Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Neogrády-Kiss Márton

# Számelméleti függvények vizsgálata differenciál- és integrálegyenletekkel

Szakdolgozat

Témavezető:

Simon L. Péter

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2017

# Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Simon Péternek, a támogatásért, a hasznos megjegyzésekért és a bátorító szavakért, továbbá feleségemnek a türelméért.

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

A prímszámok viselkedése az ókori görögök óta központi kérdés a matematikában, és nagy valószínűséggel még egy jó ideig az is marad. Ennek vizsgálatára a legősibb módszer az alexandriai polihisztor nevéhez fűződő Eratoszthenészi-szita. Sokan e gondolat sugallatára próbáltak közelebb jutni a prímek látszólag misztikus viselkedésének megértéséhez, többek között mi is. Az első fejezetben az [1] cikk alapján bemutatunk egy egyszerű egyenletet a prímek eloszlásának modellezésére. Utána rátérünk a durva számok fogalmára, ami természetes módon összekapcsolódik az Eratoszthenészi-szitával. Ezek olyan egész számok, amelyek kis prímosztóktól mentesek. Az ehhez kapcsolódó $\Phi$ számelméleti függvény aszimptotikus viselkedését Alexander Buchstab orosz matematikus 1937-ben határozta meg egy késleltetett differenciálegyenlettel [2], ennek alapgondolatát is bemutatjuk. Innentől kezdve saját kutatási eredményeim következnek. A második fejezetben felállítunk egy durva számokhoz kapcsolódó egyenletet, amelynek segítségével bizonyítunk néhány ismert számelméleti állítást. Ez az egyenlet azért is hasznos, mert olyan alakban írtuk fel, hogy könnyű belőle közelítő modelleket levezetni. A legegyszerűbb modellt vizsgáljuk. A harmadik fejezetben meghatározzuk ennek egyensúlyi megoldását, amelynek segítségével mi is megadjuk a $\Phi$ függvény aszimptotikáját, így a modell egyensúlyi megoldását összefüggésbe hozzuk a Buchstab-függvénnyel. Az utolsó fejezetben a modell különböző tulajdonságait vizsgáljuk, majd numerikusan ellenőrizzük a modell helyességét.

# 1. Előzmények

## 1.1. Egy egyszerű modell

> „Proofs of the prime number theorem are extremely hard to follow, and leave the impression, at least among amateurs, that the essential property of prime numbers, namely their primeness, plays very little part in the argument."

Az idézet a következő egyenlet egyik felfedezőjétől, G. Hoffman de Visme-től származik, és nagyon jól rátapint az ehhez hasonló modellek szükségességére:

$$f'(x) = \frac{-f(x)f(\sqrt{x})}{2x},$$

ahol $f(x)$ a prímszámok „sűrűségét" hivatott megadni az $x$ pontban.

A modell alapgondolata a következő: ha „túl sok" prím van egy intervallumban, akkor az csökkenti a későbbi intervallumokban levő prímek számát, és fordítva, ha „túl kevés" van, akkor növeli. Ennek hátterében az Eratoszthenészi-szita áll, ami a prímek meghatározására szolgál, és a következőképpen működik. Írjuk fel az 1-nél nagyobb egész számok listáját. Kezdetben minden listabeli szám potenciális prím. Karikázzuk be a listán a legkisebb számot, a 2-t, majd húzzuk ki a listáról az összes nála nagyobb többszörösét. Ezután karikázzuk be a listáról a következő legkisebb számot, a 3-at, majd húzzuk ki az összes nála nagyobb többszörösét, és folytassuk ezt az eljárást. Ekkor a bekarikázott számok lesznek a prímek. Amikor egy $p$ prímmel szitálunk, akkor a potenciális prímek körülbelül $p$-ed részét kihúzzuk, tehát a sűrűség az $\left(1-\frac{1}{p}\right)$-szeresére változik. Továbbá minden prím csak a négyzetétől szitál ki újabb számokat, ugyanis az ennél kisebb számokat már korábban kihúztuk. Ezeket a megfigyeléseket szem előtt tartva legyen $f(x)$ egy differenciálható függvény, amely a prímek „sűrűségét" közelíti $x$ közvetlen környezetében és rendelkezik az előző tulajdonságokkal. Tekintsük ezért a következő intervallumokat:

$$A = [x, x+dx], \quad B = \left[x^2, (x+dx)^2\right],$$

ahol $dx$ infinitezimális mennyiséget jelöl. Megnézzük, hogyan változik a sűrűség a $B$ intervallumon, azaz megbecsüljük az $f((x+dx)^2) - f(x^2)$ mennyiséget. Ehhez csak az $A$ intervallumban levő prímeket használjuk. Minden ilyen prímmel történő szitálás körülbelül $\left(1-\frac{1}{x}\right)$-szeresére változtatja a sűrűséget a $B$ intervallumon, tehát minden prím $f(x^2)/x$-szel csökkenti a sűrűséget. Mivel az $A$ intervallumban körülbelül $f(x)dx$ prím van, ezért

$$f((x+dx)^2) - f(x^2) \approx \frac{-f(x^2)f(x)dx}{x}.$$

Ugyanakkor a $B$ intervallumon vett változást kiszámíthatjuk a derivált segítségével is. A sűrűség változása körülbelül megegyezik az $f'(x^2)$ és a $B$ intervallum hosszának szorzatával. Mivel utóbbi $(x+dx)^2-x^2 \approx 2xdx$, ezért

$$f((x+dx)^2)-f(x^2) \approx f'(x^2) \cdot 2xdx.$$

A kettőt összevetve megkapjuk az

$$f'(x^2) = \frac{-f(x^2)f(x)}{2x^2}$$

egyenletet. Innen már csak egy egyszerű változócsere adja a kívánt összefüggést:

$$f'(x) = \frac{-f(x)f(\sqrt{x})}{2x}. \tag{1}$$

Gauss már a 18. században helyesen megsejtette a következő formulát a prímek eloszlására:

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt.$$

Ebből következik, hogy a prímek sűsűrége egy $x$ pont körül $1/\log(x)$ környékén kell legyen. Látható, hogy ez kielégíti az (1) egyenletet. Mivel a prímszámok száma nem pontosan $\mathrm{Li}(x)$, szükséges, hogy az (1) egyenletnek az $1/\log(x)$ megoldása stabil legyen a megoldás körüli perturbációk mellett. Ehhez az kell, hogy ha veszünk egy $f$ függvényt, ami egy $x_0$ pontig $1/\log(x)$, és ebben a pontban a függvényt perturbáljuk , tehát $f(x_0) \neq 1/\log(x_0)$, akkor ezen kezdeti feltételek mellett $x_0$-ból indított (1) szerinti megoldás relatív hibája $1/\log(x)$-re nézve nullához tartson. Ez pedig megmutatható, hogy igaz. Természetesen az egyszerűsítések miatti információvesztés folytán minden modellt fenntartással kell kezelni, azonban ez a modell ezzel együtt is mindenképpen említésre méltó.

## 1.2. Durva számok

Mint már a bevezetőben említettük, a durva számok olyan számok, amik kis prímosztóktól mentesek.

**1. Definíció.** *Egy természetes számot $y$-durva számnak nevezünk, ha összes prímosztója nagyobb mint $y$. Jelölje $\Phi(x,y)$ az $y$-durva számok összességét $x$-ig. Az 1-et tetszőleges $y$ esetén durva számnak vesszük [3].*

**Példa.** A 2-durva számok pontosan a páratlan számok.

A következőkben Buchstab eredményét közöljük a $\Phi$ függvény aszimptotikus tulajdonságával kapcsolatban [5]. Legyen $\omega(u)$ az alábbi késleltetett differenciálegyenlet folytonos megoldása:

$$(u\omega(u))' = \omega(u-1)$$

ha $u > 2$, és

$$\omega(u) = \frac{1}{u}$$

$1 \leq u \leq 2$ esetén. Ekkor az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\Phi(x, x^{\frac{1}{u}}) \backsim \omega(u)\frac{x}{\log(x^{\frac{1}{u}})} \quad x \to \infty.$$

Most idézzük fel a prímszámtételt és Mertens tételeit.

**2. Tétel** (Prímszámtétel)**.** *Létezik olyan pozitív $c$ konstans, hogy fennáll*

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\log(x)}}\right),$$

*ahol* $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x 1/\log(t)dt$.

A következőkben a gyengébb formáját is használjuk majd:

$$\pi(x) = \frac{x}{\log(x)} + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right).$$

Mertensnek három tétele van a prímszámokkal kapcsolatban, mi a másodikat és a harmadikat közöljük.

**3. Tétel** (Mertens 2. tétele)**.** *Létezik egy $M$ konstans, hogy $x \geq 2$ esetén*

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log\log(x) + M + O\left(\frac{1}{\log(x)}\right).$$

**4. Tétel** (Mertens 3. tétele)**.** *Legyen $\gamma$ az Euler-Mascheroni konstans, ekkor $x \geq 2$ esetén*

$$\prod_{p \leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log(x)}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right\}.$$

**Megjegyzés.** A prímszámtételből könnyen következnek Mertens tételei (sőt jobb hibataggal is), fordítva azonban nem. Mertens tételeinek viszont van viszonylag rövid elemi bizonyításuk is, a prímszámtétel felhasználása nélkül.

Most rátérünk Buchstab eredményére. Az alapgondolatra koncentrálunk, ezért néhol rövidebbre fogjuk az indoklást.

Kiindulásként tekintsük a következő tételt:

**5. Tétel.** *Ha $x \geq 1$ és $y \geq 1$, akkor*

$$\Phi(x,y) = 1 + \sum_{y<p\leq x}\sum_{\nu \geq 1}\Phi(x/p^\nu, p).$$

*Bizonyítás.* Jelölje $P^-(n)$ az $n$ legkisebb prímosztóját. Ha egy $n \geq 1$ természetes szám $y$-durva, akkor egyértelműen felírható $n = p^\nu m$ alakban, ahol $p = P^-(n)$ és $p \nmid m$. Az utóbbi két feltétel ekvivalens $m > P^-(n)$-nel. Tehát

$$\Phi(x,y) = 1 + \sum_{y<p\leq x}\sum_{n\leq x, P^-(n)=p} 1 = 1 + \sum_{y<p\leq x}\sum_{\nu\geq 1}\sum_{m \leq x/p^{nu}, P^-(m)>p} 1,$$

ami pont az állítás. □

A tételt az alábbi alakban használjuk:

$$\Phi(x,y) = \Phi(x,z) + \sum_{y<p\leq z}\sum_{\nu\geq 1}\Phi(x/p^\nu, p) \quad (x \geq z \geq y \geq 1).$$

Ha alkalmazzuk $\nu \geq 2$ esetén az $x/p^\nu \geq \Phi(x/p^\nu, p)$ becslést, akkor

$$\Phi(x,y) = \Phi(x,z) + \sum_{y<p\leq z}\Phi(x/p,p) + O(x/y). \tag{2}$$

Könnyen látható, hogy $\sqrt{x} < y \leq x$ esetén $\Phi(x,y) = \pi(x) - \pi(y) + 1$. Most legyen $x^{1/3} < y \leq x^{1/2}$, ekkor a prímszámtételt felhasználva

$$\Phi(x,y) = \Phi(x,\sqrt{x}) + \sum_{y<p\leq\sqrt{x}}\Phi(x/p,p) + O(x^{2/3}) =$$

$$= \frac{x}{\log(x)} + \sum_{y<p\leq\sqrt{x}}\frac{x}{p\log(x/p)} + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right).$$

Legyen $u = \log(x)/\log(y)$ és $y = x^{1/v}$. Ha $2 \le v \le u$, akkor legyen

$$H(v) := \sum_{x^{1/v} < p \le \sqrt{x}} \frac{1}{p} = \log(v/2) + O\left(e^{-\sqrt{\log(y)}}\right).$$

Ha az előző egyenletben a szummát átírjuk $H(v)$ segítségével, akkor parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\Phi(x,y) = \frac{x}{\log(x)}\left(1 + \int_{2^-}^{u} \frac{v}{v-1} dH(v) + O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right) =$$
$$= \frac{x}{\log(y)}\left\{\frac{1+\log(u-1)}{u}\right\} + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right).$$

Definiáljuk $\omega(u)$-t a következőképpen. Ha $1 \le u \le 2$, $u\omega(u) := 1$, ha $2 \le u \le 3$, $u\omega(u) := 1 + \log(u-1)$. Ekkor a következőt kapjuk $\Phi$-re:

$$\Phi(x,y) = \frac{x\omega(u) - y}{\log(y)} + O\left(\frac{x}{\log^2(y)}\right) \quad (x^{1/3} \le y \le x). \tag{3}$$

Ha $y \le x/\log(x)$, akkor $-y/\log(y)$ beépíthető a hibatagba. Innentől $\omega(u)$ induktíve definiálható. Ha $x^{1/4} < y \le x^{1/3}$, akkor (2)-ben használhatjuk (3)-at $\Phi(x/p, p)$ megbecsléséhez. Tehát amíg (3) fennáll, addig a következő összefüggés miatt $\omega(u)$-t 1 hosszú intervallumonként definiálhatjuk:

$$\frac{x\omega(u)}{\log(y)} \sim \frac{x}{\log(x)} + \sum_{y < p \le \sqrt{x}} \frac{x}{p\log(p)}\omega\left(\frac{\log(x)}{\log(p)} - 1\right) \sim \frac{x}{\log(x)}\left\{1 + \int_2^u \omega(v-1)dv\right\},$$

tehát

$$u\omega(u) = 1 + \int_1^{u-1} \omega(v)dv \quad (u \ge 2),$$

ami átírható a szakasz elején felírt késleltetett differenciálegyenletté.

