_n|x_n) \to 0.$$

A paralell összeg a következő alakba írható:

$$(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[\varphi] = \inf_{g\in\mathscr{H}} \left\{ \big(B(g+\varphi)|g+\varphi\big) + (Ag|g) \right\} \leq$$
$$\inf_{g\in\mathscr{H}} \left\{ \|B\|\|g+\varphi\|^2 + \|A\|\|g\|^2 \right\} \leq \|B\|\|\varphi\|^2.$$

Ebből látszik, hogy $\mathfrak{t} : \mathfrak{w}$ egy korlátos pozitív forma. A $D_B A = \sup(A : nB)$ pontonkénti határérték operátor korlátos és pozitív lesz, amit a következő tétel garantál.

5.1. Tétel. (Vigier) *Legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{B}(\mathscr{H})$ pozitív operátorok monoton növő sorozata, és $\|A_n\| \leq M$ valamely $M > 0$ számra. Ekkor az A_n sorozat pontonként konvergál a $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ pozitív korlátos operátorhoz.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy A_n monoton növő, és $\|A_n\| \leq M$. Ekkor $(A_n x|x) \leq M\|x\|^2$, ezért létezik a határérték, minden $x \in \mathscr{H}$ esetén. A polarizációs egyenlőség alapján:

$$(A_n x|y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}(A_n(x+i^k y)|x+i^k y),$$

így $(A_n x|y)$ konvergens minden $x, y \in \mathscr{H}$ esetén. Legyen $\mathfrak{L}(x,y) = \lim_{n\to\infty}(A_n x|y)$. Ekkor $\mathfrak{L}$ egy konjugáltan bilineáris forma, továbbá

$$|\mathfrak{L}(x,y)| = \lim_{n\to\infty}(A_n x|y) \le M\|x\|\|y\|,$$

azaz $\mathfrak{L}$ korlátos, ezért a Riesz reprezentációs Tétel alapján létezik egy olyan A operátor, hogy $(Ax|y) = \mathfrak{L}(x,y)$ és $\|\mathfrak{L}\| \le M$. Az A operátor pozitív, és $A \ge A_n$ bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ha $x \in \mathscr{H}$, akkor

$$\begin{aligned}\|Ax - A_n x\|^2 &= \|(A - A_n)^{1/2}(A - A_n)^{1/2}x\|^2 \\ &\le \|A - A_n\|\|(A - A_n)^{1/2}x\|^2 \\ &\le 2M((A - A_n)x|x) \to 0,\end{aligned}$$

ezért A_n sorozat pontonként konvergál A-hoz. □

Így a 2.11. Tétel alapján már könnyen belátható a következő tétel.

5.2. Tétel. *Legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ korlátos pozitív operátorok. Ekkor A-nak létezik egy B-re vonatkozó Lebesgue-felbontása:*

$$A = D_B A + (A - D_B A).$$

Itt a $D_B A$ korlátos pozitív operátor B-abszolút folytonos, $A - D_B A$ korlátos pozitív operátor szinguláris B-re nézve. $D_B A$ maximális azon operátorok közül, melyeknél A nagyobb, és B-abszolút folytonosak.

Most egy másik megközelítést mutatunk be operátorok Lebesgue-felbontásának létezésére operátorelméleti eszközökkel, amely újabb operátorokra vonatkozó karakterizációs tételekhez vezet. Egy adott $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ pozitív operátor esetén $\mathscr{H}_A$ jelölje azt a Hilbert-teret, ami annak a pre-Hilbert-térnek a teljessé tétele, amelyben $\operatorname{ran} A$-t a következő skaláris szorzattal látjuk el:

$$(Ax|Ay)_A := (Ax|y) \qquad x, y \in \mathscr{H}.$$

Ez jól definiált lesz, hiszen ha $Ay = Az$ valamely $z \in \mathscr{H}$ esetén, akkor

$$(Ax|y) = (x|Ay) = (x|Az) = (Ax|z).$$

Ekkor $\operatorname{ran} A$ definíció szerint sűrű $\mathscr{H}_A$-ban, jelölje $J_A : \operatorname{ran} A \subseteq \mathscr{H}_A \to \mathscr{H}$ a kanonikus beágyazás oprátort:

$$Ax \mapsto Ax \qquad x \in \mathscr{H}.$$

Ekkor J_A egy folytonos operátor:

$$\|J_A(Ax)\|^2 = \|Ax\|^2 \leq \|A^{1/2}\|^2\|A^{1/2}x\|^2 = \|A^{1/2}\|^2(Ax|Ax)_A \qquad x \in \mathscr{H}.$$

J_A^* a J_A adjungáltja egy $\mathscr{H} \to \mathscr{H}_A$ korlátos lineáris operátor, amelyre teljesül hogy

$$J_A^* x = Ax \qquad x \in \mathscr{H}, \tag{5.15}$$

hiszen minden $y \in \mathscr{H}$ esetén

$$(J_A^* x - Ax|Ay)_A = (x|Ay) - (Ax|y) = 0,$$

azaz $(J_A^* - A)x$ ortogonális a $\operatorname{ran} A$ sűrű lineáris altérre, vagyis valóban fennáll (5.15) egyenlőség. Ez alapján nyerjük, hogy

$$J_A^{**} J_A^* x = J_A^{**}(Ax) = J_A(Ax) = Ax \qquad x \in \mathscr{H}.$$

Így megkaptuk A következő faktorizációját:

$$A = J_A^{**} J_A^*.$$

J_A^{**} injektív, hiszen

$$\ker J_A^{**} = \{\operatorname{ran} J_A^*\}^\perp = \{\operatorname{ran} A\}^\perp = 0.$$

Az következőkben egy tételt vezetünk le, amelyre szükségünk van $\operatorname{ran} J_A^{**}$ jellemzéséhez:

5.3. Tétel. (Douglas) *Legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ korlátos operátorok. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B$*;*

(ii) $AA^* \leq \lambda BB^*$ *valamely* $\lambda > 0$ *számra;*

(iii) *létezik egy* $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *korlátos operátor, amelyre* $A = BC$.

Bizonyítás:

(iii)⇒(ii) Ha $A = BC$ akkor

$$AA^* = BB^* = \|C\|^2 BB^* - B(\|C\|^2 I - CC^*)B^* \leq \|C\|^2 BB^*.$$

(iii)⇒(i) Ez a következtetés nyilvánvaló.

(iii)⇒(ii) Most tegyük fel, hogy $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B$. Definiáljuk a C operátort $\mathscr{H}$-n a következőképpen: $x \in \mathscr{H}$ esetén $Ax \in \operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B$, ezért létezik $y \in \{\ker B\}^\perp$, amelyre $By = Ax$, legyen $Cx = y$. Ekkor $A = BC$, azt kell megmutatni, hogy C korlátos is. Mivel C az egész $\mathscr{H}$-n értelmezve van, így elég azt megmutatni, hogy C gráfja zárt a Banach zártgráf tétel alapján. Legyen $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy sorozat C gráfjában, amelyre $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$, ekkor $\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax$ és $\lim\limits_{n\to\infty} By_n = By$, azaz $Ax = By$. Mivel $\ker B$ zárt, így $y \in \{\ker B\}^\perp$, tehát $Cx = y$, vagyis C korlátos.

(ii)⇒(iii) Végül, ha $AA^* \leq \lambda BB^*$ valamely $\lambda \geq 0$ számra, definiáljuk $D : \operatorname{ran} B^* \to \operatorname{ran} A^*$ operátort úgy, hogy $D(B^*x) = A^*y$. D jól definiált, hiszen

$$\|D(B^*x)\|^2 = \|A^*y\|^2 = (AA^*x|x) \leq \lambda^2 (BB^*x|x) = \lambda^2 \|B^*x\|^2.$$

Ezek szerint D egyértelműen kiterjeszthető $\overline{\operatorname{ran} B^*}$-ra. Ha D-t $\{\operatorname{ran} B^*\}^\perp$-en 0-ként definiáljuk, akkor $DB^* = A^*$. Legyen $C = D^*$, ekkor $A = BC$. □

5.4. Állítás. *Az előzőekben bevezetett $J_A \operatorname{ran} A \subseteq \mathscr{H}_A \to \mathscr{H}$ kanonikus operátorra teljesül, hogy*

$$\operatorname{ran} J_A^{**} = \operatorname{ran}(J_A^{**} J_A^*)^{1/2} = \operatorname{ran} A^{1/2}.$$

Bizonyítás:

$$\|J_A^* x\|^2 = (J_A^{**} J_A^* x|x) = \|(J_A^{**} J_A^*)^{1/2} x\|^2,$$

majd az előbbi tétel alapján

$$\operatorname{ran} J_A^{**} = \operatorname{ran}((J_A^{**} J_A^*)^{1/2})^* = \operatorname{ran} A^{1/2}.$$

□

5.5. Lemma. *Legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ korlátos, pozitív operátorok. Tegyük fel, hogy $T : \mathscr{H}_A \to \mathscr{H}_B$ lezárható operátor, melyre $\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{dom} T$. Ekkor $(TJ_A^*)^*(TJ_A^*) \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ korlátos pozitív operátor, amely abszolút folytonos A-ra nézve.*

Bizonyítás: A Banach zárt gráf tétel alapján (TJ_A^*) egy korlátos operátor, hiszen

$$\operatorname{ran} J_A^* = \operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{dom} T.$$

Legyen $x_n \in \mathscr{H}$ olyan sorozat, amelyre $(Ax_n|x_n) \to 0$ és

$$\big((TJ_A^*)^*(TJ_A^*)(x_n - x_m)|x_n - x_m\big) = \big(T(Ax_n - Ax_m)|T(Ax_n - Ax_m)\big)_B \to 0.$$

Ekkor a T lezárhatósága miatt

$$\big((TJ_A^*)^*(TJ_A^*)x_n|x_n\big) = \big(T(Ax_n)|T(Ax_n)\big)_B \to 0.$$

□

5.6. Tétel. *Legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ korlátos, pozitív operátorok. Ekkor*

$$\mathscr{M} = \big\{\varphi \in \mathscr{H}_B : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}, (Ax_n|x_n) \to 0, Bx_n \to \varphi\big\} \tag{5.16}$$

zárt lineáris altere $\mathscr{H}_B$-nek. Ha $P : \mathscr{H}_B \to \mathscr{M}$ ortogonális projekció, akkor B felbontható a következő módon:

$$B = B_r + B_s,$$

ahol $B_r = J_B^{**}(I - P)J_B^*$ abszolút folytonos, B_s pedig szinguláris A-ra nézve. Ha $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ pozitív operátor, amely abszolút folytonos A-ra és $C \le B$, akkor $C \le B_r$.

Bizonyítás: Vezessük be a következő lineáris relációt $\mathscr{H}_A \times \mathscr{H}_B$-n:

$$\widehat{B} := \big\{\{Ax, Bx\} \in \mathscr{H}_A \times \mathscr{H}_B : x \in \mathscr{H}\big\}. \tag{5.17}$$

A 3.9. Tétel alapján ennek a relációnak a reguláris része, $T : \mathscr{H}_A \to \mathscr{H}_B$, egy lezárható operátor gráfja, ahol $\operatorname{dom} T = \operatorname{ran} A$ és

$$T(Ax) = (I - P)Bx \qquad x \in \mathscr{H}.$$

Az 5.5. lemma alapján $(TJ_A^*)^*(TJ_A^*)$ abszolút folytonos A-ra nézve.

$$\begin{aligned}\big((TJ_A^*)^*(TJ_A^*)x|y\big) &= \big(TJ_A^*x|TJ_A^*y_B\big)_B\\ &= \big((I-P)Bx|(I-P)By\big)_B\\ &= \big((I-P)J_B^*x|J_B^*y\big)\\ &= \big(J_B^{**}(I-P)J_B^*x|y\big),\end{aligned}$$

azaz

$$J_B^{**}(I-P)J_B^* = (TJ_A^*)^*(TJ_A^*), \tag{5.18}$$

tehát $J_B^{**}(I-P)J_B^*$ abszolút folytonos A-ra nézve. Az 5.3. Tétel alapján, és $C \leq J_B^{**}J_B^*$ miatt létezik egy $\widehat{C} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{H}_B)$ operátor, amelyre teljesül

$$C^{1/2} = J_B^{**}\widehat{C} = \widehat{C}^*J_B^*.$$

Mivel

$$\big(\widehat{C}(Bx)|\widehat{C}(Bx)\big) = \|C^{1/2}x\|^2 \leq \|B^{1/2}\| = (Bx|Bx)_B \qquad x \in \mathscr{H},$$

és $\operatorname{ran} B$ sűrű $\mathscr{H}_B$-ben, ezért $\|\widehat{C}\| = \|\widehat{C}^*\| \leq 1$. A $C = J_B^{**}\widehat{C}\widehat{C}^*J_B^*$ felbontás alapján tehát azt kell megmutatni, hogy

$$\|\widehat{C}^*J_B^*x\|^2 \leq \big((I-P)J_B^*x|(I-P)J_B^*x\big)_B \qquad x \in \mathscr{H}, \tag{5.19}$$

vagyis

$$\|\widehat{C}^*\varphi\|^2 \leq \big((I-P)\varphi|(I-P)\varphi\big)_B \qquad \varphi \in \mathscr{H}_B. \tag{5.20}$$

Mivel $\widehat{C}^*$ kontrakció, ezért elég megmutatni, hogy $\operatorname{ran}\widehat{C}^* \subseteq \operatorname{ran}(I-P)$.

