A doktori értekezés tézisei

Edge-connectivity augmentation of graphs and hypergraphs

(Gráfok és hipergráfok élösszefüggőségének növelése)

Bernáth Attila

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet

Matematika Doktori Iskola
Vezető: Laczkovich Miklós

Alkalmazott Matematika Doktori Program
Vezető: Michaletzky György

Témavezető: Vizvári Béla

Konzulens: Király Tamás

Budapest, 2009

1. Bevezetés

A dolgozatban gráfok és hipergráfok élösszefüggőségének növelésével foglalkozunk: a korábbiaktól kissé eltérő megközelítést alkalmazva sikerült a témakör sok ismert eredményét több irányban is általánosítani, illetve ezekre a régi és új eredményekre egyszerű algoritmikus bizonyításokat adni. Az algoritmusokat általában absztrakt formában fogalmazzuk meg, absztrakt algoritmusaink alkamlazásaként pedig konkrét élösszefüggőség-növelési feladatokat tekintünk. A dolgozat egy másik fontos érdeme, hogy egy egységesebb tárgyalás keretében rávilágít olyan eredmények kapcsolatára, amik eddig ilyen kontextusban nem kerültek összehasonlításra. Az élösszefüggőség-növelésnek két megközelítését tárgyaljuk. Az egyik a hagyományosnak mondható megközelítés, amikor a gráf vagy hipergráf élösszefüggőségét további élek, illetve hiperélek hozzáadásával akarjuk megnövelni. Ezzel foglalkozunk a dolgozat nagyobb részében (2-5. fejezet). Bár a kiinduló struktúra néhol lehet irányított gráf vagy hipergráf is, hangsúlyozzuk, hogy a hozzáadandó új (hiper)élek mindig irányítatlanok ebben a dolgozatban. A célunk pedig többnyire ezek összméretének minimalizálása.

A hatodik fejezetben egy másik problémakör, az úgynevezett *forrástelepítési probléma* kerül terítékre: itt egy (minél kisebb) ponthalmaz összehúzásával akarjuk elérni a kívánt élösszefüggőséget.

2. Élösszefüggőség-növelés (hiper)élek hozzáadásával

A dolgozat második fejezete még bevezetés jellegű. Ebben először azt mutatjuk meg, hogy hogyan lehet az élösszefüggőség-növelési feladatokat átfogalmazni **fedési feladattá**. Fedési feladaton azt értjük, hogy adott egy $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ halmazfüggvény (amit **hiányfüggvénynek** is fogunk hívni), és azt szeretnénk **fedni** egy G gráffal illetve hipergráffal, ami azt jelenti, hogy a $d_G(X) \geq p(X)$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie minden $X \subseteq V$ halmazra (ahol $d_G(X)$ az X-ből kilépő (hiper)élek számát jelöli). A fejezet 2.1-es részében megmutatjuk, hogy a vizsgált élösszefüggőség-növelési feladatok milyen hiányfüggvény segítségéval fogalmazhatók át fedési feladattá. Ez a rész mutatja meg a kapcsolatokat és a főbb különbségeket ezen feladatok között a hiányfüggvényük tulajdonságai alapján. Fontos megjegyezni, hogy minden tárgyalt feladatnak azonnal két alapvetően különböző verziója vetődik fel aszerint, hogy a hozzáadandó új hiperélek lehetnek e akármekkorák, avagy nem (például csak gráféleket engedünk meg). Következzen néhány definíció. Egy p halmazfüggvény és $X, Y \subseteq V$ esetén tekintsük az alábbi két egyenlőtlenséget:

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y), \qquad (\cap\cup)$$

$$p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X). \qquad (-)$$

Egy $X \subseteq V$ halmazt p-pozitívnak hívunk, ha $p(X) > 0$. Egy X, Y halmazpárt **keresztezőnek** mondunk, ha $X \cap Y, X - Y, Y - X$ és $V - (X \cup Y)$ egyike sem üres. A legáltalánosabb függvényosztály, ami ebben a tézisben szerepet kap, a **pozitívan ferdén szupermoduláris függvények** osztálya. Egy p halmazfüggvényt akkor mondunk **ferdén szupermodulárisnak**, ha bármely két $X, Y \subseteq V$ halmazra $(\cap\cup)$ és $(-)$ közül legalább az egyik teljesül. Akkor mondjuk

