A doktori értekezés tézisei

Rúdszerkezetek és tensegrity gráfok merevsége a síkban

Szabadka Zoltán

Témavezető: Jordán Tibor, egyetemi docens

ELTE Matematika Doktori Iskola

Vezetője: Laczkovich Miklós, egyetemi tanár

Alkalmazott matematika doktori program

Vezetője: Michaletzky György, egyetemi tanár

2010

1. Bevezetés

Doktori értekezésemben gráfok és síkbeli realizációik különféle merevséggel kapcsolatos tulajdonságait vizsgálom.

Az egyik kérdéskör a gráfrealizációk kapcsán az, hogy bizonyos csúcspárok távolsága mennyire meghatározott, ha a gráf éleinek hossza rögzített. A kérdés tehát az, hogy ha adott egy gráf realizációja, akkor van-e ugyanannak a gráfnak egy másik realizációja, amelyben az élek hossza megegyezik, viszont két kiszemelt csúcspár távolsága különböző. Ha nincsen, akkor a csúcspárt globálisan linkeltnek nevezzük az adott realizációban. Egy gráfban két csúcsot akkor nevezünk globálisan linkeltnek, ha a gráf minden generikus realizációjában – ahol a csúcsok koordinátái algebrailag függetlenek – globálisan linkeltek. A dolgozat első részében leírom a globálisan linkelt csúcspárok jellemzését két fontos gráfosztály esetén, valamint megfogalmazok egy sejtést tetszőleges gráfok globálisan linkelt csúcspárjainak jellemzéséről.

Ha egy gráfrealizáció esetén bármely két csúcs távolsága meghatározott az élhosszak ismeretében, akkor a realizációról azt mondjuk hogy globálisan merev. Ismeretes [8], hogy egy gráf generikus realizációja mikor globálisan merev a síkban. Ha azonban a realizáció tetszőleges lehet, akkor már egydimenziós esetben is NP-teljes [13] annak eldöntése, hogy a realizáció globálisan merev-e. Sőt, még egyszerűen ellenőrizhető szükséges feltételünk sincs realizációk globális merevségére. Éppen ezért érdekes kérdés, hogy miként lehet egy – megfelelően általános helyzetű – globálisan merev realizációt megkonstruálni egy olyan gráfra, melynek létezik globálisan merev generikus realizációja. Az értekezés második részében leírok egy ilyen konstrukciós algoritmust.

Egy klasszikus probléma gráfok realizációival kapcsolatban annak eldöntése, hogy merevek-e, azaz nem lehet őket úgy folytonosan deformálni, hogy az élek hossza megmaradjon (kivéve persze az egész tér mozgatásait). A síkbeli merevség egy jól ismert és sokat kutatott téma, léteznek hatékony algoritmusok a merevség eldöntésére, amely csak a gráftól függ, ha a realizáció eléggé általános helyzetű. A kérdés azonban érdekesebbé válik, ha néhány él esetén megengedjük, hogy a hosszuk nőjön, míg más élek esetén, hogy csökkenjen. Az ezen feltételeket elkódoló élcímkézett gráfokat nevezzük tensegrity gráfoknak. A disszertáció harmadik része tensegrity gráfok síkbeli merev relizációinak létezésével foglalkozik.

Egy gyakran előforduló eszköz a dolgozatban szereplő algoritmusok és tételek levezetésénél bizonyos gráf előállítási tételek használata. Az ilyen típusú tételek azt állítják, hogy egy bizonyos gráfosztály minden tagja felépíthető egy kis gráfból kiindulva bizonyos kiterjesztési műveletek segítségével, és minden ilyen módon felépített gráf a gráfosztályba tartozik. A bizonyítások egyik fő eleme minden esetben az, hogy ezek a kiterjesztési műveletek megőriznek valamilyen merevséggel kapcsolatos tulajdonságot, mint például a csúcspárok globális linkeltsége, a realizációk globális merevsége és a tensegrity gráfok merevsége.

A dolgozatban szereplő összes eredmény – egy kiterjesztési lemma kivételével, melyet tetszőleges dimenzió esetén bebizonyítok – síkbeli realizációkra vonatkozik. A bevezetés hátralévő részében definiálom az értekezésben szereplő eredmények kimondásához szükséges fogalmakat és leírok néhány ismert fontos eredményt.

