

Aktuáriusi modellek a betegségbiztosításban

Diplomamunka

Írta: Faluközy Tamás

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Arató Miklós, egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2005

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Az általános PHI-modell	3
2.1. Kezdeti lépések	3
2.2. Díjelvek	5
2.3. A kockázat szórásnégyzete	5
2.4. A valószínűségi modell	6
2.5. A modell lehetséges továbbfejlesztései	8
2.6. A kockázat várható értéke különböző szerződési feltételek esetén	10
2.7. A díjszámítás grafikus illusztrációja	12
2.8. A kockázat szórásnégyzete különböző szerződési feltételek esetén	14
3. Konkrét díjkalkulációs módszerek PHI-termékekre	18
3.1. A norvég módszer	18
3.2. A "Manchester-Unity" módszer	20
3.3. A svéd módszer	23
4. Díjszámítás hazai adatok alapján	25
4.1. Az MU-képlet paramétereinek egyszerű becslése	25
4.2. A számításokat végző programok	28
4.3. Credibility-elmélet	28
4.4. A credibility-elmélet alkalmazhatósága az adatainkra	30
4.5. Díjtáblázatok különböző input paraméterek esetén	35
5. Összefoglalás, továbblépési lehetőségek, köszönetnyilvánítás	43
5.1. Összefoglalás	43
5.2. A továbblépés lehetőségei	44
5.3. Köszönetnyilvánítás	44
Irodalomjegyzék	45

Ábrák jegyzéke

2.1. Az $\{S(x+t), t \geq 0\}$ folyamat állapotai és a lehetséges átmenetek	3
2.2. Egy lehetséges élettörténet	12
2.3. Az összes lehetséges élettörténet különböző Γ -k esetén	13
3.1. "Lehetetlen élettörténetek"	20
3.2. y évesen beteg ügyfél lehetséges élettörténetei, amennyiben a betegség eddigi tartama r és $(r+s)$ közé esik	22
4.1. Átlagos ápolási tartam (ts_y) a különböző portfoliókra a kor függvényében	27
4.2. Ápolási esetek száma a különböző portfoliókra a kor függvényében	31
4.3. A ts_y becslések összehasonlítása a különböző portfoliókra: 2002, férfiak	32
4.4. A ts_y becslések összehasonlítása a különböző portfoliókra: 2002, nők	33
4.5. A ts_y becslések összehasonlítása a különböző portfoliókra: 1997, férfiak	34
4.6. A ts_y becslések összehasonlítása a különböző portfoliókra: 1997, nők	35
4.7. A portfoliók hatása a díjra – 40 éves belépési kor, változó tartam	36
4.8. A portfoliók hatása a díjra – 1 éves tartam, változó belépési kor	37
4.9. A díjelvek hatása a díjra – 40 éves belépési kor, változó tartam	38
4.10. A díjelvek hatása a díjra – 1 éves tartam, változó belépési kor	38
4.11. A ts_y becslések hatása a díjra – 40 éves belépési kor, változó tartam	39
4.12. A ts_y becslések hatása a díjra – 1 éves tartam, változó belépési kor	40

Táblázatok jegyzéke

4.1. Ápolás átlagos tartama napokban	33
4.2. Díjtáblázatok	42

1. fejezet

Bevezetés

A jelentős biztosítási hagyományokkal rendelkező nyugati országokban a biztosítók termékkínálatában fontos szerepet játszanak a különböző betegségbiztosítási konstrukciók, melyek a biztosítási termékek meglehetősen különös részét képezik. Előfordulnak ugyanis önálló szerződésként, de gyakran kötődnek életbiztosítási termékekhez is, mint azok kiegészítő biztosításai. A mai magyar piacon viszont meglehetősen kevés ilyen termék van jelen (s ezek között is előfordul, hogy csupán a fent említett módon, életbiztosítás mellett köthetők). Azonban a társadalmi jólét növekedésével az ezekre való igény (ahogy más biztosítási termékekre is) várhatóan emelkedni fog, ezért hasznos lehet különböző betegségbiztosítási termékekre vonatkozó modellek felépítése. Dolgozatom az ún. PHI-biztosításokkal (angolul: Permanent Health Insurance) foglalkozik, melyek az ügyfél hosszútávú betegsége (kórházi ápolása) esetén biztosítanak számára folyamatos kifizetést bizonyos feltételek mellett.

A bevezetés után a 2. fejezetben egy általános modellt ismertetek, kiegészítve saját eredményeimmel. A szakirodalomban fellelhető cikkekben és a gyakorlatban a betegségbiztosítási termékek díjának megállapítására az életbiztosításoknál széles körben használt nettó várható érték elvet alkalmazzák. Dolgozatom újdonsága a nem-életbiztosítási ágban használt egyéb díjelvek (szórás és szórásnégyzet elv) szerinti árazások ismertetése az általános modellben – teljesen önálló eredményeim ezzel kapcsolatban a 2.3. és 2.8. fejezetekben levezetett formulák.

Az általános modell paramétereire a nemzetközi irodalomban több becslési eljárás található. Ezekhez az eljárásokhoz természetesen alapvető fontosságú a megfelelő adatállomány, mely a nyugati országokban a régóta működő biztosítási piac révén adott – Magyarországon viszont betegségbiztosítási termékek hiányában nincs ezekről készített statisztika. Dolgozatom 3. fejezetében ezért a gyakorlatban is használt egyéb módszereket ismertetek, melyek levezethetők az általános modellből, és közülük az egyik, az ún. Manchester-Unity modell olyan input paramétereket követel meg, melyek hazai adatokból

is becsülhetők. Ezen módszerek szintén csupán a nettó várható érték elvvel foglalkoznak, ezért bemutatom ezek általam készített megfelelőit is, melyek az egyéb díjelvekhez szükséges számításokra vonatkoznak.

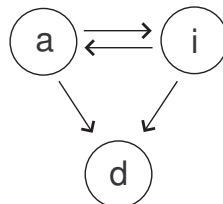
A 4., utolsó fejezetben a hazai adatokkal való díjmeghatározással foglalkozom. A Manchester-Unity módszer input adatainak lehetséges meghatározásai és az általam készített programok rövid leírása után a különböző inputok és módszerek mellett számolt díjtáblázatokat mutatom be és hasonlítom össze.

2. fejezet

Az általános PHI-modell

2.1. Kezdeti lépések

Tekintsünk egy, a címben említett szerződést. Ez az ügyfél betegsége (kórházi ápolása) esetén folyamatos kifizetést biztosít számára – ezt a kifizetést egy egységnek tekintjük, hiszen a biztosítási összegben szereplő multiplikatív konstans a díjban is hasonlóan jelenik meg (ez némi pontosításra szorul, melyet később teszünk meg). Az alább ismertetett modellt és lehetséges gyakorlati alkalmazásait vizsgálja [12] – a dolgozat egyébként alapvetően erre a cikkre épül.



2.1. ábra. Az $\{S(x+t), t \geq 0\}$ folyamat állapotai és a lehetséges átmenetek

A biztosított korát a szerződéskötéskor jelölje x . Egészségi állapota háromféle lehet: egészséges (a – active), beteg (i – inactive/ill) vagy halott (d – dead). $\forall t \geq 0$ -ra jelöljük az $(x+t)$ -beli állapotot $S(x+t)$ -vel. A lehetséges átmeneteket szemlélteti a 2.1. ábra. Az így definiált folyamatunk természetesen nem irreducibilis, hiszen a d állapot nyelő tulajdonságú, onnan nem juthatunk sehova. Feltételezzük, hogy $S(x) = a$, azaz ügyfelünk a biztosítás megkötésekor egészséges volt, amint ennek a valóságban is így kell lennie, hiszen különben egy biztosító se kötne vele szerződést. Jelöljük $\Phi(x, t)$ -vel azt a valószínűséget, hogy a biztosított t idő múlva jogosult a kifizetésre, azaz beteg. Figyelembe véve a kezdeti feltételünket tehát $\Phi(x, t) := P(S(x+t) = i | S(x) = a)$. $\xi_x \geq 0$ valószínűségi változóval jelölve a jövőbeli kifizetést, az életbiztosításokban általánosan alkalmazott (nettó) várható

érték elv alapján a biztosítás díja ennek várható értéke. (Itt valóban igaz, hogy amennyivel szorzódik a biztosítási szolgáltatás, annyival szorzódik a díj is.)

Mielőtt ezt felírnánk, vezessünk be további jelöléseket a biztosítási szerződés egyes paramétereire, melyek befolyásolják a kifizetést és így az árat. A szerződés feltételeit a $\Gamma = [c, n, f, m, r]$ vektorral írjuk le, ahol:

– kifizetés az $(x + t)$ időpontban csak $t \in [c, n]$ esetén lehetséges, azaz c a várakozási időszak (a biztosítás kezdetétől számítva), n pedig a biztosítás lejáratára;

– f a késleltetési időszak, a betegség (ápolás) kezdete után ennyivel kezdődik meg a kifizetés;

– m azon maximális időtartam, ameddig a biztosító vállalja a kifizetéseket (a biztosítás kezdetétől számolva);

– r a megállítási időpont, melyre az igaz, hogy a biztosító csak $(x+r)$ -ig fizet, tipikusan $(x+r)$ a nyugdíjkorhatár.

Ezek után a ξ_x valószínűségi változókat és a Φ valószínűségeket indexeljük Γ -val is, azaz az utóbbi esetben:

$$\Phi_{\Gamma}(x, t) := P_{\Gamma}(S(x+t) = i | S(x) = a). \quad (2.1)$$

Ezen a jelölésen annak a valószínűségét értjük, hogy az x korában egészséges ügyfél $(x+t)$ -ben jogosult a kifizetésre, azaz beteg és a fizetés további Γ feltételei is fennállnak. Annak az esetnek, amivel fentebb foglalkoztunk, azaz az extra feltételek nélküli szerződésnek a $\Gamma = [0, \infty, 0, \infty, \infty]$ vektor felel meg.

A biztosítás egyszeri díja tehát Γ szerződési feltételek esetén (a szokásos aktuáriusi jelöléssel, felhasználva hogy a nemnegativitás miatt az integrálás és a várható érték képzése felcserélhető):

$$\bar{a}_{x,\Gamma}^{ai} = E(\xi_{x,\Gamma}) = E\left(\int_0^{\infty} \chi_{\Gamma, \{S(x+t)=i | S(x)=a\}} v^t dt\right) = \int_0^{\infty} \Phi_{\Gamma}(x, t) v^t dt. \quad (2.2)$$

Itt v a diszkontálási tényező, azaz ha i a technikai kamatláb (az a hozam, melyről a biztosító azt feltételezi, hogy a jövőben mindenképpen el tudja érni), akkor $v = 1/(1+i)$. Alapvetően tehát ezekre a $\Phi_{\Gamma}(x, t)$ valószínűségekre van szükségünk, hogy díjat számolhassunk különböző szerződési feltételek esetén. Mielőtt azonban ennek érdekében mélyebben megvizsgálánánk a felállított modellt, nézzük meg, hogyan írhatók fel más módon számolt díjak. Ehhez ejtsünk pár szót a nem-élet ágban alkalmazott díjelvekről.

2.2. Díjelvek

Jelöljük \mathcal{H} -val a nemnegatív félegyenesre koncentrált Q eloszlások halmazát. Díjelvnek nevezzük azt a $\Pi : \mathcal{H}_{\Pi} \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}_0^+} = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ függvényt, mely egy ilyen Q -hoz rendeli az annak megfelelő $\Pi(Q)$ díjat. Ha $\xi \geq 0$ valószínűségi változóval jelöljük a kárkifizéseket, ahogy ezt fentebb tettük, akkor az ennek megfelelő díj az, amit az ő eloszlásából számolunk, s ezt $\Pi(\xi)$ -vel jelöljük.

Π várható érték elv, ha $\mathcal{H}_{\Pi} = \mathcal{H}$ és $\Pi(\xi) = (1 + \lambda)E(\xi)$, ahol $\lambda \geq 0$ rögzített konstans. Speciálisan $\lambda = 0$ esetén nettó várható érték elvről beszélünk. Az életbiztosítások körében ezt alkalmazzák leggyakrabban, s fentebb mi is ezzel számoltunk. A nem-élet ágban azonban rengeteg más díjelv ismert és alkalmazott. Ezek közül a legnépszerűbbek a szórás és a szórásnégyzet elvek, ahol a biztosítás díja $\Pi(\xi) = E(\xi) + \alpha D(\xi)$, illetve $\Pi(\xi) = E(\xi) + \beta D^2(\xi)$, ahol α és β rögzített nemnegatív konstansok. Ezen elvek lényege, hogy a nagy bizonytalanságú kockázatokat bünteti a biztosító magasabb díjjal, méghezvázá úgy, hogy a díjat egy biztonsági pótlékkal terheli meg, mely a szórással vagy a szórásnégyzettel arányos.

Világos, hogy ilyen díjelvekkel való számoláshoz szükségünk van a kockázat várható értékére, melyet korábban a (2.2) képletben felírtunk, továbbá a kockázat szórásnégyzetére – ezt számoljuk ki a következő fejezetben. (Természetesen a várható értékből a biztosítási összegben megjelenő szorzótényező egyszerűen, a szórásból abszolút értékben, a szórásnégyzetből pedig négyzetesen emelhető ki.)

2.3. A kockázat szórásnégyzete

Térjünk vissza a betegségbiztosítások mezejére, és próbáljuk meg felírni a $\xi_{x,\Gamma}$ valószínűségi változók szórásnégyzetét.

$$D^2(\xi_{x,\Gamma}) = E \left(\int_0^{\infty} \chi_{\Gamma, \{S(x+t)=i | S(x)=a\}} v^t dt \int_0^{\infty} \chi_{\Gamma, \{S(x+s)=i | S(x)=a\}} v^s ds \right) - \quad (2.3) \\ - E^2 \left(\int_0^{\infty} \chi_{\Gamma, \{S(x+t)=i | S(x)=a\}} v^t dt \right).$$

Az integrálok és a várható értékek most is felcserélhetők. Így a második tag a korábban látottak alapján $\left(\int_0^{\infty} \Phi_{\Gamma}(x, t) v^t dt \right)^2$, az első tagban pedig a cserék után egy kettős integrálon belül a $P_{\Gamma}(S(x+t) = i, S(x+s) = i | S(x) = a)$ valószínűség fog szerepelni. Itt az integrálási tartományt (az I. síknegyed) két részre bontjuk a 45 fokos egyenes mentén. A két integrál ekkor ugyanannyi lesz, hiszen csupán a változók sorrendjében különböznek,

így elegendő csak az egyikkel foglalkozni:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_t^\infty P_\Gamma(S(x+t) = i, S(x+s) = i | S(x) = a) v^{t+s} ds dt &= \\ &= \int_0^\infty \int_t^\infty P_\Gamma(S(x+s) = i | S(x+t) = i, S(x) = a) \cdot \\ &\quad \cdot P_\Gamma(S(x+t) = i | S(x) = a) v^{t+s} ds dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\phi_\Gamma(x, t, s) := P_\Gamma(S(x+s) = i | S(x+t) = i, S(x) = a). \quad (2.5)$$

Most is azon valószínűséget értjük ezen, hogy az ügyfél $(x+s)$ -ben jogosult a kifizetésre, azaz beteg és a fizetés további Γ feltételei is fennállnak. (2.4) ezek után a következőképpen alakul:

$$\int_0^\infty \Phi_\Gamma(x, t) v^t \left(\int_t^\infty \phi_\Gamma(x, t, s) v^s ds \right) dt. \quad (2.6)$$

A szórásnégyzetre tehát az alábbi képletet kapjuk:

$$\begin{aligned} D^2(\xi_{x,\Gamma}) &= 2 \int_0^\infty \Phi_\Gamma(x, t) v^t \left(\int_t^\infty \phi_\Gamma(x, t, s) v^s ds \right) dt - \\ &\quad - \left(\int_0^\infty \Phi_\Gamma(x, t) v^t dt \right)^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.4. A valószínűségi modell

Térjünk át most az $\{S(x+t), t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamat vizsgálatára. Feltesszük, hogy folytonos idejű, inhomogén Markov-lánccal van dolgunk (az időt években mérjük), tehát az, hogy egy adott időpillanatban hová kerülünk egy állapotból, csak az aktuális helyzettől függ. Jelöljük az átmenet-valószínűségeket a következőképpen:

$${}_t p_y^{gh} := P(S(y+t) = h | S(y) = g), \quad h \in \{a, i, d\}, \quad g \in \{a, i\}. \quad (2.8)$$

Szükségünk lesz még azon események valószínűségére, hogy a biztosított a kérdéses időszak alatt végig egy bizonyos állapotban volt:

$${}_t p_y^{\overline{hh}} := P(S(y+u) = h \quad \forall u \in [0, t] | S(y) = h), \quad h \in \{a, i\}. \quad (2.9)$$

Definiáljuk továbbá a következő átmenet-intenzitásokat:

$$\mu^{gh}(y) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{{}_t p_y^{gh}}{t}, \quad h \in \{a, i, d\}, \quad g \in \{a, i\}, \quad h \neq g. \quad (2.10)$$

Tegyük fel, hogy ezek a limeszek léteznek $\forall y$ -ra, továbbá, hogy ezek y integrálható függvényei. Ezek az intenzitások tulajdonképpen az adott időpillanatban lehetséges átmenetek valószínűségeit írják le. Az átmenet-valószínűségek – Markov-folyamatról lévén szó – kielégítik a Chapman-Kolmogorov egyenlőséget:

$${}_tP_y^{gh} = \sum_{k \in \{a, i\}} \tau P_y^{gk} \cdot {}_{t-\tau}P_{y+\tau}^{kh}, \quad h \in \{a, i, d\}, \quad g \in \{a, i\}, \quad \tau \in [0, t]. \quad (2.11)$$

Az "állapotban maradás" valószínűségeire ez persze a következő egyszerű alakot ölti:

$${}_tP_y^{\overline{hh}} = \tau P_y^{\overline{hh}} \cdot {}_{t-\tau}P_{y+\tau}^{\overline{hh}}, \quad h \in \{a, i\}, \quad \tau \in [0, t]. \quad (2.12)$$

Írjunk fel differenciálegyenleteket az imént definiált átmenet-valószínűségekre! A (2.11) Chapman-Kolmogorov egyenlőség szerint

$${}_{t+\Delta t}P_y^{ai} = {}_tP_y^{ai} \cdot \Delta t P_{y+t}^{ii} + {}_tP_y^{aa} \cdot \Delta t P_{y+t}^{ai}. \quad (2.13)$$

Mindkét oldalból levonva ${}_tP_y^{ai}$ -t, majd Δt -vel leosztva kapjuk:

$$\frac{{}_{t+\Delta t}P_y^{ai} - {}_tP_y^{ai}}{\Delta t} = {}_tP_y^{ai} \frac{\Delta t P_{y+t}^{ii} - 1}{\Delta t} + {}_tP_y^{aa} \frac{\Delta t P_{y+t}^{ai}}{\Delta t}. \quad (2.14)$$