pozitívan ferdén szupermodulárisnak, ha csak a p-pozitív halmazpárokra követeljük meg legalább az egyik egyenlőtlenség teljesülését. Sok esetben a hiányfüggvény ennél speciálisabb tulajdonságokkal rendelkezik. Egy p halmazfüggvényt **(pozitívan) keresztezően szupermodulárisnak** nevezünk, ha $(\cap\cup)$ teljesül minden (p-pozitív) keresztező X, Y halmazpárra. A p-t **(pozitívan) keresztezően negamodulárisnak** mondjuk, ha $(-)$ teljesül minden (p-pozitív) keresztező X, Y halmazpárra. Megjegyezzük, hogy a „pozitívan" jelző algoritmikus nehézségeket vet fel, de a vizsgált élösszefüggőség-növelési alkalmazásokban szerencsére ez nem merül fel. Egy p halmazfüggvény **szimmetrikus**, ha $p(X) = p(V - X)$ minden $X \subseteq V$-re. A szimmetrikus keresztezően szupermoduláris halmazfüggvények a „legegyszerűbb" függvények, amiket tekintünk: ezek merülnek fel a **globális élösszefüggőség-növelési feladatokban**. Ezek természetesen ferdén szupermodulárisak is, míg szimmetria nélkül ez nem feltétlen igaz. Fontos fogalom a halmazfüggvény **szimmetrizáltja**: a p halmazfüggvény p^s szimmetrizáltját a $p^s(X) = \max\{p(X), p(V-X\}$ képlet definiálja tetszőleges $X \subseteq V$ esetén. Természetesen egy (hiper)gráf pontosan fedi p-t, ha fedi p^s-t. Az **irányított (vagy általánosabban vegyes) gráfok illetve hipergráfok globális élösszefüggőségének növelése** (irányítatlan élekkel avagy hiperélekkel) egy keresztezően szupermoduláris halmazfüggvény fedéseként fogalmazható meg. Az úgynevezett **node-to-area** (magyarul **pont-ponthalmaz**) **élösszefüggőség-növelési** feladatok pedig egy keresztezően negamoduláris halmazfüggvény fedési feladataként foghatóak fel. Tárgyaljuk továbbá az úgynevezett **lokális élösszefüggőség-növelési** feladat variációit is: itt a lefedendő szimmetrikus ferdén szupermoduláris hiányfüggvény másmilyen speciális tulajdonságokkal rendelkezik. Mivel ezeknek a feladatoknak a különféle verziói kerülnek tárgyalásra a dolgozat eredményeinek alkalmazásaként, pontosan megfogalmazzuk ezeket a feladatokat.

2.1 Feladat (Lokális élösszefüggőség-növelési feladat) *Adott egy $H_0 = (V, \mathcal{E}_0)$ hipergráf és egy $r : V \times V \to \mathbb{Z}_+$ szimmetrikus függvény (**élösszefüggőségi igény**). Keresünk egy olyan $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfot, amire*

$$\lambda_{H_0+H}(u, v) \geq r(u, v) \text{ minden } u, v \in V\text{-re.} \tag{1}$$

A **globális élösszefüggőség-növelési feladat (hipergráfokban)** a fenti feladat azon speciális esete, amikor $r(u, v)$ ugyanaz a k érték minden $u, v \in V$ párra. A λ (**élösszefüggőség**) függvény fogalmát hadd definiáljuk a lehető legáltalánosabb módon.

2.2 Definíció ***Vegyes hipergráfon*** *egy $M = (V, \mathcal{A})$ párt értünk, ahol V véges alaphalmaz, $\mathcal{A}$ pedig V-beli nemüres rendezett halmazpárokat tartalmaz (ugyanaz a halmazpár többször is előfordulhat). Az $\mathcal{A}$ elemeit nevezzük egyszerűen **hiperéleknek**, az $a = (T_a, H_a) \in \mathcal{A}$ hiperélre T_a elemeit nevezzük az a hiperél **töveinek**, míg H_a elemeit az a hiperél **fejeinek**. **Úton** pontok és hiperélek olyan ismétlődés nélküli, váltakozó $v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k$ sorozatát értjük, amelyben $v_{i-1} \in T_{a_i}$ és $v_i \in H_{a_i}$ minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra. Az út kezdőpontja v_0, végpontja v_k.*

Intuitívan gondolhatunk a vegyes hipergráf egy a hiperélére úgy is, mint a $T_a \cup H_a$ halmazra, amelyben minden pontnak van egy „szerepe": tőpont, vagy fejpont, esetleg mindkettő. Az

irányítatlan hipergráf (röviden hipergráf) egy olyan speciális vegyes hipergráf, amiben minden hiperélben minden pont tőpont és fejpont is egyszerre. Az útra pedig úgy érdemes gondolni vegyes hipergráfoknál, hogy kiindulva egy pontból, amely töve egy hiperélnek, elugorhatunk ezen hiperél egyik fejébe, ahonnan esetleg újra továbbmehetünk egy másik hiperélen, aminek ez az új pont töve (természetesen az ismétlődésre figyelni kell). Ezek után jöhet az élösszefüggőség fogalmának lehető legáltalánosabb definíciója.

2.3 Definíció *Az $M = (V, \mathcal{A})$ vegyes hipergráfban az $X, Y \subseteq V$ halmazok közötti **élösszefüggőségen** az X-ből induló, Y-ban végződő, páronként éldiszjunkt utak maximális számát értjük, és ezt $\lambda_M(X, Y)$-nal jelöljük. Ha $X \cap Y \neq \emptyset$, akkor $\lambda_M(X, Y)$-t plusz végtelennek definiáljuk. Két $x, y \in V$ pontra $\lambda_M(x, y) = \lambda_M(\{x\}, \{y\})$.*

Ezt specializálva hipergráfokra és azt tovább gráfokra visszajutunk az élösszefüggőség szokásos fogalmához. Ezen definíciók segítségével definiáljuk az alábbi feladatokat.