Egy $G = (V, E)$ gráf d-dimenziós *realizációján* egy (G, p) párt értünk, ahol $p : V \to \mathbb{R}^d$ függvény. Azt mondjuk, hogy (G, p) és (G, q) realizációk *ekvivalensek*, ha bármely $uv \in E$ él esetén teljesül, hogy $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$. Ha ez az egyenőség minden $u, v \in V$ csúcspárra teljesül, akkor azt mondjuk, hogy (G, p) és (G, q) *kongruensek*.

Egy (G, p) realizáció *merev*, ha van olyan $\varepsilon > 0$, melyre teljesül, hogy ha (G, q) ekvivalens (G, p)-vel és $||p(v) - q(v)|| < \varepsilon$ minden $v \in V$ esetén, akkor (G, q) kongruens is (G, p)-vel. Egy (G, p) realizáció *infinitezimális mozgásán* egy olyan $q : V \to \mathbb{R}^d$ hozzárendelést értünk, melyre minden $uv \in E$ él esetén teljesül, hogy

$$(p(u) - p(v))(q(u) - q(v)) = 0. \tag{1}$$

Ha az infinitezimális mozgásokra mint nd dimenziós vektorokra gondolunk, akkor egy (G, p) realizáció infinitezimális mozgásai $\mathbb{R}^{nd}$ egy lineáris alterét alkotják, melyet az $|E|$ darab (1) alakú egyenlet definiál. Ennek a lineáris egyenletrendszernek a mátrixát nevezzük a realizáció *merevségi mátrixának*, melyet $R(G, p)$-vel jelölünk. Ez egy $|E| \times nd$ típusú mátrix, melynek egy uv élhez tartozó sorában az u és v csúcsoknak megfelelő d elem $p(u) - p(v)$, illetve $p(v) - p(u)$ vektorok d koordinátáját tartalmazza, és minden más elem nulla. Ezzel a jelöléssel egy $q \in \mathbb{R}^d$ vektor pontosan akkor infinitezimális mozgás, ha $R(G, p)q = 0$, azaz (G, p) infinitezimális mozgásainak a tere éppen $R(G, p)$ magtere.

Egy infinitezimális mozgás *triviális*, ha felírható $q(v) = Sp(v) + t$ alakban, ahol S egy $d \times d$ méretű antiszimmetrikus mátrix és $t \in \mathbb{R}^d$ egy vektor. Egy (G, p) realizáció *infinitezimálisan merev*, ha minden infinitezimális mozgása triviális.

Ismeretes [4], hogy ha egy realizáció infinitezimálisan merev, akkor merev. Ennek megfordítása viszont nem igaz, vannak olyan realizációk, amelyek merevek, de nem infinitezimálisan merevek. Azonban ha kizárunk bizonyos 'elfajuló' realizációkat, akkor a merevség és infinitezimális merevség ekvivalenssé válik. Egy $p \in \mathbb{R}^{nd}$ konfiguráció G *reguláris pontja*, ha teljesül rá, hogy $\operatorname{rank} R(G,p) = \max\{\operatorname{rank} R(G,q) : q \in \mathbb{R}^{dn}\}$. Egy (G,p) realizáció *reguláris*, ha p reguláris pontja G-nek. Egy G gráf reguláris pontjai $\mathbb{R}^{nd}$ sűrű és nyílt részhalmazát alkotják, és ha egy reguláris realizáció infinitezimálisan merev, akkor minden más reguláris realizáció is infinitezimálisan merev. Továbbá a merevség és infinitezimális merevség ekivivalensek a reguláris realizációk esetén.

Azt mondjuk, hogy egy G gráf *d-dimenziósban merev*, ha minden (vagy ekvivalensen, legalább egy) reguláris d-dimenziós realizációja merev (vagy ekvivalensen, infinitezimálisan merev).

Legyen (G,p) egy $G=(V,E)$ gráf d-dimenziós realizációja. (G,p) merevségi mátrixa által az élhalmazon definiált lineáris matroidot a (G,p) relizáció *merevségi matroidjának* nevezzük és $\mathcal{R}_d(G,p)$-vel jelöljük. Azt mondjuk, hogy (G,p) erősen reguláris, ha G minden H részgráfja esetén (H,p) reguláris. Bármely két erősen reguláris realizációnak ugyanaz a merevségi matroidja, melyet a G gráf *d-dimenziós merevségi matroidjának* nevezünk és $\mathcal{R}_d(G)$-vel jelölünk.