A $\overline{\operatorname{ran}(\widehat{C}\widehat{C}^*J_B^*)} = \overline{\operatorname{ran}\widehat{C}}$ egyenlőség miatt elég azt belátni, hogy $\operatorname{ran}\widehat{C}\widehat{C}^*J_B^* \subseteq \mathscr{M}^\perp$. Legyen $\psi \in \mathscr{M}$, $x_n \in \mathscr{H}$ olyan sorozat, amelyre $(Ax_n|x_n) \to 0$, $Bx_n \to \psi$. Mivel $C \leq B$, így

$$(C(x_n - x_m)|x_n - x_m) \leq (B(x_n - x_m)|x_n - x_m) \to 0,$$

és $(Cx_n|x_n) \to 0$, hiszen C abszolút folytonos A-ra nézve. Másrészről teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
\left|\big(\psi|\widehat{C}\widehat{C}^* J_B^* x\big)_B\right|^2 &= \lim_{n\to\infty} \left|\big(Bx_n|\widehat{C}\widehat{C}^* J_B^* x\big)_B\right|^2 \\
&= \left|\big(J_B^* x_n|\widehat{C}\widehat{C}^* J_B^* x\big)_B\right|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\big(x_n|Cx\big)\right|^2 \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \big(Cx_n|x_n\big)\big(Cx|x\big) = 0 \qquad x \in \mathscr{H}
\end{aligned}$$

Ebből következik az is, hogy $\operatorname{ran} P \subseteq \ker \widehat{C}^*$, így

$$\|\widehat{C}^*\varphi\|^2 = \|\widehat{C}^*(I-P)\varphi\|^2 \leq \big((I-P)\varphi, (I-P)\varphi\big)_B \qquad \varphi \in \mathscr{H}_B.$$

Már csak azt kell megmutatni, hogy $J_B^{**}PJ_B^* = B - J_B^{**}(I-P)J_B^*$ szinguláris A-ra nézve. Mivel $J_B^{**}(I-P)J_B^*$ maximális az előbbi értelemben, így ha C olyan pozitív operátor amelyre $C \leq A$ és $C \leq J_B^{**}PJ_B^*$, akkor

$$C + J_B^{**}(I-P)J_B^* \leq B,$$

tehát A-ra nézve abszolút folytonos is, így

$$C + J_B^{**}(I-P)J_B^* \leq J_B^{**}(I-P)J_B^*,$$

így $C = 0$, amivel beláttuk az állítást. □

5.7. Következmény. *Ha $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ korlátos pozitív operátorok, akkor teljesül hogy*

$$D_A B = J_B^{**}(I-P)J_B^* \tag{5.21}$$

Bizonyítás: A 2.11. Tétel alapján látszik, hogy $D_A B$ és $J_B^{**}(I-P)J_B^*$ is a legnagyobb olyan operátor, amelynél B nagyobb, és abszolút folytonos A-ra nézve. □

Most további operátorokra vonatkozó karakterizációkat mutatunk be az eddigi eredmények segítségével, ehhez először néhány segédtételre lesz szükség.

5.8. Lemma. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ lineáris reláció. Ekkor $y \in \operatorname{dom} T^*$ akkor és csak akkor, ha létezik $C_x \geq 0$ szám, amelyre*

$$|(x'|y)_{\mathscr{K}}| \leq C_x \|x\|_{\mathscr{H}} \quad \{x, x'\} \in T.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $y \in \operatorname{dom} T^*$. Ekkor $\{y, y'\} \in T^*$ valamely $y' \in \mathscr{H}$ esetén, és a T^* definíciója alapján minden $\{x, x'\} \in T$-re

$$|(x'|y)_{\mathscr{K}}| = |(x|y')_{\mathscr{H}}| \leq \|x\|_{\mathscr{H}} \|y'\|_{\mathscr{H}},$$

így $C_x = \|y'\|$ választással megkaptuk az egyik irányt.

Most tegyük fel, hogy $y \in \mathscr{H}$ olyan, amelyre teljesül a tételben megadott egyenlőtlenség. Definiáljuk a következő $L_y : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ lineáris relációt:

$$L_y = \big\{\{x, (x'|y)_{\mathscr{K}}\} : \{x, x'\} \in T\big\}.$$

Ekkor a feltételünk miatt következik, hogy $\operatorname{mul} L_y = \{0\}$, hiszen ha $\|x\|_{\mathscr{H}} = 0$, akkor $(x'|y)_{\mathscr{K}} = 0$, ezért L_y egy $\operatorname{dom} T$-n értelmezett korlátos lineáris funkcionál gráfja. Ezek szerint L_y kiterjeszthető $\overline{\operatorname{dom} T}$-re normatartó módon, ezt a kiterjesztést jelölje $\overline{L}_y$. A Riesz reprezentációs tételből adódik, hogy létezik $y' \in \overline{\operatorname{dom} T}$, amelyre $\|y'\|_{\mathscr{H}} = \|\overline{L}_y\|$ és

$$\overline{L}_y = (x, y')_{\mathscr{H}} \quad y \in \overline{\operatorname{dom} T}.$$

Ez azt jelenti, hogy $(x'|y)_{\mathscr{K}} = (x|y')_{\mathscr{H}}$ teljesül minden $\{x, x'\} \in T$ esetén, azaz $\{y, y'\} \in T^*$, vagyis $g \in \operatorname{dom} T^*$. □

5.9. Lemma. *Legyen $y \in \mathscr{H}$, A pedig egy sűrűn definiált lineáris operátor $\mathscr{H}$-n. Ekkor ha teljesül, hogy*

$$\sup\{|(x|y)| : x \in \operatorname{dom}(A), \|Ax\| \leq 1\} \leq \infty,$$

akkor létezik $z \in \mathscr{H}$, amelyre $y = A^*z$.

Bizonyítás: Ha a feltétel teljesül, akkor $|(x|y)| \leq M_y \|Ax\|$ teljesül minden $x \in \operatorname{dom}(A)$-ra, valamely $M_y \leq 0$ szám mellett, tehát az $Ax \mapsto (x|y)$ leképezés korlátos lineáris funkcionál $\operatorname{ran} A$-n, így egyértelműen kiterjeszthető $\overline{\operatorname{ran} A}$-ra korlátos módon. Ekkor a Riesz reprezentációs tétel miatt egyértelműen létezik egy olyan $z \in \overline{\operatorname{ran} A}$ vektor, amelyre $(Ax|z) = (x|y)$ minden $x \in \operatorname{dom}(A)$ esetén teljesül, ezért $z \in \operatorname{dom}(A^*)$ és $y = A^*z$. □

5.10. Lemma. *Legyen* $\widehat{B}$ *a* (5.17) *pontban bevezetett lineáris reláció. Ekkor*

$$\operatorname{dom} \widehat{B}^* = \big\{\varphi \in \mathscr{H}_B : J_B^{**}\varphi \in \operatorname{ran} A^{1/2}\big\}.$$

Bizonyítás: Az 5.9. Lemma szerint $\operatorname{dom} \widehat{B}^*$ azon $\varphi \in \mathscr{H}_B$ vektorokat tartalmazza, amelyekre teljesül, hogy

$$|(Bx|\varphi)_B|^2 \leq m_\varphi (Ax|Ax)_A, \qquad x \in \mathscr{H},$$

valamely $m_\varphi \geq 0$ számra. Az $Ax = J_A^*$ és $Bx = J_B^*$ egyenlőségekből adódik, hogy

$$|(x|J_B^{**}\varphi)|^2 \leq m_\varphi (J_A^* x|J_A^* x)_A \qquad x \in \mathscr{H}.$$

Ebből már az 5.9. Lemma alapján következik, hogy $J_B^{**}\varphi \in \operatorname{ran} J_A^{**} = \operatorname{ran} A^{1/2}$ □

5.11. Tétel. *Legyenek* $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *pozitív lineáris operátorok. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) B *abszolút folytonos* A*-ra nézve;*

(ii) B *lezárható* A*-ra nézve;*

(iii) $\mathscr{M} = \big\{\varphi \in \mathscr{H}_B : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}, (Ax_n|x_n) \to 0, Bx_n \to \varphi\big\} = 0$*;*

(iv) $\widehat{B} = \big\{\{Ax, Bx\} \in \mathscr{H}_A \times \mathscr{H}_B : x \in \mathscr{H}\big\}$ *egy* $\mathscr{H}_A \to \mathscr{H}_B$ *lezárható funkcionált definiál;*

(v) *A* $\{g \in \mathscr{H}_B : J_B^{**} g \in \operatorname{ran} A^{1/2}\}$ *halmaz sűrű* $\mathscr{H}_B$*-ben.*

Ha bármelyik feltétel teljesül, akkor

$$B = (\widehat{B}J_A^*)^*(\widehat{B}J_A^*).$$

Bizonyítás: (i)⇔(ii) következik a 4.11. Tételből.

(ii)⇔(iv) a lezárhatóság definíciója megyegyezik $\widehat{B}$ lezárhatóságával.

(iii)⇔(iv) mivel $\mathscr{M} = \operatorname{mul} \widehat{B}^{**}$, ezért nyilvánvaló az ekvivalencia.

(iv)⇔(v) 5.8. Lemma alapján egy lineáris reláció pontosan akkor egy lezárható operátor gráfja, ha adjungáltja sűrűn definiált, így az 5.10. Lemmából adódik az ekvivalencia. □

5.12. Tétel. *Legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ pozitív lineáris operátorok. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) *B szinguláris A-ra nézve;*

(ii) $\mathscr{M} = \left\{\varphi \in \mathscr{H}_B : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}, (Ax_n|x_n) \to 0, Bx_n \to \varphi\right\} = \mathscr{H}_B$*;*

(iii) $\widehat{B} = \left\{\{Ax, Bx\} \in \mathscr{H}_A \times \mathscr{H}_B : x \in \mathscr{H}\right\}$ *lineáris reláció maximálisan szinguláris, azaz* $\operatorname{dom} \widehat{B}^* = 0$*;*

(iv) *Ha $J_B^{**}\varphi \in \operatorname{ran} A^{1/2}$ valamely $\varphi \in \mathscr{H}_B$ esetén, akkor $\varphi = 0$;*

(v) $\operatorname{ran} A^{1/2} \cap \operatorname{ran} B^{1/2} = \{0\}$.

Bizonyítás:

(i)⇒(ii) Tegyük fel, hogy B és A szingulárisak. Ekkor az 5.6. Tétel alapján $J_B^{**}(I - P)J_B^*$ A-abszolút folytonos, ezért létezik egy monoton növő $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív operátor sorozat, amely pontonként konvergál $J_B^{**}(I - P)J_B^*$ operátorhoz, és $C_n \le \alpha_n A$ valamely $\alpha_n \ge 0$ számra. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re $\alpha_n^{-1} C_n \le B$ és $\alpha_n^{-1} C_n \le A$, ezért $C_n = 0$ a B operátor A-szingularitása miatt. Ebből következik, hogy $J_B^{**}(I - P)J_B^* = 0$, azaz

$$0 = ((I - P)J_B^* x|(I - P)J_B^* x)_B = ((I - P)(Bx)|(I - P)(Bx))_B, \qquad x \in \mathscr{H}.$$

Mivel $\operatorname{ran} B \subseteq \mathscr{H}_B$ sűrű, ebből következik, hogy $P = I$, tehát $\mathscr{M} = \mathscr{H}_B$

(ii)⇒(i) Ha $\mathscr{M} = \mathscr{H}_B$, akkor az 5.6. Tétel alapján B és A szingulárisak.