# 2. Az alapegyenlet

## 2.1. Alapötlet

Ebben a fejezetben levezetünk egy durva számokhoz kapcsolódó összefüggést, majd megnézzük, hogyan lehet használni számelméleti tételek bízonyításához. Alapvető célunk, hogy a $\Phi(x, y)$ függvény tulajdonságait ne csak aszimptotikusan, hanem véges $x$ esetén is vizsgáljuk.
Az Eratoszthenészi-szita azt sugallja, hogy $\Phi(x, y) \approx x \prod_{p \le y}(1 - \frac{1}{p})$. Ezért keressük $\Phi$-t a következő alakban:

$$\Phi(x, y) = (1 + \varphi(x, t_y))\, x \prod_{p \le x^{t_y}} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \tag{4}$$

ahol $t_y = \log_x(y)$. Jelölje $p_n$ az $n$-edik prímszámot, $p_0$ legyen 1. Nézzük meg $\varphi(x, t)$ néhány alaptulajdonságát, felhasználva (4)-et. Ha $t \in \left[t_{p_n}, t_{p_{n+1}}\right)$, akkor $\varphi(x, t)$ értéke állandó. Ha $t < t_{p_1}$, akkor $\varphi(x, t) = -\frac{\{x\}}{x}$, mivel $y < 2$ esetén $\Phi(x, y) = \lfloor x \rfloor$. Ha $t \ge 1$, akkor $\Phi(x, x^t) = 1$, tehát

$$\varphi(x, t) = -1 + \frac{1}{x \prod_{p \le x^t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}. \tag{5}$$

Az 5. tétel helyett egy egyszerűbb tételből indulunk ki, ami lényegében azt mutatja, hogy az Eratoszthenészi-szita egyik fázisából hogyan jutunk el a másikba.

**6. Állítás.** *Tetszőleges $x \ge 0$, $n \ge 1$ esetén*

$$\Phi(x, p_n) = \Phi(x, p_{n-1}) - \Phi\left(\frac{x}{p_n}, p_{n-1}\right). \tag{6}$$

*Bizonyítás.* Tekintsük azt a halmazt, ami az $x$-nél nem nagyobb $p_{n-1}$-durva számokat tartalmazza. Ebből úgy kapjuk meg a $p_n$-durva számokat, hogy kivesszük az összes $m \cdot p_n$ alakú számot, ahol $m \le \left\lfloor \frac{x}{p_n} \right\rfloor$, és $m$ $p_{n-1}$-durva szám. Ez pontosan $\Phi\left(\frac{x}{p_n}, p_{n-1}\right)$ elem. □

Ennek az állításnak a megfelelője $\varphi$-re a következő:

**7. Állítás.**

$$\varphi(x, t_{p_n}) = \frac{p_n}{p_n - 1} \varphi\left(x, t_{p_{n-1}}\right) + \left(1 - \frac{p_n}{p_n - 1}\right) \varphi\left(x^{1 - t_{p_n}}, \frac{t_{p_{n-1}}}{1 - t_{p_n}}\right). \tag{7}$$

*Bizonyítás.* Írjuk át (6)-ot (4) szerint, és osszunk is le $x\prod_{p\le x^{t_{pn}}}(1-\frac{1}{p})$-vel.

$$(1+\varphi\left(x,t_{p_n}\right))=\left(1+\varphi\left(x,t_{p_{n-1}}\right)\right)\frac{p_n}{p_n-1}-\left(1+\varphi\left(x^{1-t_{p_n}},\frac{t_{p_{n-1}}}{1-t_{p_n}}\right)\right)\frac{1}{p_n-1}=$$

$$=\left\{1+\varphi\left(x,t_{p_{n-1}}\right)-\frac{1}{p_n}-\frac{\varphi\left(x^{1-t_{p_n}},\frac{t_{p_{n-1}}}{1-t_{p_n}}\right)}{p_n}\right\}\frac{p_n}{p_n-1}=$$

$$=1+\frac{p_n}{p_n-1}\varphi\left(x,t_{p_{n-1}}\right)+\left(1-\frac{p_n}{p_n-1}\right)\varphi\left(x^{1-t_{p_n}},\frac{t_{p_{n-1}}}{1-t_{p_n}}\right).$$

□

**8. Állítás.** *$n\ge 1$ esetén*

$$\varphi(x,t_{p_n})=\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_i-1}\varphi(x,t_{p_0})+\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=i+1}^{n}\frac{p_j}{p_j-1}-\prod_{j=i}^{n}\frac{p_j}{p_j-1}\right)\varphi\left(x^{1-t_{p_i}},\frac{t_{p_{i-1}}}{1-t_{p_i}}\right),\tag{8}$$

*ahol legyen* $\prod_{j=n+1}^{n}\frac{p_j}{p_j-1}=1$.

*Bizonyítás.* Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n=1$, akkor ez éppen (7). Tegyük fel, hogy igaz $(n-1)$-ig, írjuk fel (7)-et, és írjuk át az indukciós feltevés szerint $\varphi\left(x,t_{p_{n-1}}\right)$-et. □

**9. Állítás.** *Tetszőleges $i\ge 1$ esetén*

$$\lim_{t\nearrow t_{p_i}}\varphi\left(x^{1-t},\frac{t}{1-t}\right)=\varphi\left(x^{1-t_{p_i}},\frac{t_{p_{i-1}}}{1-t_{pi}}\right).\tag{9}$$

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy $t$ olyan közel van $t_{p_i}$-hez, hogy $t_{p_{i-1}}<t<t_{p_i}$ és $x^{1-t_{p_i}}<x^{1-t}<\lfloor x^{1-t_{p_i}}\rfloor+1$ teljesülnek. Ekkor az 1. definíció szerint $\Phi\left(x^{1-t},x^t\right)=$ $=\Phi\left(x^{1-t_{p_i}},x^{t_{p_{i-1}}}\right)$. Ezt (4) szerint felírva

$$\left(1+\varphi\left(x^{1-t},\frac{t}{1-t}\right)\right)x^{1-t}=\left(1+\varphi\left(x^{1-t_{p_i}},\frac{t_{p_{i-1}}}{1-t_{pi}}\right)\right)x^{1-t_{p_i}}.$$

Átrendezve kapjuk, hogy

$$\varphi\left(x^{1-t},\frac{t}{1-t}\right)-\varphi\left(x^{1-t_{p_i}},\frac{t_{p_{i-1}}}{1-t_{pi}}\right)=\left(x^{t-t_{p_i}}-1\right)\left(1+\varphi\left(x^{1-t_{p_i}},\frac{t_{p_{i-1}}}{1-t_{pi}}\right)\right).$$

Innen már látszik (9), mivel $|x^{t-t_{p_i}}-1|$ nullához tart. □

Most (8) és (9) segítségével felírjuk az alapegyenletet.
A következőkben tetszőleges $x > 1$ és $t \geq 0$ számok esetén legyen

$$P(x,t) = \prod_{p \leq x^t} p/(p-1).$$

**10. Tétel.** *Tetszőleges $1 \geq t \geq 0$, $x > 1$ esetén*

$$\varphi(x,t) = P(x,t)\,\varphi(x,0) + \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\delta}^{t} \varphi\left(x^{1-(u-\delta)}, \frac{u-\delta}{1-(u-\delta)}\right) d\frac{P(x,t)}{P(x,u)}. \quad (10)$$

*Bizonyítás.* Ha $0 \leq t < t_{p_1}$, akkor triviális. Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ természetes számra $t_{p_n} \leq t < t_{p_{n+1}}$. Ekkor $\varphi(x,t) = \varphi(x, t_{p_n})$, így alkalmazhatjuk (8)-at. Az első tagok megegyeznek, hiszen $\prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1} = P(x,t)$. A $\frac{P(x,t)}{P(x,u)}$ függvény $t_{p_i}$ helyen vett ugrása éppen $\prod_{j=i+1}^{n} \frac{p_j}{p_j-1} - \prod_{j=i}^{n} \frac{p_j}{p_j-1}$. Mivel $t$-ig csak véges sok ugráshely van, és $\frac{P(x,t)}{P(x,u)}$ ezeken kívül konstans, a limesz bevihető az integrálba, ezért (9) miatt (10) megegyezik (8)-cal. □

**Megjegyzés.** Fontos észrevétel, hogy $\frac{1}{P(x,u)}$ monoton csökkenő függvény $u$ szerint, ezért az integrál értékét úgy lehet növelni, ha az integrandust csökkentjük.

Láttuk, hogy ha $t \geq 1$, akkor $\varphi(x,t) = -1 + \frac{P(x,t)}{x}$. Ez $t > \frac{1}{2}$ esetén a (10) egyenletben felhasználható, ugyanis ekkor az integrál $\frac{1}{2} + \delta$ és $t$ közötti részében $\varphi$ éppen ilyen tulajdonságú. Tehát ha $t > \frac{1}{2}$, akkor

$$\varphi(x,t) = P(x,t)\,\varphi(x,0) + \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \varphi\left(x^{1-(u-\delta)}, \frac{u-\delta}{1-(u-\delta)}\right) d\frac{P(x,t)}{P(x,u)} +$$
$$+ \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\frac{1}{2}+\delta}^{t} -1 + \frac{P\left(x^{1-(u-\delta)}, \frac{u-\delta}{1-(u-\delta)}\right)}{x^{1-(u-\delta)}} d\frac{P(x,t)}{P(x,u)} =$$
$$= \frac{P(x,t)}{P\left(x, \frac{1}{2}\right)} \varphi\left(x, \frac{1}{2}\right) - \frac{P(x,t)}{P(x,t)} + \frac{P(x,t)}{P\left(x, \frac{1}{2}\right)} + \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\frac{1}{2}+\delta}^{t} \frac{P(x, u-\delta)}{x^{1-(u-\delta)}} d\frac{P(x,t)}{P(x,u)}.$$

Tehát az alábbi összefüggést kaptuk.
Ha $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, akkor

$$\varphi(x,t) = P(x,t)\,\varphi(x,0) + \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\delta}^{t} \varphi\left(x^{1-(u-\delta)}, \frac{u-\delta}{1-(u-\delta)}\right) d\frac{P(x,t)}{P(x,u)}, \quad (11)$$

$\frac{1}{2} < t \leq 1$ esetén pedig

$$\varphi(x,t) = \frac{P(x,t)}{P\left(x, \frac{1}{2}\right)} \left(\varphi\left(x, \frac{1}{2}\right) + 1\right) - 1 + b(x,t), \quad (12)$$

ahol

$$b(x,t)=\lim_{\delta\searrow 0}\int_{\frac{1}{2}+\delta}^{t}\frac{P(x,u-\delta)}{x^{1-(u-\delta)}}d\frac{P(x,t)}{P(x,u)}.$$

## 2.2. Néhány alkalmazás

Ebben a fejezetben a fenti egyenletek segítségével azt az ismert állítást bizonyítjuk, miszerint $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{p_n-1}$ végtelen, majd megvizsgáljuk, hogy a Mertens-tétel hogyan kapcsolódik a prímszámtételhez.

Először egy egyszerű lemmát mondunk ki, ami a későbbiekben is hasznos lesz.