Azt mondjuk, hogy egy $G=(V,E)$ gráf d dimenzióban *M-független*, ha E független $\mathcal{R}_d(G)$-ben, *minimálisan merev*, ha merev, de $G-e$ nem merev minden $e \in E$ él esetén, valamint *redundánsan merev*, ha $G-e$ merev minden $e \in E$ él esetén. Analóg módon definiálhatjuk ezeket a fogalmakat realizációkra is.

Azt mondjuk, hogy egy (G,p) realizáció *globálisan merev*, ha bármely vele ekvivalens realizáció egyben kongruens is vele. Az infinitezimális merevséggel ellentétben, amely a merevségi mátrix rangjának kiszámításával eldönthető, Saxe megmutatta [13], hogy még egydimenziós realizációk esetén is NP-teljes annak eldöntése, hogy a realizáció globálisan merev-e. A probléma könnyebben kezelhetővé válik azonban, ha feltételezzük, hogy a realizáció koordinátái között nincsen algebrai összefüggés. Ezzel kapcsolatban egy (G,p) realizációt, illetve egy $p \in \mathbb{R}^{nd}$ vektort *generikusnak* nevezünk, ha p koordinátáinak halmaza algebrailag független $\mathbb{Q}$ felett.

Hendricksontól származik a következő szükséges feltétel generikus realizációk globális merevségére.

1.1. Tétel. *[7] Legyen (G,p) egy generikus d-dimenziós relizáció. Ha (G,p) globálisan merev, akkor vagy G egy legfeljebb $d+1$ csúcsú teljes gráf, vagy G $d+1$-összefüggő és (G,p) redundánsan merev.*

Egy G gráfról akkor mondjuk, hogy *globálisan merev*, ha G minden generikus realizációja globálisan merev. Gortler, Healy és Thurston megmutatták [6], hogy ez ekvivalens azzal, hogy G-nek létezik generikus és globálisan merev realizációja. Ilyen értelemben a globális merevség is csak a gráftól függő tulajdonság.

2. Globálisan linkelt csúcspárok

Ennek a fejezetnek az eredményei a [9, 14] publikációkon alapulnak. Egy $\{u, v\}$ csúcspár a (G, p) realizációban *globálisan linkelt*, ha minden (G, p)-vel ekvivalens (G, q) realizáció esetén $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$. Az $\{u, v\}$ pár d-dimenziósan *globálisan linkelt* a G gráfban, ha globálisan linkelt annak minden d-dimenziós generikus realizációjában. Ezek alapján G gráf d-dimenziósan globálisan merev, ha minden csúcspárja d-dimenziósan globálisan linkelt. A globális merevséggel ellentétben azonban a globális linkeltség nem csak a gráftól függ, még generikus realizációk esetén sem.

Legyen $G = (V, E)$ gráf és $x_1, x_2, \ldots, x_{d+1} \in V$ különböző csúcsok, valamint $x_1x_2 \in E$ él. A G gráf *d-dimenziós 1-kiterjesztésén* egy olyan G' gráfot értünk, melyet G-ből x_1x_2 él törlésével, valamint egy új z csúcs és $zx_1, zx_2, \ldots, zx_{d+1}$ új élek hozzáadásával kapunk.

Az értekezésben először azt mutatom meg, hogy a d-dimenziós 1-kiterjesztés megőrzi a globális linkeltséget.

2.1. Tétel. *[9, $d = 2$-re] Legyen G a $H = (V, E)$ gráf d-dimenziós 1-kiterjesztése a $v_1v_2 \in E$ él mentén. Tegyük fel hogy a $H - v_1v_2$ gráf d-dimenzióban merev és az $\{x, y\}$ pár globálisan linkelt H-ban. Ekkor $\{x, y\}$ globálisan linkelt G-ben.*

Ezt az eredményt és Hendrickson tételét felhasználva azt a következményt kapjuk, hogy a d-dimenziós 1-kiterjesztés megőrzi a globális merevséget.