(ii)⇔(iii) $\mathscr{M} = \mathscr{H}_B = \operatorname{mul} \widehat{B}^{**} = \{\operatorname{dom} \widehat{B}^*\}^\perp$ 3.4. Állítás miatt, ebből következik a két állítás ekvivalenciája.

(iii)⇔(iv)⇔(v) Az 5.10. Lemma alapján

$$\operatorname{dom} \widehat{B}^* = (J_B^{**})^{-1}\langle \operatorname{ran} A^{1/2}\rangle,$$

vagyis J_B^{**} folytán

$$J_B^{**}\langle \operatorname{dom} \widehat{B}^*\rangle = \operatorname{ran} A^{1/2}.$$

Ebből már látszik, hogy a három állítás ekvivalens. □

6. Reprezentálható formák és funkcionálok Lebesgue-felbontása

Ebben a fejezetben komplex algebrákon értelmezett reprezentálható formák és reprezentálható pozitív funkcionálok Lebesgue-felbontását mutatjuk be. A továbbiakban $\mathscr{A}$ mindig egy komplex algebrát jelöl.

6.1. Reprezentálható formák Lebesgue-felbontása

6.1. Definíció. *Legyen $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ algebra-morfizmus, valamely $\mathscr{H}$ Hilbert térre, azaz lineáris és $a, b \in \mathscr{A}$ esetén $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$. Ekkor a π leképezést az $\mathscr{A}$ algebra reprezentációjának (ábrázolásának) hívjuk.*

Azt mondjuk, hogy a π ciklikus ábrázolás ha létezik olyan $\zeta \in \mathscr{H}$ vektor, hogy

$$\overline{\pi\langle \mathscr{A} \rangle \zeta} = \mathscr{H}.$$

Ekkor ζ-t ciklikus vektornak nevezzük.

6.2. Definíció. *Legyen $\mathfrak{t}$ az $\mathscr{A}$ algebrán értelmezett forma. Azt mondjuk hogy a $\mathfrak{t}$ forma reprezentálható (ábrázolható), ha minden $a \in \mathscr{A}$ esetén létezik olyan $\lambda_a \geq 0$ szám, hogy*

$$\mathfrak{t}[ab] \leq \lambda_a \mathfrak{t}[b] \qquad b \in \mathscr{A}, \tag{6.22}$$

azaz minden $a \in \mathscr{A}$ esetén az $L_a : \mathscr{A} / \ker \mathfrak{t} \to \mathscr{A} / \ker \mathfrak{t}$

$$L_a(b + \ker \mathfrak{t}) = ab + \ker \mathfrak{t} \quad b \in \mathscr{A}$$

operátorok jól definiáltak és folytonosak az $(\mathscr{A} / \ker \mathfrak{t}, (\cdot|\cdot)_t)$ pre-Hilbert-téren. Jelölje $\pi_{\mathfrak{t}}(a)$ az L_a egyértelmű kiterjesztését a $\mathscr{H}_{\mathfrak{t}}$ Hilbert-térre.

Az alábbi magyarázza az ábrázolható forma elnevezést:

6.3. Állítás. *A $\pi_{\mathfrak{t}} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}_{\mathfrak{t}})$ az $\mathscr{A}$ algebra egy ábrázolása a $(\mathscr{H}_{\mathfrak{t}}, (\cdot|\cdot))$ Hilbert-téren.*

A 2.11. Tétel szerint bármely $\mathfrak{t}, \mathfrak{w}$ $\mathscr{A}$ feletti forma reguláris illetve szinguláris részekre bontható. A fejezet célja annak vizsgálata, hogy ábrázolható formákból kiindulva mikor lesz a reguláris illetve szinguláris rész ábrázolható.

6.4. Lemma. *Legyen $\mathscr{A}$ komplex algebra, $\mathfrak{t}$ és $\mathfrak{w}$ ezen az algebrán értelmezett reprezentálható formák. Ekkor a $(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})$ forma is reprezentálható és*

$$\|\pi_{\mathfrak{t}:\mathfrak{w}}(a)\| \leq \max\{\|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|, \|\pi_{\mathfrak{w}}(a)\|\} \qquad a \in \mathscr{A}. \tag{6.23}$$

Bizonyítás: A paralell összeg definíciója alapján $a, b \in \mathscr{A}$ esetén

$$\begin{aligned}(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[ab] &= \inf_{c\in\mathscr{A}}\{\mathfrak{t}[ab + c] + \mathfrak{w}[c]\} \leq \inf_{c\in\mathscr{A}}\{\mathfrak{t}[ab + ac] + \mathfrak{w}[ac]\} \leq \\ &\leq \inf_{c\in\mathscr{A}}\{\|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|^2\mathfrak{t}[b + c] + \|\pi_{\mathfrak{w}}(a)\|^2\mathfrak{w}[c]\} \leq \\ &\leq \max\{\|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|^2, \|\pi_{\mathfrak{w}}(a)\|^2\} \inf_{c\in\mathscr{A}}\{\mathfrak{t}[b + c] + \mathfrak{w}[c]\} = \\ &= \max\{\|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|^2, \|\pi_{\mathfrak{w}}(a)\|^2\}(\mathfrak{t} : \mathfrak{w})[b],\end{aligned}$$

azaz az állítás következik. □

6.5. Tétel. *Legyen $\mathscr{A}$ komplex algebra, $\mathfrak{t}, \mathfrak{w}$ reprezentálható formák $\mathscr{A}$-n. Legyen $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{reg} + \mathfrak{t}_{sing}$ a $\mathfrak{t}$ forma $\mathfrak{w}$-re vonatkozó Lebesgue-felbontása. Ekkor a $\mathfrak{t}_{reg}$ forma reprezentálható, és*

$$\|\pi_{\mathfrak{t}_{reg}}(a)\| \leq \max\{\|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|, \|\pi_{\mathfrak{w}}(a)\|\} \quad a \in \mathscr{A}. \tag{6.24}$$

Bizonyítás: Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\|\pi_{n\mathfrak{w}}(a)\|^2 = \sup_{b\in\mathscr{H}_{\mathfrak{w}}}\left\{\frac{n\mathfrak{w}[ab]}{n\mathfrak{w}[b]}\right\} = \sup_{b\in\mathscr{H}_{\mathfrak{w}}}\left\{\frac{\mathfrak{w}[ab]}{\mathfrak{w}[b]}\right\} = \|\pi_{\mathfrak{w}}(a)\|^2 \qquad a \in \mathscr{A}.$$

A 2.11. Tétel alapján $\mathfrak{t}_{reg}[a] = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\mathfrak{t} : n\mathfrak{w})[a]$. Az előző lemmából következik, hogy

$$(\mathfrak{t} : n\mathfrak{w})[ab] \leq \max\{\|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|^2, \|\pi_{\mathfrak{w}}(a)\|^2\}(\mathfrak{t} : n\mathfrak{w}[b]),$$

egyenlőtlenség, ahol mindkét oldal szuprémumát véve n-ben megkapjuk az állításunkban szereplő egyenlőtlenséget. □

6.6. Tétel. *Legyen $\mathscr{A}$ komplex algebra és legyenek $\mathfrak{t}, \mathfrak{w}$ ezen az algebrán értelmezett ábrázolható formák. Legyen $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{reg} + \mathfrak{t}_{sing}$ a $\mathfrak{t}$ forma $\mathfrak{w}$-re vonatkozó Lebesgue-felbontása. Definiáljuk a következő izometriát:*

$$\begin{aligned}&U : \mathscr{A}/\ker\mathfrak{t} \to \mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}} \oplus \mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}} \\ &U : (a + \ker\mathfrak{t}) := (a + \ker\mathfrak{t}_{reg}, a + \ker\mathfrak{t}_{sing}) \quad (a \in \mathscr{A}).\end{aligned}$$

Ekkor az alábbiak teljesülnek:

(i) *létezik U-nak egy unitér kiterjesztése $\mathscr{H}_{\mathfrak{t}}$ térre, ezt jelölje $\mathscr{U}$;*

(ii) $\mathscr{U}^{-1}\langle\{0+\ker\mathfrak{t}_{reg}\}\oplus\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}}\rangle$ *zárt lineáris altér $\pi_{\mathfrak{t}}$ invariáns;*

(iii) $\mathscr{U}^{-1}\langle\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}}\oplus\{0+\ker\mathfrak{t}_{sing}\}\rangle$ *zárt lineáris altér pontosan akkor $\pi_{\mathfrak{t}}$ invariáns, ha $\mathfrak{t}_{sing}$ reprezentálható.*

Ha $\pi_{\mathfrak{t}_{sing}}$ reprezentálható, akkor $a\in\mathscr{A}$ esetén teljesül hogy

$$\|\pi_{\mathfrak{t}_{reg}}(a)\|\leq\|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|,\quad \|\pi_{\mathfrak{t}_{sing}}(a)\|\leq\|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|,$$

illetve

$$\mathscr{U}\pi_{\mathfrak{t}}(a)\mathscr{U}^{-1}=\pi_{\mathfrak{t}_{reg}}(a)\oplus\pi_{\mathfrak{t}_{sing}}(a). \tag{6.25}$$

Bizonyítás: (i) A $\mathfrak{t}_{reg}$ és $\mathfrak{t}_{sing}$ formák nyilván szingulárisak egymásra nézve. A 4.3. Következmény alapján ez ekvivalens azzal, hogy $\overline{\operatorname{ran}U}=\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}}\oplus\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}}$, azaz $\operatorname{ran}U$ sűrű $\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}}\oplus\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}}$-ban, így létezik $\mathscr{U}=U^{**}$ unitér kiterjesztés.

(ii) Legyen $\psi_{\mathfrak{t}}:\mathscr{A}\to\mathscr{B}(\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}}\oplus\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}})$ az $\mathscr{A}$ algebra egy ábrázolása a következőképpen definiálva:

$$\psi_{\mathfrak{t}}(a):=\mathscr{U}\pi_{\mathfrak{t}}\mathscr{U}^{-1}, \tag{6.26}$$

amely a $\pi_{\mathfrak{t}}$-vel unitér ekvivalens ábrázolás. Az $\mathscr{U}^{-1}\langle\{0+\ker\mathfrak{t}_{reg}\}\oplus\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}}\rangle$ zárt lineáris altér pontosan akkor $\pi_{\mathfrak{t}}$ invariáns, ha $\{\{0+\ker\mathfrak{t}_{reg}\}\oplus\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}}\}$ $\psi_{\mathfrak{t}}$ invariáns. Rögzítsünk egy $a\in\mathscr{A}$ elemet. Megmutatjuk, hogy az

$$\mathscr{Y}:=\{(0+\ker\mathfrak{t}_{reg},b+\ker\mathfrak{t}_{sing}):b\in\mathscr{A}\}$$

sűrű lineáris altérre teljesül, hogy

$$\psi_{\mathfrak{t}}(a)\langle\mathscr{Y}\rangle\subseteq\{0+\ker\mathfrak{t}_{reg}\}\oplus\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}},$$

amiből $\psi_{\mathfrak{t}}$ folytonossága miatt ez $\mathscr{Y}$ lezártjára is teljesül.