**11. Lemma.** *Tetszőleges $n\geq 1$ esetén, ha $x$-re teljesül, hogy*

$$\sqrt{x}\geq\prod_{i=1}^{n}p_i,$$

*akkor*

$$|\varphi(x,t_{p_n})|\leq\frac{P(x,t_{p_n})}{\sqrt{x}}. \tag{13}$$

*Bizonyítás.* A logikai szitaformulát alkalmazva bizonyítható, hogy tetszőleges $m=k\prod_{i=1}^{n}p_i$ alakú számig $m\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ darab $p_i$-khez$(i=1,\ldots,n)$ relatív prím van [4], azaz $\Phi(m,p_n)=m\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$. Legyen $k\geq\sqrt{x}$ olyan, hogy

$$m=k\prod_{i=1}^{n}p_i\leq x\leq(k+1)\prod_{i=1}^{n}p_i\leq m+\sqrt{x}.$$

Ekkor triviálisan $\Phi(m,p_n)\leq\Phi(x,p_n)\leq\Phi(m,p_n)+\sqrt{x}$. Ekvivalensen

$$m\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\leq(1+\varphi(x,t_{p_n}))\,x\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\leq m\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+\sqrt{x},$$

amiből

$$-\frac{1}{\sqrt{x}}\leq\frac{m-x}{x}\leq\varphi(x,t_{p_n})\leq\frac{m-x}{x}+\frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_i-1}}{\sqrt{x}}\leq\frac{P(x,t_{p_n})}{\sqrt{x}}.$$

$\square$

**12. Tétel.**

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_i-1}=\infty.$$

*Bizonyítás.* Indirekt tegyük fel, hogy a határérték véges, és legyen ez egy $r>1$ szám. Legyen $\varepsilon>0$ megfelelően kis szám, és ehhez $N$ küszöbindex, amelyre $\prod_{i=N}^{\infty}\frac{p_i}{p_i-1}\leq 1+\varepsilon$. Legyen $x_0$ olyan, hogy $x\geq x_0$ esetén teljesüljön egyrészt a 11. lemma feltétele $N$-nel, másrészt $\frac{2r}{\sqrt{x}}\leq\varepsilon$. Használjuk (10)-et és az azt követő megjegyzést. Könnyen igazolható, hogy $t_{p_N}\leq t\leq 1$ esetén

$$\varphi(x,t)=\frac{P(x,t)}{P(x,t_{p_N})}\varphi(x,t_{p_N})+\lim_{\delta\searrow 0}\int_{t_{p_N}}^{t}\varphi\left(x^{1-(u-\delta)},\frac{u-\delta}{1-(u-\delta)}\right)d\frac{P(x,t)}{P(x,u)}.$$

A $\varphi$ függvény definíciójából adódik, hogy tetszőleges $x\geq 0$ és $s\geq 0$ esetén $\varphi(x,s)\geq -1$. Ekkor ha $x\geq x_0$ és $t_{p_N}\leq t\leq 1$, a $\frac{P(x,t)}{P\left(x,t_{p_N}\right)}\leq\prod_{i=N}^{\infty}\frac{p_i}{p_i-1}\leq 1+\varepsilon$ egyenlőtlenségeket használva adódik, hogy

$$\varphi(x,t)\leq(1+\varepsilon)\frac{r}{\sqrt{x}}+\int_{t_{p_N}}^{t}-1d\frac{P(x,t)}{P(x,u)}\leq\varepsilon-\left[\frac{P(x,t)}{P(x,u)}\right]_{t_{p_N}}^{t}\leq 2\varepsilon.$$

Ekkor viszont $x\geq x_0^2$ esetén

$$\varphi\left(x,\frac{1}{2}\right)\geq-(1+\varepsilon)\frac{r}{\sqrt{x}}+\int_{t_{p_N}}^{t}2\varepsilon d\frac{P(x,t)}{P(x,u)}\geq-\varepsilon-2\varepsilon^2\geq-2\varepsilon.$$

Ez azt jelentené, hogy a prímek nagyon sűrűn helyezkednek el. Azaz tetszőleges $k\geq 1$ egészre $x_1=x_0^2$ jelöléssel

$$\pi\left(x_1^{2^k}\right)-\pi\left(\sqrt{x_1^{2^k}}\right)\geq(1-2\varepsilon)\,x_1^{2^k}\prod_{p\leq\sqrt{x_1^{2^k}}}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1\geq(1-2\varepsilon)\frac{x_1^{2^k}}{2r}.$$

Így

$$\prod_{x_1^{2^{k-1}}\leq p\leq x_1^{2^k}}\frac{p}{p-1}=\prod_{x_1^{2^{k-1}}\leq p\leq x_1^{2^k}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\geq\left(1+\frac{1}{x_1^{2^k}}\right)^{\pi\left(x_1^{2^k}\right)-\pi\left(\sqrt{x_1^{2^k}}\right)}\geq$$

$$\geq\left(\left(1+\frac{1}{x_1^{2^k}}\right)^{x_1^{2^k}}\right)^{\frac{(1-2\varepsilon)}{2r}}\geq\left(\left(1+\frac{1}{x_1^{2}}\right)^{x_1^{2}}\right)^{\frac{(1-2\varepsilon)}{2r}}>1.$$

Ez pedig ellentmondás, hiszen ez az alsó korlát $k$-tól független. $\square$

Írjuk fel (12)-t $t = 1$-gyel.

$$-1 + \frac{P(x,1)}{x} = \varphi(x,1) = \frac{P(x,1)}{P\left(x, \frac{1}{2}\right)} \left(\varphi\left(x, \frac{1}{2}\right) + 1\right) - 1 + b(x,1). \qquad (14)$$

Átrendezve kapjuk, hogy

$$\varphi\left(x, \frac{1}{2}\right) = P\left(x, \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{x} - \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\frac{1}{2}+\delta}^{1} \frac{P(x, u-\delta)}{x^{1-(u-\delta)}} d\frac{1}{P(x,u)}\right) - 1.$$

Ezt (4)-be visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$\pi(x) - \pi\left(\sqrt{x}\right) = \Phi\left(x, \sqrt{x}\right) - 1 = -x \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\frac{1}{2}+\delta}^{1} \frac{P(x, u-\delta)}{x^{1-(u-\delta)}} d\frac{1}{P(x,u)}. \qquad (15)$$

**13. Lemma.** *Legyenek $f(u), g(u), m(u), M(u)$ valós függvények, $f(u)$ nemnegatív monoton növő, $m(u) \leq g(u) \leq M(u)$. Ekkor*

$$\int_a^b f(u)\, dM(u) - (M(b) - m(b)) f(b) \leq \int_a^b f(u)\, dg(u) \leq$$
$$\leq \int_a^b f(u)\, dm(u) + (M(b) - m(b)) f(b),$$

*feltéve, hogy ezek a Stieltjes-integrálok értelmesek.*

*Bizonyítás.* Használjuk a parciális integrálást.

$$\int_a^b f(u)\, dg(u) = [f(u)\, g(u)]_a^b - \int_a^b g(u)\, df(u) \leq [f(u)(g(u) - m(u))]_a^b +$$
$$+ [f(u)\, m(u)]_a^b - \int_a^b m(u)\, df(u) = (g(b) - m(b)) f(b) - (g(a) - m(a)) f(a) +$$
$$+ \int_a^b f(u)\, dm(u) \leq (M(b) - m(b)) f(b) + \int_a^b f(u)\, dm(u).$$

Az alsó becslés teljesen hasonló. $\square$

**14. Tétel.**

$$\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log(x)}\right).$$

*Bizonyítás.* Használjuk (15)-öt. Mivel $\frac{-1}{P(x,u)}$ monoton nő, ezért

$$\lim_{\delta\searrow 0}\int_{\frac{1}{2}+\delta}^{1}\frac{P(x,u-\delta)}{x^{-(u-\delta)}}d\frac{-1}{P(x,u)}=\left(1+O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right)e^{\gamma}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{u\log(x)}{x^{-u}}d\frac{-1}{P(x,u)}. \tag{16}$$

Használjuk a 13. lemmát. Ekkor $M(u)$-t és $m(u)$-t $\left(1+O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right)\frac{e^{-\gamma}}{u\log(x)}$-nek választva

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^{\gamma}u\log(x)}{x^{-u}}d\frac{-1}{P(x,u)}=\left(1+O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{u\log(x)}{x^{-u}}d\frac{-1}{u\log(x)}+O\left(\frac{x}{\log(x)}\right). \tag{17}$$

Itt

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^u}{u}du=\mathrm{li}(x)-\mathrm{li}\left(\sqrt{x}\right)=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{\log(t)}dt.$$

Tehát

$$\pi(x)-\pi\left(\sqrt{x}\right)=\left(1+O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right)\left(\mathrm{li}(x)-\mathrm{li}\left(\sqrt{x}\right)\right)+O\left(\frac{x}{\log(x)}\right)=O\left(\frac{x}{\log(x)}\right).$$

Ez is megerősíti, hogy a megfelelő becslés $\pi(x)$-re $\mathrm{Li}(x)=\mathrm{li}(x)-\mathrm{li}(2)$. □

A $\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\left(1+o\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right)\frac{e^{-\gamma}}{\log(x)}$ feltevésből kiindulva, a fenti gondolatmenetet megismételve, minden $O$ helyére $o$ írható, tehát a prímszámtételt kapnánk. Ennek bizonyításához kevesebb feltétel is elég.

Használjuk a következő jelöléseket. Legyen $\delta_x(u)$ az a szám, amelyre

$$\frac{1}{P(x,u)}=(1+\delta_x(u))\frac{e^{-\gamma}}{u\log(x)},$$

$$\Delta_x(t_1,t_2)=\max_{t_1\le s_1\le s_2\le t_2}|\delta_x(s_1)-\delta_x(s_2)|.$$

Legyen $c(x)$ olyan lassan növő függvény, ami $x\to\infty$ esetén végtelenhez tart.

**15. Állítás.** *A* $\Delta_x\left(1-\frac{c(x)}{\log(x)},1\right)=o\left(\frac{1}{\log(x)}\right)$ *feltételből következik a prímszám-tétel.*

*Bizonyítás.* A 14. tétel gondolatmenetét kell alkalmazni az integrál $\left[\frac{1}{2},1-\frac{c(x)}{\log(x)}\right]$ és $\left[1-\frac{c(x)}{\log(x)},1\right]$ részére. Az első esetben

$$\left(M\left(1-\frac{c(x)}{\log(x)}\right)-m\left(1-\frac{c(x)}{\log(x)}\right)\right)f\left(1-\frac{c(x)}{\log(x)}\right)=O\left(\frac{x}{x^{\frac{c(x)}{\log(x)}}\log(x)}\right)=o\left(\frac{x}{\log(x)}\right),$$

a második esetben

$$(M(1)-m(1))\,f(1)=O\left(x\Delta_x\left(1-\frac{c(x)}{\log(x)},1\right)\right)=o\left(\frac{x}{\log(x)}\right),$$

a kettőt összerakva pedig

$$\pi(x)-\pi\left(\sqrt{x}\right)=\left(1+O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right)\left(\mathrm{li}(x)-\mathrm{li}\left(\sqrt{x}\right)\right)+o\left(\frac{x}{\log(x)}\right).$$

□

# 3. Durva számok aszimptotikája

## 3.1. Egyensúlyi egyenlet

Térjünk vissza a (11)-(12) egyenletekhez, és egyszerűsítsük le. Hagyjuk el a $b(x,t)$ és $P(x,t)\varphi(x,0)$ tagokat, majd írjunk $P(x,t)$ helyébe $e^{\gamma}t\log(x)$-et. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\hat{\varphi}(x,t) = -t\int_0^t \frac{\hat{\varphi}\left(x^{1-u}, \frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du \tag{18}$$

$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ esetén, és

$$\hat{\varphi}(x,t) = 2t\left(\hat{\varphi}\left(x, \frac{1}{2}\right) + 1\right) - 1 \tag{19}$$

$\frac{1}{2} < t \leq 1$ esetén. Ha ennek van $x$-től független egyensúlyi megoldása, akkor az a következő egyenleteket elégíti ki:

$$\varphi^*(t) = -t\int_0^t \frac{\varphi^*\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du \tag{20}$$

$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ esetén, és

$$\varphi^*(t) = 2t\left(\varphi^*\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right) - 1 \tag{21}$$

$\frac{1}{2} < t \leq 1$ esetén. Most az utóbbiakkal foglalkozunk. Ha $\varphi(t)$ egy egyensúlyi megoldás, akkor tetszőleges $0 < t \leq \frac{1}{2}$ esetén

$$\varphi(t) = -t\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du + t\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du = 2t\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + t\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du. \tag{22}$$

Tekintsük a következő problémát. Tetszőleges $c$ valós számra keressük azokat a $(0,1]$ intervallumon folytonos $\varphi_c(t)$ függvényeket, amelyek kielégítik a következőket:

$$\varphi_c(t) = 2tc + t\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_c\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du \tag{23}$$

ha $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, és

$$\varphi_c(t) = 2t(c+1) - 1 \tag{24}$$

ha $\frac{1}{2} < t \leq 1$.