2.2. Következmény. *Legyen H egy d-dimenzióban globálisan merev gráf, melyre $|V(H)| \geq d + 2$ és legyen G a H gráf d-dimenziós 1-kiterjesztése. Ekkor G d-dimenzióban globálisan merev.*

A fejezet további részében végig a $d = 2$ esetet tekintjük. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $H = (W, C)$ részgráfról azt mondjuk, hogy *M-kör* G-ben ha C egy kör (azaz minimális összefüggő halmaz) az $\mathcal{R}(G)$ matroidban. Ennek speciális eseteként G-ről azt mondjuk, hogy *M-kör* ha E kör $\mathcal{R}(G)$-ben. Példaképpen K_4, $K_{3,3}$ plusz egy él, és $K_{3,4}$ mind M-kör. Megjegyezzük, hogy egy G gráf pontosan akkor redundánsan merev, ha merev és minden éle benne van G egy M-körében.

Azt mondjuk, hogy a $G = (V, E)$ gráf *M-összefüggő* ha az $\mathcal{R}(G)$ merevségi matroidja összefüggő (azaz bármely két éle rajta van egy M-körön). Egy G gráf *M-komponensei* alatt az $\mathcal{R}(G)$ komponensei által alkotott részgráfokat értjük. Megjegyezzük, hogy az M-komponensek feszített részgráfok.

A fejezet egyik fő eredménye a globálisan linkelt csúcspárok jellemzése M-összefüggő gráfokban.

2.3. Tétel. *[9] Legyen $G = (V, E)$ egy M-összefüggő gráf. Az $\{x, y\}$ pár pontosan akkor globálisan linkelt, ha létezik három páronként pontdiszjunkt xy-út G-ben.*

Tetszőleges gráf esetére a következő sejtést fogalmazzuk meg.

2.4. Sejtés. *Az $\{x, y\}$ csúcspár pontosan akkor globálisan linkelt a $G = (V, E)$ gráfban, ha vagy $xy \in E$, vagy létezik egy H M-komponense G-nek melyre teljesül hogy $\{x, y\} \subseteq V(H)$ és létezik három páronként pontdiszjunkt xy-út H-ban.*

A sejtésben szereplő feltétel elégségessége a 2.3 tétel közvetlen következménye. A fenti sejtés egy polinomiális algoritmushoz vezetne a globálisan linkelt csúcspárok meghatározására. Egy $G = (V, E)$ esetén ugyanis létezik $O(|V|^2)$ idejű algoritmus a gráf M-komponenseinek meghatározására [1]. Létezik továbbá $O(|V| + |E|)$ idejű algoritmus annak eldöntésére, hogy két csúcs között létezik-e három páronként pontdiszjunkt út [12].

A fejezet másik fő eredménye a globálisan linkelt csúcspárok meghatározása minimálisan merev gráfok esetén, mely a következő két tételen alapul.

2.5. Tétel. *Legyen $H = (V, E)$ egy merev gráf és legyen G a H 1-kiterjesztése egy uw él mentén. Az $\{u, w\}$ pár pontosan akkor globálisan linkelt G-ben, ha $H - uw$ merev.*

2.6. Tétel. *Legyen $H = (V, E)$ egy merev gráf és legyen G a H 1-kiterjesztése egy uw él mentén. Ha $H - uw$ nem merev, és $\{x, y\}$ nem globálisan linkelt H-ban, akkor $\{x, y\}$ nem globálisan linkelt G-ben sem.*

Ezen két eredményt és a minimálisan merev gráfok előállítási tételét felhasználva kapjuk a következő tételt.

2.7. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy minimálisan merev gráf és $\{x, y\}$ olyan csúcspár, melyre $xy \notin E$. Ekkor $\{x, y\}$ nem globálisan linkelt.*

Mivel egy minimálisan merev gráf M-komponensei az egy-egy élet tartalmazó részgráfok, a fenti tétel azt igazolja, hogy az 2.4 sejtés igaz a minimálisan merev gráfokra.

A globálisan merev gráfok elméletének érdekes alkalmazásai vannak a szenzor hálózatok localizációs problémáinál [3]. A globális merevség egy általánosítása, a csúcsok egyértelmű lokalizálhatósága szintén közvetlenül alkalmazható a szenzor hálózatok lokalizációinál [5]. Legyen (G, p) egy generikus realizáció, és legyen $P \subseteq V(G)$ egy kijelölt csúcshalmaz. Az mondjuk, hogy egy $v \in V(G)$ csúcs P-hez képest *egyértelműen lokalizálható* a (G, p) realizációban, ha minden (G, p)-vel ekvivalens (G, q) realizációra teljesül, hogy ha $p(b) = q(b)$ fennáll minden P-beli b csúcsra, akkor $p(v) = q(v)$. Egy v csúcsot P-hez képest *egyértelműen lokalizálhatónak* mondunk a G gráfban, ha egyértelműen lokalizálható G minden generikus realizációjában. Egy G gráf és $P \subseteq V(G)$ csúcshalmaz esetén jelölje $G + K(P)$ azt a gráfot amely G-ből az összes olyan bb' él hozzáadásával keletkezik, melyre $bb' \notin E$ és $b, b' \in P$. A 2.3 tételt használva az egyértelműen lokalizálhatóság következő jellemzését kaphatjuk abban az esetben ha $G + K(P)$ M-összefüggő.