Legyen $b\in\mathscr{A}$, mivel $\overline{\operatorname{ran}U}=\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}}\oplus\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}}$, ezért létezik egy olyan $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{A}$ sorozat, amelyre

$$(b_n+\ker\mathfrak{t}_{reg},b_n+\ker\mathfrak{t}_{sing})\to(0+\ker\mathfrak{t}_{reg},b+\ker\mathfrak{t}_{sing})$$

A $(b_n + \ker \mathfrak{t})_{n\in\mathbb{N}} = (\mathscr{U}^{-1}(b_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}, b_n + \ker \mathfrak{t}_{sing}))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathscr{H}_\mathfrak{t}$-ben, így a $\pi_\mathfrak{t}(a)$ operátor folytonossága miatt $(\pi_\mathfrak{t}(a)(b_n + \ker \mathfrak{t}))_{n\in\mathbb{N}} = (ab_n + \ker \mathfrak{t})_{n\in\mathbb{N}}$ is konvergens. Ebből következik, hogy $(ab_n + \ker \mathfrak{t}_{sing})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy sorozat, hiszen $\mathfrak{t}_{sing} \leq \mathfrak{t}$, tehát $(ab_n + \ker \mathfrak{t}_{sing})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál egy $\varphi_{ab} \in \mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}}$ vektorhoz. A $6.5.$ Tételből következik, hogy $\mathfrak{t}_{reg}$ ábrázolható, ezért

$$ab_n + \ker \mathfrak{t}_{reg} = \pi_{\mathfrak{t}_{reg}}(a)(b_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}) \to 0 + \ker \mathfrak{t}_{reg}.$$

Ekkor $\psi_\mathfrak{t}(a)$ folytonossága miatt teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
\psi_\mathfrak{t}(a)(0 + \ker \mathfrak{t}_{reg}, b + \ker \mathfrak{t}_{sing}) &= \lim_{n\to\infty} \psi_\mathfrak{t}(a)(b_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}, b_n + \ker \mathfrak{t}_{sing}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathscr{U}(\pi_\mathfrak{t}(a)(b_n + \ker \mathfrak{t})) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{U}(ab_n + \ker \mathfrak{t}) \\
&= \lim_{n\to\infty} (ab_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}, ab_n + \ker \mathfrak{t}_{sing}) \\
&= (0 + \ker \mathfrak{t}_{reg}, \varphi_{ab} + \ker \mathfrak{t}_{sing}),
\end{aligned}$$

azaz

$$\psi_\mathfrak{t}(a)\langle \mathscr{Y} \rangle \subseteq \{0 + \ker \mathfrak{t}_{reg}\} \oplus \mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}}.$$

(ii) Először tegyük fel, hogy $\mathscr{U}^{-1}\langle \mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}} \oplus \{0 + \ker \mathfrak{t}_{sing}\}\rangle$ $\pi_\mathfrak{t}$ invariáns, azaz $\{\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}} \oplus \{0 + \ker \mathfrak{t}_{sing}\}\}$ $\psi_\mathfrak{t}$ invariáns. Legyenek $a, c \in \mathscr{A}$ tetszőleges elemek. A $(c + \ker \mathfrak{t}_{reg}, 0 + \ker \mathfrak{t}_{sing})$ vektor $\psi_\mathfrak{t}$ invarianciája miatt

$$\psi_\mathfrak{t}(a)(c + \ker \mathfrak{t}_{reg}, 0 + \ker \mathfrak{t}_{sing}) \in \mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}} \oplus \{0 + \ker \mathfrak{t}_{sing}\},$$

ezért létezik egy $\varphi_{ac} \in \mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}}$, amelyre

$$\psi_\mathfrak{t}(a)(c + \ker \mathfrak{t}_{reg}, 0 + \ker \mathfrak{t}_{sing}) = (\varphi_{ac}, 0 + \ker \mathfrak{t}_{sing}).$$

Mivel $\overline{\operatorname{ran} U} = \mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}} \oplus \mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}}$, ezért létezik egy $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ sorozat, amelyre

$$(c_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}, c_n + \ker \mathfrak{t}_{sing}) \to (0 + \ker \mathfrak{t}_{reg}, c + \ker \mathfrak{t}_{sing}).$$

A $6.5.$ Tétel miatt $\mathfrak{t}_{reg}$ reprezentálható, így $\mathfrak{t}_{reg}[ac_n] \to 0$, ezért

$$\pi_{\mathfrak{t}_{reg}}(a)(c - c_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}) = ac - ac_n + \ker \mathfrak{t}_{reg} \to ac + \ker \mathfrak{t}_{reg}.$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\varphi_{ac}, 0+\ker \mathfrak{t}_{sing}) &= \psi_{\mathfrak{t}}(a)(c+\ker \mathfrak{t}_{reg}, 0+\ker \mathfrak{t}_{sing}) \\ &= \psi_{\mathfrak{t}}(a)(\lim_{n\to\infty}(c-c_n+\ker \mathfrak{t}_{reg}, c-c_n+\ker \mathfrak{t}_{sing})) \\ &= \lim_{n\to\infty} \psi_{\mathfrak{t}}(a)(c-c_n+\ker \mathfrak{t}_{reg}, c-c_n+\ker \mathfrak{t}_{sing}) \\ &= \lim_{n\to\infty}(ac-ac_n+\ker \mathfrak{t}_{reg}, ac-ac_n+\ker \mathfrak{t}_{sing}),\end{aligned}$$

vagyis $ac-ac_n+\ker \mathfrak{t}_{sing} \to 0+\ker \mathfrak{t}_{sing}$. Ebből kapjuk, hogy $\mathfrak{t}_{sing}[ac_n] \to \mathfrak{t}_{sing}[ac]$. Ekkor teljesül, hogy

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_{sing}[ac] &= \lim_{n\to\infty} \mathfrak{t}_{sing}[ac_n] = \lim_{n\to\infty}(\mathfrak{t}_{sing}[ac_n]+\mathfrak{t}_{reg}[ac_n]) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathfrak{t}[ac_n] \leq \|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|^2 \lim_{n\to\infty} \mathfrak{t}[c_n] \\ &= \|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|^2 \lim_{n\to\infty}(\mathfrak{t}_{reg}[c_n]+\mathfrak{t}_{sing}[c_n]) = \|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|^2 \mathfrak{t}_{sing}[c], \end{aligned} \tag{6.27}$$

azaz $\mathfrak{t}_{sing}$ ábrázolható, és $\|\pi_{\mathfrak{t}_{sing}}(a)\| \leq \|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|$. Hasonlóan, mivel $\mathfrak{t}_{reg}[a(c-c_n)] \to \mathfrak{t}_{reg}[ac]$ és $\mathfrak{t}_{sing}[a(c-c_n)] \to 0$, ezért

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_{reg}[ac] &= \lim_{n\to\infty} \mathfrak{t}_{reg}[a(c-c_n)] = \lim_{n\to\infty}(\mathfrak{t}_{reg}[a(c-c_n)]+\mathfrak{t}_{sing}[a(c-c_n)]) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathfrak{t}[a(c-c_n)] \leq \|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|^2 \lim_{n\to\infty} \mathfrak{t}[c-c_n] \\ &= \|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|^2 \lim_{n\to\infty}(\mathfrak{t}_{reg}[c-c_n]+\mathfrak{t}_{sing}[c-c_n]) = \|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|^2 \mathfrak{t}_{reg}[c], \end{aligned} \tag{6.28}$$

azaz $\|\pi_{\mathfrak{t}_{reg}}(a)\| \leq \|\pi_{\mathfrak{t}}(a)\|$.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy $\mathfrak{t}_{sing}$ ábrázolható. Legyen $a \in \mathscr{A}$ tetszőleges elem. Elég azt bizonyítani, hogy a

$$\mathscr{Z} = \{(d+\ker \mathfrak{t}_{reg}, 0+\ker \mathfrak{t}_{sing}) : d \in \mathscr{A}\}$$

$\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}} \oplus \{0+\ker \mathfrak{t}_{sing}\}$ altérben sűrű altér $\psi_{\mathfrak{t}}$ invariáns. Legyen $(d+\ker \mathfrak{t}_{reg}, 0+\ker \mathfrak{t}_{sing}) \in \mathscr{Z}$. Mivel $\operatorname{ran} U$ sűrű $\mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{reg}} \oplus \mathscr{H}_{\mathfrak{t}_{sing}}$-ben, ezért létezik egy olyan $d_n \in \mathscr{A}$ sorozat, amelyre

$$(d_n+\ker \mathfrak{t}_{reg}, d_n+\ker \mathfrak{t}_sing) \to (d+\ker \mathfrak{t}_{reg}, 0+\ker \mathfrak{t}_{sing}).$$

Mivel $\mathfrak{t}_{reg}$ és $\mathfrak{t}_{sing}$ is ábrázolható formák, ezért

$$\begin{aligned}\psi_{\mathfrak{t}}(a)(d_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}, 0 + \ker \mathfrak{t}_{sing}) &= \lim_{n\to\infty} \psi_{\mathfrak{t}}(a)(d + \ker \mathfrak{t}_{reg}, d_n + \ker \mathfrak{t}_{sing}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathscr{U}\pi_{\mathfrak{t}}(a)(d_n + \ker \mathfrak{t}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathscr{U}(ad_n + \ker \mathfrak{t}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\pi_{\mathfrak{t}_{reg}}(d_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}), \pi_{\mathfrak{t}_{sing}}(a)(d_n + \ker \mathfrak{t}_{sing})) \\ &= (ad + \ker \mathfrak{t}_{reg}, 0 + \ker \mathfrak{t}_{sing}),\end{aligned}$$

tehát $\psi_{\mathfrak{t}}(a)\langle \mathscr{Z} \rangle \subseteq \mathscr{Z}$.

A (6.25) egyenlőtlenség bizonyításához legyenek $a, x, y \in \mathscr{A}$ tetszőleges elemek, és legyen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ olyan sorozat, amelyre

$$(z_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}, z_n + \ker \mathfrak{t}_{sing}) \to (x + \ker \mathfrak{t}_{reg}, y + \ker \mathfrak{t}_{sing}).$$

Ha $\mathfrak{t}_{sing}$ reprezentálható, akkor

$$\begin{aligned}&(\mathscr{U}\pi_{\mathfrak{t}}(a)\mathscr{U}^{-1})(x + \ker \mathfrak{t}_{reg}, y + \ker \mathfrak{t}_{sing}) \\ &= \psi_{\mathfrak{t}}(a)(x + \ker \mathfrak{t}_{reg}, y + \ker \mathfrak{t}_{sing}) = \lim_{n\to\infty} \psi_{\mathfrak{t}}(a)(z_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}, z_n + \ker \mathfrak{t}_{sing}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathscr{U}(\pi_{\mathfrak{t}}(a)(z_n + \ker \mathfrak{t})) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{U}(az_n + \ker \mathfrak{t}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\pi_{\mathfrak{t}_{reg}}(a)(z_n + \ker \mathfrak{t}_{reg}), \pi_{\mathfrak{t}_{sing}}(a)(z_n + \ker \mathfrak{t}_{sing})) \\ &= (ax + \ker \mathfrak{t}_{reg}, ay + \ker \mathfrak{t}_{sing}) = (\pi_{\mathfrak{t}_{reg}}(a) \oplus \pi_{\mathfrak{t}_{sing}}(a))(x + \ker \mathfrak{t}_{reg}, y + \ker \mathfrak{t}_{sing}),\end{aligned}$$

azaz $\mathscr{U}\pi_{\mathfrak{t}}(a)\mathscr{U}^{-1}$ és $\pi_{\mathfrak{t}_{reg}} \oplus \pi_{\mathfrak{t}_{sing}}$ korlátos operátorok megegyeznek egy sűrű altéren, ebből már következik (6.25) egyenlőség. □

6.2. Reprezentálható funkcionálok Lebesgue-felbontása

Ebben az alfejezetben $*$-algebrán értelmezett reprezentálható pozitív lineáris funkcionálok Lebesgue-felbontásával foglalkozunk.

6.7. Definíció. *Legyen $\mathscr{A}$ (nem feltétlenül egységelems) $*$-algebra, azt mondjuk, hogy egy $f : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ funkcionál pozitív, ha $a \in \mathscr{A}$ esetén $f(a^*a) \geq 0$.*

6.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f funkcionál reprezentálható (vagy másnéven ábrázolható), ha létezik $\mathscr{A}$-nak olyan π $*$-ábrázolása egy $\mathscr{H}$ Hilbert-téren, és létezik egy olyan $\zeta \in \mathscr{H}$, hogy minden $a \in \mathscr{A}$ esetén $f(a) = (\pi(a)\zeta|\zeta)$ teljesül. Az eddigiekben az "ábrázolás" algebramorfizmust jelentett, itt $*$-algebra-morfizmusokról van szó, azaz teljesül, hogy $\pi(a^*) = \pi(a)^*$.*

6.9. Állítás. *Legyen $\widehat{f} : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ a következő:*

$$\widehat{f}(a, b) = f(b^*a).$$

Ekkor $\widehat{f}$ $\mathscr{A}$-n értelmezett fél-skaláris szorzat.