**16. Állítás.** *Tetszőleges $c$ valós számra a (23)-(24)-nek van a feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása.*

*Bizonyítás.* Mivel $c$ adott, $\frac{1}{2} \le t \le 1$ esetén $\varphi_c$ egyértelmű. Másrészt $a(u) = = \frac{u}{1-u}$ jelöléssel, ha $u \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, akkor $a(u) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, így $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ esetén (23)-ból következik, hogy a jobb oldalon minden érték meghatározott. Ha $u \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$, akkor $a(u) \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, így $\varphi_c$ itt is egyértelmű. Ezt folytatva látszik, hogy adott $c$-hez a $\varphi_c$ folytonos megoldás létezik és egyértelmű. $\square$

**17. Állítás.** *Tetszőleges $0 < t \le 1$ és $d > c$ valós számokra igaz az alábbi:*

$$\varphi_c(t) + (d-c) \le \varphi_d(t) \le \varphi_c(t) + 2(d-c),$$

*vagy ekvivalensen:*

$$\varphi_d(t) - (d-c) \ge \varphi_c(t) \ge \varphi_d(t) - 2(d-c).$$

*Bizonyítás.* Ha $t \ge \frac{1}{2}$, akkor $\varphi_d(t) - \varphi_c(t) = 2t(d-c)$, tehát ekkor az egyenlőtlenségek fennállnak. Indirekt tegyük fel, hogy valamely $t$-kre az egyik egyenlőtlenség nem teljesül. Jelölje ezen számok szuprémumát $0 < a \le \frac{1}{2}$. Legyen $\frac{a}{a+1} < t \le a$. Ekkor

$$\varphi_d(t) - \varphi_c(t) = 2t(d-c) + t \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_d\left(\frac{u}{1-u}\right) - \varphi_c\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2} du \le$$

$$\le 2t(d-c) + t \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{2(d-c)}{u^2} du = 2(d-c)(1-t) \le 2(d-c).$$

Az alsó becslés teljesen hasonlóan látható. Ez viszont ellentmondás a szuprémum miatt. $\square$

**Megjegyzés.** Az előbbi állításból következik, hogy rögzített $0 < t \le 1$ esetén a $c \to \varphi_c(t)$ leképezés szigorúan monoton növő folytonos bijekció a valós számok halmazán. A monotonitás $\varphi_c(t) + (d-c) \le \varphi_d(t)$-ből látszik, a folytonosság az $\varepsilon \le \varphi_{c+\varepsilon}(t) - \varphi_c(t) \le 2\varepsilon$ egyenlőtlenségekből látható.

**Megjegyzés.** Ha egy $0 < t_0 \le 1$ számra $|\varphi_d(t_0) - \varphi_c(t_0)| \le h$, akkor minden $0 < t \le 1$ esetén $|\varphi_d(t) - \varphi_c(t)| \le 2h$. Ha $d - c > h$ lenne, akkor az előző állítás miatt $\varphi_d(t_0) - \varphi_c(t_0) > h$, tehát mivel $c-d$-re ugyanezt kapnánk, következik, hogy $-h \le d - c \le h$. Innen használjuk az állítást.

**18. Lemma.** *Egyértelműen létezik olyan $q$ valós szám, hogy tetszőleges $k \geq 0$ esetén*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_q(t)}{t^k} = 0.$$

*Bizonyítás.* Legyen $n \geq 3$ természetes szám esetén $c_n$ az a valós szám, amelyre $\varphi_{c_n}\left(\frac{1}{n}\right)=0$. Azt fogjuk igazolni, hogy a $q=\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ érték létezik, és ez megfelelő lesz. Legyenek $0 < s_1 \leq s_2 \leq \frac{1}{2}$ és $c$ tetszőleges valós számok. Ekkor

$$\begin{aligned}\varphi_c(s_2) &= \frac{s_2}{s_1}\left(2s_1\varphi_c\left(\frac{1}{2}\right) + s_1 \int_{s_1}^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_c\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2} du\right) - s_2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\varphi_c\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2} du = \\ &= \frac{s_2}{s_1}\varphi_c(s_1) - s_2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\varphi_c\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2} du.\end{aligned} \tag{25}$$

Hasonlóan látható, hogy

$$\varphi_c(s_1) = \frac{s_1}{s_2}\varphi_c(s_2) + s_1 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\varphi_c\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2} du. \tag{26}$$

Legyen $n \geq 3$ esetén $m_n = \max\limits_{t\in\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right]} |\varphi_{c_n}(t)|$. Ekkor felhasználva (26)-ot, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{c_n}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| &= \left|\frac{n}{n+1}\varphi_{c_n}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi_{c_n}\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2} du\right| \leq \\ &\leq \frac{m_n}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{u^2} du \leq \frac{m_n}{n+1}.\end{aligned}$$

Tehát $\left|\varphi_{c_{n+1}}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \varphi_{c_n}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| \leq \frac{m_n}{n+1}$. Az utolsó megjegyzésből következik, hogy tetszőleges $0 < t \leq 1$ esetén $\left|\varphi_{c_{n+1}}(t) - \varphi_{c_n}(t)\right| \leq \frac{2m_n}{n+1}$, vagyis

$$\begin{aligned}\max_{t\in\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right]} \left|\varphi_{c_{n+1}}(t)\right| &= \max_{t\in\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right]} \left|\varphi_{c_{n+1}}(t) - \varphi_{c_n}(t) + \varphi_{c_n}(t)\right| \leq \\ &\leq \frac{2m_n}{n+1} + m_n < 2m_n.\end{aligned}$$

Amennyiben $t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, felhasználva (25)-öt

$$\left|\varphi_{c_{n+1}}(t)\right| = \left|(n+1)t\varphi_{c_{n+1}}\left(\frac{1}{n+1}\right) - t\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{t} \frac{\varphi_{c_{n+1}}\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du\right| \leq$$

$$\leq 2tm_n \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{u^2}du \leq \frac{2m_n}{n}$$

adódik. Tehát $m_{n+1} \leq \frac{2m_n}{n}$. Innen indukcióval látható, hogy $m_n \leq \frac{2^{n-2}m_3}{(n-1)!}$, ezért

$$|c_{n+1} - c_n| = \left|\varphi_{c_{n+1}}\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi_{c_n}\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{2m_n}{n+1} \leq \frac{2^{n-1}m_3}{n!}.$$

Innen a háromszögegyenlőtlenség többszöri alkalmazásával igazolható, hogy tetszőleges $m > n$ esetén $|c_m - c_n| \leq \frac{2^n r}{n!}$, ahol $r$ független $n$-től és $m$-től. Tehát $c_n$ Cauchy-sorozat, vagyis konvergens, azaz létezik egy $q$ határértéke, amelyre $|q - c_n| \leq \frac{2^n r}{n!}$. Felhasználva a 17. állítást, tetszőleges $t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]$ és $l \geq 0$ esetén, ha $n$ elég nagy,

$$|\varphi_q(t)| \leq |\varphi_q(t) - \varphi_{c_n}(t)| + |\varphi_{c_n}(t)| \leq \frac{r'2^n}{n!} \leq \frac{1}{n^l} \leq t^l.$$

Az egyértelműség a 17. állításból könnyen adódik. □

**19. Tétel.** *Egyértelműen létezik egyensúlyi megoldás, azaz olyan $\varphi^*(t)$ függvény, ami kielégíti (20)-(21)-et.*

*Bizonyítás.* Használjuk az előző lemmát. Mivel az előbb kapott $\varphi_q(t)$ gyorsabban tart 0-hoz mint a $t^2$ polinom, $q$ helyébe $\varphi_q\left(\frac{1}{2}\right)$-et írva, (23)-at átrendezve

$$\varphi_q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\varphi_q(t)}{2t} - \frac{1}{2}\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_q\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du$$

adódik. Tartsunk $t$-vel 0-hoz. Ekkor $q = \varphi_q\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_q\left(\frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du$. Ezt visszahelyettesítve (23)-ba, azt kapjuk, hogy $\varphi_q$ kielégíti a (20)-(21) egyenleteket. □

## 3.2. A $\varphi(x,t)$ függvény aszimptotikája

**20. Állítás.** *Rögzített* $0 \le t < 1$ *esetén* $\varphi(x,t)$ *tart* $\varphi_r(t)$*-hez, ahol* $r = \frac{e^\gamma}{2} - 1$. *Tetszőleges* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *esetén az* $[\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2]$ *intervallumon egyenletesen is konvergál.*

*Bizonyítás.* A prímszámtételt és a Mertens-tételt felhasználva

$$\frac{x}{\log(x)} \sim \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) = \Phi(x,\sqrt{x}) - 1 =$$
$$= \left(1+\varphi\left(x,\frac{1}{2}\right)\right) x \prod_{p\le\sqrt{x}} \left(1-\frac{1}{p}\right) - 1 \sim \left(1+\varphi\left(x,\frac{1}{2}\right)\right) \frac{e^{-\gamma}x}{\log(\sqrt{x})}.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \varphi\left(x,\frac{1}{2}\right) = \frac{e^\gamma}{2} - 1,$$

azaz ha $\varphi(x,t)$ tart valamilyen $\varphi_r(t)$-hez, akkor $r = \frac{e^\gamma}{2} - 1$. Tetszőleges $\frac{1}{2} \le t < 1$ esetén $\frac{P(x,t)}{P\left(x,\frac{1}{2}\right)} \sim 2t$, ezért tetszőlegesen kis $\varepsilon > 0$ esetén ha $x$ elég nagy, akkor

$$2t\left(\varphi_r\left(\frac{1}{2}\right)+1\right) - 1 - \frac{\varepsilon}{2} + b(x,t) \le \varphi(x,t) = \frac{P(x,t)}{P\left(x,\frac{1}{2}\right)}\left(\varphi\left(x,\frac{1}{2}\right)+1\right) - 1 + b(x,t) \le$$
$$\le 2t\left(\varphi_r\left(\frac{1}{2}\right)+1\right) - 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

ahol felhasználtuk, hogy $b(x,t)$ negatív. Írjuk fel (14)-et és rendezzük át. Ekkor

$$b(x,1) = \frac{P(x,1)}{x} - \frac{P(x,1)}{P\left(x,\frac{1}{2}\right)}\left(\varphi\left(x,\frac{1}{2}\right)+1\right).$$

Innen látható, hogy $x \ge 1$ esetén $b(x,1)$ korlátos. A

$$b(x,t) = \lim_{\delta\searrow 0} \int_{\frac{1}{2}+\delta}^{t} \frac{P(x,u-\delta)}{x^{1-(u-\delta)}} d\frac{P(x,t)}{P(x,u)}$$

alakból következik, hogy $b(x,t)$ $t$-ben monoton csökkenő. Tehát $b(x,1)$ korlátossága miatt $b(x,t)$ is korlátos. Igazolható, hogy $\frac{1}{2} \le t \le 1 - \frac{2\log\log(x)}{\log(x)} = 1 - \varepsilon_x$ esetén $b(x,t) = O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)$, hiszen ekkor a fenti integrálban az integrandus felülről becsülhető $\frac{P(x,1-\varepsilon_x)}{x^{\varepsilon_x}} \le \frac{2\log(x)}{\log(x)^2}$-tel. Így ha $x$ elég nagy, $\frac{1}{2} \le t \le 1-\varepsilon_2 \le 1-\varepsilon_x$ esetén

$$|\varphi(x,t) - \varphi_r(t)| \le \varepsilon.$$

Tegyük fel, hogy $\frac{1}{3} \le t < \frac{1}{2}$. Ekkor (11) hasonlóan átírható, mint (22), azaz

$$\varphi(x,t) = \frac{P(x,t)}{P\left(x,\frac{1}{2}\right)}\varphi\left(x,\frac{1}{2}\right) - \lim_{\delta\searrow 0}\int_t^{\frac{1}{2}} \varphi\left(x^{1-(u-\delta)}, \frac{u-\delta}{1-(u-\delta)}\right) d\frac{P(x,t)}{P(x,u)}. \tag{27}$$