2.8. Tétel. *[9] Legyen $G = (V, E)$ gráf, $P \subseteq V$ és $v \in V - P$. Tegyük fel, hogy $G + K(P)$ M-összefüggő. Ekkor a v csúcs P-hez képest pontosan akkor egyértelműen lokalizálható G-ben ha $|P| \geq 3$ és $\kappa(v, b) \geq 3$ minden $b \in P$ esetén.*

Egy másik érdekes alkalmazása a 2.3 tételnek, hogy segítségével meghatározhatjuk az M-összefüggő gráfok lényegesen különböző (páronként nem kongruens) realizációinak számát. Egy generikus és merev (G, p) realizáció esetén jelölje $h(G, p)$ a páronként nem kongruens (G, p)-vel ekvivalens realizációk számát (belátható, hogy ez a szám véges). Egy G merev gráf esetén legyen $h(G) = \max\{h(G, p)\}$, ahol a maximum az összes generikus (G, p) realizáció felett vétetik. Egy $G = (V, E)$ gráf és $u, v \in V$ esetén jelölje $b(u, v)$ a $G - \{u, v\}$ komponenseinek számát és legyen $c(G) = \sum_{u,v \in V}(b(u, v) - 1)$.

2.9. Tétel. *[9] Ha G egy M-összefüggő gráf, akkor $h(G, p) = 2^{c(G)}$ minden generikus (G, p) realizáció esetén.*

3. Globálisan merev realizációk

Ebben a fejezetben, melynek eredményei a [11] publikáción alapulnak, a következő algoritmikus problémával foglalkozunk: adott egy G gráf, konstruáljunk polinomiális időben egy globálisan merev (G,p) realizációt. Az értekezésben leírok egy algoritmust, amely konstruál egy ilyen realizációt a síkban globálisan merev bemeneti gráf esetén.

Az egyik nehézség az algoritmussal kapcsolatban, hogy az eredményeként kapott realizációban minden koordináta racionális, azaz a realizáció nem generikus, azoban nem ismeretes 'egyszerűen' ellenőrizhető elégséges feltétel, ami nem-generikus realizációk globális merevségét garantálná. Az értekezésben egy közvetett, stressz-mátrixokra épülő elégséges feltételt használok.

A másik probléma az algoritmus által adott (G,p) realizáció elfajultsága. Ha ugyanis semmit nem követelünk meg a realizációval kapcsolatban, akkor a feladat triviálisá válik (ha például G összefüggő, mindegyik csúcs lehet ugyanazon a helyen). Ha például megköveteljük, hogy a realizáció infinitezimálisan merev legyen, akkor a realizációnak egy környezetében minden más realizáció is globálisan merev lesz [2].

Egy adott $G=(V,E)$ gráf esetén az uw élen és t csúcson történő 1-kiterjesztésről azt mondjuk, hogy *háromszög felosztás*, ha $\{ut,wt\}\subseteq E$ (azaz u,w,t egy háromszöget feszít G-ben). Egy gráfról azt mondjuk, hogy *háromszög-reducibilis* a megkapható K_4-ből háromszög felosztások egy sorozatával. Megjegyezzük, hogy a háromszög-reducibilis gráfok 3-összefüggő redundánsan merev síkgráfok $2|V|-2$ éllel.