2.4 Feladat (Vegyes hipergráfok globális élösszefüggőségének növelése) *Adott egy $M = (V, \mathcal{A})$ vegyes hipergráf és abban egy $r \in V$ kijelölt pont, továbbá adottak k, l nemnegatív egészek. A feladat az, hogy keressünk egy olyan $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfot, amire $\lambda_{M+H}(r, v) \geq k$ és $\lambda_{M+H}(v, r) \geq l$ minden $v \in V$-re.*

2.5 Feladat (Node-to-area élösszefüggőség-növelési feladatok) *Adott egy $H_0 = (V, \mathcal{E}_0)$ hipergráf, egy $\mathcal{W} \subseteq 2^V$ halmazcsalád és ennek tagjain egy $r : \mathcal{W} \to \mathbb{Z}_+$ igényfüggvény. Keressünk olyan H hipergráfot, amire*

$$\lambda_{H_0+H}(x, W) \geq r(W) \text{ minden } W \in \mathcal{W} \text{ és } x \in V \text{ esetén.} \tag{2}$$

Ezek tehát azok a feladatok, amiknek különböző verzióit tekintjük a dolgozat 2-5. fejezetében a kidolgozott elmélet alkalmazásaként. A feladatokhoz tartozó hiányfüggvények explicit felírásától itt eltekintünk, ez megtalálható a dolgozatban. A fent megfogalmazott feladatokban szándékosan nem mondunk semmit arról, hogy mit optimalizálunk: az olvasó gondolhat nyugodtan arra, hogy a keresett H hipergráf összméretét, az egyéb lehetséges célfüggvényekről később teszünk említést. Hadd fogalmazzunk meg a későbbi hivatkozások kedvéért egy általános fedési feladatot is.

2.6 Feladat ***Fedési feladaton*** *azt értjük, hogy adott egy szimmetrikus, pozitívan ferdén szupermoduláris $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ hiányfüggvény, amiről feltesszük, hogy $p(\emptyset) \leq 0$, és keresünk egy olyan H hipergráfot, amire $d_H(X) \geq p(X)$ teljesül minden $X \subseteq V$-re.*

A 2-5. fejezetben vizsgált élösszefüggőség-növelési feladatokat mindig átfogalmazzuk egy ilyen fedési feladattá, ahol a hiányfüggvény mindig pozitívan ferdén szupermoduláris (illetve a konkrét feladattól függően speciálisabb). Minden feladatnak többféle változatát tekintjük, például aszerint, hogy a fedő H hipergráfban megengedünk e tetszőlegesen nagy hiperéleket, vagy nem. A célfüggvény tekintetében is többféle változata lehet ezeknek a feladatoknak. A 2.6 feladat **minimum változatában** a cél a H hipergráf összméretének minimalizálása. A ferdén szupermodularitás miatt azonban érdemes ehelyett a 2.6 feladat alábbi általánosabb, úgynevezett **fokszámelőírt változatát** tekinteni, azaz amikor adva van egy $m : V \to \mathbb{Z}_+$ fokszámelőírás is, és olyan H-t keresünk, ami ezt teljesíti, azaz $d_H(v) = m(v)$ minden $v \in V$-re. A kapcsolatot a két változat között a „jó" fokszámelőírások által meghatározott $C(p)$ kontrapolimatroid biztosítja, ahol

$$C(p) = \{x \in \mathbb{R}^V : x(Z) \geq p(Z)\ \forall Z \subseteq V, x \geq 0\}. \tag{3}$$

A $C(p)$ egész elemeit nevezzük **megengedett fokszámelőírásoknak**. A $C(p)$ poliéder tulajdonságait használva kapjuk, hogy tetszőleges p-t fedő hipergráf összmérete nagyobb vagy egyenlő mint $SLB(p) = \max\{\sum_{X\in\mathcal{X}} p(X) : \mathcal{X}$ részpartíciója V-nek $\}$. Szintén a kontrapolimatroidságot felhasználva kapjuk, hogy a 2.6 feladatnak általában az úgynevezett **pontsúlyozott változata** is megoldható: itt a $\sum_{v\in V} c(v)d_H(v)$ kifejezés minimalizálása a cél, ahol $c : V \to \mathbb{R}_+$ tetszőleges pontsúlyok.