Felhasználva, hogy $\Delta t P_{y+t}^{ia} + \Delta t P_{y+t}^{ii} + \Delta t P_{y+t}^{id} = 1$, majd Δt -vel 0-hoz tartva:

$$\frac{d}{dt} ({}_tP_y^{ai}) = -{}_tP_y^{ai} (\mu^{ia}(y+t) + \mu^{id}(y+t)) + {}_tP_y^{aa} \mu^{ai}(y+t). \quad (2.15)$$

Ugyanezzel az egyszerű módszerrel kaphatók az alábbi differenciálegyenletek:

$$\frac{d}{dt} ({}_tP_y^{aa}) = -{}_tP_y^{aa} (\mu^{ai}(y+t) + \mu^{ad}(y+t)) + {}_tP_y^{ai} \mu^{ia}(y+t), \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} ({}_tP_y^{ad}) = {}_tP_y^{aa} \mu^{ad}(y+t) + {}_tP_y^{ai} \mu^{id}(y+t), \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt} ({}_tP_y^{ii}) = -{}_tP_y^{ii} (\mu^{ia}(y+t) + \mu^{id}(y+t)) + {}_tP_y^{ia} \mu^{ai}(y+t), \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dt} ({}_tP_y^{ia}) = -{}_tP_y^{ia} (\mu^{ai}(y+t) + \mu^{ad}(y+t)) + {}_tP_y^{ii} \mu^{ia}(y+t), \quad (2.19)$$

$$\frac{d}{dt} ({}_tP_y^{id}) = {}_tP_y^{ii} \mu^{id}(y+t) + {}_tP_y^{ia} \mu^{ad}(y+t), \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dt} ({}_tP_y^{\overline{aa}}) = -{}_tP_y^{\overline{aa}} (\mu^{ai}(y+t) + \mu^{ad}(y+t)), \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt} ({}_tP_y^{\overline{ii}}) = -{}_tP_y^{\overline{ii}} (\mu^{ia}(y+t) + \mu^{id}(y+t)). \quad (2.22)$$

A két utolsó egyenlet, (2.21) és (2.22) megoldása triviális:

$${}_tP_y^{\overline{aa}} = \exp \left(- \int_0^t (\mu^{ai}(y+u) + \mu^{ad}(y+u)) du \right), \quad (2.23)$$

$${}_tP_y^{\overline{ii}} = \exp \left(- \int_0^t (\mu^{ia}(y+u) + \mu^{id}(y+u)) du \right). \quad (2.24)$$

A többi egyenlet kezelésére [18] javaslata a következő. (2.15) és (2.16) szimultán differenciálegyenletként megoldható. Ezután deriválással másodrendű differenciálegyenletek nyerhetők ${}_t p_y^{aa}$ -ra és ${}_t p_y^{ai}$ -re, melyek numerikus módszerekkel megoldhatók, s ezek segítségével (2.17) szintén. A fenti eljárás végigvihető a (2.18), (2.19) és (2.20) egyenletekre is. Tehát az átmenet-intenzitások ismeretében az átmenet-valószínűségek meghatározhatók – mint később látni fogjuk, s már volt is szó róla, a díjszámításhoz pedig csak ezek kellenek.

Ahogy a bevezetőben említettük, a nemzetközi szakirodalomban az átmenet-intenzitások meghatározására több kidolgozott módszer van (lásd például [13]), melyek igen erősen támaszkodnak a külföldön rendelkezésre álló részletes és sok évre visszamenő statisztikákra. Mivel Magyarországon ilyenek nem állnak rendelkezésre, a dolgozat további részében az átmenet-intenzitásokkal nem nagyon foglalkozunk, hanem rögtön az átmenet-valószínűségekre próbálunk majd becslést adni.

A következőkben fontos szerepe lesz még a következő valószínűségeknak:

$${}_t p_y^{ai}(\tau) := P(S(y+u) = i \forall u \in [t-\tau, t] | S(y) = a), \quad 0 \leq \tau \leq t. \quad (2.25)$$

Ez tehát annak a valószínűsége, hogy az y korában egészséges biztosított $(y+t)$ idősen legalább τ ideje beteg. A későbbiekben szükség lesz arra, hogy ezt a definíciót a $\tau > t$, illetve $\tau < 0$ értékekre is kiterjesszük, legyen itt az érték 0.

A következő formula precízen is igazolható, de intuitív megfontolások alapján is világos:

$${}_t p_y^{ai}(\tau) = \int_0^{t-\tau} {}_u p_y^{aa} \mu^{ai}(y+u) {}_{t-u} p_{y+u}^{\bar{ii}} du. \quad (2.26)$$

Valóban, gyakorlatilag a teljes valószínűség tételét alkalmazzuk, aszerint felbontva az eseményteret, hogy a biztosított mikor került utoljára az i állapotba. Természetesen ${}_t p_y^{ai}(0) = {}_t p_y^{ai}$, így erre a valószínűsége a fenti, (2.26) formulában 0-tól t -ig kell integrálni.

2.5. A modell lehetséges továbbfejlesztései

Az eddig tárgyalt modell Markov-tulajdonsága igényel némi megfontolást. A valóságban annak valószínűsége, hogy valaki egy későbbi időpontban milyen egészségi állapotban lesz, nyilván nem csak jelenlegi állapotától függ, hiszen ha korábban sokat betegeskedett, akkor ez a valószínűség nagyobb. Miért foglalkozunk mi mégis a kevésbé reális Markov-láncos esettel? Elsősorban azért, mert a számolások ebben az esetben alakulnak kedvezően (a (2.11) Chapman-Kolmogorov egyenlőség ekkor igaz, s ez kellett a differenciálegyenletek felírásához, továbbá az alternatív díjelvek ismertetésekor később szükségünk lesz erre a tulajdonságra), s ezáltal a modell is szemléletesebbé válik.

Néhány szó erejéig azonban érdemes kitérni a modell lehetséges továbbfejlesztéseire. Realisztikusabb, azonban jóval bonyolultabb modellek építhetők a következő feltételezések bármelyikével:

(a) az átmenet-valószínűségek függnnek a kezdeti kortól, x -től;

(b) a valószínűségek függnnek attól, hogy mennyi időt töltött az illető az adott állapotban, mióta legutóbb oda került;

(c) a valószínűségek függnnek a korábban az a , illetve az i állapotban töltött összes időtől;

(d) egy helyett több betegségi állapotot különböztetünk meg, ezek között vagy lehet átmenet, vagy nem.

A (d) eset természetesen kombinálható a többi hárommal (lásd például [2]: (b)-(d)), sőt a többi is egymással.

A Markov-tulajdonság az utolsó esetet kivéve elveszik (persze ha azt kombináljuk, akkor ott is), azonban a (b) esetben belátható, hogy $\{S(x+t), t \geq 0\}$ szemi-Markov struktúrájú folyamat lesz. Pár szó erejéig vizsgáljuk meg ezt az esetet. Jelöljük $Z(y)$ -nal azt a valószínűségi változót, mely azt írja le, hogy az y korú biztosított mennyi időt töltött az aktuális állapotban, mióta legutóbb oda került, formálisan:

$$Z(y) := \max \{w : (w \leq y) \wedge (S(y-\tau) = S(y) \forall \tau \in [0, w])\}. \quad (2.27)$$

Tegyük fel, hogy a (b) pontban leírt feltétel csak az i állapotra vonatkozik, azaz csak a beteg állapotban lényeges a kikerülés szempontjából, hogy mennyi ideje beteg az illető. Ennek megfelelően a ${}_tP_y^i$ és a ${}_t\bar{P}_y^{\bar{i}}$ valószínűségek definícióját a következőképpen kell módosítanunk:

$${}_tP_{y,z}^{ih} := P(S(y+t) = h | (S(y) = i) \wedge (Z(y) = z)), \quad h \in \{a, i, d\}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} {}_t\bar{P}_{y,z}^{\bar{i}} &:= P(S(y+u) = i \forall u \in [0, t] | (S(y) = i) \wedge (Z(y) = z)) = \\ &= P((S(y+u) = i) \wedge (Z(y) = z+t) | (S(y) = i) \wedge (Z(y) = z)). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Emellett természetesen a $\mu^{ih}(y)$ ($h \in \{a, i, d\}$) intenzitások helyét az értelemszerűen adódó $\mu^{ih}(y, z)$ intenzitások veszik át. Vegyük észre, hogy a fenti (2.28) valószínűségek abban különböznek (2.25)-től (és a később definiált (2.52)-től), hogy utóbbi(ak)ban τ a minimális értéke az adott állapotban eltöltött időnek, előbbiben pedig a pontos értéke.

Belátható, hogy a (2.15)-(2.22) differenciálegyenlet-rendszer helyett itt egy sokkal bonyolultabb differenciál- és integro-differenciálegyenletekből álló rendszert kapunk. Nem minden egyenlet változik meg jelentősen, például (2.22) megfelelője:

$$\frac{d}{dt} \left({}_t\bar{P}_{y,z}^{\bar{i}} \right) = -{}_t\bar{P}_{y,z}^{\bar{i}} \left(\mu^{ia}(y+t, z+t) + \mu^{id}(y+t, z+t) \right), \quad (2.30)$$

aminek megoldása itt is triviális:

$${}_tP_{y,z}^{\bar{ii}} = \exp \left(- \int_0^t (\mu^{ia}(y+u, z+u) + \mu^{id}(y+u, z+u)) du \right). \quad (2.31)$$

Viszont például (2.16) megfelelőjében a jobb oldal második tagja egyszerű szorzat helyett egy integrál:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ({}_tP_y^{aa}) &= -{}_tP_y^{aa} (\mu^{ai}(y+t) + \mu^{ad}(y+t)) + \\ &+ \int_0^t {}_{t-z}P_y^{aa} \mu^{ai}(y+t-z) {}_zP_{y+t-z,0}^{\bar{ii}} \mu^{ia}(y+t,z) dz. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.6. A kockázat várható értéke különböző szerződési feltételek esetén

Térjünk most vissza a 2.1. fejezetben definiált $\Phi_\Gamma(x, t)$ valószínűségekhez, amiknek segítségével felírtuk a biztosítás díjának meghatározásához szükséges (2.2) képletet a kockázat várható értékére. $\Phi_\Gamma(x, t)$ annak a valószínűsége, hogy az x korában egészséges biztosított $(x+t)$ idősen jogosult a szolgáltatásra, azaz beteg és a szerződés további Γ feltételei is fennállnak.

A $\Gamma = [0, \infty, 0, \infty, \infty]$ feltételvektor felel meg annak az esetnek, amikor egyéb kikötések nincsenek. Ebben az esetben

$$\Phi_{[0, \infty, 0, \infty, \infty]}(x, t) = {}_tP_x^{ai}, \quad (2.33)$$

így a kockázat várható értéke (2.2) alapján:

$$E(\xi_{x,\Gamma}) = \int_0^\infty {}_tP_x^{ai} v^t dt. \quad (2.34)$$

A nettó várható érték elv alapján ez egyben a biztosítás nettó egyszeri díja is, melyet \bar{a}_x^{ai} -vel jelölünk, alkalmazkodva az életbiztosításokban szokásos aktuáriusi jelölésekhez.

Vizsgáljuk most meg, hogy hogyan néznek ki a $\Phi_\Gamma(x, t)$ értékek más Γ -k esetén!

$\Gamma = [c, \infty, 0, \infty, \infty]$ azt jelenti, hogy csak akkor fizetünk, ha a megbetegedés $(x+c)$ után következett be. Így a szolgáltatás valószínűsége 0, ha $t \leq c$, ha pedig $t > c$, akkor az eredeti ${}_tP_x^{ai}$ valószínűség csökkentendő azon esemény valószínűségével, hogy a megbetegedés $(x+c)$ előtt történt, másként fogalmazva azzal, hogy a biztosított már legalább $(t-c)$ ideje beteg:

$$\Phi_{[c, \infty, 0, \infty, \infty]}(x, t) = \begin{cases} 0 & (t \leq c) \\ {}_tP_x^{ai} - {}_tP_x^{ai}(t-c) & (t > c). \end{cases} \quad (2.35)$$

$\Gamma = [0, \infty, f, \infty, \infty]$ esetben csak akkor fizet a biztosító, ha a betegség legalább f ideje tart, így

$$\Phi_{[0, \infty, f, \infty, \infty]}(x, t) = \begin{cases} 0 & (t \leq f) \\ {}_t p_x^{ai}(f) & (t > f). \end{cases} \quad (2.36)$$

$\Gamma = [0, n, 0, \infty, \infty]$ esetén a biztosító akkor fizet, ha a betegség $(x+n)$ előtt kezdődött, $t \leq n$ -re tehát az eredeti valószínűséget kapjuk, $t > n$ -re pedig csak akkor történik kifizetés, ha a betegség már legalább $(t-n)$ ideje tart:

$$\Phi_{[0, n, 0, \infty, \infty]}(x, t) = \begin{cases} {}_t p_x^{ai} & (t \leq n) \\ {}_t p_x^{ai}(t-n) & (t > n). \end{cases} \quad (2.37)$$

$\Gamma = [0, \infty, 0, m, \infty]$ azt jelenti, hogy a biztosító maximum m ideig fizet, az eredeti valószínűség tehát csökkentendő annak valószínűségével, hogy a betegség már legalább m ideje tart:

$$\Phi_{[0, \infty, 0, m, \infty]}(x, t) = {}_t p_x^{ai} - {}_t p_x^{ai}(m). \quad (2.38)$$

$\Gamma = [0, \infty, 0, \infty, r]$ jelentése, hogy a biztosító csak az $(x+r)$ időpontig fizet, azaz

$$\Phi_{[0, \infty, 0, \infty, r]}(x, t) = \begin{cases} {}_t p_x^{ai} & (t \leq r) \\ 0 & (t > r). \end{cases} \quad (2.39)$$

Ezek az alapesetek természetesen tetszés szerint kombinálhatók, példaként álljon itt négy eset, amelyek a gyakorlatban többé-kevésbé elterjedtek.

$$\Phi_{[0, n, 0, m, \infty]}(x, t) = \begin{cases} {}_t p_x^{ai}(|t-n|^+) - {}_t p_x^{ai}(m) & (t \leq n+m) \\ 0 & (t > n+m), \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\Phi_{[0, n, 0, \infty, n]}(x, t) = \begin{cases} {}_t p_x^{ai} & (t \leq n) \\ 0 & (t > n), \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\Phi_{[0, n, 0, m, n]}(x, t) = \begin{cases} {}_t p_x^{ai} - {}_t p_x^{ai}(m) & (t \leq n) \\ 0 & (t > n), \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\Phi_{[0, n, 0, \infty, r]}(x, t) = \begin{cases} {}_t p_x^{ai} & (t \leq n) \\ {}_t p_x^{ai}(t-n) & (n < t \leq r) \\ 0 & (t > r). \end{cases} \quad (2.43)$$

Ezek után tehát a kockázat várható értéke (ami egyben a nettó várható érték elv szerint számolt díj) Γ szerződési feltételek mellett úgy kapható meg, hogy a fenti $\Phi_{\Gamma}(x, t)$ képleteket behelyettesítjük a (2.2) képletbe, s ezzel a (2.34)-hez hasonló formulákat kapunk. Például az egyik leggyakoribb konstrukcióra (nevezzük inentől " n éves PHI-biztosítás"-nak), melynek díjára külön jelölés is van, (2.41) alapján a következő adódik:

$$\bar{a}_{x:\bar{n}}^{ai} = E(\xi_{x, [0, n, 0, \infty, n]}) = \int_0^n {}_t p_x^{ai} v^t dt. \quad (2.44)$$

2.7. A díjszámítás grafikus illusztrációja

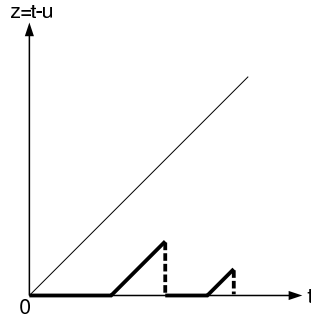
Ebben a fejezetben az előzőben tárgyalt díjszámításokat kétdimenziós alakzatok felletti integrálokként fogjuk felfogni, s ezzel egyben szemléletes jelentést kapunk az egyes Γ -vektorok jelentésére. Először térjünk vissza a $\Gamma = [0, \infty, 0, \infty, \infty]$ (extra feltételektől mentes) esetre. Ekkor a nettó várható érték elv szerinti díj (2.34) és (2.26) alapján:

$$\bar{a}_x^{ai} = E(\xi_{x,[0,\infty,0,\infty,\infty]}) = \int_0^\infty \int_0^t {}_u p_x^{aa} \mu^{ai}(x+u) {}_{t-u} \bar{p}_{x+u}^{\bar{ii}} v^t du dt. \quad (2.45)$$

Cseréljük fel most az integrálások sorrendjét:

$$\bar{a}_x^{ai} = E(\xi_{x,[0,\infty,0,\infty,\infty]}) = \int_0^\infty {}_u p_x^{aa} \mu^{ai}(x+u) v^u \left(\int_u^\infty {}_{t-u} \bar{p}_{x+u}^{\bar{ii}} v^{t-u} dt \right) du. \quad (2.46)$$

Vegyük észre, hogy a díjra meglévő két képlet közül (2.34) a "betegségben levés" valószínűségén (${}_t p_x^{ai}$) alapul, míg az imént felírt (2.46) a beteggé válás ($\mu^{ai}(x+u)du$) és a betegen maradás (${}_{t-u} \bar{p}_{x+u}^{\bar{ii}}$) valószínűségén. A grafikus reprezentációhoz tekintsük a 2.2. ábrát, melyen egy biztosított lehetséges "élettörténetét" illusztráljuk.