3.1. Tétel. *[11] Legyen G egy globálisan merev gráf, melynek legalább 4 csúcsa van. Ekkor megkonstruálható polinom időben G-nek egy (G,p) globálisan merev realizációja, ahol a csúcsok az egész síkot feszítik. Továbbá, ha G háromszög-reducibilis, akkor a konstruált realizációt lehet infinitezimális merevnek is választani.*

4. Tensegrity gráfok merevsége

Ennek a fejezetnek az eredményei a [10] publikáción alapulnak. *Tensegrity gráfnak* egy $T=(V;B\cup C\cup S)$ egyszerű gráfot értünk a $V=\{v_1,v_2\ldots,v_n\}$ csúcshalmazon, melynek élei a $B,C,$ és S, páronként diszjunkt halmazokra van felosztva, melynek elemeit rendre *rudaknak, kábeleknek*, és *rugóknak* nevezzük. Az $E=B\cup C\cup S$ elemeit együttesen T

tagjainak nevezzük. Egy rudat nem tartalmazó tensegrity gráfot *kábel-rugó tensegrity gráfnak* nevezzük. T alap-gráfján a (címkézetlen) $\overline{T} = (V; E)$ gráfot értjük. Egy d-dimenziós *tensegrity szerkezeten* egy (T, p) párt értünk, ahol T egy tensegrity gráf és p egy $V \to \mathbb{R}^d$ leképezés. (T, p)-t a T *realizációjának* is nevezzük.

Egy (T, p) tensegrity szerkezet *infinitezimális mozgásán* egy $q : V \to \mathbb{R}^d$ leképezést értünk, melyre teljelül, hogy

$$\begin{aligned}
(p(u) - p(v))(q(u) - q(v)) &= 0 \quad \text{minden } uv \in B \text{ esetén,} \\
(p(u) - p(v))(q(u) - q(v)) &\leq 0 \quad \text{minden } uv \in C \text{ esetén,} \\
(p(u) - p(v))(q(u) - q(v)) &\geq 0 \quad \text{minden } uv \in S \text{ esetén.}
\end{aligned}$$

A triviális infinitezimális mozgásokat ugyanúgy definiáljuk, mint sima realizációk esetén. Egy (T, p) tensegrity szerkezet *infinitezimálisan merev* ha nincs nem-triviális infinitezimális mozgása. Egy T tensegrity gráf *d-dimenzióban merev* ha van d-dimenziós infinitezimálisan merev realizációja.

Ebben a fejezetben a tensegrity gráfok merevségéhez kapcsolódó következő két kombinatorikus problémát vizsgálom: (1) Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, hogyan lehet megtalálni az éleknek egy olyan $E = C \cup S$ felosztását, melyre a kapott $T = (V; C \cup S)$ tensegrity gráf merev a síkban. (Ilyen felosztás pontosan akkor létezik, ha G redundánsan merev.) (2) Döntsük el egy $T = (V; C \cup S)$ kábel-rugó tensegrity gráfról, hogy merev-e a síkban. Az első probléma kapcsán az értekezésben leírok egy kombinatorikus algoritmust egy merev kábel-rugó felosztás megtalálására, ha ilyen létezik. A fejezet második részében pedig megadom a síkbeli merev tensegrity gráfok teljes jellemzését abban az esetben, ha az alapgráf vagy a teljes gráf, vagy a kerék gráf.

Mindkét eredmény az 1-kiterjesztés tensegrity gráfokra való 'címkézett általánosítását' használja. Legyen $T = (V; B \cup C \cup S)$ egy tensegrity gráf, $uw \in C \cup S$ egy kábel vagy egy rugó T-ben és legyen $t \in V - \{u, w\}$ egy csúcs. A *címkézett* 1*-kiterjesztés* művelet törli az uw tagot, hozzáad egy új v csúcsot és olyan új vu, vw, vt tagokat, melyekre teljesül, hogy ha uw kábel, akkor vu, vw nem mindegyike rugó, és ha uw rugó, akkor vu, vw nem mindegyike kábel. Az új vt tag tetszőleges lehet.

4.1. Lemma. *[10] Legeyen T egy merev tensegrity gráf, és legyen T' a T-nek egy címkézett 1-kiterjesztése. Ekkor T' is merev.*

A merev kábel-rugó címkézést megtaláló algoritmus a redundáns gráfok előállítási tételén alapul. Egy G gráfot *redundánsnak* nevezünk, ha van legalább egy éle, és minden éle benne van G-nek egy M-körében.

4.2. Tétel. *[10] Legyen $G = (V, E)$ egy síkban redundánsan merev gráf. Ekkor G élei feloszthatók $E = C \cup S$ részekre úgy, hogy a kapott $T = (V; C \cup S)$ tensegrity gráf merev a síkban. Továbbá ez a felosztás polinom időben megkonstruálható.*

A fejezet második részének fő eredménye a síkbeli merev tensegrity gráfok jellemzése abban az esetben, ha az alapgráf vagy a teljes gráf, vagy a kerék gráf.