3. Élösszefüggőség-növelés hiperélek hozzáadásával

A dolgozat 3. fejezetében a pozitívan ferdén szupermoduláris halmazfüggvények (tetszőlegesen nagy) hiperélekkel való fedésének problémáját vizsgáljuk. Mivel a hiperélek mérete nincs korlátozva, ezt a feladatot teljes általánosságban meg lehet oldani, a megoldás Szigeti [6] nevéhez fűződik. Definiáljuk egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfhoz az alábbi halmazfüggvényt:

$$b_H(X) = |\{e \in \mathcal{E} : e \cap X \neq \emptyset\}|.$$

Azt mondjuk, hogy a H hipergráf **gyengén fedi** a p halmazfüggvényt, ha $b_H(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$ esetén teljesül. Sikerült Szigeti eredményét több irányban is általánosítani, ami az alábbi két észrevételen alapul. Az első észrevétel az, hogy Schrijver szupermoduláris színezési tétele (és annak Tardos féle poliéderes bizonyítása) igazából ferdén szupermoduláris függvényekre is kiterjeszthető, és hogy ez szoros kapcsolatban van a gyenge fedés imént definiált fogalmával.

3.1 Tétel ([10], Király Tamással) *Legyen p egy pozitívan ferdén szupermoduláris függvény, $k \geq \max\{p(X) : X \subseteq V\}$ egy egész és $y \in C(p) \cap \mathbb{Z}^V$ olyan, hogy $y(v) \leq k$ minden $v \in V$-re. Definiáljuk az alábbi poliédert:*

$$\begin{aligned} Q = Q(p,k,y) = \{x \in \mathbb{R}^V : 0 \leq x \leq 1; x(v) = 1 \text{ minden olyan } v\text{-re, amire } y(v) = k;\\ x(Z) \geq 1 \text{ ha } p(Z) = k;\ x(Z) \leq y(Z) - p(Z) + 1\ \forall Z \subseteq V;\ x \leq y\}. \end{aligned}$$

Ekkor Q egész g-polimatroid és egész pontjai egy olyan hipergráf egy hiperélének felelnek meg, ami pontosan k hiperélt tartalmaz, gyengén fedi p-t és teljesíti az y fokszámelőírást.

A második észrevétel a következő.

3.2 Lemma ([10], Király Tamással) *Ha $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ **szimmetrikus** pozitívan ferdén szupermoduláris függvény, $k = \max\{p(X) : X \subseteq V\}$ és H egy olyan hipergráf, ami pontosan k hiperélt tartalmaz és gyengén fedi p-t, akkor H valójában fedi p-t.*

A g-polimatroidok (és metszeteik) ismert tulajdonságai alapján ezekből az alábbi következmények olvashatók ki (megjegyezzük, hogy itt a H hipergráf mindig a lehető legkevesebb hiperélt tartalmazza).

3.3 Következmény ([10], Király Tamással) *Ha p egy szimmetrikus, pozitívan ferdén szupermoduláris függvény, akkor a minimális összméretű, p-t fedő H hipergráf választható majdnem uniformnak. Ha p_1 és p_2 két ilyen függvény, amelyekre $\max\{p_1(X) : X \subseteq V\} = \max\{p_2(X) : X \subseteq V\} = k$, és $y \in C(p_1) \cap C(p_2)$ olyan egész vektor, amelyre $y(v) \leq k$ teljesül minden $v \in V$-re, akkor létezik olyan majdnem uniform H hipergráf, amelynek pontosan k hiperéle van, fedi p_1-et és p_2-t is és teljesíti az y fokszámelőírást.*

Ezt alkalmazva a fenti 2.1, 2.4 és 2.5 feladatokra kapjuk, hogy azok optimális megoldása választható majdnem uniformnak, illetve két ilyen feladatot szimultán is meg tudunk oldani, ha a maximális hiányokra tett (meglehetősen mesterséges) feltétel teljesül. Sajnos erre a feltételre mégis szükség van, mert megmutatjuk, hogy enélkül NP-teljes feladatokhoz jutunk.

3.1. Élösszefüggőség-növelés gráfélek hozzáadásával

A dolgozat 4. és 5. fejezetben azt vizsgáljuk, hogy mi történik, ha megpróbáljuk a hiányfüggvényt csak gráfélekkel fedni (mondjuk minimális számúval). A fokszámelőírt fedési problémák megoldásánál használt technika a **leemelés művelete**: adott egy $m \in C(p) \cap \mathbb{Z}^V$ (megengedett fokszámelőírás) és egy u, v pontpárra (amelyekre $m(u)$ és $m(v)$ is pozitív) az uv élt megpróbáljuk bevenni a keresett megoldásba. Formálisan helyettesítjük p-t és m-et a módosított p' és m' függvényekkel, ahol

$$m' = m - \chi_{\{u\}} - \chi_{\{v\}} \text{ and } p' = p - d_{(V,\{(uv)\})}. \tag{4}$$

A leemelés **megengedett**, ha $m' \in C(p')$ is teljesül (azaz megengedett fokszámelőírásból megengedett fokszámelőírást csinál). Az eredmények kiindulópontja a 3.4 lemma, ami a leemelési művelet korábbiaktól eltérő megközelítésén múlik.