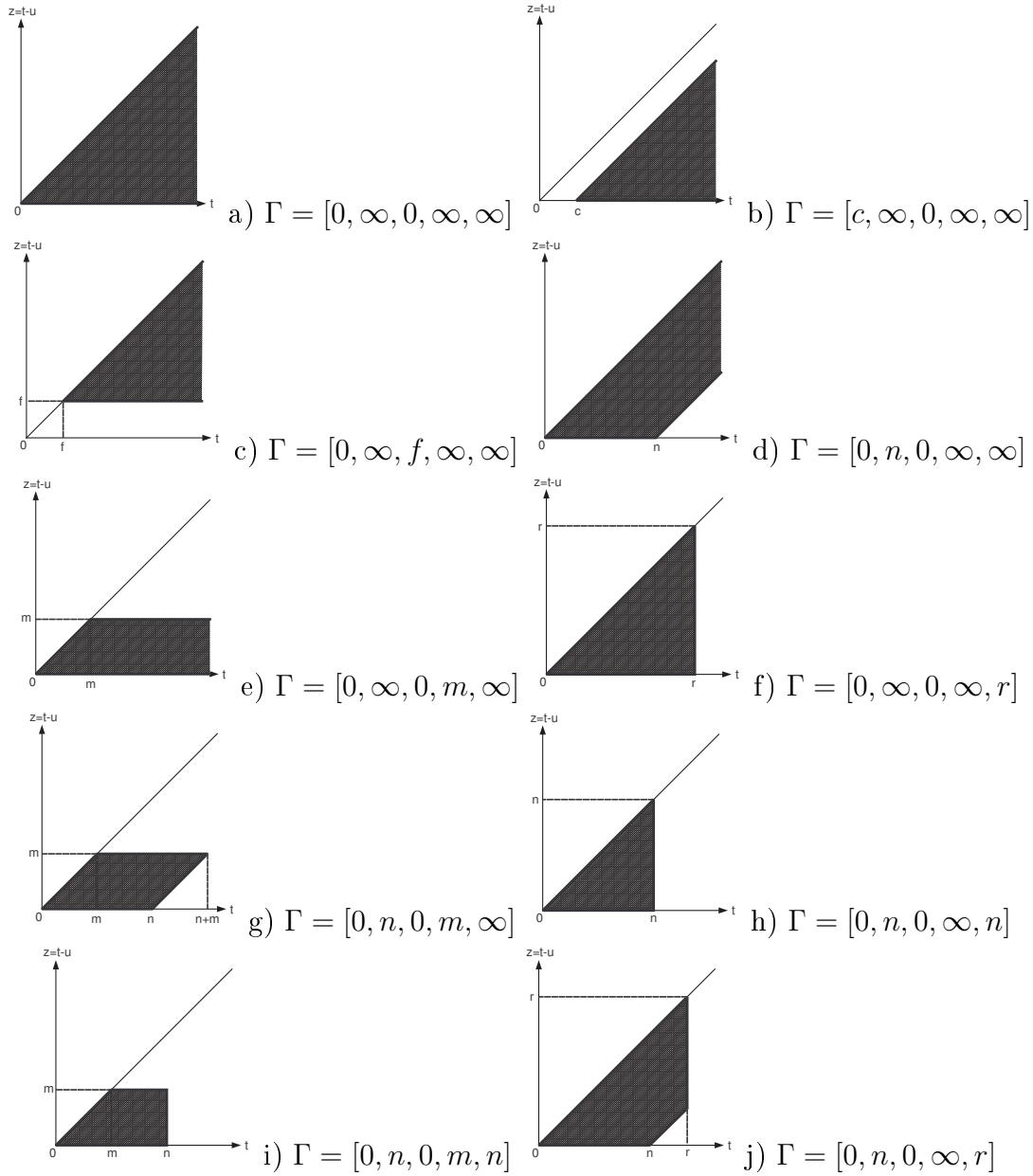


2.2. ábra. Egy lehetséges élettörténet

A kezdetben x korú illető a vízszintes tengelyen mozog mindaddig, amíg egészséges (ezen a tengelyen egyébként az x éves kor óta eltelt időt ábrázoljuk). Amint megbetegszik, a 45 fokos egyenesen megy tovább, egészen a gyógyulásáig, ekkor visszaesik a vízszintes tengelyre, és ott halad tovább, majd újra megbetegszik, s végül meghal. A (2.45) képletben a $(t-u)$ változó a betegségben eltöltött időt jelöli, és éppen ez a változó jelenik meg a 2.2. ábra függőleges tengelyén. Az összes lehetséges "élettörténetet" a 2.3.a) ábra satírozott része reprezentálja.

Legyen $z = t - u$, így (2.45) a következő alakot ölti:

$$\bar{a}_x^{ai} = E(\xi_{x,[0,\infty,0,\infty,\infty]}) = \int_0^\infty \int_0^t {}_{t-z} p_x^{aa} \mu^{ai}(x+t-z) {}_z \bar{p}_{x+t-z}^{\bar{ii}} v^t dz dt. \quad (2.47)$$



2.3. ábra. Az összes lehetséges élettörténet különböző Γ -k esetén

Ebből látszik, hogy az integrálás éppen a 2.3.a) ábrán jelölt kétdimenziós alakzaton történik. Vezessünk be egy jelölést a (2.26) integrál belsejében szereplő függvényre (ennek v^t -szeresét kell a (2.45) képletben integrálni):

$$\Psi(x, u, t) := {}_u p_x^{aa} \mu^{ai}(x+u) {}_{t-u} \bar{p}_{x+u}^{\bar{ii}}. \quad (2.48)$$

Így ${}_t p_x^{ai}(\tau) = \int_0^{t-\tau} \Psi(x, u, t) du$, s ennek segítségével a fenti eredmények kiterjeszthetők más Γ -k esetére is. A 2.3.b)-2.3.j) ábrák a különböző Γ -knak megfelelő "élettörténeteket" ábrázolják – a satírozott rész itt azt jelöli, hogy mely esetekben lehetséges kifizetés.

A (2.2) valamint a (2.35)-(2.43) képletek alapján könnyen belátható, hogy az egyes

Γ -k melletti kockázatok várható értékei, azaz a nettó várható érték elv szerinti díjak éppen a $\Psi(x, t - z, t)$ függvények integráljai a 2.3.b)-2.3.j) ábrák jelölt területei felett. Például a $\Gamma = [0, n, 0, \infty, \infty]$ esetre (2.3.d) ábra):

$$\begin{aligned}
E(\xi_{x,[0,n,0,\infty,\infty]}) &= \int_0^n {}_tP_x^{ai} v^t dt + \int_n^\infty {}_tP_x^{ai} (t - n) v^t dt = \\
&= \int_0^n \int_0^t \Psi(x, u, t) v^t du dt + \int_n^\infty \int_0^n \Psi(x, u, t) v^t du dt = \\
&= \int_0^n \int_0^t \Psi(x, t - z, t) v^t dz dt + \int_n^\infty \int_{t-n}^t \Psi(x, t - z, t) v^t dz dt.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Vagy a $\Gamma = [0, n, 0, m, n]$ esetben (2.3.i) ábra):

$$\begin{aligned}
E(\xi_{x,[0,n,0,m,n]}) &= \int_0^n ({}_tP_x^{ai} - {}_tP_x^{ai}(m)) v^t dt + \int_n^\infty 0 v^t dt = \\
&= \int_0^n \int_0^t \Psi(x, u, t) v^t du dt - \int_m^n \int_0^{t-m} \Psi(x, u, t) v^t du dt = \\
&= \int_0^n \int_0^t \Psi(x, t - z, t) v^t dz dt - \int_m^n \int_m^t \Psi(x, t - z, t) v^t dz dt.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

2.8. A kockázat szórásnégyzete különböző szerződési feltételek esetén

Ebben a fejezetben a kockázat szórásnégyzetére kapott (2.7) képletet fejtjük ki különböző Γ vektorok esetén, ahogy tettük ezt a várható értékre a 2.6. fejezetben. A szórásnégyzethez azonban a $\Phi_\Gamma(x, t)$ valószínűségeken kívül szükségünk van a $\phi_\Gamma(x, t, s) = P_\Gamma(S(x + s) = i | S(x + t) = i, S(x) = a)$ értékekre is. Előbbieket kifejtettük a 2.6. fejezetben, így most csak az utóbbiakkal foglalkozunk. A kockázat szórásnégyzete pedig ezek konkrét alakjának (2.7)-be való visszahelyettesítésével kapható. Ha feltesszük, hogy folyamatunk Markov-tulajdonságú, akkor a fenti feltételes valószínűségben az $S(x) = a$ feltétel elhagyható, tehát $\phi_\Gamma(x, t, s) = P_\Gamma(S(x + s) = i | S(x + t) = i)$.

Legkönnyebben természetesen most is a $\Gamma = [0, \infty, 0, \infty, \infty]$ extrák nélküli eset kezelhető. Ekkor

$$\phi_\Gamma(x, t, s) = P_\Gamma(S(x + s) = i | S(x + t) = i) = {}_{s-t}P_{x+t}^{ii}. \tag{2.51}$$

A többi esethez viszont ismét szükség van azon valószínűségekre, melyek azt is leírják, hogy a biztosított $(x + s)$ -ben már legalább τ ideje beteg. (2.25)-höz hasonlóan vezessük

be tehát a következő jelölést:

$${}_t p_y^{ii}(\tau) := P(S(y+u) = i \forall u \in [t-\tau, t] | S(y) = i) \quad (2.52)$$

Lényeges különbség a korábbi definícióhoz képest, hogy a mostani nem csak $\tau \leq t$ esetén definiálható. (2.25)-nél, mivel az y -beli kezdő- és az $(y+t)$ -beli végállapot különbözött, annak valószínűsége, hogy a végállapot már több, mint t ideje tart, nyilván 0 volt. Most azonban a két szélső állapot azonos, tehát pozitív valószínűséggel előfordulhat, hogy az $(y+t)$ -beli állapot már y -nál korábban elkezdődött. Persze akármeddig nem mehetünk vissza, azt ugyanis mindig feltesszük, hogy $S(x) = a$, tehát a fenti definíció $0 \leq \tau \leq y+t-x$ esetén érvényes, a $\tau > y+t-x$ értékekre pedig legyen 0.

A (2.26) képlet megfelelője itt egy kicsit bonyolultabb. Most a kezdő és a végső állapot azonossága, s ehhez kapcsolódóan a definíció $\tau > t$ értékekre való kiterjedése miatt figyelembe kell vennünk azokat az eseteket is, amikor y és $(y+t)$ között nem történik állapotváltozás. Ezt tehát akkor kell megtennünk, amikor $\tau > t$, és ekkor egyrészt annak kell teljesülnie, hogy y és $(y+t)$ között a biztosított beteg legyen, másrészt pedig még y előtt legalább $(\tau-t)$ ideje betegnek kell lennie. A Markov-tulajdonság miatt az, hogy y előtt és után mi történik, nem befolyásolja egymást. Az y előtti történéseket pedig épp a korábban definiált hasonló valószínűséggel tudjuk leírni. $\tau \leq t$ esetén a korábbi integrálos formula analógja itt is működik, végül tehát a következő képlet adódik:

$${}_t p_y^{ii}(\tau) = {}_t p_y^{\bar{ii}} \cdot {}_{y-x} p_x^{ai}(\tau-t) + \int_0^{t-\tau} {}_u p_y^{aa} \mu^{ai}(y+u) {}_{t-u} p_{y+u}^{\bar{ii}} du. \quad (2.53)$$

Ellenőrizzük le a felírt képletet a különböző típusú τ értékekre:

– $0 \leq \tau < t$ esetén az első tag második tényezője definíció szerint 0, így csak az integrálos rész játszik szerepet, ez pedig (ahogy (2.26) esetén is) a teljes valószínűség tétele alapján bontja fel a valószínűséget az utolsó megbetegedés ideje szerint; speciálisan ${}_t p_y^{ii}(0) = {}_t p_y^{\bar{ii}}$, ekkor t -ig kell integrálni;

– $\tau = t$ esetén az integrál 0, az első tag második tényezője pedig ${}_{y-x} p_x^{ai}(0) = {}_{y-x} p_x^{ai} = 1$, hiszen $S(y) = i$ a feltételben szerepel, azaz ekkor az egész képlet ${}_t p_y^{\bar{ii}}$ -ra redukálódik; s valóban, ez pont annak a valószínűsége, hogy y és $(y+t)$ közt ügyfelünk végig beteg volt, másként fogalmazva y -ban már legalább t ideje beteg;

– $t < \tau < y+t-x$ esetben tekintsük az integrált 0-nak (precízen: a negatív u -kra eddig nem definiált valószínűségeket most definiáljuk 0-nak); ekkor csak az első tag számít, abban a fentebb leírtak miatt elkülönül az y előtti és utáni rész: az utóbbira vonatkozó rész világos, az előbbire pedig $(\tau-t)$ éppen 0 és $(y-x)$ közé esik, azaz oda, ahol ${}_{y-x} p_x^{ai}(\cdot)$ értelmes, és pont azt írja le, hogy már legalább $(\tau-t)$ ideje beteg a biztosított (y -ban), így $(y+t)$ -ben már legalább $(\tau-t) + t = \tau$ ideje;

- $\tau = y + t - x$ esetén az integrál az előbbihez hasonlóan 0, és a másik tag is 0, hiszen ${}_w p_x^{ai}(w) = 0$ (itt $w = y - x = \tau - t$), ugyanis annak valószínűsége, hogy egy x évesen egészséges, $(x + w)$ évesen beteg ember legalább w ideje beteg, 0, hiszen x évesen egészséges volt;

- $\tau > y + t - x$ esetén pedig szintén ez a helyzet, definíció szerint mindkét tag 0.

A szükséges jelölésekkel immáron felvértezve nézzük az egyes Γ -khoz tartozó $\phi_\Gamma(x, t, s)$ értékeket. Az alábbi képletek helyessége a 2.6. fejezetben látottakhoz hasonlóan könnyedén meggondolható, ha szem előtt tartjuk, hogy a (2.52) képletet milyen értékekre definiáltuk.

$$\phi_{[c, \infty, 0, \infty, \infty]}(x, t, s) = \begin{cases} 0 & (s \leq c) \\ {}_{s-t} p_{x+t}^{ii} - {}_{s-t} p_{x+t}^{ii}(s - c) & (s > c), \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\phi_{[0, \infty, f, \infty, \infty]}(x, t, s) = \begin{cases} 0 & (s \leq f) \\ {}_{s-t} p_{x+t}^{ii}(f) & (s > f), \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\phi_{[0, n, 0, \infty, \infty]}(x, t, s) = \begin{cases} {}_{s-t} p_{x+t}^{ii} & (s \leq n) \\ {}_{s-t} p_{x+t}^{ii}(s - n) & (s > n), \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\phi_{[0, \infty, 0, m, \infty]}(x, t, s) = {}_{s-t} p_{x+t}^{ii} - {}_{s-t} p_{x+t}^{ii}(m), \quad (2.57)$$

$$\phi_{[0, \infty, 0, \infty, r]}(x, t, s) = \begin{cases} {}_{s-t} p_{x+t}^{ii} & (s \leq r) \\ 0 & (s > r), \end{cases} \quad (2.58)$$

$$\phi_{[0, n, 0, m, \infty]}(x, t, s) = \begin{cases} {}_{s-t} p_{x+t}^{ii}(|s - n|^+) - {}_{s-t} p_{x+t}^{ii}(m) & (s \leq n + m) \\ 0 & (s > n + m), \end{cases} \quad (2.59)$$

$$\phi_{[0, n, 0, \infty, n]}(x, t, s) = \begin{cases} {}_{s-t} p_{x+t}^{ii} & (s \leq n) \\ 0 & (s > n), \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\phi_{[0, n, 0, m, n]}(x, t, s) = \begin{cases} {}_{s-t} p_{x+t}^{ii} - {}_{s-t} p_{x+t}^{ii}(m) & (s \leq n) \\ 0 & (s > n), \end{cases} \quad (2.61)$$

$$\phi_{[0, n, 0, \infty, r]}(x, t, s) = \begin{cases} {}_{s-t} p_{x+t}^{ii} & (s \leq n) \\ {}_{s-t} p_{x+t}^{ii}(s - n) & (n < s \leq r) \\ 0 & (s > r). \end{cases} \quad (2.62)$$

Például a $\Gamma = [0, n, 0, \infty, n]$ konstrukcióra, azaz az n éves PHI-biztosításra, (2.7), (2.41) és (2.60) alapján a következő képletet kapjuk:

$$D^2(\xi_{x, [0, n, 0, \infty, n]}) = 2 \int_0^n {}_t p_x^{ai} v^t \left(\int_t^n {}_{s-t} p_{x+t}^{ii} v^s ds \right) dt - \left(\int_0^n {}_t p_x^{ai} v^t dt \right)^2. \quad (2.63)$$

A grafikus szemléltetéstől a szórásnégyzet esetén eltekintünk, mivel az eleve kettős integrálban szereplő p^{ai} és p^{ii} típusú valószínűségek integrálos alakjának helyettesítése

négydimenziós integrálokat eredményezne, s a négydimenziós ábrák inkább nehezítenék, mint könnyítenék a megértést – ha egyáltalán találnánk megfelelő négydimenziós tartományt, melyen integrálnunk kellene.

Összeségében tehát az alapvető átmenet-valószínűségek és az állapotban maradások valószínűségeinek segítségével meghatározhatók az átmenet-intenzitások (lásd (2.10)), innen adódnak a ${}_t p_x^i(\tau)$ típusú valószínűségek ((2.26) és (2.53)), s ezek segítségével felírhatók a $\Phi_\Gamma(x, t)$ és a $\phi_\Gamma(x, t, s)$ formulák ((2.33), (2.35)-(2.43), (2.51) és (2.54)-(2.62)), melyekből kiszámolható a kockázat (2.2) várható értéke és (2.7) szórásnégyzete, ezek alapján pedig számolható várható érték, szórás vagy szórásnégyzet elv szerinti díj (lásd 2.2. fejezet).

3. fejezet

Konkrét díjkalkulációs módszerek PHI-termékekre

Az előző fejezetben ismertettünk egy általános modellt a címben szereplő biztosítási konstrukciókra, és megvizsgáltuk, hogy a ${}_t p_x$ valószínűségek segítségével hogyan határozhatjuk meg ezen termékek árát különböző díjelvek alapján. Ebben a fejezetben bemutatásra kerül néhány, gyakorlatban alkalmazott módszer, továbbá ezek kapcsolata az általános modellel (hogyan származtathatók belőle, illetve a közelítéseik hogyan ellenőrizhetők vele).

Tekintettel arra, hogy ezek az eljárások többnyire az n éves PHI-biztosításra, azaz a $\Gamma = [0, n, 0, \infty, n]$ konstrukcióra készültek, így innentől mi is csak ezzel foglalkozunk. Ennek oka egyébként a módszerek azon természetéből adódik, hogy az általános modellben szereplő valószínűségek közül ${}_t p_x^i$ -kre lehet egyszerű becsléseket adni, s csak a fenti konstrukció esetén nincs szükség a nehézkes integrálással számítható ${}_t p_x^i(\tau)$ értékekre, amikhez amúgy is szükségesek további átmenetvalószínűségek. Ezek pedig megfelelő részletességű hazai adat híján nem becsülhetők.

3.1. A norvég módszer

Induljunk ki tehát a $\Gamma = [0, n, 0, \infty, n]$ esetre az általános modell alapján nettó várható érték elvvel számolt díjból (lásd (2.44)):

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ai} = E(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) = \int_0^n {}_t p_x^{ai} v^t dt. \quad (3.1)$$

Itt ${}_t p_x^{ai} = P(S(x+t) = i | S(x) = a)$. Módosítsuk egy kicsit ezt a valószínűséget úgy, hogy azt is feltesszük, hogy az ügyfél $(x+t)$ -ben életben van:

$$j_{(x)+t} := P\left(S(x+t) = i | (S(x) = a) \wedge [(S(x+t) = a) \vee (S(x+t) = i)]\right). \quad (3.2)$$

Természetesen teljesül, hogy

$${}_t p_x^{ai} = j_{(x)+t} \cdot P((S(x+t) = a) \vee (S(x+t) = i) | S(x) = a), \quad (3.3)$$

továbbá $P((S(x+t) = a) \vee (S(x+t) = i) | S(x) = a) = {}_t p_x^{aa} + {}_t p_x^{ai}$, azaz a díjra a következő ekvivalens formulát kapjuk:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ai} = E(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) = \int_0^n j_{(x)+t} ({}_t p_x^{aa} + {}_t p_x^{ai}) v^t dt. \quad (3.4)$$

Ha itt a $P((S(x+t) = a) \vee (S(x+t) = i) | S(x) = a) = {}_t p_x^{aa} + {}_t p_x^{ai}$ valószínűséget az aktuáriusi gyakorlatban igen gyakran használt túlélési valószínűséggel, (l_{x+t}/l_x) -szel helyettesítjük, megkapjuk az ún. norvég módszer képletét (lásd még [11], [14], [15]):

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ai} = E(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) \approx \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} j_{(x)+t} v^t dt. \quad (3.5)$$

Az l_y értékek az életbiztosítások alapvető eszközének, a halandósági táblának az értékei, azt adják meg, hogy az $l_0 = 100000$ -es alapsokaságból hányan érték el az y éves kort, így l_{x+t}/l_x azt jelenti, hogy az x éves kort elérők közül hányan lesznek életben még $(x+t)$ évesen is.