Vágjuk két részre az integrált. Egyrészt az $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_x}{2(2-\varepsilon_x)}\right]$ intervallumon integráljunk, kihasználva, hogy itt $\varphi\left(x^{1-u}, \frac{u}{1-u}\right)$ egyenletesen tart $\varphi_r\left(\frac{u}{1-u}\right)$-hoz. Másrészt az $\left[\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_x}{2(2-\varepsilon_x)}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon, ahol $\varphi\left(x^{1-u}, \frac{u}{1-u}\right)$ korlátos, és az intervallum hossza miatt lesz kicsi az integrál. Innen egyszerű becslésekkel igazolható az egyenletes konvergencia. Így folytatva a többi $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ intervallumon igazolható a konvergencia, ráadásul egyszerűbb is, mivel $n \ge 3$ esetén nem kell szétvágni (27)-ben az integrált, csupán az $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]$ intervallumon vett egyenletes konvergenciát kell használni. □

**21. Állítás.** $\varphi_r(t) = \varphi^*(t)$

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $q$ az a szám, amelyre $\varphi_q(t) = \varphi^*(t)$, és legyen $r = q + d$. Ekkor azt kell igazolni, hogy $d = 0$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül, és legyen $d > 0$ (a $d < 0$ eset teljesen hasonló). Ekkor a 17. állításból következik, hogy $\varphi_q(t) + d \le \varphi_r(t) \le \varphi_q(t) + 2d$. Mivel $\varphi_q(t)$ folytonos és $\lim_{t\searrow 0}\varphi_q(t) = 0$, ezért van olyan $s_2$ valós szám, hogy $t \le s_2$ esetén $\varphi_q(t) \ge -\frac{d}{2}$, amiből $\varphi_r(t) \ge \frac{d}{2}$ következik. Legyen $a(u) = \frac{u}{1-u}$, $s_1 = a^{-1}(s_2)$, $s_0 = a^{-1}\left(a^{-1}(s_2)\right)$. Legyen $\varepsilon > 0$ elég kicsi, $n$ természetes, $x_0$ valós és $c_0 = \max\left\{1, \inf\left\{c > 0 : \varphi(x,t) \ge -ct^4, x_0 \le x \le x_0^4, t_{p_n} \le t \le s_2\right\}\right\}$ véges számok olyanok, hogy teljesüljenek a következők. Tetszőleges $x \ge x_0$, $t, s \ge t_{p_n}$ esetén legyen $\left|\frac{P(x,t)}{P(x,s)} - \frac{t}{s}\right| < \varepsilon$ és

$$\frac{4\log(x)^2}{\sqrt{x}} \le \frac{\varepsilon}{\log(x)^4} \le c_0\varepsilon t_{p_1}^4 \le c_0\varepsilon t^4.$$

Másrészt teljesüljön a 11. állítás feltétele $n$-nel. Harmadrészt az egyenletes konvergenciát használva $s_0 \le t \le s_2$ esetén legyen $\varphi(x,t) > \frac{d}{4}$. Ekkor a 13. lemma és a 11. állítás miatt $x_0^2 \le x \le p_n x_0^4$ és $t_{p_n} \le t \le s_1$ esetén

$$\varphi(x,t) = \frac{P(x,t)}{P(x,t_{p_n})}\varphi(x,t_{p_n}) + \lim_{\delta\searrow 0}\int_{t_{p_n}}^{t} \varphi\left(x^{1-(u-\delta)}, \frac{u-\delta}{1-(u-\delta)}\right) d\frac{P(x,t)}{P(x,u)} \leq$$
$$\leq \frac{P(x,t)^2}{\sqrt{x}} - \int_{t_{p_n}}^{t} c_0 \left(\frac{u}{1-u}\right)^4 d\frac{P(x,t)}{P(x,u)} \leq$$
$$\leq \frac{4\log(x)^2}{\sqrt{x}} + t\int_0^t c_0 \frac{u^2}{(1-u)^4} du + 2\varepsilon c_0 \left(\frac{t}{1-t}\right)^4 \leq$$
$$\leq \varepsilon c_0 t^4 + c_0 \frac{t^4}{3(1-t)^3} + 2\varepsilon c_0 \frac{t^4}{(1-t)^4} \leq c_0 t^4 \left(\frac{1}{3(1-\frac{1}{5})^3} + C\varepsilon\right) \leq c_0 \frac{2}{3} t^4.$$

Ekkor viszont $x_0^4 \leq x \leq p_n^2 x_0^4$ és $t_{p_n} \leq t \leq s_0$ esetén az előzőhöz hasonlóan

$$\varphi(x,t) \geq -c_0 \left(\frac{2}{3}\right)^2 t^4.$$

Ugyanakkor ez igaz $s_0 \leq t \leq s_2$ esetén is, mivel ekkor $\varphi(x,t) \geq \frac{d}{4}$. Innen a fenti gondolatmenetet többször megismételve igazolható, hogy $k \geq 0$ egészre $x \in \left[x_0^{4^k}, x_0^{4^{k+1}}\right]$ és $t_{p_n} \leq s_0 \leq t \leq s_2$ esetén

$$\varphi(x,t) \geq -c_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} t^4,$$

valamint $x \in \left[x_0^{2\cdot 4^k}, x_0^{2\cdot 4^{k+1}}\right]$ esetén

$$\varphi(x,t) \leq c_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} t^4.$$

Ez utóbbi viszont ellentmondás, mert elég nagy $k$-ra, $s_0 \leq t \leq s_2$ esetén $\varphi(x,t)$ minden pozitív számnál kisebb lesz, speciálisan $\frac{d}{4}$-nél is. Tehát $d = 0$. $\square$

Beláttuk, hogy rögzített $u > 1$ esetén

$$\Phi\left(x, x^{\frac{1}{u}}\right) \sim \left(1 + \varphi^*\left(\frac{1}{u}\right)\right) \frac{ue^{-\gamma}x}{\log(x)} \quad x \to \infty.$$

Ezt összevetve Buchstab eredményével fennáll az

$$\omega(u) = \left(1 + \varphi^*\left(\frac{1}{u}\right)\right) e^{-\gamma}$$

összefüggés.

# 4. A folytonos modell

## 4.1. A $\hat{\varphi}(x,t)$ függvény vizsgálata

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a (18)-(19) egyenletek néhány tulajdonságát. Először a szokásos egzisztencia és unicitás tételeket látjuk be, majd megvizsgáljuk a megoldás növekedésének felső korlátját. Végül a Laplace-transzformációt hívjuk segítségül.

Érdemes az első változóban a $\psi(x,t)=\hat{\varphi}(a^{2^x},t)$ transzformációt végrehajtani, ahol $a>2$ rögzített valós szám. A 4. fejezetben láttuk, hogy létezik $\varphi^*$ egyensúlyi megoldás, tehát a megoldást célszerű $\psi(x,t)=\tilde{\psi}(x,t)+\varphi^*(t)$ alakban keresni. Ekkor $\tilde{\psi}(x,t)$-re az alábbi összefüggést nyerjük. Ha $x>0$ és $0<t\le\frac{1}{2}$, akkor

$$\tilde{\psi}(x,t)=-t\int_0^t\frac{\tilde{\psi}\left(x+\log_2(1-u),\frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du, \tag{28}$$

$\frac{1}{2}<t\le 1$ esetén pedig

$$\tilde{\psi}(x,t)=2t\tilde{\psi}\left(x,\frac{1}{2}\right). \tag{29}$$

Természetesen a megoldás egyértelműségéhez szükséges egy kezdeti feltétel. Legyen $\tilde{\psi}_0:T\to\mathbb{R}$ adott, folytonos függvény, ahol

$$T=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:-1\le x\le 0,\,2^{-x}-1\le t\le 1\right\}.$$

Ha a fenti integrálban $\tilde{\psi}$ helyére konstans 1-et írnánk, akkor végtelen lenne a kifejezés, ezért feltesszük, hogy $\left|\tilde{\psi}_0(x,t)\right|\le c\cdot t^3$ valamilyen $c>0$ konstanssal. A megoldást is olyan függvények körében keressük, ahol van olyan $c:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ lokálisan korlátos függvény, hogy $\left|\tilde{\psi}(x,t)\right|\le c(x)\cdot t^3$.

**22. Tétel.** *Tetszőleges, a fenti feltételeket kielégítő $\tilde{\psi}_0$ kezdeti függvény esetén egyértelműen létezik (28)-(29)-nek egy lokálisan korlátos $\tilde{\psi}$ megoldása.*

*Bizonyítás.* A szukcesszív approximáció gondolatát használva megmutatjuk, hogy létezik megoldás. Először belátjuk, hogy megfelelően kis $\varepsilon$ esetén, ha $0<x\le\varepsilon$, akkor létezik megoldás. Létrehozunk egy olyan $\tilde{\psi}^{(n)}$ függvényekből álló sorozatot, ami tart a megoldáshoz. Legyen $\tilde{\psi}^{(0)}=\tilde{\psi}_0$ ha $x\le 0$, és $\tilde{\psi}^{(0)}=0$ ha $x>0$. Tetszőleges $n\ge 1$ esetén pedig a következőképpen képezzük $\tilde{\psi}^{(n)}$-et. Ha $x\le 0$, akkor itt is $\tilde{\psi}^{(n)}=\tilde{\psi}_0$. Ha $x>0$, akkor

$$\tilde{\psi}^{(n)}(x,t)=-t\int_0^t\frac{\tilde{\psi}^{(n-1)}\left(x+\log_2(1-u),\frac{u}{1-u}\right)}{u^2}du, \tag{30}$$

$0 < t \leq \frac{1}{2}$ esetén, és

$$\tilde{\psi}^{(n)}(x,t) = 2t\tilde{\psi}^{(n)}\left(x, \frac{1}{2}\right), \tag{31}$$

$\frac{1}{2} < t \leq 1$ esetén.
Definiáljuk még $n \geq 1$ esetén az $\eta^{(n)}(x,t) = \tilde{\psi}^{(n)}(x,t) - \tilde{\psi}^{(n-1)}(x,t)$ függvényt. Ekkor látszik, hogy $x \leq 0$ esetén $\eta^{(n)}(x,t) = 0$. Ha $n \geq 2$, akkor $\eta^{(n)}$-re felírhatjuk ugyanazt az összefüggést, mint $\tilde{\psi}^{(n)}$-re, azaz a (30)-(31) egyenletekbe írjuk a $\tilde{\psi}$ helyére $\eta$-t. Legyen $\varepsilon = 0{,}1$, és

$$C_n = \inf\left\{C > 0 : \left|\eta^{(n)}(x,t)\right| \leq C \cdot t^3, x \leq \varepsilon\right\}.$$

Jegyezzük meg, hogy $C_n$ létezik, ugyanis a feltétel miatt $\tilde{\psi}^{(0)}$ függvényre is van $C > 0$, hogy $\left|\tilde{\psi}^{(0)}(x,t)\right| \leq C \cdot t^3$, és a (30)-(31) egyenleteket felhasználva, indukcióval könnyen látható, hogy $\tilde{\psi}^{(n)}$ függvény esetén is van ilyen $C$. Ekkor $\eta^{(n)}$-re is van ilyen konstans, tehát a fenti halmaz nem üres, vagyis létezik infimuma.
Ha $t \leq 1/2$, akkor

$$\left|\eta^{(n)}(x,t)\right| \leq t \int_0^t \frac{\left|\eta^{(n-1)}\left(x + \log_2(1-u), \frac{u}{1-u}\right)\right|}{u^2} du \leq$$
$$\leq t \int_0^{\min\left\{t, 1-2^{-\varepsilon}\right\}} C_{n-1} \frac{u}{(1-u)^3} du \leq C_{n-1} t \cdot \min\left\{\frac{t^2}{2(1-t)^2}, \frac{(1-2^{-\varepsilon})^2}{2(2^{-\varepsilon})^2}\right\} \leq$$
$$\leq C_{n-1} \cdot t^3 \cdot \frac{1}{\min\left\{2(1-t)^2, 2(2^{-\varepsilon})^2\right\}} \leq C_{n-1} \frac{2}{3} t^3.$$

Itt felhasználtuk, hogy $\varepsilon = 0{,}1$ és $u \leq 1 - 2^{-\varepsilon}$ esetén $x + \log_2(1-u) \leq 0$. Ebből triviálisan következik, hogy $t > \frac{1}{2}$ esetén is fennáll a fenti egyenlőtlenség. Tehát $C_n \leq \frac{2}{3} C_{n-1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} C_1$. Innen már könnyen látszik, hogy a $\tilde{\psi}^{(n)}$ sorozat $x \leq \varepsilon$ esetén egyenletesen tart egy $\tilde{\psi}$ határfüggvényhez. Ez ugyanis a $\tilde{\psi}^{(n)} = \tilde{\psi}^{(0)} + \sum_{k=1}^n \eta^{(k)}$ összefüggésből és az előbbi $C_n$ becslésből következik. Ráadásul $\tilde{\psi}$ kielégíti a (28)-(29) egyenleteket (vegyük a (30)-(31) egyenletek mindkét oldalának a limeszét). Annak belátása, hogy van megoldás, ha $\varepsilon < x \leq 2\varepsilon$ teljesen hasonlóan megy, csak $\tilde{\psi}^{(0)}$-t kell úgy definiálni, hogy $x \leq \varepsilon$ esetén az imént kapott $\tilde{\psi}$-mal legyen egyenlő. Az egész eljárást többször megismételve azt kapjuk, hogy létezik megoldás $x > 0$ esetén.

Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy $\tilde{\psi}_1$ és $\tilde{\psi}_2$ két különböző, olyan lokálisan korlátos megoldás, amelyek ugyanahhoz a $\tilde{\psi}_0$ kezdeti függvényhez tartoznak. Ekkor $\eta = \tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_1$ egy olyan megoldása a (18)-(19) egyenleteknek, amelynek kezdeti függvénye azonosan nulla és a megoldásnak van nullától eltérő értéke. Legyen az $a \geq 0$ szám azoknak az $x$ számoknak az ifimuma, amelyre létezik $s$, hogy $\eta(x,s) \neq 0$. Legyen $\varepsilon = 0{,}1$ és $C$ olyan konstans, hogy $x \in [a, a+\varepsilon]$ esetén $|\eta(x,t)| \leq C \cdot t^3$, és van olyan $(x_1, t_1)$ páros, amire egyenlőség áll fenn. Ekkor felírhatók ugyanazok az egyenlőtlenségek, amelyek segítségével megkaptuk a $C_n \leq \frac{2}{3} C_{n-1}$ becslést, csak most a $C \leq \frac{2}{3} C$-t kapjuk meg, ami nyilván ellentmondás. □

Most nézzük meg, hogy milyen gyorsan nőhet a megoldás abszolútértéke. Belátjuk, hogy legfeljebb exponenciális sebességgel, és megvizsgáljuk, hogy mennyire csökkenthető le ez a korlát. Ez azért is jó, mert így alkalmazhatjuk majd a Laplace-transzformációt.

**23. Tétel.** *Legyen $C$ konstans olyan, hogy $\left|\tilde{\psi}_0(x,t)\right| \leq C \cdot 2^{3x} t^3$ teljesül. Ekkor $\left|\tilde{\psi}(x,t)\right| \leq C \cdot 2^{3x} t^3$.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy bizonyos $x_0$-nál kisebb értékekre. Ekkor $x_0$-ra felírva az (28) összefüggést, $t \leq \frac{1}{2}$ esetén kapjuk, hogy

$$\left|\tilde{\psi}(x_0,t)\right| \leq t \int_0^t \frac{\left|\tilde{\psi}\left(x_0 + \log_2(1-u), \frac{u}{1-u}\right)\right|}{u^2} du \leq tC2^{3x_0} \int_0^t u du \leq C2^{3x_0} t^3.$$

A bizonyítás lényegét tekintve ennyi. Ha precízen akarjuk belátni, akkor tegyük fel, $x_0$ azoknak az $y$ számoknak az infimuma, amelyekre léteznek olyan $s$ számok, hogy $\left|\tilde{\psi}(y,s)\right| > C \cdot 2^{3x} t^3$. Az előző tétel bizonyításából tudjuk, hogy készíthető egy olyan $\tilde{\psi}^{(n)}$ függvénysorozat, ami megfelelően kis $\varepsilon$ esetén az $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ intervallumon egyenletesen konvergál a megoldáshoz. Felírva ezekre a függvényekre a (30)-(31) egyenleteket, majd teljes indukciót, a fenti egyenlőtlenségeket, végül határátmenetet használva látható a tétel. □

Az aszimptotikus viselkedés szempontjából jó lenne, ha találnánk egy olyan $b < 0$ konstanst, hogy az abszolútérték $C2^{bx} t^3$-nal legyen becsülhető, ugyanis ekkor a megoldás nullához tartana. Viszont a tétel élesítéséhez szigorítani kell a kezdeti függvényre tett feltevéseinket, és jobban ki kell használni a (31) egyenletet is.

**24. Tétel.** *Legyen $C$ konstans olyan, hogy $t \leq \frac{1}{2}$ esetén $\left|\tilde{\psi}_0(x,t)\right| \leq C \cdot 2^x t^3$, és $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ esetén pedig $\left|\tilde{\psi}_0(x,t)\right| \leq C \cdot 2^x t/4$. Ekkor $\left|\tilde{\psi}(x,t)\right| \leq C \cdot 2^x t^3$.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy bizonyos $x_0$-nál kisebb értékekre. Ekkor $x_0$-ra felírva a (28) összefüggést, $t \leq \frac{1}{3}$ esetén kapjuk, hogy

$$\frac{\left|\tilde{\psi}(x_0,t)\right|}{C2^{x_0}} \leq t \int_0^t \frac{u}{(1-u)^2} du \leq t \left(\frac{1}{1-t} + \log(1-t) - 1\right) \leq t^3.$$

Ha $\frac{1}{3} \le t \le \frac{1}{2}$, akkor

$$\frac{\left|\tilde{\psi}(x_0,t)\right|}{C2^{x_0}} \le t\left(\int_0^{1/3} \frac{u}{(1-u)^2}du + \int_{1/3}^{t} \frac{1}{4u}du\right) \le$$

$$t\left(1/2 + \log(2/3) + \frac{1}{4}\log(t) - \frac{1}{4}\log(\frac{1}{3})\right) \le t^3.$$

A bizonyítás technikai részét az előző tételhez teljesen hasonlóan kell elvégezni. □

Ahhoz, hogy megtaláljuk, milyen kezdeti függvény esetén tart a megoldás nullához, segíthet a következő tétel.

**25. Tétel.** *Tegyük fel, hogy létezik olyan $g(t)$ nemnegatív, a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvény, hogy egyrészt $\frac{1}{2} < t \le 1$ esetén $g(t) = 2tg(\frac{1}{2})$, másrészt $0 < t \le \frac{1}{2}$ esetén valamilyen kis $\varepsilon > 0$ számra*

$$\frac{t}{g(t)} \int_0^t \frac{g(\frac{u}{1-u})}{u^2} du < 1 - \varepsilon \tag{32}$$

*teljesül. Ekkor $\left|\tilde{\psi}_0(x,t)\right| \le C \cdot g(t)$ kezdeti függvény és $x \to \infty$ esetén $\tilde{\psi}(x,t) \to 0$.*

*Bizonyítás.* Könnyen látható, hogy ha $g(t)$ kielégíti a fenti feltételeket, akkor minden $c > 0$ szám esetén $c \cdot g(t)$ is. Ha $\left|\tilde{\psi}_0(x,t)\right| \le C \cdot g(t)$, akkor tetszőleges kis $\delta > 0$ esetén $\left|\tilde{\psi}_0(x,t)\right| \le 2^{-\delta \cdot x} C \cdot g(t)$ (mert $-1 \le x \le 0$). Tegyük fel, hogy egy adott $x_0 > 0$ számnál kisebb $x$ értékekre igaz, hogy $\left|\tilde{\psi}(x,t)\right| \le 2^{-\delta \cdot x} C \cdot g(t)$. Tegyük még fel, hogy $\delta = \log_2(1 + \varepsilon/2)$. Ekkor $t \le \frac{1}{2}$ esetén

$$\frac{\left|\tilde{\psi}(x_0,t)\right|}{2^{-\delta \cdot x_0} C} \le t \int_0^t \frac{2^{-\delta \cdot \log_2(1-u)} g(\frac{u}{1-u})}{u^2} du \le$$

$$\le 2^{\delta} t \int_0^t \frac{g(\frac{u}{1-u})}{u^2} du \le 2^{\delta}(1-\varepsilon) g(t) \le (1 - \varepsilon/2) g(t).$$

A bizonyítás ugyanúgy fejezhető be mint az előző két tételnél, ugyanis ilyen kezdeti feltétellel is egyenletesen konvergens a $\tilde{\psi}^n$ sorozat a $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ intervallumon, sőt (32) miatt ennek bizonyítása még könnyebb is. □

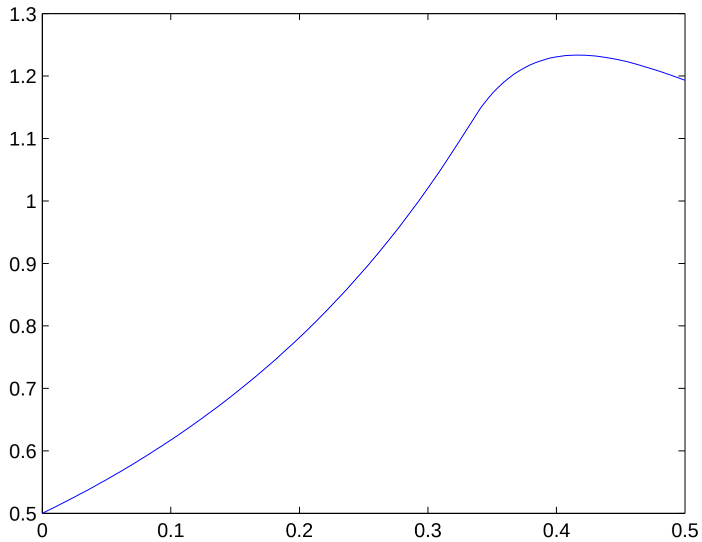
Az 1. ábrán (32) bal oldalát ábrázoltuk, ha

$$g_1(t) = \begin{cases} t^3, & \text{ha } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}t, & \text{ha } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Látszik, hogy körülbelül 0,3-nél az érték 1-nél nagyobb lesz. Ahhoz, hogy ennél jobb értéket kapjunk bonyolítani kell a $g(t)$ függvényt. Például legyen

$$g_2(t) = \begin{cases} 81t^7, & \text{ha } 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ t^3, & \text{ha } \frac{1}{3} \le u \le \frac{1}{2} \\ t^{\frac{1}{4}}, & \text{ha } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

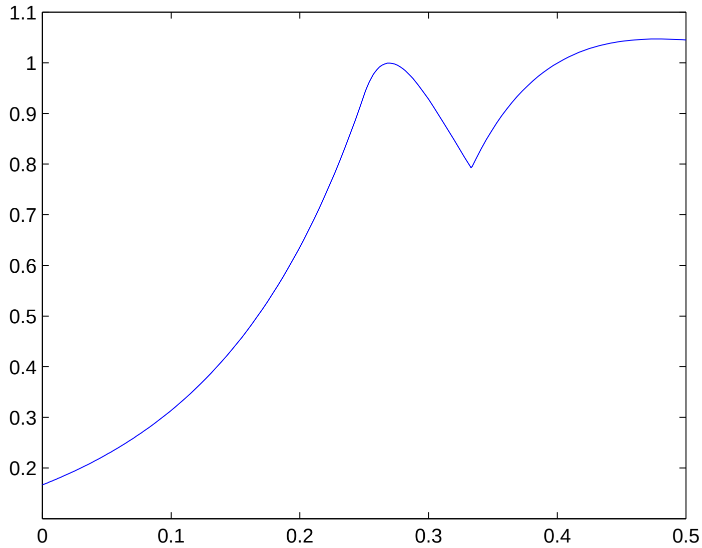
Látható, hogy ez már alig lépi át az 1-et. Bonyolultabb $g$ függvényt választva még lejjebb vihető ez a korlát, viszont nem sokkal, és nagy valószínűséggel nincsen a 25. tételt kielégítő függvény. Azért lenne érdekes ha lenne, mert ebből bizonyítható lenne a prímszámtétel. Tehát a megoldás aszimptotikus viselkedését más úton kell meghatározni, mi a Laplace-transzformációval próbáljuk ezt megfejteni.




1. ábra. (32) bal oldala $g_1(t)$-vel.

## 4.2. Laplace-transzformáció

A Laplace-transzformáció nagyon hasznos késleltetett rendszerek vizsgálatában, például állandó együtthatós késleltetett lineáris differenciálegyenletek vagy felújítási egyenletek esetén [6]. Mivel az általunk felállított folytonos egyenlet hasonlít az előbb említettekre, érdemes megnézni, hogy ebben az esetben mit segít a transzformáció.




2. ábra. (32) bal oldala $g_2(t)$-vel.