3.4 Lemma ([11], Király Tamással) *Ha $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ szimmetrikus, pozitívan ferdén szupermoduláris, $m \in C(p) \cap \mathbb{Z}^V$ és $p(X) > 1$ valamely $X \subseteq V$ halmazra, akkor létezik megengedett leemelés.*

A lemma egyik közvetlen következménye Szigeti korábban említett tételének az előbbiektől eltérő irányú általánosítása: míg eddig minél kevesebb hiperéllel akartuk fedni p-t, most megpróbáljuk minél kisebbekkel.

3.5 Következmény ([11], Király Tamással) *Ha $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ szimmetrikus, pozitívan ferdén szupermoduláris, $m \in C(p) \cap \mathbb{Z}^V$, akkor létezik olyan p-t fedő, m fokszámelőírást teljesítő hipergráf, amiben csak egy nagy hiperél van.*

A 3.4 lemma további következményeként a 4.2.2 részben egyszerű bizonyításokat adunk ismert tételekre. Ezeket a bizonyításokat didaktikai szempontból tartjuk hasznosnak: úgy gondoljuk, hogy ezek jól tanítható bizonyítások.

A 3.4 lemma adja az ötletet, hogy megfogalmazzunk egy olyan algoritmust, ami mohó módon megengedett leemeléseket hajt végre, majd mikor elakad, akkor már csak legfeljebb egy hiperélt ad az eddig talált gráfélekhez. Ez az algoritmus (kisebb-nagyobb módosításokkal) és ez az optimista mohó szemlélet sok egyéb esetben is előkerül a későbbiek folyamán. A megközelítés motiválja, hogy megfogalmazzuk a vizsgált feladatoknak az úgynevezett **rangot nem növelő változatát**. Ez tulajdonképpen csak annyit jelent, hogy a 2.1, 2.4 és 2.5 feladatoknál a keresett H növelő hipergráf rangja ne legyen nagyobb a növelendő (vegyes) hipergráf rangjánál (a célfüggvény nem változik). A 4.3-4.4 részekben megmutatjuk, hogy az előbbi mohó algoritmus ezen három feladatnál (sőt, a megfelelő általánosításuknál is) nem ad nagyon rossz választ: nem nagyon növeli meg a rangot. Nézzük meg ezeket az eredményeket egy kicsit részletesebben.

A 4.3-as részben azt vizsgáljuk, mit lehet mondani arról az esetről, amikor nincs további megengedett leemelés (azaz a mohó algoritmus elakadt), és a függvényünk valamilyen speciális alakú. Két speciális alakú függvényt tekintünk. A 4.3.1-es részben azt tesszük fel, hogy a p függvény egy q pozitívan keresztező szupermoduláris függvény szimmetrizáltja. Azt a meglepő észrevételt tesszük, hogy a pontos halmazok összehúzása után minden részhalmaz p-értéke 1 lesz. Ez indukálja a kérdést: karakterizáljuk azokat az $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ keresztező halmazrendszereket, amelyekre $\mathcal{F} \cup \mathrm{co}(\mathcal{F}) = 2^V$ (ahol egy $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ halmazrendszert akkor hívunk **keresztezőnek**, ha $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{F}$ minden keresztező $X, Y \in \mathcal{F}$ párra, továbbá egy $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ halmazrendszerre $\mathrm{co}(\mathcal{F}) = \{X \subseteq V : V - X \in \mathcal{F}\}$). Példa ilyen halmazrendszerre a következő: legyen $x \in V$ és legyenek $X_1, \ldots, X_t$ páronként diszjunkt részhalmazai $V - x$-nek (esetleg $t = 1$ és $X_1 = \emptyset$). Tekintsük a következő halmazrendszert:

$$\mathcal{F}_{x,X_1,\ldots,X_t} = \{X \subseteq V : x \in X \text{ vagy } X \subseteq X_i \text{ valamely } i \in 1, \ldots, t\text{-re}\}.$$

A fenti halmazrendszerek karakterizációját az alábbi, önmagában is érdekes állítást adja.

3.6 Tétel ([11], Király Tamással) *Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ olyan keresztező halmazrendszer, amire $\emptyset, V \in \mathcal{F}$ továbbá $\mathcal{F} \cup \mathrm{co}(\mathcal{F}) = 2^V$. Ekkor vagy $|V| = 4$ és $\mathcal{F} = 2^V \setminus \{\{y, z\}\}$ valamely $y \neq z$, $y, z \in V$-re, vagy létezik egy olyan $x \in V$ és $X_1, \ldots, X_t$ páronként diszjunkt részhalmazai $V - x$-nek valamely $t \geq 1$-re, hogy $\mathcal{F}$ vagy $\mathrm{co}(\mathcal{F})$ megegyezik $\mathcal{F}_{x,X_1,\ldots X_t}$-el vagy $\mathcal{F}_{x,X_1,\ldots X_t} \cup \{V - x\}$-el.*

A 4.3.2-es részben azt próbáljuk kideríteni, hogy a mohó algoritmus hogyan akad el egy pozitívan keresztező negamoduláris q halmazfüggvény szimmetrizáltja esetén. Mivel itt a gráfélekkel való fedés már magában foglal NP-teljes feladatokat is (lásd a node-to-area feladatot gráfokban), további feltevéseket kell tennünk a q halmazfüggvényre. Ishii és Hagiwara feltevéséből kiindulva adódik az ötlet, hogy vizsgáljuk meg azt az esetet, ha $q = R - d_{H_0}$ alakú, ahol R olyan keresztező negamoduláris halmazfüggvény, ami az 1-et nem veszi fel, d_{H_0} pedig egy tetszőleges H_0 hipergráf fokfüggvénye. Az elakadásról a következő lemmát bizonyítjuk (a $v \in V$ pontot **pozitívnak** mondjuk, ha $m(v) > 0$).