Fontos megjegyezni, hogy l_{x+t}/l_x nem függ a kezdeti (x -beli) állapottól, ellentétben a pontos értékkel, $({}_t p_x^{aa} + {}_t p_x^{ai})$ -vel. Ennek megfelelően $({}_t p_x^{ia} + {}_t p_x^{ii})$ is közelíthető (l_{x+t}/l_x) -szel. Bevezetve a

$$j_{(x)+t}^i := P(S(x+t) = i | (S(x) = i) \wedge [(S(x+t) = a) \vee (S(x+t) = i)]) \quad (3.6)$$

jelölést, a fentiekhez hasonlóan adódik, hogy

$${}_t p_x^{ii} = j_{(x)+t}^i ({}_t p_x^{ia} + {}_t p_x^{ii}), \quad (3.7)$$

majd az imént említett és a ${}_t p_x^{ai}$ -re vonatkozó közelítéseket használva (2.63) alapján:

$$D^2(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) \approx 2 \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} j_{(x)+t} v^t \left(\int_t^n \frac{l_{x+s}}{l_{x+t}} j_{(x+t)+s-t}^i v^s ds \right) dt - \left(\int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} j_{(x)+t} v^t dt \right)^2. \quad (3.8)$$

Így néz ki tehát a kockázat szórásnégyzete a norvég modell alapján a $\Gamma = [0, n, 0, \infty, n]$ esetben. Vegyük észre, hogy a (3.5) és (3.8) formulák a "betegségben levés" valószínűségén alapulnak (lásd a 2.7. fejezet ide vonatkozó megjegyzését a (2.34) és a (2.46) képletek szemléletbeli különbségéről).

3.2. A "Manchester-Unity" módszer

Ez a modell annyiban különbözik az előzőtől, hogy a $j_{(x)+t}$ valószínűségek helyett az

$$f_{x+t} := P(S(x+t) = i | (S(x+t) = a) \vee (S(x+t) = i)) \quad (3.9)$$

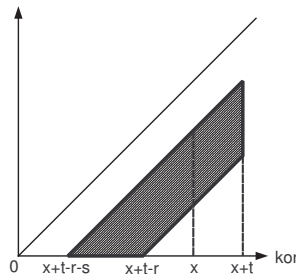
értékeket tekinti, azaz elhagyja a kezdeti állapotra vonatkozó feltételt, így a nettó várható érték elvnek megfelelő díjra a következő képlet adódik:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ai} = E(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) \approx \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} f_{x+t} v^t dt. \quad (3.10)$$

Vegyük észre, hogy $j_{(x)+t}$ az x -nek és a t -nek, azaz két változónak a függvénye, míg f_{x+t} csupán $(x+t)$ -től függ, azaz egyváltozós, itt ugyanis nem vagyunk tekintettel a kezdeti állapotra, csak az aktuális állapottal foglalkozunk. Ugyanez elmondható $j_{(x)+t}^i$ -re is, ami ennek megfelelően ugyancsak f_{x+t} -vel helyettesítendő ebben a modellben, így a kockázat szórásnégyzetére a következő képletet kapjuk:

$$D^2(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) \approx 2 \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} f_{x+t} v^t \left(\int_t^n \frac{l_{x+s}}{l_{x+t}} f_{x+s} v^s ds \right) dt - \left(\int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} f_{x+t} v^t dt \right)^2. \quad (3.11)$$

Az előbbi észrevételből adódik az is, hogy ebben a modellben egy $(x+t)$ korú beteg biztosított esetén minden korábbi év lehetséges kezdete a betegségnek, pedig a valóságban a betegség csak az x éves kor után kezdődhetett. A 3.1. ábrán ilyen eseteknek megfelelő "lehetetlen élettörténeteket" láthatunk (most a vízszintes tengelyen nem az x éves kor óta eltelt idő, hanem az ügyfél kora szerepel).



3.1. ábra. "Lehetetlen élettörténetek"

Világos, hogy ezzel a módszerrel a kérdéses valószínűségeket felülbecsüljük. Ez nem túl jelentős akkor, ha az adatok fiatalabb korosztályra vonatkoznak, hiszen náluk nem

túl valószínű, hogy hosszabb betegségen estek volna át a biztosítás kezdete előtt, idősebb emberekre vonatkozó adatok esetén azonban a hiba jóval nagyobb lehet.

Természetesen a "Manchester-Unity" módszer is a "betegségben levés" valószínűségén alapul, ahogy a norvég módszer.

Írjuk most át az $\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ai}$ -re vonatkozó (3.10) formulát:

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} f_{x+t} v^t dt &= \sum_{h=1}^n \frac{1}{l_x} \int_0^1 f_{x+h-1+\tau} \cdot l_{x+h-1+\tau} v^{h-1+\tau} d\tau \approx \\ &\approx \sum_{h=1}^n \frac{l_{x+h-\frac{1}{2}}}{l_x} v^{h-\frac{1}{2}} \frac{\int_0^1 f_{x+h-1+\tau} \cdot l_{x+h-1+\tau} d\tau}{\int_0^1 l_{x+h-1+\tau} d\tau}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\theta_y := \frac{\int_0^1 f_{y+\tau} \cdot l_{y+\tau} d\tau}{\int_0^1 l_{y+\tau} d\tau}. \quad (3.13)$$

Ez az ún. betegségi közeparány (Central Sickness Rate – CSR), mely az y és $(y+1)$ éves korok közt betegségben eltöltött idő várható értékének és ugyanezen időszak alatti várható élettartamnak a hányadosa. (Ui. ha bővítjük a törtet $(1/l_x)$ -szel, amit a számlálóban és a nevezőben is beviszünk az integráljel mögé, akkor az integrálandó mennyiség épp a betegség, illetve az "életben levés" valószínűsége az adott pillanatban – azzal a generális feltevéssel, hogy az illető az x időpontban életben van.) Ezzel kifejezve a díjat kapjuk a "Manchester-Unity" módszer egy gyakrabban alkalmazott alakját:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ai} = E(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) \approx \sum_{h=1}^n \frac{l_{x+h-\frac{1}{2}}}{l_x} v^{h-\frac{1}{2}} \theta_{x+h-1}. \quad (3.14)$$

Nézzük meg most, hogy ez az átírás hogyan zajlik a szórásnégyzet (3.11) képletére. A kivonandó természetesen épp a (3.14) formula négyzete, így azzal nincs sok gond. Az első tag belső integrálját jobban szemügyre véve pedig észrevehetjük, hogy ez éppen egy olyan biztosítás (3.10) alapján számolt nettó várható értékes díja, mely $(x+t)$ -ben indul, és $(x+n)$ -ben jár le, azaz éppen $\bar{a}_{(x+t):\overline{(n-t)|}}^{ai}$. Most elvégezhetjük ugyanazt a procedúrát, melyet a várható értéknél csináltunk, a különbség annyi, hogy az integrálban egy újabb szorzótényező fog szerepelni, mely t -től függ. Az egész értékek közti integrálások összegére való bontásban az integrálandó függvények $\left(\bar{a}_{(x+h-1+\tau):\overline{(n-h+1-\tau)|}}^{ai}\right)$ -val bővülnek, majd a közelítés v hatványaihoz hasonlóan a középértékekkel történhet. A következő képletet

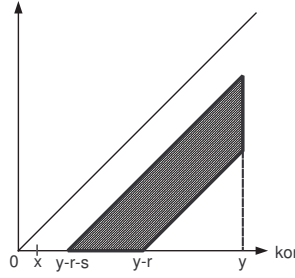
kapjuk:

$$D^2(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) \approx 2 \sum_{h=1}^n \frac{l_{x+h-\frac{1}{2}}}{l_x} v^{h-\frac{1}{2}} \left(\bar{a}_{(x+h-1/2):(\overline{n-h+1/2})}^{ai} \right) \theta_{x+h-1} - \left(\bar{a}_{x:\bar{n}}^{ai} \right)^2. \quad (3.15)$$

Ha még a nettó várható érték elvvel számolt díjakat is közelítjük, adódik a következő képlet a kockázat szórásnégyzetére:

$$D^2(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) \approx 2 \sum_{h=1}^n \frac{l_{x+h-\frac{1}{2}}}{l_x} v^{h-\frac{1}{2}} \left(\sum_{r=1}^{n-h+\frac{1}{2}} \frac{l_{x+h-\frac{1}{2}+r-\frac{1}{2}}}{l_{x+h-\frac{1}{2}}} v^{r-\frac{1}{2}} \theta_{x+h-\frac{1}{2}+r-1} \right) - \left(\sum_{h=1}^n \frac{l_{x+h-\frac{1}{2}}}{l_x} v^{h-\frac{1}{2}} \theta_{x+h-1} \right)^2. \quad (3.16)$$

További képletek kaphatók az $f_y^{r/s}$ valószínűségek segítségével. Ezek azt írják le, hogy egy y évesen beteg ügyfél betegségének eddigi tartama r és $(r+s)$ közé esik – lehetséges "élettörténeteket" szemléltet a 3.2. ábra.



3.2. ábra. y évesen beteg ügyfél lehetséges élettörténetei, amennyiben a betegség eddigi tartama r és $(r+s)$ közé esik

Ezekre a formulákra most nem térünk ki, azonban megjegyezzük, hogy ezen $f_y^{r/s}$ -ek segítségével a "Manchester-Unity" módszer kapcsolatba hozható az általános modellel, ugyanis ezek az értékek kifejezhetők a ${}_t p_{x_0}^{ah}$ ($h \in \{a, i\}$) és a ${}_t p_{x_0}^{ai}(\tau)$ valószínűségek segítségével, ahol x_0 egy olyan életkort jelöl, melyben a biztosított egészséges volt. Ehhez tekintsük azt a valószínűséget, hogy egy ügyfél életben van y évesen, feltéve, hogy x_0 évesen egészséges volt:

$$P((S(y) = a) \vee (S(y) = i) | S(x_0) = a) = {}_{y-x_0} p_{x_0}^{aa} + {}_{y-x_0} p_{x_0}^{ai}, \quad (3.17)$$

továbbá annak esélyét, hogy az x_0 évesen egészséges ügyfél y -ban beteg, és betegségének tartama r és $(r+s)$ közé esik:

$$P(S(x_0 + u) = i, \forall u \in [y - x_0 - k, y - x_0], r \leq k \leq r + s | S(x_0) = a) = {}_{y-x_0} p_{x_0}^{ai}(r) - {}_{y-x_0} p_{x_0}^{ai}(r + s). \quad (3.18)$$

Jelölje most $f_{y,x_0}^{r/s}$ annak valószínűségét, hogy egy x_0 évesen egészséges és y évesen élő ügyfél y évesen beteg, és betegségének tartama r és $(r + s)$ közé esik. Tekintve, hogy ez utóbbi esemény része a második feltételnek megfelelő eseménynek, a feltételes valószínűség definíciója alapján adódik, hogy:

$$f_{y,x_0}^{r/s} = \frac{y-x_0 p_{x_0}^{ai}(r) - y-x_0 p_{x_0}^{ai}(r+s)}{y-x_0 p_{x_0}^{aa} + y-x_0 p_{x_0}^{ai}}. \quad (3.19)$$

Definíció alapján $f_y = f_y^{0/\infty}$, s így

$$f_y = f_y^{0/\infty} \approx \frac{y-x_0 p_{x_0}^{ai}}{y-x_0 p_{x_0}^{aa} + y-x_0 p_{x_0}^{ai}}. \quad (3.20)$$

Azaz a (3.10), (3.11), (3.14), (3.16) és a (3.15) képletek valóban kifejezhetők az általános modell átmenet-valószínűségeivel. Az utóbbi képletek segítségével [6] részletesen elemzi a betegségi középarányt, a "Manchester-Unity" modell egyéb vonatkozásairól pedig [1] és [10] értekeznek.

3.3. A svéd módszer

Az alább ismertett modellre nem térünk ki részletesen, csupán a lényegét vázoljuk. Ennek oka, hogy az n éves PHI-biztosításnál általánosabb konstrukció díját számítja ki, így a fejezet elején tett észrevétel szerint olyan paraméterek szükségesek a díj kiszámításához, melyek a magyar adatokból nem becsülhetők. Miért mutatjuk be mégis? Azért, mert ez egy konkrétan alkalmazott példa olyan modellre, melyben a díjszámítás nem a "betegségben levés" esélyén alapul, mint a norvég vagy az MU-módszer esetén, hanem a beteggé válás és betegen maradás valószínűségén.

Legyen $\Gamma = [0, n, f, \infty, n]$, azaz engedjük meg az eddig vizsgált biztosításhoz képest a késleltetési időszakot. A nettó várható érték elv alapján számított díjra itt a következő képletet alkalmazzák:

$$\bar{a}_{x:n(f)}^{ai} = \int_0^{n-f} \frac{l_{x+u}}{l_x} \mu^{ai}(x+u) {}_f p_{x+u,0}^{\bar{ii}} v^{u+f} \left(\int_{u+f}^n {}_{t-u-f} p_{x+u+f,f}^{\bar{ii}} v^{t-u-f} dt \right) du. \quad (3.21)$$

Ez a képlet ugyanolyan típusú, mint (2.46), csak természetesen más szerződési feltételek mellett, továbbá az ${}_u p_x^{aa}$ valószínűség helyett az l_{x+u}/l_x túlélési valószínűség szerepel. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\lambda(y, z) := {}_z p_{y,0}^{\bar{ii}}, \quad (3.22)$$

$$\nu(y, z) := \mu^{ai}(y) {}_z p_{y,0}^{\bar{ii}} = \mu^{ai}(y) \lambda(y, z). \quad (3.23)$$

A korábbiak értelmében λ az y és $(y+z)$ közti folytonos betegség valószínűsége, $\nu(y, z)dy$ pedig annak az esélye, hogy egy y -ban egészséges biztosított y és $(y+dy)$ közt megbetegszik, és legalább $(y+z)$ -ig beteg is marad. Kihasználva, hogy

$${}_f\overline{p}_{x+u,0}^{\overline{ii}} \cdot {}_{t-u-f}\overline{p}_{x+u+f,f}^{\overline{ii}} = {}_{t-u}\overline{p}_{x+u,0}^{\overline{ii}}, \quad (3.24)$$

a díjra a következő képlet adódik:

$$\overline{a}_{x:n(f)|}^{ai} = \int_0^{n-f} \frac{l_{x+u}}{l_x} \nu(x+u, f) v^{u+f} \left(\int_{u+f}^n \frac{\lambda(x+u, t-u)}{\lambda(x+u, f)} v^{t-u-f} dt \right) du. \quad (3.25)$$

A svéd aktuáriusi gyakorlatban szokásos a λ és a μ^{ai} (vagy ezzel ekvivalensen a λ és a ν) függvények becslése, és ezek alapján a fenti képlettel való díjszámítás ([3], [4], [5], [8], [9], [16], [17]).

4. fejezet

Díjszámítás hazai adatok alapján

4.1. Az MU-képlet paramétereinek egyszerű becslése

Mint korábban említettük, a nyugat-európai biztosítók abban az előnyös helyzetben vannak, hogy rendkívül részletes statisztikákkal rendelkeznek, sőt, mivel az alapvető konstrukciókat évtizedek óta értékesítik, ezek a statisztikák a saját ügyfeleikre vonatkoznak. Így a díjszámításkor olyan személyekre vonatkozó adatokkal dolgozhatnak, akik a kialakítandó termék potenciális vevői. A mi esetünkben nemcsak részletes statisztikák nincsenek, de a hozzáférhető adatok nagy része országos vagy megyei adat – azaz nemcsak azt a társadalmi réteget reprezentálja, amely egyáltalán köt biztosításokat. Így a konkrét eredményeink nyilván nem alkalmazhatók a gyakorlatban – a célunk itt a lehetséges becslési és számítási módszerek bemutatása konkrét adatokon.