Egy $f(x)$ függvény Laplace-transzformáltja a következő [7]:

$$\mathcal{L}(f(x))(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-s\cdot x}dx.$$

Ahhoz, hogy ez értelmes legyen, feltesszük, hogy $f$ integrálható, és legfeljebb exponenciális mértékben növekedhet, azaz léteznek olyan $C$ és $b$ konstansok, hogy

$$|f(x)| \leq Ce^{b\cdot x}.$$

Ekkor $\Re(s) \geq b$ esetén $\mathcal{L}(f(x))(s)$ biztosan értelmes. Megjegyezzük még azt a tulajdonságot, hogy ha két függvény Laplace-transzformáltja megegyezik, akkor majdnem mindenhol megegyeznek. Tudjuk a 23. tétel miatt, hogy a megoldás első változóban legfeljebb exponenciális sebesességgel növekedhet, tehát alkalmazhatjuk a Laplace-transzformációt. Legyen rögzített $t$ esetén $F(s,t) = \mathcal{L}(\tilde{\psi}(x,t))(s)$. Ekkor $t \leq \frac{1}{2}$ esetén

$$F(s,t)=\int_0^\infty \tilde{\psi}(x,t)e^{-s\cdot x}dx=\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot(-t)\int_0^t \frac{\tilde{\psi}(x+\log_2(1-u),\frac{u}{1-u})}{u^2}dudx=$$

$$=-t\int_0^t \frac{1}{u^2}\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\tilde{\psi}\left(x+\log_2(1-u),\frac{u}{1-u}\right)dxdu=$$

$$=-t\int_0^t \frac{e^{s\log_2(1-u)}}{u^2}\int_{\log_2(1-u)}^\infty e^{-s\cdot y}\tilde{\psi}\left(y,\frac{u}{1-u}\right)dydu=$$

$$=-t\int_0^t \frac{e^{s\log_2(1-u)}}{u^2}\int_{\log_2(1-u)}^0 e^{-s\cdot y}\tilde{\psi}_0\left(y,\frac{u}{1-u}\right)dydu-t\int_0^t \frac{e^{s\log_2(1-u)}}{u^2}F\left(s,\frac{u}{1-u}\right)du,$$

ahol az $y=x+\log_2(1-u)$ helyettesítést alkalmaztuk. Jelöljük az utolsó egyenlőség első tagját $G(s,t)$-vel. Tehát $t\le\frac{1}{2}$ esetén

$$F(s,t)=-t\int_0^t \frac{e^{s\log_2(1-u)}}{u^2}F\left(s,\frac{u}{1-u}\right)du+G(s,t), \tag{33}$$

$\frac{1}{2}<t\le 1$ esetén pedig

$$F(s,t)=2tF\left(s,\frac{1}{2}\right). \tag{34}$$

Látható, hogy annyiban egyszerűsödtek az (28)-(29) egyenletek, hogy az első változóban eltűnt a késleltetés. Érdemes az egyszerűség kedvéért elvégezni a második változóban a következő helyettesítéseket.

$$\tilde{F}(s,t)=F\left(s,\frac{1}{t}\right),\quad \tilde{G}(s,t)=G\left(s,\frac{1}{t}\right).$$

Ekkor $t\ge 2$ esetén

$$\tilde{F}(s,t)=-\frac{1}{t}\int_{t-1}^\infty e^{-s\log_2(1-\frac{1}{u+1})}\tilde{F}(s,u)du+\tilde{G}(s,t), \tag{35}$$

$1\le t\le 2$ esetén pedig

$$\tilde{F}(s,t)=\frac{2}{t}\tilde{F}(s,\frac{1}{2}) \tag{36}$$

teljesül. Ez átalakítható egy késleltetett lineáris differenciálegyenletté, ami viszont nem konstans együtthatós, és ezekre sajnos nincs általános megoldási módszer. Viszont ha $1\le t<2$, akkor az ismeretlen függvényből csak az $\tilde{F}(s{,}2)$ értéket használjuk. Emiatt $2\le t<3$ esetén $\tilde{F}(s,t)$ is kifejezhető $\tilde{F}(s{,}2)$-vel. Ezt tovább folytatva minden $t$ értékre $\tilde{F}(s,t)$ kifejezhető $\tilde{F}(s{,}2)$-vel.

Használjuk a

$$T(s,t)=\tilde{G}(s,t)-\frac{2}{t}\tilde{G}(s{,}2),\quad g(s,t)=e^{s\log_2(1-\frac{1}{t+1})}$$

jelöléseket.

**26. Tétel.** $2 \leq n \leq t < n+1$ *esetén fennáll*

$$\tilde{F}(s,t) = T(s,t) + \sum_{k=1}^{n-2} \int_{k+1}^{t-1} \int_{k}^{t_1-1} \dots \int_{2}^{t_{k-1}-1} \frac{T(s,t_k)}{t} \prod_{i=1}^{k} \frac{g(s,t_i)}{t_i} dt_k dt_{k-1} \dots dt_1 +$$

$$+ \frac{2\tilde{F}(2,s)}{t} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k}^{t-1} \int_{k-1}^{t_1-1} \dots \int_{1}^{t_{k-1}-1} \frac{2\tilde{F}(2,s)}{t} \prod_{i=1}^{k} \frac{g(s,t_i)}{t_i} dt_k dt_{k-1} \dots dt_1.$$

*Bizonyítás.* Egyszerű átalakításokból következik, hogy $2 \leq n+1 \leq t < n+2$ esetén

$$\tilde{F}(s,t) = \frac{n+1}{t} \tilde{F}(s,n+1) + \frac{1}{t} \int_{n}^{t-1} g(s,t_1) \tilde{F}(s,t_1) dt_1 + \tilde{G}(s,t) - \frac{n+1}{t} \tilde{G}(s,n+1).$$

Az egyenlet jobb oldalán csak olyan $\tilde{F}(s,t)$ értékeket használunk, amelyeknél $n \leq t < n+1$. Ezért a bizonyítás $n$ szerinti indukcióval és kisebb számolással adódik. Azt kell még bizonyítani, hogy a tétel $2 \leq t < 3$ esetén igaz. Írjuk (36)-ot az előbbi egyenlet jobb oldalába. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\tilde{F}(s,t) = \frac{2}{t} \tilde{F}(s,2) + \frac{1}{t} \int_{1}^{t-1} g(s,t_1) \frac{2}{t_1} \tilde{F}(s,2) dt_1 + \tilde{G}(s,t) - \frac{2}{t} \tilde{G}(s,2) =$$

$$= T(t,s) + \frac{2}{t} \tilde{F}(s,2) + \int_{1}^{t-1} \frac{2\tilde{F}(s,2)}{t} \frac{g(s,t_1)}{t_1} dt_1.$$

$\square$

Tudjuk (35)-ből, hogy

$$\tilde{F}(s,2) = -\frac{1}{2} \int_{1}^{\infty} g(s,u) \tilde{F}(s,u) du + \tilde{G}(s,2).$$

Be szeretnénk helyettesíteni $\tilde{F}(s,u)$ helyébe $1 \leq u < 2$ esetén (36)-ot, $u \geq 2$ esetén pedig az előbb kapott tétel azonosságait. Ekkor viszont megjelennének olyan integrálok, amelyek nem feltétlenül értelmesek. Ezért $\tilde{F}(s,2)$-t a következő módon közelítjük. Rögzített $m \geq 2$ esetén tekintsük a következő problémát. Keressük azt az $F_m$ függvényt, ami kielégíti $2 \leq t < m$ esetén

$$\tilde{F}_m(s,t) = -\frac{1}{t} \int_{t-1}^{m} g(s,u) \tilde{F}_m(s,u) du + \tilde{G}(s,t), \tag{37}$$

$1 \leq t < 2$ esetén pedig az

$$\tilde{F}_m(s,t) = \frac{2}{t} \tilde{F}_m(s, \frac{1}{2}) \tag{38}$$

egyenleteket. $F_m$-re ugyanaz a tétel felírható, mint $F$-re.

**27. Tétel.** *$2 \le n \le t \le n+1 \le m$ esetén fennáll*

$$\tilde{F}_m(s,t) = T(s,t) + \sum_{k=1}^{n-2} \int_{k+1}^{t-1} \int_{k}^{t_1-1} \dots \int_{2}^{t_{k-1}-1} \frac{T(s,t_k)}{t} \prod_{i=1}^{k} \frac{g(s,t_i)}{t_i} dt_k dt_{k-1} \dots dt_1 +$$

$$+ \frac{2\tilde{F}_m(2,s)}{t} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k}^{t-1} \int_{k-1}^{t_1-1} \dots \int_{1}^{t_{k-1}-1} \frac{2\tilde{F}_m(2,s)}{t} \prod_{i=1}^{k} \frac{g(s,t_i)}{t_i} dt_k dt_{k-1} \dots dt_1$$

Íruk fel (37)-et $t=2$-vel, és helyettesítsük be az előbb kapott eredményt az egyenlet jobb oldalába. Ekkor átrendezéssel megkapjuk $F_m(s,2)$-t „explicit” alakban.

$$F_m(s,2) = \Bigg\{ -\frac{1}{2} \int_2^m g(s,t_0) T(s,t_0) dt_0 + \tilde{G}(s,2) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-3} \int_{k+2}^{m} \int_{k+1}^{t_0-1} \int_{k}^{t_1-1} \dots \int_{2}^{t_{k-1}-1} T(s,t_k) \prod_{i=0}^{k} \frac{g(s,t_i)}{t_i} dt_k dt_{k-1} \dots dt_1 dt_0 \Bigg\} /$$

$$/ \Bigg\{ 1 + \int_1^m \frac{g(s,t_0)}{t_0} dt_0 +$$

$$\sum_{k=1}^{m-2} \int_{k+1}^{m} \int_{k}^{t_0-1} \int_{k-1}^{t_1-1} \dots \int_{1}^{t_{k-1}-1} \prod_{i=0}^{k} \frac{g(s,t_i)}{t_i} dt_k dt_{k-1} \dots dt_1 dt_0 \Bigg\}.$$

Sajnos ennnél átláthatóbb képletet nem nagyon kaphatunk. Az eredeti problémához be kellene látni, hogy $F_m$-nek van inverze a Laplace-transzformációra nézve, és kellene az inverz abszolútértékére egy jó felső becslés. Ekkor ez a becslés határátmenettel igaz lenne $F$ inverzére is.

## 4.3. Numerikus eredmények

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, hogy a folytonos modell hogyan közelíti a valóságot. Ehhez egy numerikus módszert alkalmazunk. Az egyszerűség kedvéért itt is a $\hat{\varphi}(x,t)$ első változójában áttranszformált $\psi(x,t)$-t vizsgáljuk. Legyenek $k_1, k_2$ természetes számok, $x_i = i/k_1$ és $t_j = j/k_2$ osztópontok, ahol $-k_1 \le i$, $0 \le j \le k_2$ egészek. A következő egyszerű összefüggésből származik a módszer, ha $t_{j+1} \le \frac{1}{2}$, akkor

$$\psi(x_i, t_{j+1}) = \frac{t_{j+1}}{t_j} \psi(x_i, t_j) - t_{j+1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\psi\left(x_i + \log_2(1-u), \frac{u}{1-u}\right)}{u^2} du \approx$$

$$\approx \frac{t_{j+1}}{t_j} \psi(x_i, t_j) - t_{j+1} \cdot \psi\left(x_i + \log_2(1-t_{j+1}), \frac{t_{j+1}}{1-t_{j+1}}\right) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{1}{u^2} du.$$

Sajnos az utoljára megjelent $\psi$ argumentumában nem osztópontok vannak, tehát kerekíteni kell őket, mi a következőképpen tesszük:

$$\frac{t_{j+1}}{1-t_{j+1}} \approx t_{\left\lfloor \frac{j+1}{1-t_{j+1}} \right\rfloor}, \quad x_i + \log_2(1-t_{j+1}) \approx x_{\lfloor i+k_1 \log_2(1-t_{j+1}) \rfloor}.$$

Jelölje $y(i,j)$ a $\psi(x_i,t_j)$ numerikus közelítését. Tegyük fel, hogy $k_2$ páros. Először is meg kell adni az $y(i,j)=\psi_0(x_i,t_j)$ kezdeti értékeket ($i \leq 0$). Ekkor $i \geq 1$ és $1 \leq j \leq k_2/2$ esetén

$$y(i,j+1) = \frac{j+1}{j} y(i,j) - \frac{y\left(\lfloor i+k_1 \log_2(1-t_{j+1}) \rfloor, \left\lfloor \frac{j+1}{1-t_{j+1}} \right\rfloor\right)}{j}.$$