4.3. Tétel. *Legyen $T = (V; C \cup S)$ egy kábel-rugó tensegrity gráf K_n alapgráffal valamely $n \geq 5$ esetén. T pontosan akkor merev a síkban, ha $|C| \geq 3$ és $|S| \geq 3$ vagy létezik négy különböző $u, v, w, t \in V$ csúcs, melyekre $C = \{uv, wt\}$ vagy $S = \{uv, wt\}$.*

Az n csúcsú kerék gráfot a következőképpen definiáljuk: $W_n = C_{n-1} + v_0 + \{v_0 v \mid v \in V(C_{n-1})\}$, ahol C_{n-1} egy kör. A v_0 csúcsot *központi csúcsnak*, míg C_{n-1} csúcsait *külső csúcsoknak* nevezzük. Három szomszédos u, v, w külső csúcs esetén *tiltott* 3*-sétának* nevezzük az $uvwv_0$ és uv_0vw sétákat.

4.4. Tétel. *Legyen $T = (V; C \cup S)$ egy kábel-rugó tensegrity gráf a W_n alapgráffal valamely $n \geq 6$ esetén, és tegyük fel hogy $|S| \geq |C|$. T pontosan akkor merev a síkban, ha $|C| \geq 4$, vagy $|C| = 3$ és a kábelek nem alkotnak tiltott* 3*-sétát, vagy $C = \{v_0 v, uw\}$ ahol u, v, w különböző külső csúcsok.*

Hivatkozások

[1] A. R. Berg and T. Jordán. Algorithms for graph rigidity and scene analysis. In G. Di Battista and U. Zwick, editors, *Proceedings of the 11th Annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, volume 2832 of *Springer Lecture Notes in Computer Science*, pages 78–89, 2003.

[2] R. Connelly and W. Whiteley. Global rigidity: The effect of coning. *Discrete and Computational Geometry*. Published online: 28 August 2009.

[3] T. Eren, D. K. Goldenberg, W. Whiteley, Y. R. Yang, A. S. Morse, A. B. D. O., and B. P. N. Rigidity, computation, and randomization in network localization. In *Proc. of the IEEE INFOCOM Conference*, pages 2673–2684, 2004.

[4] H. Gluck. Almost all simply connected closed surfaces are rigid. In *Geometric Topology*, volume 438 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 225–239. Springer-Verlag, 1975.

[5] D. K. Goldenberg, A. Krishnamurthy, W. C. Maness, Y. R. Yang, A. Young, A. S. Morse, A. Savvides, and B. D. O. Anderson. Network localization in partially localizable networks. In *Proc. of the IEEE INFOCOM Conference*, 2005.

[6] S. J. Gortler, A. D. Healy, and D. P. Thurston. Characterizing generic global rigidity. 2007. arXiv:0710.0926v4.

[7] B. Hendrickson. Conditions for unique graph realizations. *SIAM J. Comput.*, 21(1):65–81, 1992.

[8] B. Jackson and T. Jordán. Connected rigidity matroids and unique realizations of graphs. *J. Combinatorial Theory Ser B*, 94:1–29, 2005.

[9] B. Jackson, T. Jordán, and Z. Szabadka. Globally linked pairs of vertices in equivalent realizations of graphs. *Discrete and Computational Geometry*, 35(3):493–512, 2006.

[10] T. Jordán, A. Recski, and Z. Szabadka. Rigid tensegrity labelings of graphs. *Eur. J. Comb.*, 30(8):1887–1895, 2009.

[11] T. Jordán and Z. Szabadka. Operations preserving the global rigidity of graphs and frameworks in the plane. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 42(6-7):511–521, 2009.

[12] H. Nagamochi and T. Ibaraki. A linear-time algorithm for finding a sparse k-connected spanning subgraph of a k-connected graph. *Algorithmica*, 7:583–596, 1992.

[13] J. B. Saxe. Embeddability of weighted graphs in k-space is strongly NP-hard. In *Proc. 17th Allerton Conf. in Communications, Control, and Computing*, pages 480–489, 1979.

[14] Z. Szabadka. Globally linked pairs of vertices in minimally rigid graphs. Technical Report TR-2010-02, Egerváry Research Group, Budapest, 2010. `www.cs.elte.hu/egres`.