Az általános modell alapján történő díjszámításhoz szükség van a ${}_t p_x$ valószínűségekre, amik azt írják le, hogy egy x éves korában egészséges vagy beteg ember milyen valószínűséggel lesz egészséges vagy beteg t év múlva. Ahogy a 3. fejezet bevezetőjében már említettük, a $\Gamma = [0, n, 0, \infty, n]$ konstrukció kivételével szükség van a ${}_t p_x(\tau)$ értékekre is, amikhez viszont kellene ${}_t p_x^{\overline{ii}}$ -k. A rendelkezésünkre álló adatok nagyon kevés információt adnak arra nézve, hogy egy adott évben beteg személlyel a továbbiakban mi történt (legfeljebb a halálozási arányt ismerjük), tehát ilyen típusú valószínűségek becslésére nem sok remény van. Ezért a továbbiakban az n éves PHI-biztosítással foglalkozunk. Azonban ebben az esetben is az általános modell alapján való számoláshoz, vagy akár a norvég módszer alkalmazásához szintén egy korábbi állapot függvényében kellene becsléseket adnunk. Egyedül a Manchester-Unity módszer az, melyben csak olyan értékeket kell közelítenünk, melyek nem függenek az illető addigi "körtörténetétől". Idézzük fel tehát az ide vonatkozó

(3.14) és (3.15) képleteket a kockázat várható értékére és szórásnégyzetére:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ai} = E(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) \approx \sum_{h=1}^n \frac{l_{x+h-\frac{1}{2}}}{l_x} v^{h-\frac{1}{2}} \theta_{x+h-1}, \quad (4.1)$$

$$D^2(\xi_{x,[0,n,0,\infty,n]}) \approx 2 \sum_{h=1}^n \frac{l_{x+h-\frac{1}{2}}}{l_x} v^{h-\frac{1}{2}} \left(\bar{a}_{(x+h-1/2):(n-h+1/2)|}^{ai} \right) \theta_{x+h-1} - (\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ai})^2, \quad (4.2)$$

ahol $y \geq x$ -re az ún. CSR mennyiség:

$$\theta_y := \frac{\int_0^1 \frac{f_{y+\tau} l_{y+\tau}}{l_x} d\tau}{\int_0^1 \frac{l_{y+\tau}}{l_x} d\tau}. \quad (4.3)$$

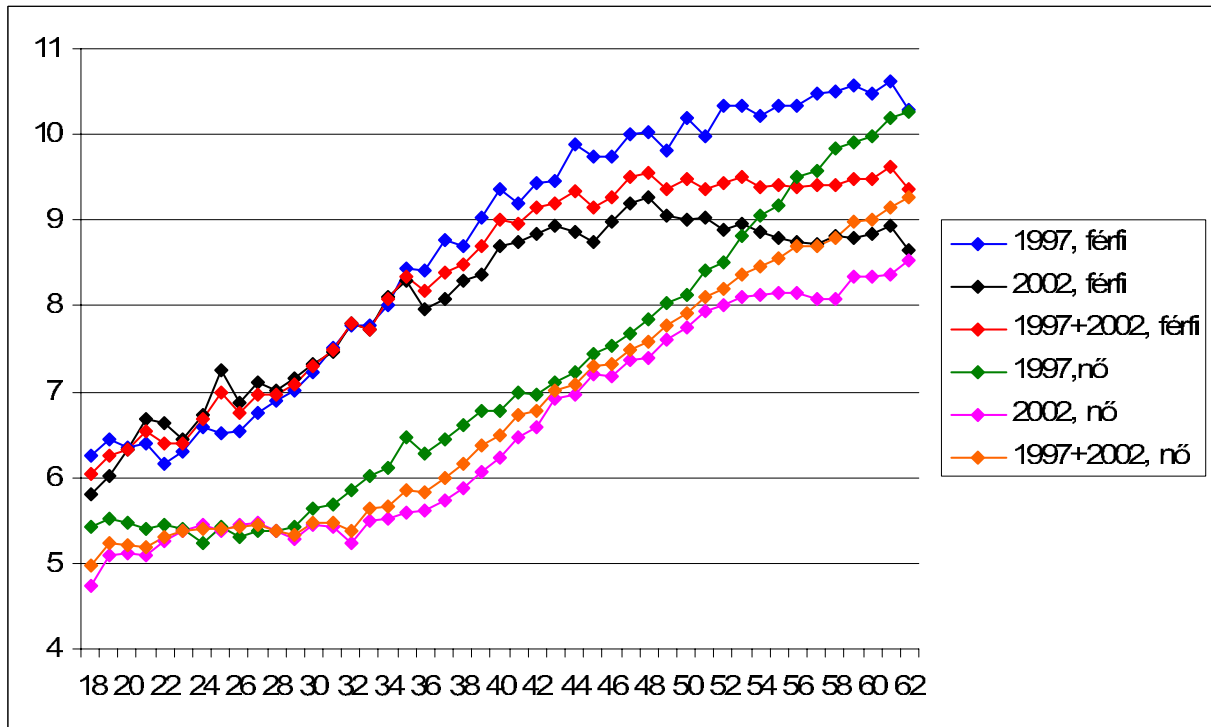
Korábban említettük, hogy a θ_y mennyiség két várható érték hányadosa: az y és $(y+1)$ éves korok közt betegségben, illetve életben töltött idő. Az l_y értékek a halandósági táblában csak éves bontásban állnak rendelkezésre, de utóbbira könnyen adhatunk becslést: az $[y, y+1]$ intervallum két végpontjában ismerjük a integrálandó függvény értékét, így ha lineárisan interpolálunk, akkor a CSR nevezőjére a következő közelítést kapjuk:

$$\int_0^1 \frac{l_{y+\tau}}{l_x} d\tau \approx \frac{(l_y + l_{y+1})}{2l_x}. \quad (4.4)$$

A számlálóhoz már betegségi adatokat is fel kell használnunk. Ezzel kapcsolatban egy biztosító rendelkezésünkre bocsátotta a következő statisztikákat: egy bizonyos portfólióban szereplő biztosítottak körében hány ápolási eset történt a biztosított korának és az ápolás napokban mért tartamának függvényében. Mindez Tolna megyére vonatkozik, és az 1997-ig bekövetkezett eseményeket tagalja, külön férfiakra és külön nőkre. Ugyanilyen táblázat áll rendelkezésre egy másik portfólióra, mely a 2002-ig történeteket veszi figyelembe, szintén Tolna megyében. (Megjegyezzük, hogy rövid ápolás meglehetősen sok fordul elő, s ritkábbak a hosszútávú betegségek, amint ez várható is. Ha tehát ezen adatokra eloszlást szeretnénk illeszteni, akkor a nagy volatilitás miatt annak egy keverék eloszlásnak kell lennie, mely egy nagy valószínűségű, kis várható értékű diszkrét eloszlásból és egy kisebb valószínűségű, nagyobb értékeket felvevő eloszlásból áll, erre azonban e dolgozatban nem térünk ki.)

Ezen adatokból mindenesetre könnyen adható becslés a CSR számlálójára (jelöljük innentől ts_y -nal), hiszen az adott korban betegen töltött napok számának várható értékét egyszerűen átlagolással kaphatjuk – ezt megtehetjük nemenként és a két különböző befejezési évre vonatkozóan, sőt a férfi és a női portfóliókat egybe is olvaszthatjuk, így összesen

hat adatsor áll rendelkezésünkre. Konkrétan hat darab 45 dimenziós vektor, mindegyikben a 18-tól 62 éves korig terjedő átlagos ápolási tartammal (napokban mérve). Feltesszük ugyanis, hogy a biztosítást 18. életévét betöltött, még nem nyugdíjazott személy kötheti.



4.1. ábra. Átlagos ápolási tartam (ts_y) a különböző portfóliókra a kor függvényében

A 4.1. ábrán a kapott értékeket ábrázoltuk a kor függvényében az egyes portfóliókra vonatkozóan. Láthatjuk, hogy a férfiak várhatóan több napot töltenek betegen, és hogy az 1997-es portfólióban magasabb az átlag. Előbbi nem meglepő, ismerve a várható élettartam tulajdonságait, utóbbi viszont az életszínvonal emelkedésére utalhat.

Ezek a becslések persze csak Tolna megyére, és az adott portfólióra vonatkoznak. Sajnos a többi hozzáférhető statisztika, mely a kórházakban kezelt összes betegről szól, az ápolások átlagos tartamát ugyan tartalmazza (akár megyénként és évenként is), de a kor szerinti bontás hiányzik – pedig számunkra talán az a legfontosabb szempont. Így az adott korban betegen töltött időre csak ebből a nem feltétlenül reprezentatív mintából tudunk becslést adni. Ennek lehetséges korrekcióit ismertetjük a 4.4. fejezetben.

A fenti (4.1) és (4.2) képletek alkalmazásához még két kiegészítést kell tennünk. A halandósági tábla adatai (ahogy fentebb is szóba került már) évesek, így a képletekben szereplő $l_{x+h-\frac{1}{2}}$ értékek helyett mi l_{x+h} -t fogunk használni, azaz az eljárást annyiban módosítjuk, hogy a középpontban felvett érték helyett a végpontbeli értékkel közelítünk. Hasonló a helyzet az $\bar{a}_{(x+h-1/2):(n-h+1/2)}^{ai}$ mennyiségekkel is, éves adataink lévén, a biztosításokat is csak éves tartamokra vizsgáljuk. Itt, figyelembevéve, hogy h utolsó értéke

n , $\bar{a}_{(x+h-1):(\overline{n-h+1})}^{ai}$ -gyel helyettesítünk, azaz a kezdőpontbeli értékkel közelítünk – ha a végpontbelivel tennénk, akkor $h = n$ -re 0 éves biztosítás adódna, aminek nincs értelme.

4.2. A számításokat végző programok

A megfelelő adatokkal és becslési eljárásokkal felvértezve már csak a számítások konkrét kivitelezése van hátra. Ehhez a MATLAB szoftvert használtam, melyben a szükséges számítási eljárásokat öt egyszerű szubrutin segítségével oldottam meg. Ezek közül kettő a kockázat várható értékét, illetve szórásnégyzetét határozza meg a belépési kor, a tartam, a biztosítási összeg, a technikai kamatláb, valamint két vektor függvényében. Az egyik vektor a halandósági tábla elemeit tartalmazza, azaz az l_y -okat, $y = 18, \dots, 62$. A másik vektor pedig ugyanezen y -okra tartalmazza a CSR számlálójának becslését (ts_y), azaz az átlagos időt, melyet az illető y és $(y + 1)$ éves kora közt betegen tölt – napokban mérve, ezért figyelniük kell arra, hogy a CSR nevezőjének meghatározásakor kapott értéket (melynek mértékegysége év, tipikusan valamivel kisebb 1-nél) megszorozzuk 365-tel. A másik három szubrutin (használva az előzőeket) a várható érték, a szórás és a szórásnégyzet elvre vonatkozó díjtáblázatokat készíti el a biztosítási összeg, a technikai kamatláb, a fenti két vektor, valamint az adott díjelv paramétere alapján. Mielőtt ezeket megnéznénk, vizsgáljuk meg, hogy az imént ismerttetett becslési eljárás mennyiben és hol módosítható, s majd ha már többféle módszer alapján elkészített input adataink lesznek, foglalkozunk a különböző inputokkal elkészített táblázatokkal.

4.3. Credibility-elmélet

Fentebb említettük, hogy a nagyon specifikus Tolna megyei portfóliók részletes adatai mellett rendelkezésünkre állnak kevésbé részletes, de nagyobb csoportok alapján készült adatok. A fejezet elején szó volt róla, hogy utóbbiak kevésbé reprezentatívak a biztosítási üzlet szempontjából, most mégis foglalkozunk velük – egyrészt mert a valós biztosítótól származó adatok sem túl részletesek, másrészt, hogy megvizsgáljuk, hogy valóban okoznak-e jelentős különbséget a díjban.

Számunkra most az egy év alatt betegségben töltött idő várható értéke (a CSR számlálója) az érdekes. Ezt tudtuk becsülni a biztosítótól kapott adatok alapján egyszerű átlagolással, azonban nem ismertük a portfólió összeállítását, vagy azt, hogy mikor kötötték meg a biztosításokat, csak annyit tudtunk, hogy egy adott naptári év végéig hány napos ápolási esetek fordultak elő. Az interneten fellelhető, a teljes társadalomra vonatkozó adatok éppen más szempontok szerint részletesek: éves és megyénkénti (sőt intézményenkénti) bontásban lelhetők fel az adott évben átlagos ápolási tartamok, azonban a számunkra

talán legfontosabb szempont, a kor szerinti bontás hiányzik. Ezért valahogy kombinálni kellene a kettőt – ez a fajta probléma sokszor (és sokféle formában) merül fel a biztosítások körében.

Alapvetően arról van szó, hogy a biztosítók gyakran szembesülnek azzal, hogy többféle adatot kellene összefésülni: előfordulhat, hogy ötvözni szeretnék az általános tapasztalattal a saját tapasztalattal – ez gyakori új biztosítók esetén, akik még nem rendelkeznek elegendő saját tapasztalattal, azaz hasonló cipőben járnak, mint mi most. Az alább ismertetett (klasszikus) Bühlmann-modell erre kínál megoldást, de alkalmazható régi és új tapasztalok vegyítésére is.

Tegyük fel, hogy a biztosítónak a következő saját megfigyelései vannak (a saját tapasztalat): X_{j1}, \dots, X_{jt} , $j = 1, \dots, k$, azaz k db csoport, mindegyik elemszáma t (például k db szerződés t éven át megfigyelve, X_{jr} a j . szerződésre kifizetett kár az r . évben). A következő feltételezéseket tesszük:

- azonos j -re X_{jr} -ek eloszlása azonos, ennek az eloszlásnak egy (esetleg többdimenziós) rizikóparamétere Θ_j ;

- Θ_j -k azonos eloszlásúak;

- $E(X_{jr}|\Theta_j = q) = \mu(q)$ független j -től, $j = 1, \dots, k$, $r = 1, \dots, t$;

- az $\underline{X}_j = (X_{j1}, \dots, X_{jt})^T$ és az $\underline{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^t$ jelölésekkel $\Sigma(\underline{X}_j|\Theta_j = q) = E((\underline{X}_j - \mu(q) \cdot \underline{1})(\underline{X}_j - \mu(q) \cdot \underline{1})^T|\Theta_j = q) = \sigma^2(q)I_{t \times t}$, azaz az X_{jr} -ek feltételesen korrelálatlanok, és $D^2(X_{jr}|\Theta_j = q) = \sigma^2(q)$ független j -től;

- az $(\underline{X}_1, \Theta_1), \dots, (\underline{X}_k, \Theta_k)$ párok független, azonos eloszlásúak.

Vezessük be továbbá a következő jelöléseket:

- $a := D^2(E(X_{jr})|\Theta_j) = D^2(\mu(\Theta_j))$,

- $s^2 := E(D^2(X_{jr})|\Theta_j) = E(\sigma^2(\Theta_j))$,

- $E(X_{jr}) = E(\mu(\Theta_j)) =: m$ (a fenti második feltétel szerint itt valóban nincs j -től való függés) – tipikusan az X_{jr} -eken kívül ez is ismert, mint általános tapasztalat, például országos adat.

Célunk $h(\Theta_j)$, azaz a j . rizikóparaméter egy függvényének becslése az összes megfigyelés alapján. $h(\Theta_j)$ credibility-becslése a négyzetesen legkisebb hibát adó becslés, azaz tulajdonképpen a Bayes-becslés. Egy olyan $g(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_k)$ függvényt kell tehát keresni, melyre $E((h(\Theta_j) - g(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_k))^2)$ minimális. Tudjuk, hogy ez $E(h(\Theta_j)|\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_k)$, de ezt gyakran nehéz meghatározni, ezért g -t inkább a lineáris függvények körében keressük, ez lesz a lineáris credibility-becslés. Belátható a következő állítás:

$h = \mu$ -re a $g(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_k) = c_0^j + \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^t c_{ir}^j X_{ir}$ alakú lineáris függvények körében a következő minimalizál:

$$g(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_k) = g(\underline{X}_j) = g(X_{j1}, \dots, X_{jt}) = z \frac{X_{j1} + \dots + X_{jt}}{t} + (1 - z)m, \quad (4.5)$$

ahol

$$z = \frac{at}{s^2 + at} \quad (4.6)$$

az ún. Bühlmann-faktor.

Láthatjuk, hogy a j . rizikóparaméter becsléséhez nem kell felhasználnunk a többi csoport megfigyeléseit, csak a saját csoportét és az általános tapasztalatot. A Bühlmann-faktorról elmondható, hogy ha nagy a bizonytalanság az adatainkban, azaz s^2 nagy, akkor lesz 0-hoz közeli, s ekkor (4.5) szerint inkább az általános tapasztalatot érdemes figyelembe venni. Ha pedig nagyon sok megfigyelésünk van, azaz t nagy, akkor z 1-hez lesz közel, tehát a saját tapasztalat számít jobban.

Akkor sincs probléma, ha m nem ismert – ebben az esetben a következő mondható: az $E(g(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_k)) = m$, $\sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^t c_{ir}^j = 1$, $c_0^j = 0$ feltételek mellett a

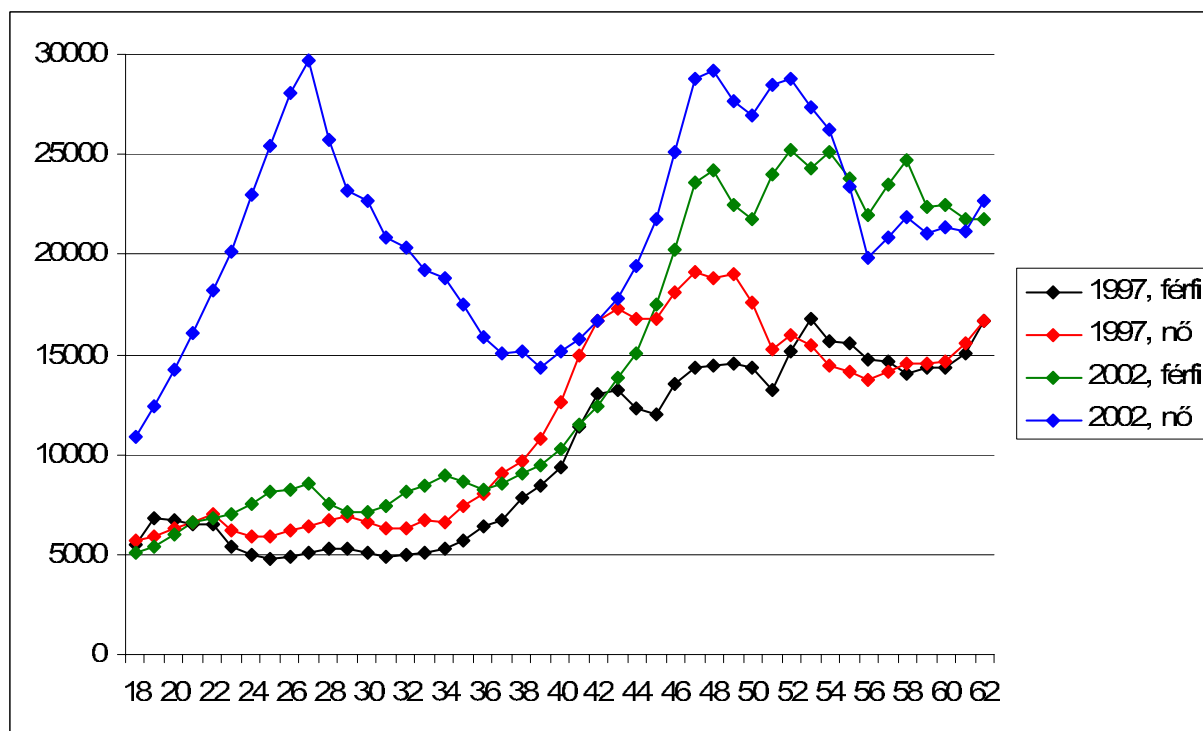
$$g(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_k) = z \frac{X_{j1} + \dots + X_{jt}}{t} + (1 - z) \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^t X_{ir}}{kt} \quad (4.7)$$

függvény minimalizál, azaz ilyenkor az összes megfigyelés átlagával helyettesíthetjük m -et.

4.4. A credibility-elmélet alkalmazhatósága az adatainkra

Térjünk vissza most a mi problémánkra, s nézzük meg, hogyan alkalmazhatnánk a credibility-elméletet. Az adathalmaz továbbra is a biztosítótól kapott 1997-es, illetve 2002-es férfi és női táblázat, az ezekből származó becsléseket szeretnénk "korrigálni". Kézenfekvő, hogy a k db csoportnak az egyes korok feleljenek meg, és az adott korhoz tartozó megfigyelt esetek legyenek az egyes X_{jr} -ek.

Itt rögtön felmerül egy probléma, miszerint a modellben a csoportok elemszáma azonos kell legyen, ami itt távolról sem teljesül: például az 1997-es férfi adatok szerint 5517 fő 18 éves volt beteg valamennyi ideig, ugyanez a szám 62 évesekre 16656, a két szélső kor között pedig kissé hullámzóan ugyan, de emelkedik. A nőknél hasonló értékeket tapasztalhatunk az 1997-es adatok esetében, a 2002-es értékek szintén ezt a tendenciát mutatják a férfiaknál, csak ott (ugyancsak 5000 körüli értékről indulva) 22000 körüli az utolsó érték. Ezek akár arra is utalhatnak, hogy a portfólió viszonylag kiegyenlített, hiszen nyilvánvaló, hogy egy huszonéves jóval kisebb valószínűséggel betegszik meg, mint egy idős ember. Ahogy a 4.2. ábrán is látható, a 2002-es női adatok viszont nem ilyenek, ott a 18-40 éves korosztályban jóval több ápolási eset szerepel, mint a másik három adatsorban – ez kevésbé kiegyensúlyozott portfólióra utal, melyben ez a korosztály valószínűleg felülreprezentált.