6.10. Tétel. (GNS-konstrukció) *Ha f pozitív funkcionál az A $*$-algebra felett, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) *f ábrázolható;*

(ii) *f ciklikusan ábrázolható;*

(iii) *létezik $m > 0$ szám amelyre $|f(a)|^2 \leq mf(a^*a)$, és létezik egy $M_a > 0$, a-tól függő konstans amelyre $|f(b^*a^*ab)| \leq M_a f(b^*b)$ minden $b \in \mathscr{A}$ esetén.*

Bizonyítás*:* (i)⇒(iii) Tegyük fel, hogy f ábrázolható. Ekkor létezik $\mathscr{A}$-nak egy π ábrázolása egy $\mathscr{H}$ Hilbert-téren, és egy $\zeta \in \mathscr{H}$ vektor, amelyre

$$f(a) = (\pi(a)\zeta|\zeta) \qquad a \in \mathscr{A},$$

ezért

$$|f(a)|^2 \leq \|\pi(a)\zeta\|^2\|\zeta\|^2 = \|\zeta\|^2(\pi(a^*)\pi(a)\zeta|\zeta) = \|\zeta\|^2 f(a^*a),$$

illetve

$$\begin{aligned}|f(b^*a^*ab)| &= |(\pi(b^*a^*ab)\zeta|\zeta)| = (\pi(a)\pi(b)\zeta|\pi(a)\pi(b)\zeta) = \|\pi(a)\pi(b)\zeta\|^2 \\ &\leq \|\pi(a)\|^2\|\pi(b)\zeta\|^2 = \|\pi(a)\|^2(\pi(b)\zeta|\pi(b)\zeta) = \|\pi(a)\|^2(\pi(b^*b)\zeta|\zeta) \\ &= \|\pi(a)\|^2|f(b^*b)|,\end{aligned}$$

azaz $M_a = \|\pi(a)\|^2$ megfelelő.

(iii)⇒(ii) Legyen $(\cdot|\cdot)$ adott fél-skaláris szorzat $\mathscr{A}$ felett a következő módon definiálva:

$$(a|b) := f(b^*a) \qquad a, b \in \mathscr{A}.$$

Legyen N_f a következő magtér:

$$N_f := \{a \in \mathscr{A} : f(a^*a) = 0\},$$

Ekkor, ha vesszük az $\mathscr{A}/N_f$ faktorteret, és ellátjuk a

$$(Ja|Jb) := f(b^*a) \qquad a, b \in \mathscr{A}$$

skaláris szorzattal, ahol $J : A \to A/N_f$ faktor leképezés, majd ennek vesszük a teljessé tételét, a kapott Hilbert-teret jelölje $\mathscr{H}$. Az f funkcionál a sűrű $J\langle A\rangle \subseteq \mathscr{H}$ altéren folytonos, hiszen

$$|f(a)|^2 \leq mf(a^*a) = m(Ja|Ja) = m\|Ja\|^2, \qquad a \in \mathscr{A}.$$

A Riesz reprezentációs tétel szerint létezik egy egyértelmű $\zeta \in \mathscr{H}$, hogy

$$f(a) = (Ja|\zeta), \qquad a \in \mathscr{A}.$$

Legyen L_a operátor $J\langle A\rangle$-n értelmezve a következő:

$$L_a(Jb) = J(ab) \qquad a, b \in \mathscr{A}.$$

Ekkor teljesül, hogy

$$\|L_a(Jb)\|^2 = \|J(ab)\|^2 = f(b^*a^*ab) \leq M_a f(b^*b) = M_a\|Jb\|^2,$$

azaz L_a folytonos, így folytonosan kiterjeszthető $\mathscr{H}$-ra. Legyen $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ leképezés a következő módon definiált:

$$\pi(a) = L_a \qquad a \in \mathscr{A}.$$

Könnyen látható, hogy π az $\mathscr{A}$ $*$-ábrázolása $\mathscr{H}$ felett. Ekkor

$$\begin{aligned}(Ja|Jb) = f(b^*a) = (J(b^*a)|\zeta) = (\pi(b^*)(Ja)|\zeta)\\ = (\pi(b)^*(Ja)|\zeta) = (Ja|\pi(b)\zeta) \qquad a, b \in \mathscr{A},\end{aligned}$$

így teljesül, hogy

$$Jb = \pi(b)\zeta \qquad b \in \mathscr{A}.$$

Ezek alapján ζ a π reprezentáció ciklikus vektora, és

$$f(a) = (Ja, \zeta) = (\pi(a)\zeta, \zeta) \qquad a \in \mathscr{A}.$$

(ii)⇒(i) Ez a következtetés nyilvánvaló. □

6.11. Tétel. *Legyen $\mathscr{A}$ $*$-algebra, f ábrázolható funkcionál $\mathscr{A}$-n, $\mathfrak{w}$ pedig reprezentálható forma $\mathscr{A}$-n. Legyen $\widehat{f} = f_{reg} + f_{sing}$ az $\widehat{f}$ forma $\mathfrak{w}$-re vonatkozó Lebesgue-felbontása. Ekkor f_{reg} és f_{sing} árázolhatóak, és léteznek olyan f_r és f_s pozitív funkcionálok, amelyekre $\widehat{f_r} = f_{reg}$ és $\widehat{f_s} = f_{sing}$, illetve teljesülnek a*

$$\|\pi_{t_r}(a)\| \leq \|\pi_t(a)\|, \qquad \|\pi_{t_s}(a)\| \leq \|\pi_t(a)\| \qquad a \in \mathscr{A}$$

egyenlőtlenségek is.

Bizonyítás: A 6.5. Tétel miatt f_{reg} reprezentálható. Mivel a 6.6. Tétel alapján $\mathscr{U}^{-1}\langle\{0 + \ker f_{reg}\} \oplus \mathscr{H}_{f_{sing}}\rangle$ $\pi_{f_{sing}}$ invariáns altér, így ennek ortogonális kiegészítő altere, $\mathscr{U}^{-1}\langle\mathscr{H}_{f_{reg}} \oplus \{0 + \ker f_{sing}\}\rangle$ is az. A 6.6. Tétel alapján ekkor f_{sing} reprezentálható és

$$\|\pi_{f_{reg}}(a)\| \leq \|\pi_f(a)\|, \qquad \|\pi_{f_{sing}}(a)\| \leq \|\pi_f(a)\|, \qquad a \in \mathscr{A}$$

teljesül. Azt kell megmutatni, hogy f_{reg} és f_{sing} is pozitív funkcionálból származik. Mivel f ábrázolható, ezért létezik egy $\zeta_f \in \mathscr{H}_t$ ciklikus vektor, amelyre $\pi_f(a)\zeta_f = a + \ker \widehat{f}$, és $f(a) = (\pi_f(a)\zeta_f, \zeta_f)_t$ teljesül minden $a \in \mathscr{A}$-ra, a 6.10. Tétel szerint. Mivel $\mathscr{H}_{f_{reg}} \oplus \mathscr{H}_{f_{sing}}$ egy ortogonális összeg ezért egyértelműen létezik olyan $\zeta_r \in \mathscr{H}_{f_{reg}}$ és $\zeta_s \in \mathscr{H}_{f_{sing}}$, hogy $\mathscr{U}(\zeta_f) = (\zeta_r, \zeta_s)$. Ekkor minden $a \in \mathscr{A}$ esetén

$$\mathscr{U}\pi_f(a)\mathscr{U}^{-1} = \mathscr{U}(\pi_f(a)\zeta_f) = \mathscr{U}(a + \ker \widehat{f}) = (a + \ker f_{reg}, a + \ker f_{sing}),$$

a (6.25) egyenlőség alapján pedig

$$\mathscr{U}\pi_f(a)\mathscr{U}^{-1} = \pi_{f_{reg}}(a) \oplus \pi_{f_{sing}}(a),$$

így ezt a két egyenlőséget véve kapjuk, hogy

$$(\pi_{f_{reg}}(a) \oplus \pi_{f_{sing}}(a))(\zeta_r|\zeta_s) = (\pi_{f_{reg}}(a)\zeta_r|\pi_{f_{sing}}(a)\zeta_s) = (a + \ker f_{reg}|a + \ker f_{sing}).$$

Azt kaptuk, hogy ζ_r és ζ_s a $\pi_{f_{reg}}$ és $\pi_{f_{sing}}$ reprezentációk ciklikus vektorai.

Legyenek f_r és f_s a következő $\mathscr{A}$-n értelmezett funkcionálok:

$$f_r(a) := (\pi_{f_{reg}}(a)\zeta_r|\zeta_r)_{f_{reg}}, \qquad f_s(a) := (\pi_{f_{sing}}(a)\zeta_s|\zeta_s)_{f_{sing}}.$$

Azt kell megmutatni, hogy $a, b \in \mathscr{A}$ esetén

$$f_r(b^*a) = t_{reg}(a,b), \qquad f_s(b^*a) = t_{sing}(a,b),$$

azaz f_r és f_s pozitívak is. Legyenek $a, b \in A$ tetszőleges elemek, ekkor

$$\begin{aligned}
f_r(b^*a) &= (\pi_{f_{reg}}(b^*a)\zeta_r|\zeta_r)_{f_{reg}} = ((\pi_{f_{reg}}(b^*a)\zeta_r, 0 + \ker f_{sing})|(\zeta_r, 0 + \ker f_{sing}))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} \\
&= (\mathscr{U}\pi_f(b^*a)\mathscr{U}^{-1}(\zeta_r, 0 + \ker f_{sing})|(\zeta_r, 0 + \ker f_{sing}))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} \\
&= (\mathscr{U}\pi_f(b^*)\mathscr{U}\pi_f(a)\mathscr{U}^{-1}(\zeta_r, 0 + \ker f_{sing})|(\zeta_r, 0 + \ker f_{sing}))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} \\
&= (\mathscr{U}\pi_f(a)\mathscr{U}^{-1}(\zeta_r, 0 + \ker f_{sing})|\mathscr{U}\pi_f(b)\mathscr{U}^{-1}(\zeta_r, 0 + \ker f_{sing}))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} \\
&= ((\pi_{f_{reg}}(a)\zeta_r, 0 + \ker f_{sing})|(\pi_{f_{reg}}(b)\zeta_r, 0 + \ker f_{sing}))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} \\
&= ((a + \ker f_{reg}, 0 + \ker f_{sing})|(b + \ker f_{reg}, 0 + \ker f_{sing}))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} = t_{reg}(a,b).
\end{aligned}$$

A szinguláris részre vonatkozó bizonyítás analóg módon történik:

$$\begin{aligned}
f_s(b^*a) &= (\pi_{f_{sing}}(b^*a)\zeta_s|\zeta_s)_{f_{sing}} = ((0 + \ker f_{reg}, \pi_{f_{sing}}(b^*a)\zeta_s)|(0 + \ker f_{reg}, \zeta_s))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} \\
&= (\mathscr{U}\pi_f(b^*a)\mathscr{U}^{-1}(0 + \ker f_{reg}, \zeta_s)|(0 + \ker f_{reg}, \zeta_s))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} \\
&= (\mathscr{U}\pi_f(b^*)\mathscr{U}\pi_f(a)\mathscr{U}^{-1}(0 + \ker f_{reg}, \zeta_s)|(0 + \ker f_{reg}, \zeta_s))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} \\
&= (\mathscr{U}\pi_f(a)\mathscr{U}^{-1}(0 + \ker f_{reg}, \zeta_s)|\mathscr{U}\pi_f(b)\mathscr{U}^{-1}(0 + \ker f_{reg}, \zeta_s))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} \\
&= ((0 + \ker f_{reg}, \pi_{f_{sing}}(a)\zeta_s)|(0 + \ker f_{reg}, \pi_{f_{sing}}(b)\zeta_s))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} \\
&= ((0 + \ker f_{reg}, a + \ker f_{sing})|(0 + \ker f_{reg}, b + \ker f_{sing}))_{f_{reg} \oplus f_{sing}} = t_{sing}(a,b).
\end{aligned}$$

□

6.12. Következmény. *Legyen $\mathscr{A}$ $*$-algebra és legyenek f és g $\mathscr{A}$-n értelmezett ábrázolható pozitív funkcionálok. Ekkor létezok egy $f = f_{reg} + f_{sing}$ felbontás, ahol f_{reg} és f_{sing} ábrázolható pozitív funkcionálok, f_{reg} lezárható g-re nézve, f_{sing} és g pedig szingulárisak*

7. Pozitív véges mértékek Lebesgue-felbontása

Ebben a fejezetben a klasszikus mértékelméleti Lebesgue-felbontásról és az eddigi Lebesgue-felbontási tételek kapcsolatáról lesz szó.

Legyen $(\mathscr{X}, \Omega)$ mérhető tér, $\mathscr{A}$ pedig a mérhető halmazok karakterisztikus függvényei által generált kommutatív $*$-algebra.