3.7 Lemma ([11], Király Tamással) *Ha a q függvény a fenti alakú, $p = q^s$, $m \in C(p) \cap \mathbb{Z}^V$, nincs megengedett leemelés, és $m(V) \geq 5$, akkor van olyan hiperél H_0-ban, amiben 1-nél több pozitív pont van. Továbbá legfeljebb 1 olyan pozitív pont van, amit az ilyen hiperélek elkerülnek.*

Ezen lemma következménye, hogy a 2.5 feladat rangot nem növelő változatára az alábbi érdekes állítást kapjuk: a mohó algoritmus legfeljebb 1-el növeli a kiindulási H_0 hipergráf rangját, amennyiben az 2-nél nagyobb volt, ellenben ha 2 volt (azaz H_0 gráf), akkor esetleg kettővel is növelheti.

A 4.4-es részben megnézzük, hogy mit lehet mondani a fentebb megfogalmazott mohó algoritmusról, amennyiben a 2.1, 2.4 és 2.5 feladatokra alkalmazzuk. Először belátjuk, hogy a hipergráfok lokális élösszefüggőségének növelésére alkalmazva az algoritmus optimális megoldást szolgáltat a rang növelése nélkül. Megjegyezzük, hogy utólag kiderült, hogy ezt az eredményt már Ben Cosh is bebizonyította [4]-ben: igazából a mi bizonyításunkból és az ő bizonyításából sikerült egy viszonylag egyszerű bizonyítást összeötvözni. A 4.4.2-es részben a vegyes hipergráfok globális élösszefüggőségének növelését vesszük szemügyre és megmutatjuk a 4.3.1-es részben talált észrevételek segítségével, hogy a fenti mohó algoritmus erre a feladatra legfeljebb eggyel növeli meg a rangot. Végezetül a 4.4.3-as részben definiáljuk a 2.5 feladat rangot nem növelő változatának alábbi általánosítását.

3.8 Feladat *Legyen $q = R - d_{H_0}$ alakú, ahol R olyan keresztező negamoduláris halmazfüggvény, ami az 1-et nem veszi fel, d_{H_0} pedig egy tetszőleges H_0 hipergráf fokfüggvénye. Keressünk olyan H hipergráfot, ami fedi q-t, rangja nem nagyobb H_0 rangjánál, és összmérete minimális.*

Ezután megmutatjuk, hogy a mohó algoritmus milyen (egyszerű) módosításával lehet elérni, hogy erre a feladatra optimális megoldást találjunk, amennyiben a rang legalább 3 (ha a rang 2, akkor bonyolultabb módosításokra van szükség, de ez megtalálható Ishii és Hagiwara [5] cikkében). A 4.4.3-as részben ismertetett eredmény [8]-ban jelent meg.

4. Szimmetrikus keresztező szupermoduláris függvény fedése gráfélekkel

Ha a halmazfüggvényünk a speciálisabb szupermodularitási egyenlőtlenséget teljesíti minden keresztező halmazpárra, sőt még szimmetrikus is, akkor fedése minimális számú gráféllel megoldható polinomiális időben. Ez az eredmény Benczúr és Frank nevéhez fűződik. A V egy $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$ partícióját **p-full partíciónak** nevezzük, ha $p(\cup_{i \in I} X_i) > 0$ teljesül tetszőleges nemüres $I \subsetneq \{1, 2, \ldots, t\}$ esetén. A p-full partíció tagjainak maximális számát a p dimenziójának nevezzük, és $\dim(p)$-vel jelöljük.

4.1 Tétel (Benczúr és Frank [3]) *A $p\colon 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ szimmetrikus, pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvényt fedő gráf éleinek minimális száma* $\max\{\lceil SLB(p)/2 \rceil, \dim(p) - 1\}$.

A dolgozat 5.3-as részében erre a tételre adunk egy egyszerű algoritmikus bizonyítást, ez [7]-ben jelent meg. Ezen bizonyítás egyszerűségét demonstrálja, hogy megfelelő módosításokkal megoldhatjuk vele a feladat partíciókorlátos változatát is, ami a következő.