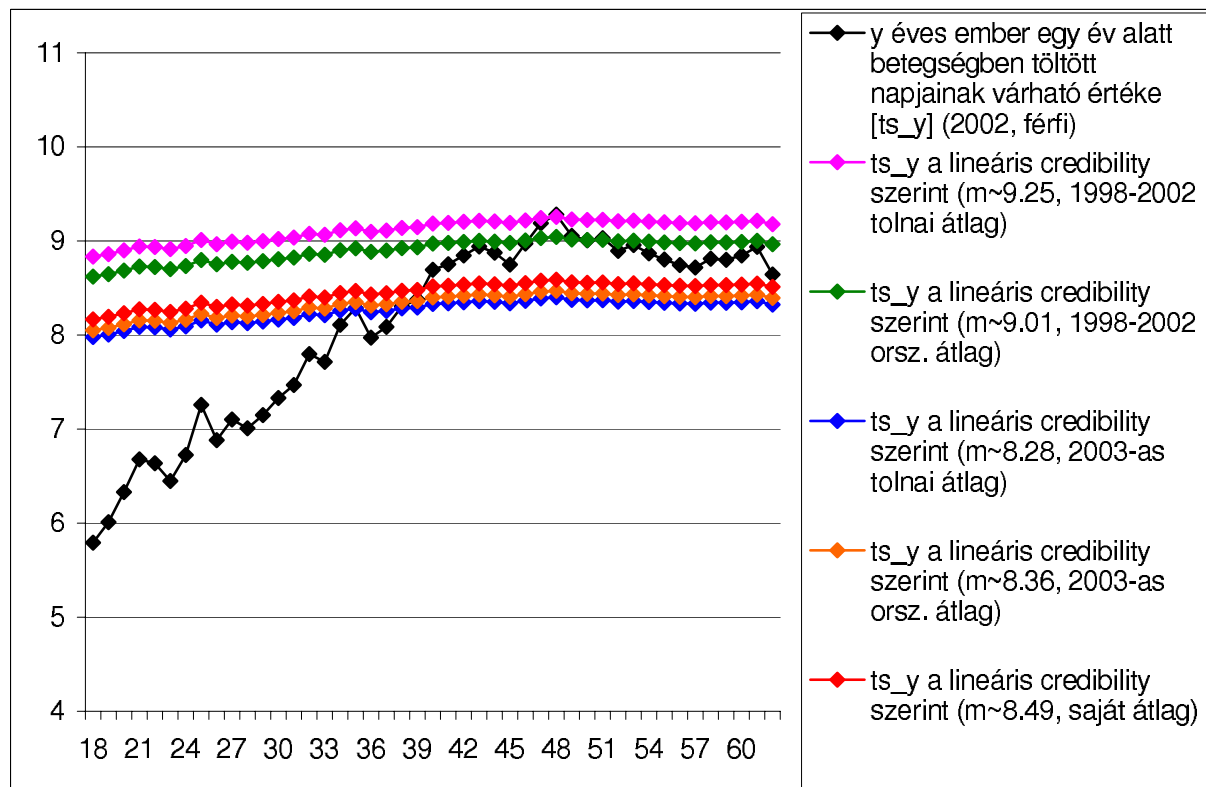


4.2. ábra. Ápolási esetek száma a különböző portfóliókra a kor függvényében

Visszatérve a credibility-elmélet alkalmazhatóságához, az biztosan látszik, hogy ez a feltétel nem teljesül. Rögtön megállapíthatjuk tehát, hogy az elméletet nem fogjuk tudni alkalmazni, ennek ellenére megpróbáljuk végigszámolni. Amit kapunk, az nem lesz optimális becslés, hiszen a feltételek nem állnak fenn, arra mindenesetre jó lesz, hogy összehasonlítsuk az eredeti, egyszerű átlagolással kapott becsléssel. Kiszámolva az egyes korcsoportokhoz tartozó mintaátlagokat és korrigált tapasztalati szórásnégyzeteket, azt tapasztaljuk, hogy ezek igenis függenek a korcsoporttól, ellentétben a fentebb ismertetett modell feltételeivel. (Ami persze várható, hiszen egy fiatal átlagban nyilván kevesebb időt tölt betegen, mint egy idős ember.) A továbbiakban ezért $a = D^2(E(X_{jr})|\Theta_j) = D^2(\mu(\Theta_j))$ -t az egyes korcsoportokhoz tartozó várható értékek korrigált tapasztalati szórásnégyzetével, $s^2 = E(D^2(X_{jr})|\Theta_j) = E(\sigma^2(\Theta_j))$ -t pedig a szórásnégyzetek átlagával fogjuk helyettesíteni.

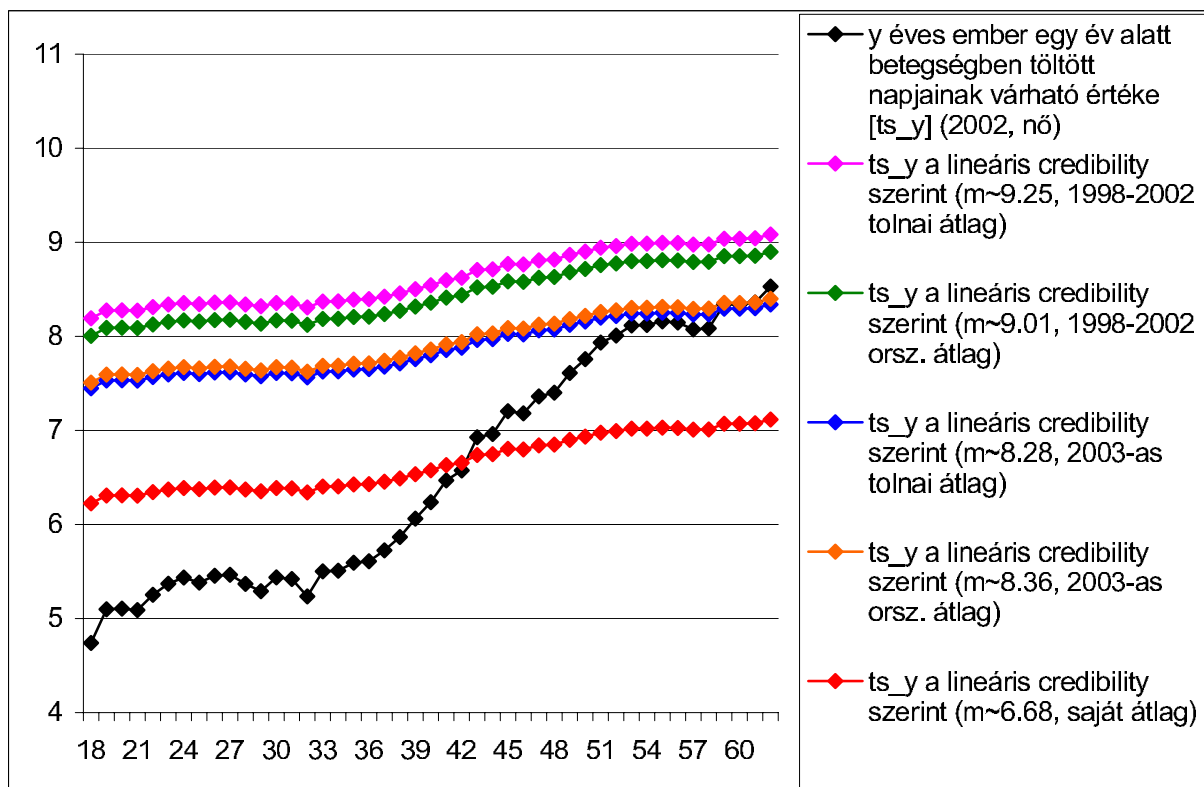
Mivel a csoportok elemszámai különbözőek, különböző $at/(s^2 + at)$ hányadosokat fogunk kapni, így tovább rondítva a már eddig is jócskán átalakított módszeren, ezek átlagát vesszük, és ezzel, mint Bühlmann-faktorral végezzük el a korcsoportokhoz tartozó becslések "korrekcióját". Ehhez természetesen még kell az m , mint általános tapasztalat (avagy ezt helyettesíthetjük az összes megfigyelés átlagával). m -nek többféle értéket választhatunk: 1995-től rendelkezésre áll az egész országra vonatkozó átlagos kórházi ápolási tartam, illetve ugyanez megyénként is. Megtehetjük például, hogy az 1997-tel záruló

adatsorhoz a '95 és '97 közötti tolnai átlagot választjuk, de vehetjük a legfrissebb, 2003-as országos értéket is. Előbbivel az lehet a célunk, hogy következtetéseket vonjunk le a kapott adatokból a portfólió összetételére vonatkozóan, míg utóbbi – frissebb adat lévén – egy elkészítendő termék díjmeghatározásánál lehetne lényeges.



4.3. ábra. A ts_y becslések összehasonlítása a különböző portfóliókra: 2002, férfiak

Meglehetősen sok ts_y input-vektor gyártható tehát ezen becslési eljárással – ami ugyan a credibility-elmélet alapján készült, de annak optimalitása a feltételek hiányában nem igaz rá. A 4.3.-4.6. ábrán a ts_y -ra adott egyszerű, illetve különböző m -ekkel módosított becslések grafikonja látható a négy különböző portfólióra. Az ömlesztett adatokból készített ábrákat most mellőzzük, semmi újat nem mondanak a többi négyhez képest. Nézzük először a 2002-es férfi adatokhoz tartozó 4.3. grafikont. Több dolgot is leolvashatunk: egyrészt rögtön látszik, hogy az eredeti becsléshez képest a credibility-becslések jóval szűkebb határok közt mozognak, a két szélsőérték különbsége egy m esetén sem haladja meg az $1/2$ -et – ennek oka, hogy itt a Bühlmann-faktor 0.12 körülnek adódott, azaz a saját tapasztalat meglehetősen kis súllyal esik latba. Ennek megfelelően a credibility-becslések a nekik megfelelő m érték körül mozognak, az idősebb korosztályoknál gyakorlatilag konstansként, így az egyes grafikonok egymáshoz képesti helyzete az egyes m -értékek viszonyának felel meg. Utóbbi megállapítás persze igaz a többi három portfólióra is, azonban ott az eltérő (nagyobb) Bühlmann-faktorok miatt a credibility-becslések görbéi merede-



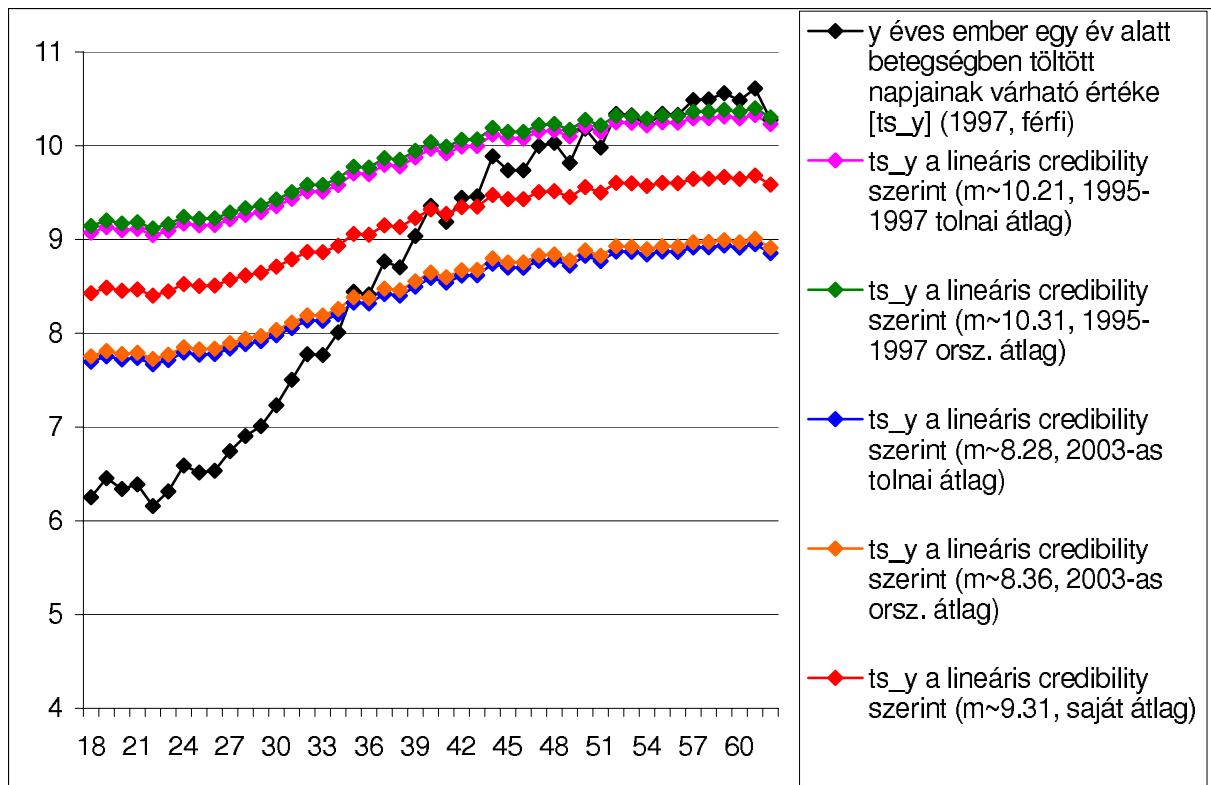
4.4. ábra. A ts_y becslések összehasonlítása a különböző portfóliókra: 2002, nő

kebbek lesznek: a 2002-es női adatok Bühlmann-faktora körülbelül 0.24, az 1997-es férfi adatoké 0.28 körüli, a legmagasabb pedig az 1997-es női portfólióra adódik, 0.37 (ami egyébként szintén nem túl magas).

Az m értékekre visszatérve általában elmondható, hogy az ápolási napok átlagos száma folyamatosan csökken 1995 óta, a tolnai érték pedig 2001 előtt egy kivétellel (1995) mindig az országos átlag feletti volt, 2001 után pedig mindig alatta volt annak (a 2001-es adatok hiányoznak) – lásd 4.1. táblázat. (Korábban már ejtettünk szót arról, hogy a betegen töltött napok várható számának csökkenése az életszínvonal javulására utal.)

Év	2003	2002	2001	2000	1999	1998	1997	1996	1995
Országos átlag	8.36	8.49	-	8.9	9.16	9.49	9.79	10.34	10.81
95-97/98-02 átlag	-	9.01					10.31		
95-02 átlag	-	9.57							
Tolnai átlag	8.28	8.31	-	9.01	9.61	10.08	9.95	10.41	10.28
95-97/98-02 átlag	-	9.25					10.21		
95-02 átlag	-	9.66							

4.1. táblázat. Ápolás átlagos tartama napokban

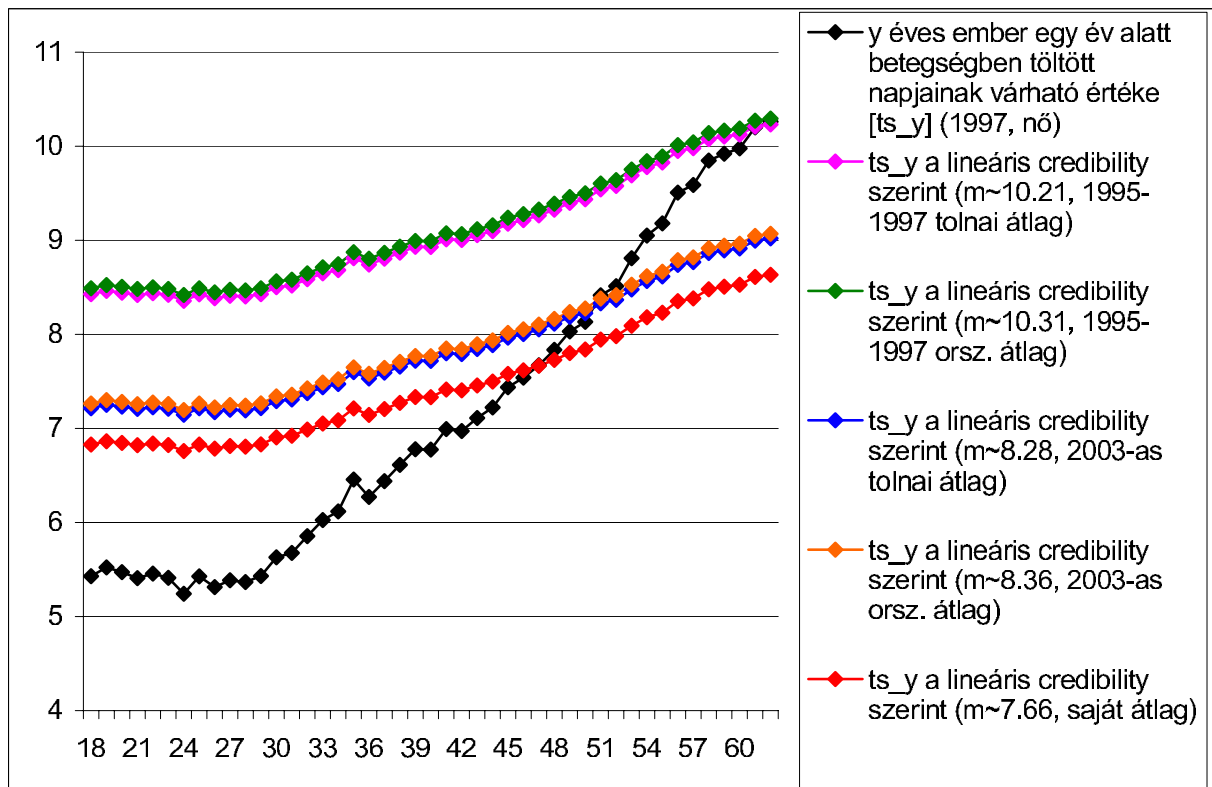


4.5. ábra. A ts_y becslések összehasonlítása a különböző portfoliókra: 1997, férfiak

Az 1995 és 1997 közötti átlag, melyet az 1997-es adatokhoz használtunk, a kezdeti év viszonylag nagy, fordított eltérése miatt Tolna megyére alacsonyabb, mint az egész országra, a 2002-es portfoliókra használt 1998 és 2002 közötti átlag pedig éppen fordítva, s ugyanez igaz a 2002-ig meglévő összes érték átlagát véve. A 2003-as adatok közül, melyeket mind a négy esetben felhasználtunk, a tolnai érték alacsonyabb, és ezek természetesen kisebbek, mint a korábbi évek bármilyen átlaga.