7.1. Definíció. *Ha μ és ν pozitív métékek az $(\mathscr{X}, \Omega)$ mérhető téren, akkor azt mondjuk, hogy μ mérték abszolút folytonos ν-re, hogy ha $A \in \Omega$ és $\nu(A) = 0$, akkor $\mu(A) = 0$ teljesül. A μ és ν mértékek szingulárisak, ha létezik olyan $S \in \Omega$, hogy $\mu(S) = \nu(\mathscr{X} \setminus S) = 0$.*

7.2. Lemma. *Legyenek μ és ν mértékek a $(\mathscr{X}, \Omega)$ mérható téren. Ekkor a*

$$f(a) := \int_{\mathscr{X}} a \, \mathrm{d}\, \mu, \qquad g(a) := \int_{\mathscr{X}} a \, \mathrm{d}\, \mu$$

funkcionálok pozitívak és reprezentálhatóak. Továbbá igaz, hogy

(i) *f pontosan akkor zárható le g-re nézve, ha μ abszolút folytonos ν-re,*

(ii) *f és g pontosan akkor szingulárisak, ha μ és ν is szingulárisak egymásra.*

Bizonyítás: A funkcionálok nyilván jól definiáltak, pozitívak és lineárisak, hiszen véges mértékkel vett integrálok. A 6.10. Tétel alapján az f funkcionál ábrázolhatósága ekvivalens a következő feltételekkel:

1. létezik $K \geq 0$ szám, hogy minden $a \in \mathscr{A}$ elemre

$$|f(a)|^2 \leq K f(a^* a),$$

2. minden $a \in \mathscr{A}$ elemre létezik $\lambda_a \geq 0$ szám, hogy minden $b \in \mathscr{A}$ esetén:

$$f(b^* a^* a b) \leq \lambda_a f(b^* b).$$

Mivel $\mathscr{A}$ egységelemes, ezért a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$|f(a)|^2 \leq f(1) \leq f(a^* a),$$

illetve

$$f(b^*a^*ab) = \int_{\mathscr{X}} |a|^2|b|^2 \,\mathrm{d}\,\mu \leq \max_{\mathscr{X}} |a|^2 \int_{\mathscr{X}} |b|^2 \,\mathrm{d}\,\mu = \max_{\mathscr{X}} |a|^2 f(b^*b) \qquad a, b \in \mathscr{A},$$

tehát f és g ábrázolhatóak.

(i) Legyen $A \in \Omega$ olyan, hogy $\nu(A) = 0$. Ekkor a konstans $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\chi_A)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra teljesül, hogy

$$\widehat{g}[a_n] = g(\overline{\chi}_A\chi_A) = g(\chi_A) = \int_{\mathscr{X}} \chi_A \,\mathrm{d}\,\nu = 0,$$

illetve

$$\widehat{f}[a_n - a_m] = f(\overline{(\chi_A - \chi_A)}(\chi_A - \chi_A)) = f(0) = 0,$$

ezért f lezárhatóságából következik, hogy

$$\mu(A) = \int_{\mathscr{X}} \chi_A \,\mathrm{d}\,\mu = f(\chi_A) = f(\overline{\chi}_A\chi_A) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f}[a_n] = 0,$$

tehát μ abszolút folytonos μ-re nézve

A másik irány bizonyításához legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{A}$-beli sorozat, amelyre

$$\int_{\mathscr{X}} |a_n|^2 \,\mathrm{d}\,\nu = \lim_{n\to\infty} \widehat{g}[a_n] = \lim_{n,m\to\infty} \widehat{f}[a_n - a_m] = \int_{\mathscr{X}} |a_n - a_m|^2 \,\mathrm{d}\,\mu = 0.$$

Azt kell megmutatni, hogy $\widehat{f}[a_n] \to 0$. A Riesz-Fischer tételből következik, hogy létezik egy $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek, amelyre $a_{k_n} \to 0$ ν-majdnem mindenütt. A μ mérték abszolút folytonosságából következik, hogy $\mu(\{x \in \mathscr{X} : a_{k_n} \nrightarrow 0\}) = 0$, azaz $a_{k_n} \to 0$ μ-majdnem mindenütt is. Mivel azonban az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(\mu)$ Cauchy sorozat részsorozata, ezért $\widehat{f}[a_n] \to 0$.

(ii) A 2.10. Tétel alapján f és g szingularitása ekvivalens azzal, hogy $\widehat{f} : \widehat{g} = 0$. Ebből következik, hogy $\widehat{f} : \widehat{g}[1] = 0$, ezért létezik egy $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ sorozat, amelyre

$$\int_{\mathscr{X}} |1 - b_n|^2 \,\mathrm{d}\,\mu = \widehat{f}[1 - b_n] \to 0, \qquad \int_{\mathscr{X}} |b_n|^2 \,\mathrm{d}\,\nu = \widehat{g}[b_n] \to 0.$$

Ismét a Riesz-Fischer tételt alkalmazva kapjuk, hogy létezik $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek egy olyan $(b_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amely $1 \in \mathscr{A}$-hoz konvergál μ-majdnem mindenütt, illetve létezik $(b_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$-nek is egy részsorozata, amely 0-hoz konvergál ν-majdnem mindenütt. Feltehető hogy (b_n)

rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Legyen $S := \{x \in \mathscr{X} : b_n(x) \nrightarrow 0\}$ halmaz. Ekkor $\mathscr{X} = (\mathscr{X} \setminus S) \cup S$ és $\mu(\mathscr{X} \setminus S) \leq \mu(\{x \in \mathscr{X} : b_n(x) \nrightarrow 1\}) = 0$, ezért μ és ν szingulárisak egymásra.

A másik irány bionyításához tegyük fel, hogy létezik egy $S \in \Omega$ halmaz, amelyre $\nu(S) = 0$ és $\mu(\mathscr{X} \setminus S) = 0$. Ekkor minden $a \in \mathscr{A}$ esetén

$$\begin{aligned}(\widehat{f} : \widehat{g})[a] &= \inf_{b \in \mathscr{A}} \{\widehat{f}[a+b] + \widehat{g}[b]\} \leq \widehat{f}[a - \chi_S a] + \widehat{g}[\chi_S a] \\ &= \widehat{f}[\chi_{\mathscr{X} \setminus S} a] + \widehat{g}[\chi_S a] = \int_{\mathscr{X} \setminus S} |a|^2 \,\mathrm{d}\,\mu + \int_S |a|^2 \,\mathrm{d}\,\nu = 0,\end{aligned}$$

azaz f és g szingulárisak egymásra. $\square$

7.3. Tétel. *Legyenek μ és ν véges, pozitív mértékek az $(\mathscr{X}, \Omega)$ mérhető téren. Ekkor léteznek μ_{reg} és μ_{sing} mértékek $(\mathscr{X}, \Omega)$ felett, amelyekre $\mu = \mu_{reg} + \mu_{sing}$, a μ_{reg} mérték abszolút folytonos ν-re nézve, μ_{sing} és ν pedig szingulárisak.*

Bizonyítás: Legyenek f és g az 7.2. Lemmában definiált funkcionálok. Ott beláttuk, hogy ezek a funkcionálok ábrázolhatóak, így 6.12. Következmény alapján léteznek $f_{reg} + f_{sing} = f$ $\mathscr{A}$-n értelmezett ábrázolható pozitív fukcionálok, amelyekre f_{reg} lezárható g-re nézve, f_{sing} és g pedig szingulárisak. Definiáljuk a $\mu_{reg}, \mu_{sing} : \Omega \to \mathbb{C}$ halmazfüggvényeket a következőképpen:

$$\mu_{reg}(A) := f_{reg}(\chi_A), \qquad \mu_{sing}(A) := f_{sing}(\chi_A).$$

Mivel f_{reg} és f_{sing} pozitív lineárisak, ezért μ_{reg} és μ_{sing} pozitív, végesen additív halmazfüggvények, melyeket μ majorál. Ebből már következik, hogy μ_{reg} és μ_{sing} pozitív mértékek. Minden $A \in \Omega$ esetén

$$\mu(A) = \int_{\mathscr{X}} \chi_A \,\mathrm{d}\,\mu = f(\chi_A) = f_{reg}(\chi_A) + f_{sing}(\chi_A) = \mu_{reg}(A) + \mu_{sing}(A),$$

illetve minden $a \in \mathscr{A}$ elemre teljesül, hogy

$$f_{reg}(a) = \int_{\mathscr{X}} a \,\mathrm{d}\,\mu_{reg}, \qquad f_{sing}(a) = \int_{\mathscr{X}} a \,\mathrm{d}\,\mu_{sing}.$$

Ekkor a 7.2. Lemmából már következik, hogy μ_{reg} abszolút folytonos ν-re nézve, μ_{sing} és ν pedig szingulárisak. $\square$

8. A Lebesgue-felbontások egyértelműsége

Ebben a fejezetben a Lebesgue-felbontások egyértelműségének kérdésével foglalkozunk. A formák esetében a 2.11. Tétel alapján $\mathfrak{t}$ felbontása egy maximális $\mathfrak{t}_{reg}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, és egy $\mathfrak{t}_{sing}$ $\mathfrak{w}$-szinguláris részre egyértelmű. Általában egy Lebesgue-felbontás egy abszolút folytonos és egy szinguláris részre azonban nem egyértelmű. A fejezet célja, hogy az egyértelműségre adjon pontos jellemzést. Az alábbiakban ehhez készülünk elő segédtételekkel.

8.1. Lemma. *Legyen $U \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ egy lineáris reláció. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) *U^{**} egy korlátos lineáris operátor gráfja;*

(ii) $\operatorname{ran} U^{**} \subseteq \operatorname{dom} U^{*}$*;*

(iii) $\operatorname{dom} U^{*} = \mathscr{K}$.

Bizonyítás: (i)⇔(iii) U^{**} pontosan akkor egy lineáris operátor gráfja, ha $\operatorname{dom} U^{**}$ zárt és $\operatorname{mul} U^{**} = \{0\}$. $\operatorname{dom} U^{**}$ pontosan akkor zárt, ha $\operatorname{dom} U^{*}$ zárt, ezért mivel $(\operatorname{dom} U^{*})^{\perp} = \operatorname{mul} U^{**}$, ez azt jelenti, hogy $\operatorname{dom} U^{*} = \mathscr{K}$.

(ii)⇒(iii) A lineáris relációk adjungáltjának definíciója alapján

$$\mathscr{H} \times \mathscr{K} = \overline{U} \oplus U^{\perp} = U^{**} \oplus JU^{*},$$

ahol $J\{f, f'\} = f', -f$ operátor. Ebből következik, hogy

$$\mathscr{H} = \operatorname{dom} U^{**} + \operatorname{ran} U^{*}, \qquad \mathscr{K} = \operatorname{ran} U^{**} + \operatorname{dom} U^{*},$$

amiből következik az ekvivalencia. □

8.2. Lemma. *Legyen $T : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ egy sűrűn definiált, lezárható operátor. Legyen $v \in \mathscr{K}$ és legyen $P_v : \mathscr{K} \to \operatorname{span} v$ ortogonális projekció. Ekkor a T operátor felbontható a következő módon:*

$$T = A + B. \tag{8.29}$$

Itt A és B a következő sűrűn definiált lineáris operátorok:

$$A = (I - P_v)T, \qquad B = P_v T. \tag{8.30}$$

Ekkor teljesülnek a következők:

(i) *A lezárható operátor;*

(ii) $v \in \operatorname{dom} T^* \quad \Rightarrow \quad B^{**} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ *és* $B^{**}h = (h|T^*v)_{\mathscr{H}} v$ *ha* $h \in \mathscr{H}$*;*

(iii) $v \in \mathscr{H} \backslash \operatorname{dom} T^* \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ran} B \subseteq \operatorname{mul} B^{**}$*, azaz B szinguláris és* $B^{**} = \mathscr{H} \times \operatorname{span}\{v\}$.