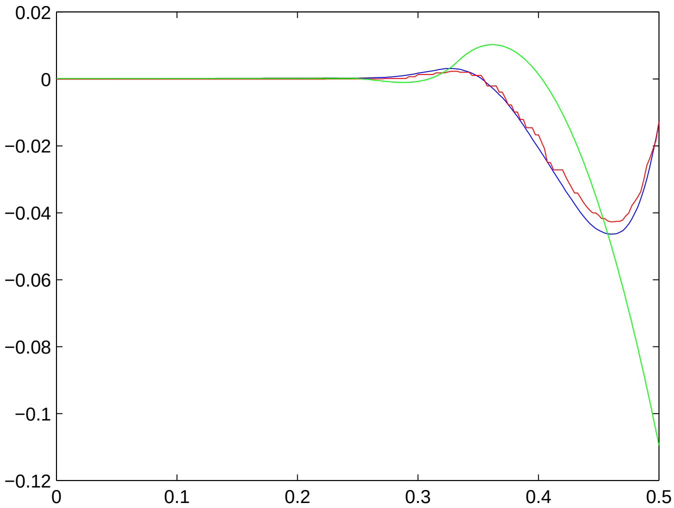
Ha pedig $j > k_2/2$, akkor

$$y(i,j+1) = 2t_j \cdot y(i,k_2/2).$$

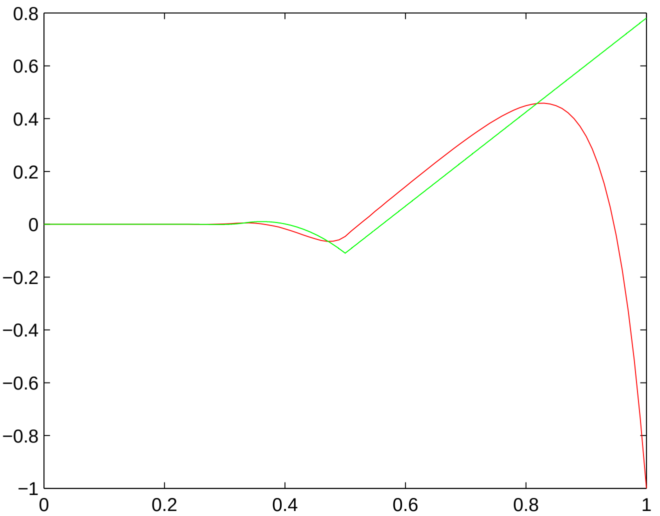
Minden numerikus futtatás kezdeti értékeinek a $\varphi$ értékeit adtuk meg. Mivel $\psi(x,t) = \hat{\varphi}(a^{2^x},t)$, ezért $a$ értékét is meg kellett adni. Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban annyit változtattunk a fenti algoritmuson, hogy $t_j \leq \log_a(2)$ esetén $y(i,j)$ értékét 0-ra állítottuk, hiszen a (11) egyenletben az integrál $t \leq \log_a(2)$ esetén 0. Ez azért kellett, mert ha $a$ nem olyan nagy - márpedig a futási idő miatt nem tudtunk túl nagy $a$ értékeket megadni -, akkor a $\log_a(2)$ érték viszonylag nagy, és ekkor a $t_j \leq \log_a(2)$ értékekre csak felesleges hibákat halmozna a módszer.

A 3. ábrán $0 < t \leq \frac{1}{2}$ között, $a = 10^5$ paraméter mellett pirossal ábrázoltuk $\varphi\left(a^{2^{x_1}}, t\right)$-t, zölddel az egyensúlyi megoldást, kékkel pedig a $\psi(x_1,t)$ numerikus közelítését az $y(1,j)$ ($j \leq k_2/2$) értékekkel. Látható, hogy $\psi$ jól közelíti $\varphi$-t, persze ez várható volt, hiszen a módszer az első változó szerint csak egyet lépett, és minden bemeneti értéke a valós érték. Érdekes jelenség látható az ábrán 0,45-nál, ugyanis itt visszakanyarodnak a görbék, miközben az egyensúlyi megoldás továbbra is lefele tart. Ez azért van, mert $t \geq \frac{1}{2}$ és tetszőleges rögzített első változó esetén a $\varphi$ függvény görbéje egy darabig lineárisan viselkedik, azután viszont hirtelen visszaesik $(-1)$-re.

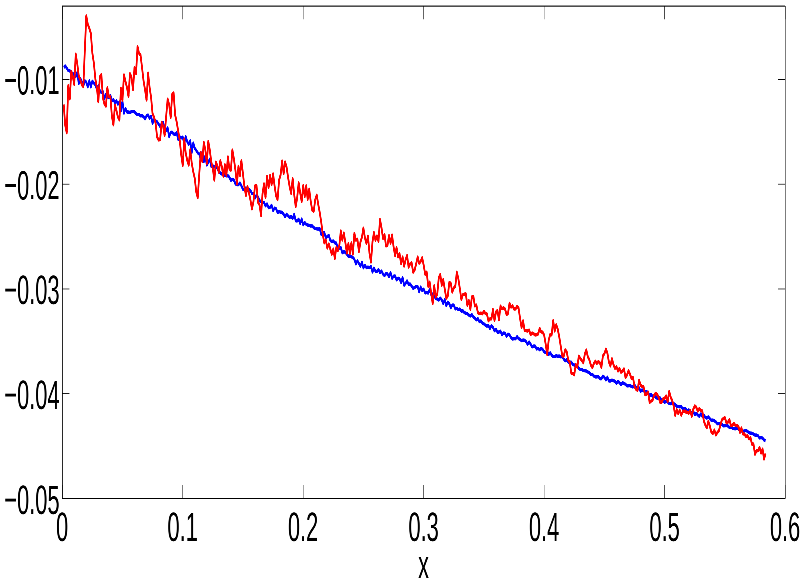
A 4. ábrán ez a jelenség látható $a = 10^7$ értékkel, mellette zölddel az egyensúlyi megoldás. Ha $a$ egyre nagyobb, akkor ez a zuhanás egyre kisebb intervallumon következik be, így a befolyása is egyre kisebb lesz a jövőbeni értékekre. Most nézzük meg, hogy $\psi(x,\frac{1}{2})$ hogyan közelíti $\varphi(a^{2^x},\frac{1}{2})$-et lokálisan. Az 5. ábrán $\varphi(a^{2^x},\frac{1}{2})$ látható pirossal, $\psi(x,\frac{1}{2})$ közelítése kékkel, $a=5\cdot10^4$ és $0 \leq x \leq \log_2(\frac{3}{2})$ ($a^{3/2} \approx 11\cdot10^6$). Látható, hogy a folytonos modellnek van egy simító hatása, egy egyenesnek tűnik, viszont szépen követi $\varphi$ főbb mozgását. A 6. ábrán $a$ értékét megnöveltük $10^6$-ra. Itt is elmondható az ami az előbb, ráadásul az is látszik, hogy $\varphi$ is kezd kisimulni. Ezek alapján kijelenthető, hogy a folytonos modellt érdemes tovább vizsgálni.



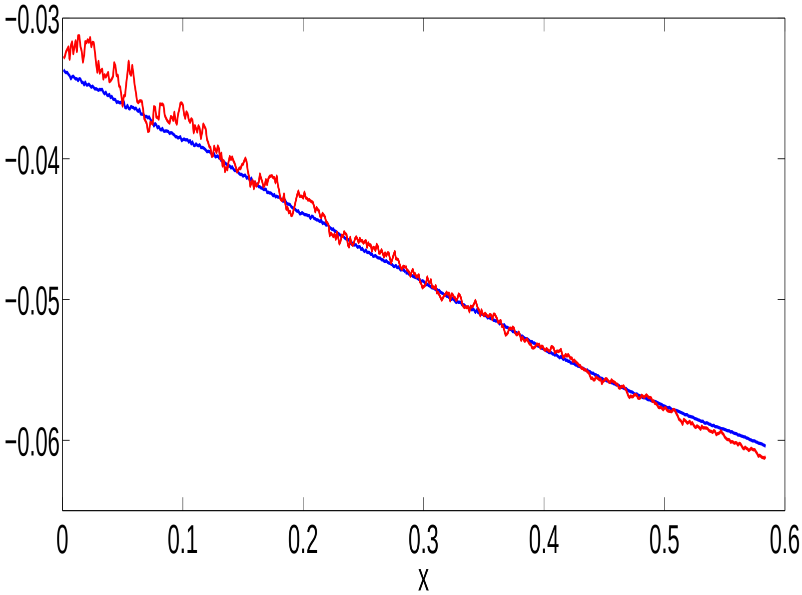

3. ábra. A $\varphi(10^{5\cdot 2^{x_1}}, t)$ függvény piros, $\psi(x_1, t)$ numerikus $y(1, j)$ $(j \leq k_2/2)$ közelítése kék, és az egyensúlyi megoldás zöld, $0 \leq t \leq 1/2$.




4. ábra. A $\varphi(10^7, t)$ függvény piros, az egyensúlyi megoldás zöld, $0 \leq t \leq 1$.




5. ábra. Az $a = 5 \cdot 10^4$ paraméter esetén $\varphi(a^{2^x}, 1/2)$ piros, $\psi(x, 1/2)$ numerikus $y(i, k_2/2)$ $(1 \leq i \leq \lfloor k_1 \cdot \log_2(3/2) \rfloor)$ közelítése kék, $0 < x \leq \log_2(3/2)$.




6. ábra. Az $a = 10^6$ paraméter esetén $\varphi(a^{2^x}, 1/2)$ piros, $\psi(x, 1/2)$ numerikus $y(i, k_2/2)$ $(1 \leq i \leq \lfloor k_1 \cdot \log_2(3/2) \rfloor)$ közelítése kék, $0 < x \leq \log_2(3/2)$.

# 5. Összegzés

Az alapvető cél az volt, hogy a prímszámok eloszlását jobban megértsük, és e tekintetben úgy gondoljuk, hogy előrelépés történt. Az alapegyenlet a $\varphi(x, \frac{1}{2})$ prímszámokkal való közvetlen kapcsolatának köszönhetően - a harmadik szakaszhoz hasonlóan - számos tétel kiindulópontja lehet. Láttuk a numerikus vizsgálat során is, hogy a folytonos modell megőrzi a $\varphi$ függvény legfontosabb tulajdonságait. Ez pedig sokkal áttekinthetőbb, pusztán az analízis eszközeivel vizsgálható. Előnyös még, hogy a probléma vizuálisan könnyen elképzelhető - egy $[0, \infty] \times [0{,}1]$ halmazon értelmezett függvénynek a különböző tulajdonságait kell meghatározni -, másrészt célunk is világos: a $\phi(x, t)$ lehetőleg minél gyorsabban tartson a $\varphi^*(t)$ függvényhez tetszőleges kezdeti feltétel esetén. Ez a hozzáállás nagyon hasonlít az integrál- és differenciálegyenletek témaköréhez, így az ottani tudást kamatoztattuk. Az itt nyert állítások ugyan nem vihetők át fenntartás nélkül $\varphi(x, t)$-re, viszont a kapcsolat nyilvánvaló. Van lehetőség további folytonos modelleket felírni, amik bár egyre bonyolultabbak, de egyre többet mondanak a valóságról. A prímszámok és az integrálegyenletek kapcsolata nagyon érdekes témakör. A további kutatási lehetőségek számosak, ugyanakkor az ezirányba tett első lépésünk optimizmusra ad okot.

# Hivatkozások


[1] Susan H. Marshall, Donald R. Smith. (2013) Feedback, Control, and the Distribution of the Prime Numbers. Mathematics Magazine, vol. 86, 2013, pp. 189-203.

[2] Buchstab, A. A. (1937). Asymptotic estimates of a general number-theoretic function. Mat. Sb, 44, 1239-1246.

[3] Montgomery, H. L., Vaughan, R. C. (2006). Multiplicative number theory I: Classical theory (Vol. 97). Cambridge University Press.

[4] Freud, R., Gyarmati, E. (2006). Számelmélet. Nemzeti Tankönyvkiadó.

[5] Tenenbaum, G. (2015). Introduction to analytic and probabilistic number theory (Vol. 163). American Mathematical Soc..

[6] Richard Bellman, Kenneth L. Cooke. (1963). Mathematics in Science and Engineering, Volume 6: Differential- Difference Equations. Academic Press, New York and London. 462 pp. 114s. 6d.

[7] Joel L. Schiff. (1999) The Laplace transform Theory and applications. Springer, New York.