Visszatérve a 4.3.-4.6. ábrákhoz, a legérdekesebb a saját mintaátlag elhelyezkedése a többihez képest. Az, hogy a megelőző évek átlagos értékeihez, mint m -ekhez tartozó grafikonok mind a négy esetben a saját mintaátlaghoz tartozó grafikon felett vannak, azt jelenti, hogy a portfoliókban szereplő emberek mindig az átlagnál kevesebbet betegeskedő rétegből kerültek ki. A férfi portfoliók esetében a saját átlag a 2003-as m -ek felett van, a nőknél viszont alatta. Előbbieknél tehát a későbbi teljes populáció átlaga már kisebb, mint a portfolióbelieké, utóbbiaknál viszont a portfolió "egészségi állapota" még a későbbi teljes populációénál is jobb.

Érdekesség még, hogy az eredeti becslés, amely a várható érték, nem monoton növekvő a korosztályok függvényében (de azért emelkedő trendet mutat) – a nők esetében kevesebb, a férfiaknál több korcsoportnál van probléma. Összevetve az 1997-es és 2002-es adatokat, azt tapasztaljuk, hogy a lokális minimum- és maximumhelyek nem ugyanazoknál a korosz-



4.6. ábra. A ts_y becslések összehasonlítása a különböző portfóliókra: 1997, nő

tályoknál vannak. Ebből arra következtethetünk, hogy ezek az eltérések, melyek elrontják a monotonitást, a portfóliók eltérő összetétele miatt lépnek fel.

Láthatjuk továbbá, hogy az esetszámoknál látott eltérés a 2002-es női adatoknál (4.2. ábra), mely a fiatalabb korosztályok felülreprezentáltságára utalt, az ápolási napok átlagos számára nincs észrevehető hatással, azaz már a többi portfólió alacsonyabb esetszáma is jó becsléseket szolgáltat az átlagra.

Összességében azt mondhatjuk, hogy ebben az esetben a credibility-elmélet valóban nem kínál túl jó alternatívát az egyszerű mintaátlaggal szemben, hiszen a (jelen esetben több sebből vérző) Bühlmann-faktorok meglehetősen alacsony volta miatt a credibility-becslések túlságosan is kiegyenlítik a különböző y korokhoz tartozó ts_y értékeket. A következő fejezetben többek között azt is megvizsgáljuk, hogy a díjra milyen hatással vannak.

4.5. Díjtáblázatok különböző input paraméterek esetén

A díjtáblázatokat elkészítő programoknak a fent részletesen kitárgyalt ts_y vektorokon kívül meg kell adni egy halandósági tábla megfelelő sorait is. Halandósági táblák 1998-tól 2001-ig (1999 kivételével) rendelkezésünkre állnak. Ahogy az m értékeknél, itt is választhatjuk a portfóliónak megfelelő utolsó évet vagy a legfrissebb adatot, most ez utóbbit

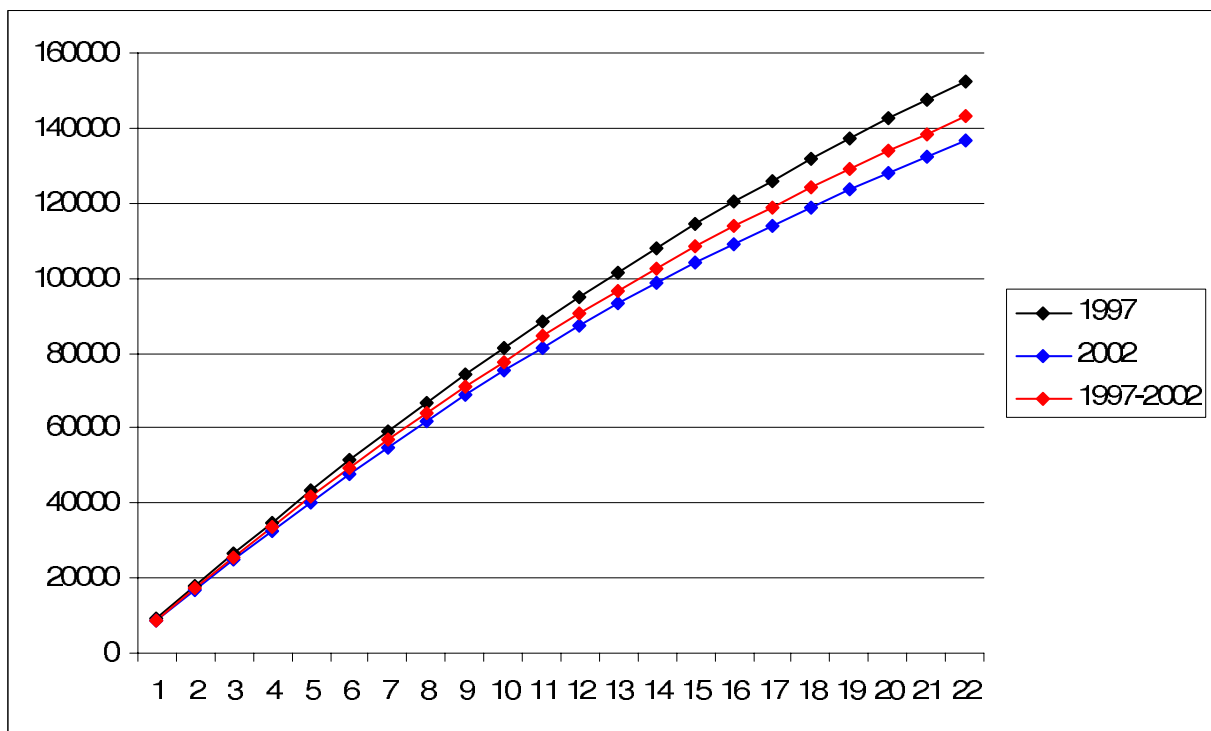
tesszük. További bemenő paramétereink:

- a b biztosítási összeget az elméleti számításoknál 1-nek vettük, ez ott a következőt jelentette: mivel években számolunk, folytonosnak tekintve az időt, az ügyfél akkor kapna 1 Ft-ot egy adott évben, ha végig beteg lenne, ugyanis előbbihez – eltekintve a diszkontálástól – $\int_y^{y+1} \chi_{\Gamma, \{S(x+t)=i | S(x)=a\}} dt = 1$ -nek kell teljesülnie. Ha most azt tesszük fel, hogy a kifizetés minden betegen töltött napon jár, akkor ez napi 1/365 Ft-ot jelent, tehát például napi 1000 Ft-os juttatáshoz a biztosítási összeget 365000-nek kell vennünk;

- az i technikai kamatlábat a biztosítóknál gyakori 3.5%-nak vesszük;

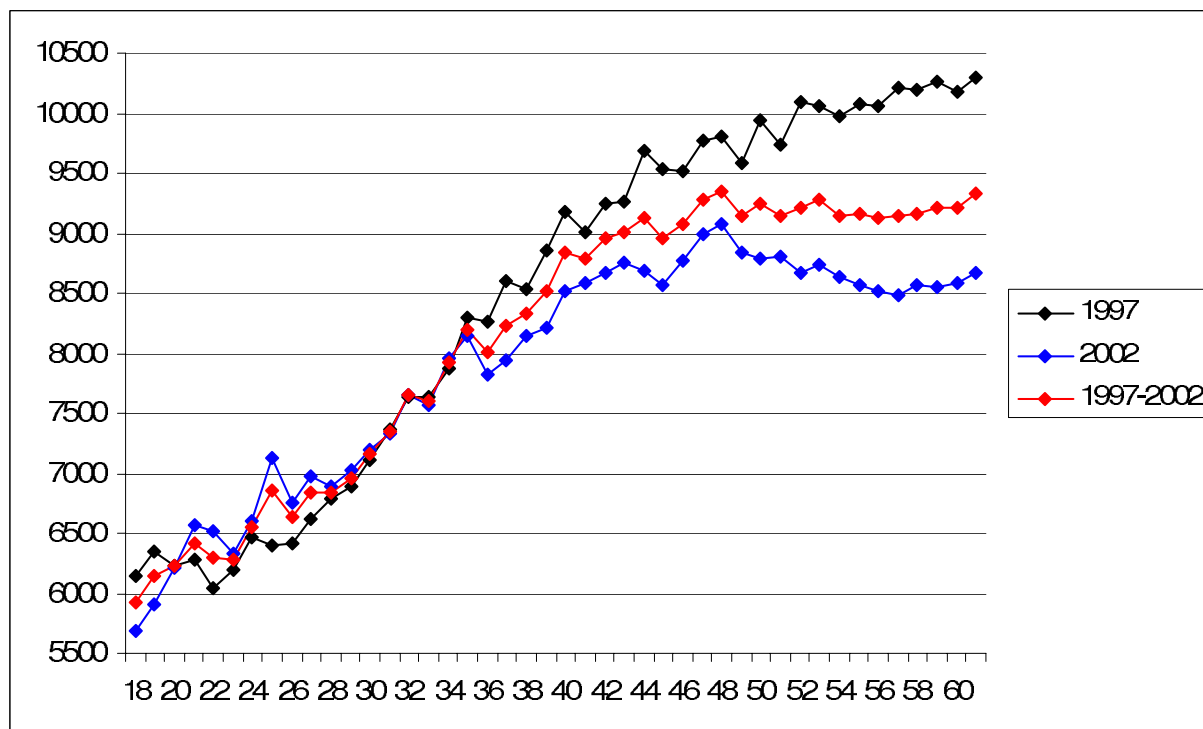
- az adott díjelv megfelelő paraméterét várható érték elv esetében $\lambda = 0$ -nak vesszük (nettó várható érték elv), szórás elv mellett $\alpha = 0.01$ -gyel, szórásnégyzet elv esetén pedig $\beta = 0.000001$ -gyel számolunk.

Ha ezen paramétereket rögzítettük, még mindig nagyon sokféle díjat számolhatunk. Az alábbiakban a következő három szempont szerint hasonlítjuk össze a kiszámolt díjakat: melyik portfólió adataival számoltunk, milyen díjelvvel, és milyen becslést használtunk a ts_y értékekre. A háromból két szempontot mindig rögzítünk, és a harmadikban lehetséges eseteket összehasonlítjuk, még hozzá úgy, hogy a kapott díjakat ábrázoljuk az n tartam függvényében, az x belépési kort 40-nek rögzítve, illetve fordítva, x függvényében $n = 1$ éves tartam mellett. (Mindezeket a számításokat külön végezzük el a nők és a férfiak esetében.)



4.7. ábra. A portfóliók hatása a díjra – 40 éves belépési kor, változó tartam

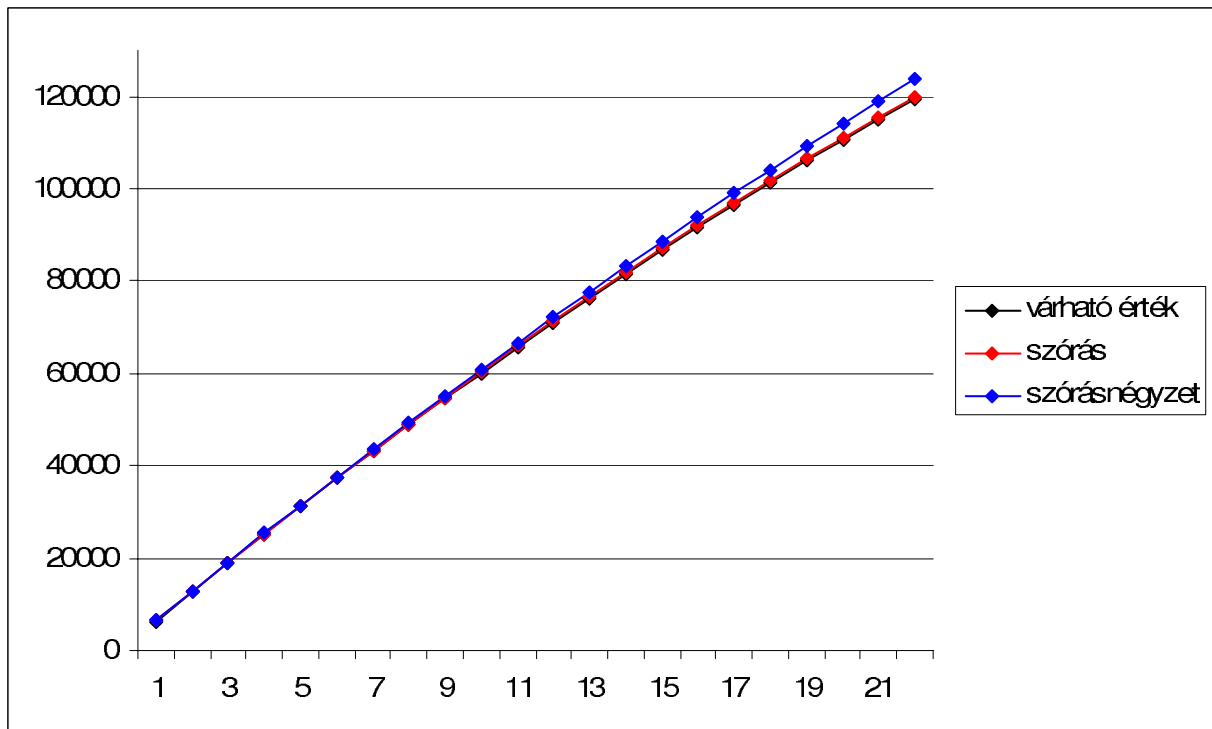
Elsőként fixáljuk a díjlevelet és a ts_y -becslést: előbbi legyen a várható érték elv, utóbbi pedig az egyszerű mintaátlag. A portfólió lehet az 1997-es vagy a 2002-es, illetve a kettő adatait egybeolvaszthatjuk. A 4.7. és 4.8. ábra a kapott grafikonokat szemlélteti a férfi portfóliók esetén. Előbbit vizsgálva, mely a rögzített 40 éves belépési korra vonatkozik, láthatjuk, hogy jellegüket tekintve a görbék azonosak, csak az 1997-es adatokból számolt díjak magasabbak, mint a 2002-esek, a kettő egyesítéséből kapott értékek pedig nyilvánvalóan a kettő között helyezkednek el.



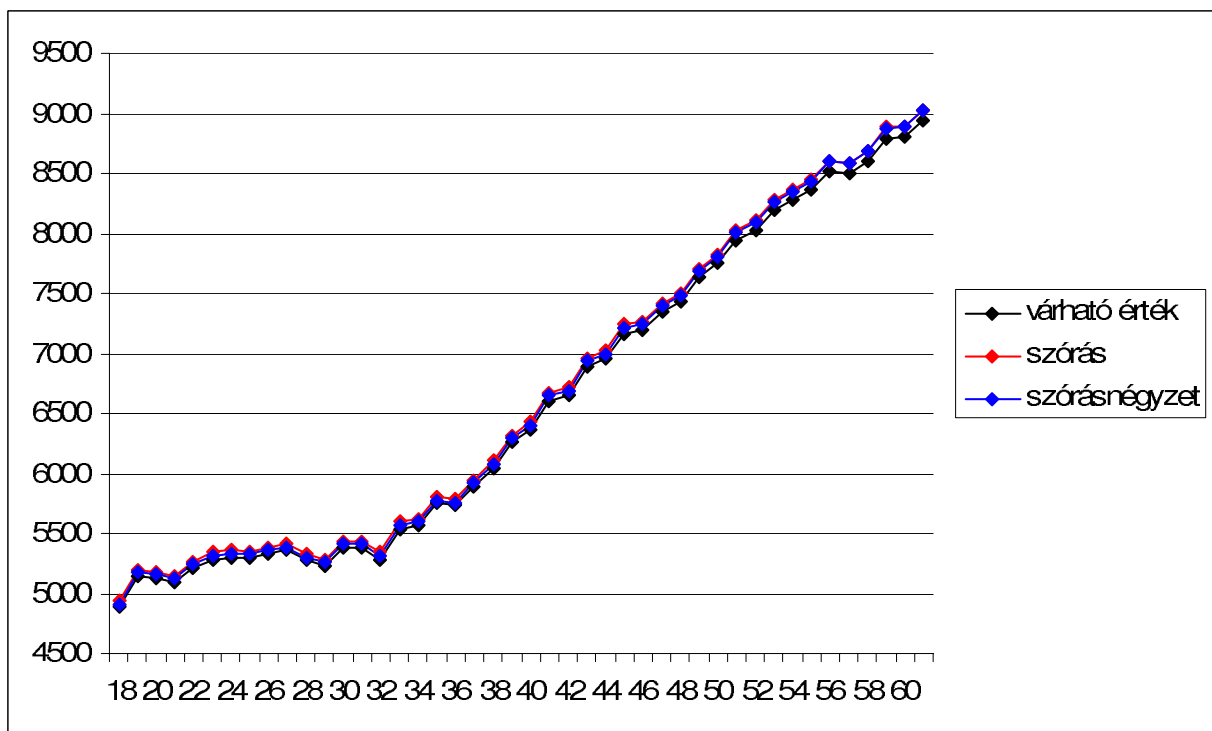
4.8. ábra. A portfóliók hatása a díjra – 1 éves tartam, változó belépési kor

Megfigyelhető továbbá, hogy a rövidebb tartamokra jóval kisebb az eltérés: 1 év esetén a két külön portfólióra számolt díjak eltérése kevesebb, mint 400 Ft, 10 évre kb. 3500 Ft, 20 évre pedig majdnem 9000 Ft. Ennek oka valószínűleg az, hogy ugyanez a jelenség az ápolás átlagos tartamánál is megfigyelhető (ha a kor függvényében ábrázoljuk) – lásd 4.1. ábra. Gyakorlatilag ugyanezek mondhatók el a 4.8. ábráról is, ahol a tartamot rögzítettük, és hasonló grafikonokat kapunk a női portfóliókra is, csak ott az 1997-es és a 2002-es díjak távolsága valamivel kisebb, a két görbe lassabban válik el egymástól.

Lényeges különbség tehát nincs a portfóliók közt, ezért a továbbiakban az összesített adatokkal fogunk dolgozni, ugyanis így nagyobb a rendelkezésre álló mintánk. Rögzítsük tehát ezt, továbbá a ts_y mintaátlagos becslését, és hasonlítsuk össze a különböző díjleveket. Most tekintsük a női portfóliókat.