Bizonyítás: (i) Mivel T sűrűn definiált és lezárható, ezért T^* egy zárt sűrűn definiált operátor. Legyen $v \in \mathscr{K}$ olyan, hogy $\|v\|_{\mathscr{K}} = 1$. Ekkor A^* a következőképpen adható meg:

$$A^* = T^*(I - P_v) = \big\{\{f, g\} \in \mathscr{H} \times \mathscr{K} : f - v(f|v)_{\mathscr{K}} \in \operatorname{dom} T^*, \quad g = T^*(f - v(f|v)_{\mathscr{K}})\big\}.$$

Innen következik, hogy

$$\operatorname{dom} A^* = \operatorname{span}\{v\} \oplus (\operatorname{dom} T^* \cap \operatorname{span}\{v\}^{\perp}).$$

Most azt mutatjuk meg, hogy $\operatorname{dom} T^* \cap \operatorname{span}\{v\}^{\perp}$ sűrű lesz $\operatorname{span}\{v\}^{\perp}$-ben, ebből már következni fog, hogy $\operatorname{dom} A^*$ sűrű $\mathscr{K}$-ban az előző egyenlőség miatt. Ehhez legyen $a = v/\|v\|$, tehát $\operatorname{span}\{v\} = \operatorname{span}\{a\}$. Legyen $x \in \operatorname{span}\{a\}^{\perp}$ tetszőleges, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T$ olyan sorozat, amelyre $\|x_n - x\| \to 0$, $f \in \operatorname{dom} T$ pedig olyan, hogy $\|f - a\| < 1$. ($\operatorname{dom} T$ sűrűsége miatt létezik ilyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} T$ sorozat és $f \in \operatorname{dom} T$) Ekkor teljesül, hogy

$$|(f|a)| = |(f - a|a) + (a|a)| \geq 1 - (f - a|a) \geq 1 - \|f - a\|\|a\| > 0,$$

ezért vehetjük a következő sorozatot:

$$y_n = x_n - \frac{(x_n|a)}{(f|a)} f.$$

Ez nyilván $\operatorname{dom} T$-beli sorozat, hiszen két ilyen összege, továbbá teljesül, hogy

$$(y_n|a) = (x_n|a) - \frac{(x_n|a)}{(f|a)}(f|a) = 0,$$

ezért $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{span}\{a\}^{\perp}$ is igaz. Megmutatjuk, hogy ez a sorozat tartani fog x-hez.

$$\|y_n - x\| \leq \|x_n - x\| + \frac{|(x_n|a)|}{|(f|a)|}\|f\| = \|x_n - x\| + \frac{|(x_n - x|a)|}{|(f|a)|}\|f\| \leq \|x_n - x\|\left(1 + \frac{\|f\|}{|(f|a)|}\right) \to 0,$$

tehát $\operatorname{dom} T \cap \operatorname{span}\{v\}^\perp$ valóban sűrű $\operatorname{span}\{v\}^\perp$-ben. Innen kapjuk, hogy $\operatorname{mul} A^{**} = (\operatorname{dom} A^*)^\perp = \{0\}$, vagyis A^{**} egy operátor gráfja, azaz A lezárható.

(ii) B definíciója alapján B^* a következő:

$$B^* = T^* P_v = \big\{\{f, g\} \in \mathscr{K} \times \mathscr{H} : \{v(f|v)_{\mathscr{K}}, g\} \in T^*\big\}. \tag{8.31}$$

Ha $v \in \operatorname{dom} T^*$, akkor ez alapján $\operatorname{dom} B^* = \mathscr{K}$. A 8.1. Lemmából következik, hogy B sűrűn definiált korlátos operátor és $B^{**} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. Továbbá ekkor $B^{**}h = (h|T^*v)_{\mathscr{H}} v$, ha $h \in \mathscr{H}$.

(ii) Ha $v \in \mathscr{K} \setminus \operatorname{dom} T^*$, akkor $\{f, g\} \in B^*$ pontosan akkor, ha $(f|v)_{\mathscr{K}} = 0$ és $g = 0$. Innen B^*-ot megkaphatjuk a következő módon:

$$B^* = \big\{\{f, 0\} : (f|v)_{\mathscr{K}} = 0\big\} = \operatorname{span}\{v\}^\perp \times \{0\}. \tag{8.32}$$

Ekkor $\operatorname{mul} B^{**} = (\operatorname{dom} B^*)^\perp = \operatorname{span}\{v\} \supseteq \operatorname{ran} B$, azaz B szinguláris operátor. B^*-ot adjungálva megkapjuk, hogy

$$B^{**} = \mathscr{H} \times \operatorname{span}\{v\}.$$

□

8.3. Tétel. *Legyenek $\mathfrak{t}$ és $\mathfrak{w}$ formák $\mathscr{X}$ felett olyanok, hogy $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathfrak{t}$ *formát nem majorálja* $\mathfrak{w}$*;*

(ii) $\mathfrak{t}$*-nek van egy* $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2$ *felbontása, ahol* $\mathfrak{t}_1$ $\mathfrak{w}$*-abszolút folytonos,* $\mathfrak{t}_2 \neq 0$ *forma pedig szinguláris* $\mathfrak{w}$*-re nézve.*

Bizonyítás: Legyen $U \subseteq \mathscr{H}_{\mathfrak{w}} \times \mathscr{H}_{\mathfrak{t}}$ a következő lineáris reláció:

$$U := \big\{\{\varphi + \ker \mathfrak{w}, \varphi + \ker \mathfrak{t}\} \in \mathscr{H}_{\mathfrak{m}} \times \mathscr{H}_{\mathfrak{t}} : \varphi \in \mathscr{X}\big\}. \tag{8.33}$$

Azt tudjuk, hogy $\mathfrak{t}$ pontosan akkor $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, ha $\mathfrak{w}$-lezárható, ami ekvivalens azzal, hogy U egy lezárható operátor gráfja.

(i)⇒(ii) Ha $\mathfrak{w}$ nem majorálja $\mathfrak{t}$-t, akkor a U sűrűn definiált operátor nem korlátos, azaz a 8.1. Lemma alapján $\operatorname{dom} U^* \neq \mathscr{H}_{\mathfrak{t}}$, ezért választhatunk egy $v \in \mathscr{H}_{\mathfrak{t}} \setminus \operatorname{dom} U^*$ vektort. Legyen $P_v : \mathscr{H}_{\mathfrak{t}} \to \operatorname{span}\{v\}$ ortogonális projekció. Ekkor a 8.2. Lemmában adott felbontást véve:

$$U = (I - P_v)U + P_v U.$$

Ez a felbontás a $\mathfrak{t}$ következő felbontásához vezet:

$$\mathfrak{t}[\varphi] = \mathfrak{t}_1[\varphi] + \mathfrak{t}_2[\varphi] \qquad \varphi \in \mathscr{X},$$

ahol $\mathfrak{t}_1$, olyan, hogy

$$\mathfrak{t}_1[\varphi] = \|(I - P_v)U(\varphi + \ker \mathfrak{w})\|_{\mathfrak{t}}^2 = \|(I - P_v)U(\varphi + \ker \mathfrak{t})\|_{\mathfrak{t}}^2 \qquad \varphi \in \mathscr{X},$$

$$\mathfrak{t}_2[\varphi] = \|P_v U(\varphi + \ker \mathfrak{w})\|_{\mathfrak{t}}^2 = \|(U(\varphi + \ker \mathfrak{w})|v)_{\mathfrak{t}} v\|_{\mathfrak{t}}^2 \qquad \varphi \in \mathscr{X}.$$

A 8.2. Lemmából következik, hogy $\mathfrak{t}_1$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos. Mivel $v \in \mathscr{H}_{\mathfrak{t}} \setminus \operatorname{dom} U^*$, ezért $\mathfrak{t}_2 \neq 0$ forma. Továbbá szintén 8.2. Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy $P_v U$ szinguláris és $(P_v U)^{**} = \mathscr{H}_{\mathfrak{w}} \times \operatorname{span}\{v\}$. Emiatt $\operatorname{dom} P_v U \subseteq \ker(P_v U)^{**} = \mathscr{H}_{\mathfrak{t}}$, ami alapján minden $\varphi \in \mathscr{X}$-re:

$$\inf_{g + \ker \mathfrak{w} \in \mathscr{H}_{\mathfrak{w}}} \left\{ \|(g - \varphi) + \ker \mathfrak{w}\|_{\mathfrak{w}}^2 + \|P_v U(\varphi + \ker \mathfrak{w})\|_{\mathfrak{t}}^2 \right\} = 0,$$

vagy ami ezzel ekvivalens,

$$\inf_{g \in \mathscr{X}} \left\{ \mathfrak{w}[g - \varphi] + \mathfrak{t}_2[g] \right\} = 0.$$

Ez a 2.10. Állítás alapján azt jelenti, hogy $\mathfrak{t}_2$ és $\mathfrak{w}$ szingulárisak.

(ii)⇒(i) Ha $\mathfrak{w}$ majorálja $\mathfrak{t}$-t, akkor $\mathfrak{t}_1$ és $\mathfrak{t}_2$ formákat is majorálja. Ekkor $\mathfrak{t}_2$ is $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, ezért $\mathfrak{t}_2 = 0$, ami ellentmond a feltevésünknek. □

Összegezve azt kaptuk, hogy ha $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, de $\mathfrak{w}$ nem majorálja, akkor van egy olyan $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2$ felbontás, ahol $\mathfrak{t}_1$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos és $\mathfrak{t}_2$ olyan nemtriviális forma, amely sziguláris $\mathfrak{w}$-re nézve.

8.4. Következmény. *Legyenek $\mathfrak{t}$ és $\mathfrak{w}$ formák $\mathscr{X}$ felett, és legyen $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos. Ekkor a következő három állítás ekvivalens:*

(i) $\mathfrak{w}$ *majorálja* $\mathfrak{t}$ *formát;*

(ii) *Ha egy* $\mathfrak{s}$ *formának* $\mathfrak{t}$ *felső korlátja, akkor* $\mathfrak{s}$ $\mathfrak{w}$*-abszolút folytonos;*

(iii) *Ha egy* $\mathfrak{s}$ *formának* $\mathfrak{t}$ *felső korlátja és szinguláris* $\mathfrak{w}$*-re nézve, akkor* $\mathfrak{s} = 0$.

Bizonyítás: (i)⇒(ii) Ha $\mathfrak{t}$ az $\mathfrak{s}$ forma felső korlátja, akkor $\mathfrak{w}$ majorálja s formát, ezért $\mathfrak{s}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos is.

(ii)⇒(iii) Ha $\mathfrak{t}$ a $\mathfrak{s}$ forma felső korlátja, illetve $\mathfrak{s}$ és $\mathfrak{w}$ szingulárisak, akkor $\mathfrak{s}$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos is, ezért a 2.11. Tétel miatt $\mathfrak{s} = 0$.

(iii)⇒(i) A 8.3. Tételből következik. □

A fejezet főtétele, a formák Lebesgue-felbontásának egyértelműségi karakterizációja következik.

8.5. Tétel. *Legyenek* $\mathfrak{t}$ *és* $\mathfrak{w}$ *formák* $\mathscr{X}$ *vektortéren értelmezve. Ekkor a* $\mathfrak{t}$ *forma* $\mathfrak{w}$*-re vonatkozó Lebesgue-felbontása akkor és csak akkor egyértelmű, ha* $\mathfrak{t}_{reg}$ *formát majorálja* $\mathfrak{w}$. *Ekkor az egyértelmű Lebesgue-felbontás megegyezik a 2.11. Tételben adottal.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a $\mathfrak{t}_{reg} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ formát $\mathfrak{w}$ majorálja. Legyen $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2$ a $\mathfrak{t}$ forma egy tetszőleges Lebesgue-felbontása $\mathfrak{w}$-re nézve. Ekkor teljesül, hogy

$$\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} + (\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}),$$

amiből a 2.5. Lemma alapján kapjuk, hogy

$$\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_1 + (\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) \geq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_1 \geq 0,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a 2.11. Tételből adódik. Mivel $\mathfrak{t}_2$ $\mathfrak{w}$-szinguláris, ezért $\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ is $\mathfrak{w}$-singuláris. Továbbá igaz, hogy

$$0 \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_1 \leq \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t},$$

ezért a 8.4. Következményből adódik, hogy $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$.

Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{t}_{reg} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}$ formát $\mathfrak{w}$ nem majorálja. Ekkor a 8.3. Tétel miatt létezik egy

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2$$

felbontás, ahol $\mathfrak{t}_1$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, $\mathfrak{t}_2$ pedig $\mathfrak{w}$-szinguláris. Ekkor:

$$\mathfrak{t} = \big(\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t})\big) + \big(\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t})\big).$$

A $\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t})$ forma nyilván $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, hiszen ilyenek összege. Továbbá a kifejezés második tagja,

$$\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}),$$

szinguláris $\mathfrak{w}$-re nézve a 2.11. Tétel miatt. Azt mutatjuk meg hogy ez a felbontás különbözik a

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} + (\mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t})$$

felbontástól. Valóban tegyük fel, hogy megegyeznek, ekkor

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}),$$

tehát azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t} - \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t}) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{w}}\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2.$$

Ez alapján azt kaptuk, hogy $\mathfrak{t}_2$ $\mathfrak{w}$-abszolút folytonos, ami ellentmondás, tehát ez a felbontás különbözik a 2.11. Tétel által adott felbontástól. □

8.6. Következmény. *Mivel $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ a pozitív operátorok esetén A B-lezárhatósága megegyezik a $\mathfrak{t}(\cdot,\cdot) = (A\cdot|\cdot)$ forma $\mathfrak{w}(\cdot,\cdot) = (B\cdot|\cdot)$ formára való lezárhatóságával, illetve $f, g : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ pozitív ábrázolható funkcionál esetén f g-lezárhatósága megegyezik $\widehat{f}(a,b) = f(b^*a)$ forma $\widehat{g}(a,b) = g(b^*a)$ lezárhatóságával, így az előző egyértelműségi tétel ezekben az esetekben is analóg módon alkalmazható.*

9. Egy alkalmazás másodrendű elliptikus differenciáloperátorokra

A fejezet célja egy differenciáloperátorokra való alkalmazás bemutatása. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ nyílt, $\mathfrak{d}$ egy másodrendű elliptikus differenciáloperátorhoz tartozó forma a következő alakú:

$$\mathfrak{d}(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} a\nabla\varphi \cdot \nabla\psi,$$

ahol a $a = (a_{ij})_{i,j=1}^{d}$ szimmetrikus, majdnem mindenütt pozitív szemidefinit mátrix értékű függvény, $\varphi, \psi \in \operatorname{dom}\mathfrak{d}$. Ekkor a $\mathfrak{d}$ forma pozitív szemidefinit, konjugáltan bilineáris. Ismert, hogy a $\mathfrak{d}$ forma pontosan akkor zárt, ha teljesíti az erős ellipticitási feltételt, azaz

$$a \geq \mu I,$$

valamely $\mu > 0$ számra majdnem mindenütt. Általában ez nem teljesül és a forma nem is lezárható, azonban a forma reguláris része már lezárható lesz. A fejezet célja hogy megmutassa, a reguláris rész is egy elliptikus operátorból származik, vagyis a kapott forma pozitív szemidefinit. A reguláris rész a (4.7) egyenlőség alapján egy projekció bevezetésével adható meg. Erről a projekcióról mutatjuk meg, hogy ha $\operatorname{dom}\mathfrak{d}$-re teljesülnek bizonyos feltételek, akkor egy úgynevezett lokális operátor lesz, ami egy megszorzás operátornak felel meg, majd ebből már következni fog a reguláris rész pozitív szemidefinitsége.

A következő feltételek teljesüljenek $\operatorname{dom}\mathfrak{d}$-re:

(i) $\operatorname{dom}\mathfrak{d} \subseteq \{\varphi \in L^2(\Omega) \cap W^1_{1,loc}(\Omega) : \quad a\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi \in L^1(\Omega)\}$;

(ii) $\operatorname{dom}\mathfrak{d} \cap L^\infty(\Omega)$ invariáns a $C_c^\infty(\Omega)$-beli fügvényekkel való szorzásra;

(iii) Létezik egy $g \in C_b^1(\mathbb{R})$-beli függvény, amelyre $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, és $g \circ \varphi \in \operatorname{dom}\mathfrak{d}$ minden $\varphi \in \operatorname{dom}\mathfrak{d}$ esetén.

A következő segédtételeket a bizonyítás igénye nélkül említjük meg:

9.1. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $1 \leq p < \infty$. Vezessük be a következő jelölést:*

$$L^\infty(\Omega, \mathscr{L}_s(\mathscr{H})) := \{M : \Omega \to \mathscr{L}(\mathscr{H}) : M(\cdot)x \in L^\infty(\Omega, \mathscr{H}) \quad x \in \mathscr{H}\}.$$

Legyen $T \in \mathscr{L}(L^p(\Omega, \mathscr{H}))$ lokális operátor a következő értelemben: Amennyiben $f \in L^p(\Omega, \mathscr{H})$, akkor $Tf(x) = 0$ majdnem minden $\{x \in \Omega : f(x) = 0\}$ esetén.

Ekkor létezik egy $M_T \in L^\infty(\Omega, \mathscr{L}_s(\mathscr{H}))$ megszorzás operátor, hogy

$$Tf(x) = M_T(x)f(x),$$

és a $T \mapsto M_T$ leképezés egy izometrikus algebra-izomorfizmus $L^\infty(\Omega, \mathscr{L}_s(\mathscr{H}))$ és az $L^p(\Omega, \mathscr{H})$ téren értelmezett lokális operátorok között.

9.2. Lemma. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz, $\mathscr{H}$ szeparábilis Hilbert-tér. Legyen $\mathscr{U} \subseteq L^2(\Omega, \mathscr{H})$ olyan zárt altér, hogy $v\varphi \in \mathscr{U}$ minden $v \in C_c^\infty$, $\varphi \in \mathscr{U}$ esetén. Ekkor a $Q : L^2(\Omega, \mathscr{H}) \to \mathscr{U}$ ortogonális projekció egy lokális operátor.*

Most már belátható a következő tétel:

9.3. Tétel. *A $\mathfrak{d}$ forma reguláris része a következő alakban adható meg:*

$$\mathfrak{d}_{reg}(\varphi, \psi) = \int_\Omega a_{reg} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \qquad \varphi, \psi \in \operatorname{dom} \mathfrak{d}.$$

Itt $a_{reg} = a^{1/2} p a^{1/2}$, ahol $p : \Omega \to \mathbb{R}^{d \times d}$ projekció mátrix értékű mérhető függvény.

Bizonyítás: Lássuk el $\operatorname{dom} \mathfrak{d}$-t a következő normával:

$$\|\varphi\|_\mathfrak{d} = \mathfrak{d}[\varphi] + \|\varphi\|_2^2.$$

Ekkor az $U : \operatorname{dom} \mathfrak{d} \hookrightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^d$, $U\varphi = \{\varphi, a^{1/2}\nabla\varphi\}$ képlettel megadott beágyazás egy izometrikus operátor, ezért vehetjük $\operatorname{dom} \mathfrak{d}$ teljessé tételét, mint $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^d$ alterét, ezt a teljessé tételt jelölje $\mathscr{H}_\mathfrak{d}$. Legyen $\iota_\mathfrak{d} : \operatorname{dom} \mathfrak{d} \to L^2(\Omega)$ folytonos beágyazás operátor. Ekkor

$$\ker \iota_\mathfrak{d}^{**} := \{0\} \times \mathscr{H}_s \qquad \mathscr{H}_s := \{\psi \in L^2(\Omega)^d : \{0, \psi\} \in \mathscr{H}_\mathfrak{d}\}.$$

Legyen $Q : L^2(\Omega)^d \to \mathscr{H}_s$ ortogonális projekció. Ekkor a $\mathscr{H}_\mathfrak{d} \to \ker \iota_\mathfrak{d}^{**}$ projekciót a követkeő hozzárendelés adja meg:

$$\{\varphi, \psi\} \mapsto \{0, Q\psi\}.$$

A (4.7) egyenlőség alapján definiálhatjuk a $\mathfrak{d}_{sing}$ szinguláris részt a következőképpen:

$$\mathfrak{d}_{sing}(\varphi,\psi) = \big(\{0, Q(a^{1/2}\nabla\varphi)\}|\{0, Q(a^{1/2}\nabla\psi)\}\big) = \big(\{0, Q(a^{1/2}\nabla\varphi)\}|\{\psi, a^{1/2}\nabla\psi\}\big) =$$
$$= \int_\Omega Q(a^{1/2}\nabla\varphi)\cdot a^{1/2}\nabla\psi.$$

A $\mathfrak{d}_{reg} = \mathfrak{d} - \mathfrak{d}_{sing}$ forma ekkor a 4.10. Tétel miatt lezárható lesz az $L^2(\Omega)$ skaláris szorzatra mint formára nézve, azaz $\mathfrak{d}$ lezárható.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy $v\varphi \in \mathscr{H}_s$ minden $\varphi \in \mathscr{H}_s$ és $v \in C_c^\infty(\Omega)$ esetén, ekkor 9.2. Lemma miatt Q projekció egy lokális operátor lesz. Legyen $f \in \mathscr{H}_s$ rögzített. Ekkor létezik egy $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom}\mathfrak{d}$ sorozat, amelyre

$$\varphi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0 \qquad a^{1/2}\nabla\varphi_n \xrightarrow{L^(\Omega)^d} f.$$

A Riesz-Fischer tétel alapján ekkor van egy olyan $\varphi_{n_k} \subseteq \varphi_n$ részsorozat amely 0-hoz tart majdnem mindenütt, feltehető, hogy $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ilyen tulajdonságú. Legyen $g \in C_b^1(\mathbb{R})$ olyan függvény, amely kielégíti a fejezet elején feltett (ii) tulajdonságot. Ekkor $\psi_n := g\circ\varphi_n \in \operatorname{dom}\mathfrak{d}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá $(g' \circ \varphi_n)$ korlátos L^∞-beli sorozat, és $(g' \circ \varphi_n) \to g'(0) = 1$ majdnem mindenütt, azaz a következők teljesülnek:

$$\psi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0 \qquad a^{1/2}\nabla\psi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)^d} f.$$

Most legyen $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Ekkor

$$\|\psi_n a^{1/2}\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^d} = \int_\Omega |\psi_n|^2 a\nabla v\cdot\nabla v \to 0,$$

ami a Lebesgue konvergencia tételből következik $\|g\|_\infty^2 a\nabla v\cdot\nabla v$ majoráló függvény mellett. Ebből következik, hogy

$$a^{1/2}\nabla(v\psi_n) = va^{1/2}\nabla\psi_n + \psi_n a^{1/2}\nabla v \xrightarrow{L^2(\Omega)^d} vf,$$

továbbá $v\psi_n \in \operatorname{dom}\mathfrak{d}$ a fejezet elején bevezetett (i) tulajdonság miatt, és $v\psi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0$, ezért $vf \in \mathscr{H}_s$. Ekkor a 9.1. Tételből következik, hogy Q egy megszorzás operátor, azaz létezik egy $q : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ mátrix értékű mérhető függvény, hogy

$$Qf(x) = q(x)f(x) \qquad f \in L^2(\Omega), x \in \Omega.$$

A q függvényre teljesül, hogy $q^2 f = Q^2 f = Qf = qf$, ezért $q^2 = q$ majdnem mindenütt, és $\|q\|_{L^\infty(\Omega,\mathscr{L}(\mathbb{R}))} = \|Q\| \leq 1$, tehát $q(x)$ egy projekció mátrix majdnem minden $x \in \Omega$ esetén.

Ekkor $\mathfrak{d}$ forma reguláris része a következőképpen írható fel:

$$\mathfrak{d}_{reg}(\varphi, \psi) = \int\limits_\Omega a^{1/2}(I - q)a^{1/2}\nabla\varphi \cdot \nabla\psi \qquad \varphi, \psi \in \operatorname{dom}\mathfrak{d}.$$

$\square$

Hivatkozások

[1] T. Ando, Lebesgue-type decomposition of positive operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **38** (3-4) (1976), 253-260.

[2] W. Arendt and S. Thomaschewski, Local operators and forms, *Positivity* **9** (2005), 357-367.

[3] R. G. Douglas, On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space, *Proc. Am. Math. Soc.* **17** (1966), 413-415.

[4] S. Hassi, Z. Sebestyén, H. S. V. de Snoo and F. H. Szafraniec, A canonical decomposition for linear operators and linear relations, *Acta Math. Hungar.* **115** (2007), 281-307.

[5] S. Hassi, Z. Sebestyén and H. de Snoo, Lebesgue type decompositions for nonnegative forms, *J. Funct. Anal.* **257** (2009), 3858-3894.

[6] H. Vogt, The regular part of symmetric forms associated with second order elliptic differential expressions, *Bull. London Math. Soc.* **41** (2009), 441-444.

[7] Z. Sebestyén, L. Kapos, On range characterization of adjoint operators on Hilbert space, *Studia Sci. Math. Hungar.* **30** (1995), 261-263.

[8] Z. Sebestyén, On ranges of adjoint operators in Hilbert space, *Acta Sci. Math.(Szeged)* **46** (1983), 295-298.

[9] Z. Sebestyén, On representability of linear functionals on $*$-algebras, *Period. Math. Hungar.* **15** (1984), 233-239.

[10] Z. Sebestyén, Zs. Tarcsay, and T. Titkos, Lebesgue decomposition theorems, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **79** (2013), 219-233.

[11] Zs. Szűcs, On the Lebesgue decomposition of positive linear functionals, *Proc. Amer. Math. Soc.* **141** (2013), 619-623.

[12] Zs. Szűcs, The Lebesgue decomposition of representable forms over algebras, *J. Operator Theory* **70** (2013), 3-31.

[13] Zs. Tarcsay, Lebesgue-type decomposition of positive operators, *Positivity* **17** (2013), 803-817.

[14] Zs. Tarcsay, On the parallel sum of positive operators, forms, and functionals, *Acta Math. Hungar.*, **147** (2015), 408-426.