4.2 Feladat *Adott egy $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ szimmetrikus, pozitívan keresztező szupermoduláris függvény és egy $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ partíciója a V alaphalmaznak. Keressünk egy olyan G gráfot, ami fedi p-t, de élei csak $\mathcal{P}$ tagja között mehetnek.*

A feladat speciális esetét, a **gráfok globális élösszefüggőségének partíciókorlátos növelését** Bang-Jensen, Gabow, Jordán és Szigeti oldották meg [2]-ben. Roland Grappe-val és Szigeti Zoltánnal közösen sikerült az általánosabb 4.2 problémát is kezelnünk. A minimum verzió megoldásához tekintsük az alábbi alsó korlátokat (a fokszámelőírt feladat megoldását itt nem részletezzük a terjedelmi korlátok miatt).

$$\beta_p^i = \max\{\sum_{Y \in \mathcal{F}} p(Y) : \mathcal{F} \text{ részpartíciója } P_i\text{-nek}\} \text{ minden } i = 1, \ldots r\text{-re}.$$

Nyilvánvalóan a $\phi_p = \max\{\lceil SLB(p)/2 \rceil, \beta_p^1, \ldots, \beta_p^r, \dim(p) - 1\}$ érték alsó korlát a p-t fedő, partíciókorlátokat teljesítő gráf éleinek számára. Sikerült (algoritmikusan) bebizonyítani, hogy ez a korlát igazából majdnem mindig elérhető, kivéve bizonyos speiális eseteket (úgynevezett **konfigurációkat**), amikor eggyel több élre van szükség. Az alábbi tételben szereplő C_4^*-, C_5^*- illetve C_6^*-konfigurációk definíciója a terjedelmi korlátok miatt itt nem szerepel.

4.3 Tétel ([12], Roland Grappe-val és Szigeti Zoltánnal) *Legyen $p : 2^V \to \mathbb{Z}_+$ egy szimmetrikus, pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény és $\mathcal{P}$ egy partíciója a V alaphalmaznak. Ekkor a p-t fedő, partíciós feltételeket teljesítő gráf éleinek minimális száma ϕ_p, kivéve ha egy C_4^*-, C_5^*- vagy C_6^*-konfiguráció létezik $(p, \mathcal{P})$-hez, amikor is ez a minimum $\phi_p + 1$.*

Ezt a tételt a **hipergráfok globális élösszefüggőségének gráfélekkel való partíciókorlátos növelésének** problémájára specializálva a következő tételt kapjuk (az alábbi tételben a $\mathcal{C}_4$- és a $\mathcal{C}_6$-konfiguráció az absztrakt 4.3 tételben szereplő C_4^*-, illetve C_6^*-konfiguráció megfelelő specializációjával adódik, a részletektől ismételten terjedelmi korlátok miatt eltekintünk; érdemes megfigyelni, hogy a C_5^*-konfiguráció csak a 4.2 absztrakt feladatban merül fel).

4.4 Tétel ([13], Roland Grappe-val és Szigeti Zoltánnal) *Legyen $H_0 = (V, \mathcal{E}_0)$ egy hipergráf, $\mathcal{P}$ a V alaphalmaz egy partíciója és k tetszőleges pozitív egész szám. Azon gráfélek minimális száma, amelyek a $\mathcal{P}$ partíció különböző tagjai között futnak, és H_0-hoz adva k-élösszefüggő hipergráfot eredményeznek $\phi_{p_0} + 1$, ha H_0 tartalmaz $\mathcal{C}_4$- vagy $\mathcal{C}_6$-konfigurációt, és ϕ_{p_0} különben, ahol a p_0 hiányfüggvényt a $p_0(X) = k - d_{H_0}(X)$ képlet definiálja minden nemüres $X \subsetneq V$-re, és $p_0(\emptyset) = p_0(V) = 0$.*

5. Forrástelepítési problémák

A dolgozat 6. fejezetében a forrástelepítési probléma hipergrafikus általánosításaival foglalkozunk, ami a következő.

5.1 Feladat *Adott egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf, egy $w : V \to \mathbb{R}_+$ súly-, és egy $r : V \to \mathbb{R}_+$ igényfüggvény. Keressünk egy minimális súlyú S ponthalmazt, amelyre $\lambda_H(S, v) \geq r(v)$ minden $v \in V$-re.*

A feladatot [1]-ben vizsgálták abban az esetben, ha H csak gráféleket tartalmaz, és megmutatták, hogy teljes általánosságban NP-teljes, azonban ha r vagy w konstans függvény, akkor polinomiálisan megoldható. Az 5.1 feladatnak az alábbi absztrakt alakját is megfogalmazzuk (egy d halmazfüggvényt **pozimodulárisnak** hívunk, ha $-d$ negamoduláris).