4.9. ábra. A díjelvek hatása a díjra – 40 éves belépési kor, változó tartam



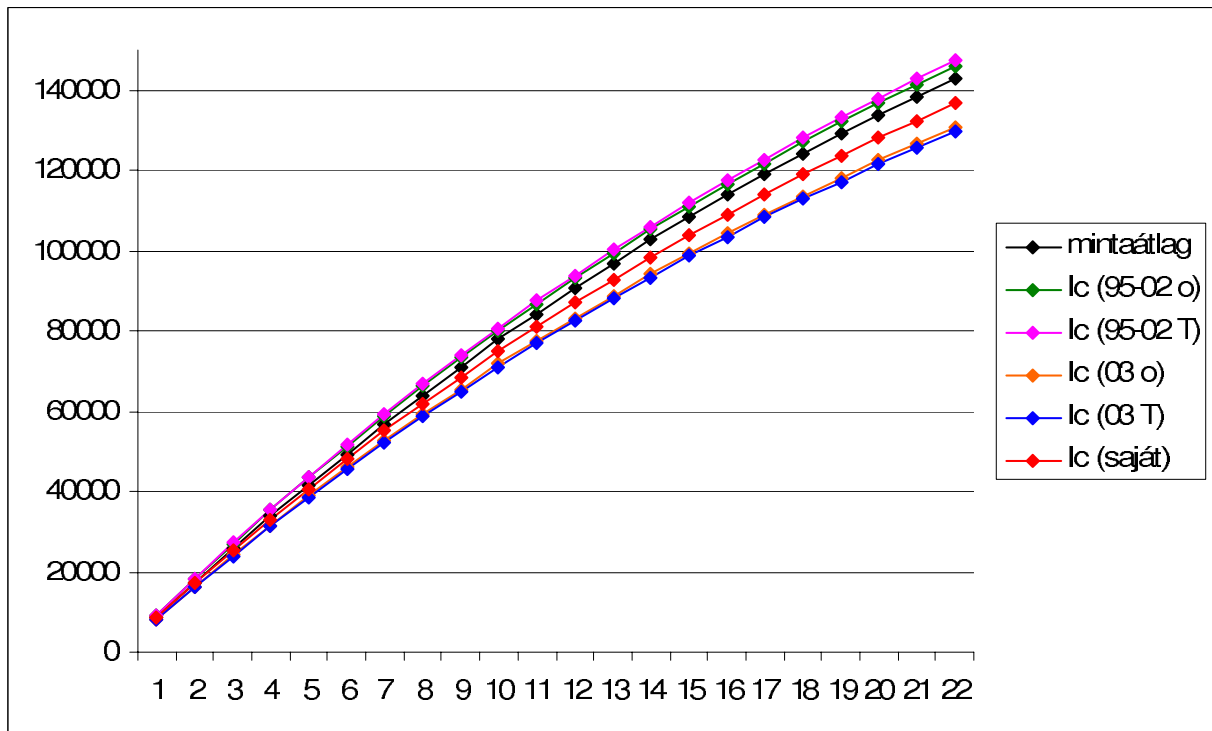
4.10. ábra. A díjelvek hatása a díjra – 1 éves tartam, változó belépési kor

A 4.9. ábrán látható, hogy a szórás és a szórásnégyzet elvek annyiban módosítják a várható értéként számolt díjat, hogy valamivel megemelik azt. Előbbi esetén ennek a

biztonsági pótléknak a mértéke sehol sem haladja meg az 1000 Ft-ot – az ábrán ezért nem is igazán különülnek el a grafikonok. A szórásnégyzet elv esetén a pótlék nagysága rövidebb tartamokra kisebb, mint a szórás elvé (ahogy ez – éles szemű olvasóink számára – a 4.10. ábrán is megfigyelhető), hosszabbakra viszont nagyobb, de az 5000 Ft-ot nem lépi túl. Ezek tehát reálisan alkalmazható módosítások. (Hasonló mondható el a férfi adatokra, csak ott a pótlékok valamivel magasabbak.)

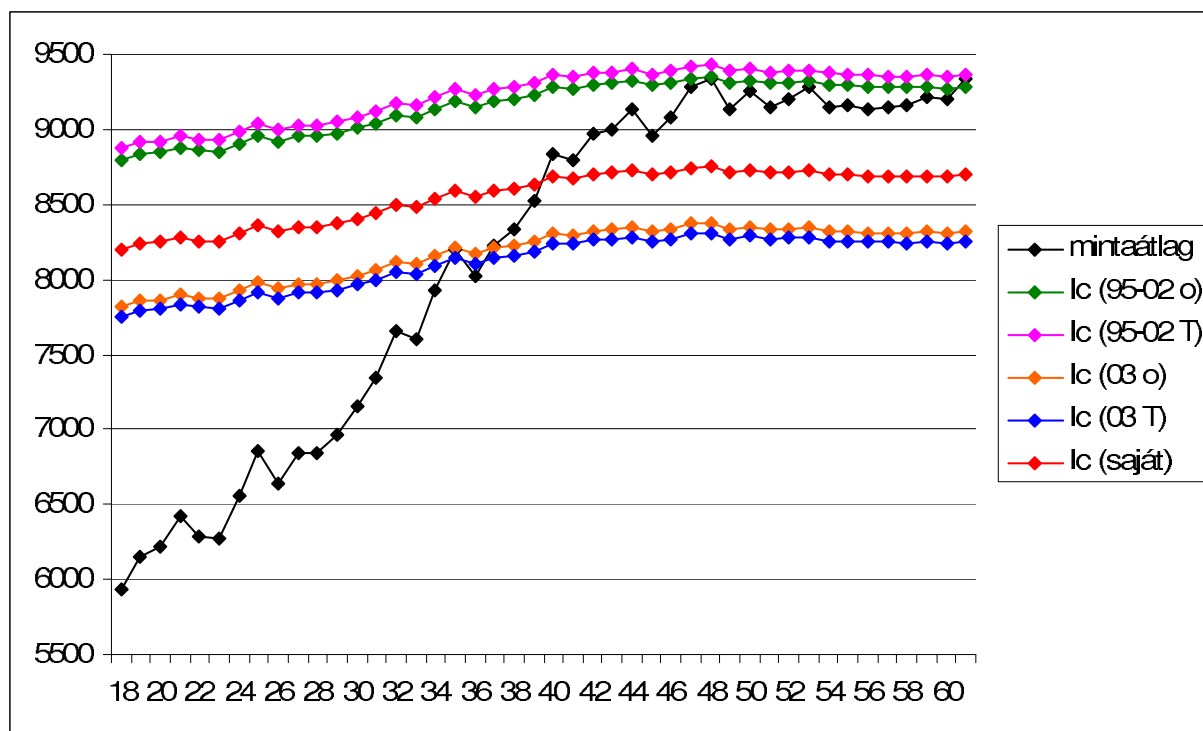
Ha a szórás elv paraméterének nagyságrendjét csökkentjük, akkor a változás elhanyagolható lesz, s ez rövidebb tartamok esetén igaz a szórásnégyzet elvre is – hosszabb tartamokra ott a változás pár száz Ft-nyi. A paraméter nagyságrendjének növelésével a hosszabb tartamok díjai viszont irreálisan megnőhetnek – pl. a szórásnégyzet elv esetén $\beta = 0.0001$ mellett egy 40 éves nőnek majdnem 600000 Ft-jába kerülne egy 20 éves biztosítás, szemben a várható érték elvből adódó 120000 Ft-tal. Amennyiben tehát alkalmazni szeretnénk a díjat pótlékkal kiegészítő elveket, akkor ezt körülbelül ilyen nagyságrendű paraméterek mellett tehetjük.

Vizsgáljuk most meg, hogy a credibility-becslések hogyan változtatják meg a díjat, rögzítsük tehát a várható érték elvet és az ömlesztett portfóliókat, s tekintsük most ismét a férfi adatokat.



4.11. ábra. A ts_y becslések hatása a díjra – 40 éves belépési kor, változó tartam

A 4.11. ábrán látható, hogy rögzített belépési kor mellett a tartam függvényében tekintve a díjakat, a credibility-becslések nem módosítanak a grafikon alakján, de a díjakat



4.12. ábra. A ts_y becslések hatása a díjra – 1 éves tartam, változó belépési kor

bizonyos mértékben megváltoztatják. A különböző m -ekhez tartozó különböző "díjgörbék" egymáshoz képest úgy helyezkednek el, mint a megfelelő m -ek – ahogy ezt már a 4.3.-4.6. ábráknál is megfigyelhettük. Az 1995 és 2002 közötti átlaggal, mint m -mel számolt díjak valamivel magasabbak az eredetinel, de az eltérés nem haladja meg az 5000 Ft-ot, 3000 fölé is csak magasabb tartamok esetén megy. A 2003-as m -ekkel kalkulált értékek alacsonyabbak az eredetinel, itt hosszabb tartam esetén az eltérés akár 10000 Ft körüli is lehet. A saját átlaggal kapott díjak pedig a kettő között helyezkednek el, s valamivel alacsonyabbak az eredetinel. Az, hogy a 2003-as, friss adatokkal módosított értékek akár jelentősen alacsonyabbak lehetnek az eredetinel, arra utal, hogy a portfólió meglehetősen "rég" (azóta csökkent az átlagos ápolási tartam), aminek persze az lehet az oka, hogy 1997 előtti adatok is szerepelnek benne. Mindenesetre látjuk, hogy rögzített belépési kor mellett a credibility-becslés nem változtat lényegesen a "díjgörbe" jellegén.

A 4.12. ábra viszont azt mutatja, hogy $n = 1$ év rögzített tartam mellett igen: míg a mintaátlaggal számolt díjak különbsége a két szélső belépési korra meghaladja a 3000 Ft-ot, a credibility-becslések kiegyenlítik a díjakat az egyes korosztályok közt, a szélsőértékek különbsége 500 Ft alatt marad. Az előző, 4.4. fejezet végén említett kiegyenlítő hatás tehát itt jelenik meg a díjszámításban, kissé eltorzítva azt – ezért tehát nem tanácsos alkalmazni a credibility-becslést. Egyébként az is leolvasható, hogy mindez az idősebb korosztály javára történik, gyakorlatilag a díj arra a szintre emelkedik mindenki számára, ami korábban

csak rájuk volt jellemző. (Az különböző m -ekhez tartozó görbék egymáshoz való viszonya ugyanolyan, mint a 4.11. ábra esetén.) A női adatokhoz tartozó grafikonok hasonlóak, azzal a különbséggel, hogy a mintaátlaggal kapott egyszerű becslés és a saját átlaggal, mint m -mel számolt credibility-becslés díjai nem az 1995-2002-es átlagos és a 2003-as m -ekből számoltak között helyezkednek el, hanem mindezek alatt (ahogy a 4.3.-4.6. ábrák esetén is), itt tehát a 2003-as m nem csökkenti, hanem növeli az árat. Korábban volt szó róla, hogy ennek oka az lehet, hogy a női portolió, bár meglehetősen "rég", mégis jobb egészségi állapotú lehet még a mostani átlagnál is (ellentétben a fent elemzett férfi portfolióval).

A 4.7.-4.12. ábrákat tekintve elmondható még, hogy rögzített belépési kor mellett a díj a tartam függvényében minden esetben monoton növekedő (ennek nyilván így is kell lennie), azonban fix tartam mellett a belépési kor függvényében ugyanez nem mondható el – ennek oka nyilván a speciális portfólió alapján történő díjszámítás.

Befejezésül a 4.2.a)-4.2.d) táblázatokban bemutatjuk az ömlesztett férfi portfólióból, ts_y -t mintaátlaggal becsülve, várható érték, illetve $\alpha = 0.01$ paraméterű szórás elvvel készített díjtáblázatok egy-egy részletét.

Belépési kor	Tartam	1	5	10	20	30	40
20		6224	29672	56533	104480	143580	171750
30		7160.1	35162	67632	122780	162520	-
40		8835.2	41778	77797	133850	-	-
50		9250.6	43021	79074	-	-	-
60		9207.2	-	-	-	-	-

a) Nettó várható érték elv alapján, férfiak

Belépési kor	Tartam	1	5	10	20	30	40
20		6286.2	29822	56795	105050	144500	173000
30		7231.7	35340	67948	123450	163540	-
40		8923.6	41989	78157	134560	-	-
50		9343.1	43238	79438	-	-	-
60		9299.2	-	-	-	-	-

b) Szórás elv ($\alpha = 0.01$) alapján, férfiak

Belépési kor	Tartam	1	5	10	20	30	40
20		5129.3	24313	45169	79680	109890	135250
30		5386.5	25373	48682	91299	127070	-
40		6363.4	31220	60116	110570	-	-
50		7750.9	37526	71177	-	-	-
60		8807.6	-	-	-	-	-

a) Nettó várható érték elv alapján, nők

Belépési kor	Tartam	1	5	10	20	30	40
20		5180.6	24436	45377	80104	110590	136250
30		5440.4	25502	48909	91800	127900	-
40		6427.1	31378	60397	111180	-	-
50		7828.5	37715	71508	-	-	-
60		8895.7	-	-	-	-	-

b) Szórás elv ($\alpha = 0.01$) alapján, nők

4.2. táblázat. Díjtáblázatok

5. fejezet

Összefoglalás, továbblépési lehetőségek, köszönetnyilvánítás

5.1. Összefoglalás

A dolgozatban PHI-termékekkel foglalkoztam, melyek az ügyfél halála esetén folyamatos kifizetést biztosítanak. Először egy általános modellt ismerttettem, mely azonban a nemzetközi szakirodalomban megszokott módon csupán a várható érték elvvel való díjszámítással foglalkozik. Saját eredményem, hogy a modellt kiterjesztettem a szórás és szórásnégyzet elvekre is. Ezután néhány gyakorlatban is alkalmazható, az általános modellel kapcsolatban lévő eljárást vizsgáltam (s egészítettem ki a fenti díjelvekre vonatkozó formulákkal), melyek közül a Manchester-Unity módszer alkalmas volt arra, hogy hazai adatok alapján számoljunk vele. Ezen adatok egy része (az alapja) egy biztosítótól származik, és két időszakra vonatkozóan tartalmazza a biztosítottak ápolási tartamait, korcsoportok szerinti bontásban. Az országos átlagoknál ez utóbbi szempont hiányzik, ezért a credibility-elmélet segítségével megpróbáltam ötvözni a kettőt. Az optimalitás feltételei nem álltak fenn, ennek ellenére a becsléseket végigszámoltam, és a kapott eredményeket összehasonlítottam az egyszerű, mintaátlaggal kapott becsléssel. Ezekből néhány következtetést vonhattunk le a portfóliók összetételére vonatkozóan, azonban a credibility-elmélet alkalmazása összességében nem bizonyult jó alternatívának, ami később a díjszámításban is megmutatkozott. Ez utóbbi elvégzésére néhány apró MATLAB-programot írtam, melyek a biztosítás bizonyos paramétereinek függvényében díjtáblázatokat készítenek. A különböző input paraméterekből adódó eltéréseket megvizsgáltam, eközben néhány díjtáblázatot részleteiben bemutatva. Ahogy pár sorral feljebb utaltunk rá, a credibility-becslések itt nem produkáltak túl jó eredményeket, a portfóliók és a (megfelelő paraméterű) díjelvek megváltoztatásával azonban a biztosítás díja körülbelül azonos mértékben változott meg a különböző belépési korok és tartamok függvényében.

5.2. A továbblépés lehetőségei

A dolgozatban egy speciális betegségbiztosítási termékről beszéltünk. Hasonló modellek építhetők fel más konstrukciókra is, s ezeknél is végig lehetne számolni a kockázat szórásnégyzetére vonatkozó formulákat. Ilyen, hazánkban is előforduló termékek például a DDI (angolul: Dread Disease Insurance), magyarul rettegett, avagy kiemelt kockázatú betegségek biztosítása, mely egy összegű kifizetést biztosít, amennyiben az ügyfél az előre meghatározott kritikus betegségek valamelyikét megkapja (ilyenek például a szívinfarktus, a daganatos megbetegedések vagy a stroke). Ehhez hasonló a műtéti beavatkozásokra kötött biztosítás, mely kapcsolódhat egy "eredeti" DDI-hez is. Kiemelt kockázatú betegségekre szóló szerződéssel egyébként tipikusan életbiztosítások kiegészítőjeként találkozhatunk. Biztosítótól függően léteznek további konstrukciók a munkaképtelenség vagy rokkantság esetére – ezek persze öszemosódhatnak az előzőekkel, illetve egyfajta átmenetet képeznek a baleseti rokkantságon keresztül a balesetbiztosításokhoz. Ide sorolható továbbá az idős, gondozást igénylő emberek biztosítása is – angol rövidítéssel ezeket összefoglalóan LTC-nek nevezzük (Long Term Care).

A vizsgált modellen belül maradva meg lehet próbálni az n évestől eltérő, más szerződési feltételekkel rendelkező PHI-konstrukciókra olyan módszereket kidolgozni, melyek végigszámolhatók hazai adatok alapján. Természetesen több és részletesebb magyar adat birtokában jobb és pontosabb becslések adhatók a módszerek bemenő paramétereire, továbbá lehet kísérletezni a mintára eloszlás illesztésével, melynek (amint korábban említettük) valószínűleg keverék eloszlásnak kell lennie.

5.3. Köszönetnyilvánítás

A szerző megköszöni Arató Miklós témavezetői munkáját, valamint Csurgai Linda adatszerzésben nyújtott segítségét.

Irodalomjegyzék

- [1] D.J. Bond. Permanent sickness insurance. *Journal of the Institute of Actuaries Students' Society, London*, 17:195–224, 1963.
- [2] I.M.F. Cordeiro. A multiple state model for the analysis of permanent health insurance claims by cause of disability. *Insurance: Mathematics and Economics*, 30:167–186, 2002.
- [3] C.G. Dillner. New bases for non-cancellable sickness insurance in sweden. *Scandinavian Actuarial Journal*, LII:113–124, 1969.
- [4] C.G. Dillner. New bases for long term sickness insurance in sweden from 1973. *Scandinavian Actuarial Journal*, (3):167–173, 1974.
- [5] H. Ekhult. Technique and experience in sickness and disability insurance in sweden. *Transactions of the 21st International Congress of Actuaries, Zürich-Lausanne*, 3:67–82, 1980.
- [6] S. Haberman. The central sickness rate: A mathematical investigation. *Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki*, 3:83–89, 1988.
- [7] S. Haberman and E. Pitacco. *Actuarial Models for Disability Insurance*. Chapman & Hall, London, 1999.
- [8] L. Kallström. Long-term individual sickness insurance according to the 1984 rules (g84). *Sverige Reinsurance Company – 75 Years, Uppsala*, pages 31–50, 1990.
- [9] P. Mattsson and A. Unneryd. Experience bases and assessment of premiums in swedish long term health insurance. *Transactions of the 18th International Congress of Actuaries, München*, 4:523–533, 1968.
- [10] A. Neill. *Life Contingencies*. Heinemann, London, 1977.
- [11] T.K. Ore, R. Sand, and G. Trier. New technical basis for life and pension insurance in norway n1963, r1963, k1963. *Scandinavian Actuarial Journal*, XLVII:164–216, 1964.
- [12] E. Pitacco. Actuarial models for pricing disability benefits: Towards a unifying approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 16:39–62, 1995.
- [13] A.E. Renshaw and S. Haberman. On the graduations associated with a multiple state model for permanent health insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 17:1–17, 1995.

- [14] R. Sand. Disability pension insurance. a new method for calculation of premiums. *Transactions of the 18th International Congress of Actuaries, München*, 1:529–538, 1968.
- [15] R. Sand and J. Riis. Some theoretical aspects and experience with a simplified method of premium rating in disability insurance. *Transactions of the 21st International Congress of Actuaries, Zürich-Lausanne*, 3:251–263, 1980.
- [16] A. Sandström. Long-term health insurance. *Sverige Reinsurance Company – 75 Years, Uppsala*, pages 101–140, 1990.
- [17] L.G. Söderström. Actuarial methods and results in the sickness insurance ags. *Transactions of the 21st International Congress of Actuaries, Zürich-Lausanne*, 3:293–305, 1980.
- [18] H.R. Waters. Some aspects of the modelling of permanent health insurance. *Journal of the Institute of Actuaries*, 116:611–624, 1989.