5.2 Feladat *Adott egy $d : 2^V \to \mathbb{R}_+$ függvény, ami pozimoduláris és szubmoduláris is, egy $w : V \to \mathbb{R}_+$ súly-, és egy $r : V \to \mathbb{R}_+$ igényfüggvény. Keressünk egy minimális súlyú S ponthalmazt, amelyre*

$$d(X) \geq \max\{r(v) : v \in X\} \text{ minden } X \subseteq V - S\text{-re}. \tag{5}$$

A [1]-ben használt módszereket általánosítva megmutatjuk, hogy az 5.2 feladat is megoldható polinom időben, ha az r és a w függvények **kompatibilisek**, ami azt jelenti, hogy a V-nek van olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorbarendezése, hogy $r(v_1) \leq r(v_2) \leq \cdots \leq r(v_n)$, és $w(v_1) \geq w(v_2) \geq \cdots \geq w(v_n)$. Egy viszonylag egyszerű mohó algoritmusról megmutatjuk, hogy az 5.2 feladatot (kompatibilis igény- és súlyfüggvény esetén) megoldja polinom időben abban az esetben is, ha d még a szubmodularitást se teljesíti, azonban az algoritmus implementálásához szükség lenne egy metsző pozimoduláris halmazfüggvény minimalizálására, ami nyitott probléma. Ha azonban d a szubmodularitást is teljesíti, akkor ez megoldható általános szubmoduláris függvény-minimalizálási technikával. Megmutatjuk továbbá, hogy egy kicsit bonyolultabb algoritmus jobb futásidővel oldja meg a feladatot abban az esetben, ha az igényfüggvény konstans. Ezeket az eredményeket az 5.1 problémára specializálva kapjuk az alábbi alkalmazást (ahol $M(n', m')$ jelöli a maximális folyam megkeresésének időszükségletét egy olyan gráfban, aminek n' csúcsa és m' éle van, továbbá a $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf összméretét $||\mathcal{E}||$ jelöli).

5.3 Tétel ([9]) *Az 5.1 feladat megoldható $O(nM(n + |\mathcal{E}|, ||\mathcal{E}||))$ időben, ha az r és a w függvények kompatibilisek. A futásidő $O(n^2 \log(n) + n||\mathcal{E}||)$-re javítható, ha az r igényfüggvény konstans.*

Hivatkozások

[1] K. Arata, S. Iwata, K. Makino, and S. Fujishige, *Locating sources to meet flow demands in undirected networks,* Algorithm theory—SWAT 2000 (Bergen), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 1851, Springer, Berlin, 2000, 300–313. 9

[2] J. Bang-Jensen, H. N. Gabow, T. Jordán, and Z. Szigeti, *Edge-connectivity augmentation with partition constraints,* SIAM J. Discrete Math. **12** (1999), no. 2, 160–207 (electronic). 8

[3] A. Benczúr and A. Frank, *Covering symmetric supermodular functions by graphs,* Math. Program. **84** (1999), no. 3, Ser. B, 483–503, Connectivity augmentation of networks: structures and algorithms (Budapest, 1994). 7

[4] B. Cosh, *Vertex Splitting and Connectivity Augmentation in Hypergraphs,* Ph.D. thesis, University of London, 2000. 7

[5] T. Ishii and M. Hagiwara, *Minimum augmentation of local edge-connectivity between vertices and vertex subsets in undirected graphs,* Discrete Appl. Math. **154** (2006), no. 16, 2307–2329. 7

[6] Z. Szigeti, *Hypergraph connectivity augmentation,* Math. Program. **84** (1999), no. 3, Ser. B, 519–527, Connectivity augmentation of networks: structures and algorithms (Budapest, 1994). 4

A disszertáció alapjául szolgáló dolgozatok:

[7] A. Bernáth, *A simple proof of a theorem of Benczúr and Frank,* Tech. Report TR-2009-02 Egerváry Research Group, Budapest, 2009, `www.cs.elte.hu/egres` 7

[8] A. Bernáth, *Node-to-area connectivity augmentation of hypergraphs without increasing the rank,* Tech. Report QP-2009-02 Egerváry Research Group, Budapest, 2009, `www.cs.elte.hu/egres` (lásd még: A. Bernáth and T. Király, *The node-to-area connectivity augmentation problem: related questions and results,* Proceedings of the 6th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and its Applications, 2009, Budapest). 7

[9] A. Bernáth *Source location in undirected and directed hypergraphs*, Oper. Res. Lett. **36** (2008), no. 3, 355–360. 9

[10] A. Bernáth and T. Király, *Covering skew-supermodular functions by hypergraphs of minimum total size,* Oper. Res. Lett. **37** (2009), no. 5, 345–350. 4, 5

[11] A. Bernáth and T. Király, *A New Approach to Splitting-Off,* Proceedings of the 13th International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, IPCO 2008, Lecture Notes in Computer Science, vol. 5035, Springer, 401–415, (teljes változat: Tech. Report TR-2008-02 Egerváry Research Group, Budapest, 2008, `www.cs.elte.hu/egres`). 5, 6

[12] A. Bernáth, R. Grappe, and Z. Szigeti *Covering a symmetric crossing supermodular function with partition constraints,* Accepted for the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA10) Austin, Texas, 2010. 8

[13] A. Bernáth, R. Grappe, and Z. Szigeti *Augmenting the edge-connectivity of a hypergraph by adding a multipartite graph,* Presented at the European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (Eurocomb 2009), Bordeaux, France, 2009. 8