Relációhomomorfizmusok bonyolultsága

Doktori értekezés

Készítette: Kun Gábor

Matematika Doktori Iskola
Matematika I. Doktori Program

Iskolavezető: Dr. Laczkovich Miklós
Programvezető: Dr. Szenthe János
Témavezető: Szabó Csaba egyetemi docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2006

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A relációhomomorfizmus problémák (Constraint Satisfaction Problem) vizsgálata már a nyolcvanas évek óta a számítástudomány egyik fontos iránya. Számos kombinatorikus probléma természetes módon fejezhető ki relációhomomorfizmus problémaként. A definícióval kezdve:

1.1 Definíció. *Legyen H egy véges relációs struktúra, azaz egy véges halmaz $R_1, \ldots, R_k$ relációs szimbólumokkal és nekik megfelelő k darab relációval H-n. A $CSP(H)$ eldöntési probléma inputja egy I relációs struktúra $R_1, \ldots, R_k$ típusú relációkkal. A kérdés pedig az, hogy létezik-e $I \to H$ relációhomomorfizmus, azaz olyan leképezés, melynél R_i relációban álló elemek képe is ilyen relációban áll.*

Ennek speciális esetei például a gráfhomomorfizmus problémák, vagy lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága véges test felett. Már sok kötetnyi elmélete van ennek a kérdéskörnek. Ebben a dolgozatban a kutatásoknak két új irányával szeretnénk behatóbban foglalkozni.

Feder és Vardi [12] érdekes bonyolultságelméleti motivációt találtak a problémakör vizsgálatára. Céljuk olyan, minél nagyobb részosztály keresése NP-ben, melyben minden probléma vagy P-beli vagy NP-teljes, ezt a tulajdonságot nevezzük dichotómiának. Ha $P \neq NP$ akkor NP-ben nincs dichotómia. Feder és Vardi az NP-vel ekvivalens SNP osztály részosztályait kezdték vizsgálni. Az SNP legtermészetesebb részosztálya, mely nem ekvivalens NP-vel, és így lehet benne dichotómia az úgynevezett $MMSNP$ osztály. Ez kombinatorikus terminológiában a CSP egy természetes általánosítása: Az input itt is egy relációs struktúra, a tanú pedig egy leképezése egy korlátos halmazba. Viszont itt nem a relációk képeire vannak feltételeink, hanem bizonyos részstruktúrákra. Például ilyen nyelvet alkotnak azok az irányítatlan gráfok, melyek csúcshalmaza két részre osztható úgy, hogy egyik rész se tartalmazzon háromszöget. Azaz a gráfot úgy kell leképezni a kételemű halmazba, hogy a leképezés egyik háromszögre megszorítva se legyen konstans. Feder és Vardi belátták, hogy ez az osztály random ekvivalens CSP-vel, azaz CSP is majdnem ilyen jó jelölt dichotóm osztálynak. Továbbá belátták, hogy a CSP néhány szép részosztálya ekvivalens CSP-vel: Ilyenek például az irányított gráfok homomorfizmusai, vagy a részbenrendezés retrakció problémák. Mi derandomizáljuk a CSP és $MMSNP$ közti ekvivalenciát, azaz belátjuk, hogy ezek a szokásos értelemben is ekvivalensek (4.1.Tétel). Ehhez definiáljuk a hipergráf-expander fogalmát és hatékonyan konstruálunk ilyeneket – nagy derékbőséggel. A módszer gráf-expanderekre is új konstrukciókat ad.

A másik, általunk vizsgált irány pedig algebrai módszerek alkalmazásán alapul. Ez Jeavons [20] egyedüli, majd Bulatovval [5]és később Krokhinnal [6] is közös munkájához köthető. Kiindulópontja az az észrevétel, hogy $CSP(H)$ bonyolultságát meghatározza az az algebra (klón), melynek alaphalmaza H és műveletei a relációtartó műveletek. Sőt, a szokásos algebrai konstrukciók, mint részalgebraképzés, homomorfizmus vagy véges hatványozás a megfelelő algebrákon a CSP problémák polinomiális redukcióját indukálják. Így visszavezetések egy nagy családja algebraizálható. Az algebrai megközelítés eredményesnek bizonyult az elmúlt években.

Sajnos a használt algebrai elmélet, a relációs klónok vizsgálata még eléggé gyerekcipőben jár. Viszont a maximális klónok vizsgálata kapcsán egy speciális osztály mégis az érdeklődés középpontjába került. Ezek a rendezésprimál algebrák, azaz véges részbenrendezések relációs klónjai. A véges összefüggő részbenrendezésekhez tartozó rendezésprimál algebrák által generált varietásra jónéhány érdekes algebrai tulajdonság ekvivalenciája derült ki Davey [8], McKenzie [40] majd Larose és Zádori [27] munkája kapcsán: Az algebra által generált varietás kongruenciamodularitásáé, kongruenciadisztributivitásáé, illetve majdnem-többségi függvény létezése ugyanezen az algebrán. Ezek egyben éppen azok a részbenrendezések, melyekre a retrakció probléma komplementere elsőrendben definiálható, azaz a nyelv véges sok tiltott résszel jellemezhető. Ennek a jelenségnek a gráfelméleti megfelelője a dualitás. A részbenrendezések vizsgálatának egy másik előnye, hogy ezek egyben topologikus terek az ideáltopológiával, így a topologikus módszerek sokkal természetesebben alkalmazhatóak rajtuk. A fenti részbenrendezések új jellemzését adjuk topologikus terminológiában. Rendkívül erős összefüggőségi tulajdonságaiknak köszönhetően polinomiálisan eldönthető lesz, hogy egy részbenrendezés ilyen tulajdonságú-e (7.1.Következmény). Továbbá sikerül hatékonyan megkonstruálnunk a Jónsson függvényeket és a majdnem-többségi függvényt (7.5.Tétel és 7.7.Tétel). Ez azért meglepő, mert algebrákra számos, a majdnem-többségi függvény létezésével kapcsolatos kérdés algoritmikusan eldönthetetlen. A majdnem-többségi függvény a dualitásnak is „közvetlen" oka. Az osztálybeli részbenrendezések struktúrájának vizsgálata is érdekesnek bizonyult. Duffus és Rival [10] definiálta először részbenrendezések rendvarietását direkt szorzatra és retraktumképzésre zárt osztályként. Mi ehhez még az idempotens részalgebrák képzését is hozzávesszük. A fenti osztály részbenrendezéseit azzal a tulajdonsággal jellemezzük, hogy a kételemű antilánc nincs benne az általuk generált rendvarietásban (7.4.Tétel).

Hasonló terminológiában szeretnénk jellemezni azokat a részbenrendezéseket is, melyekre a retrakció probléma nehéz. Ez a körök megfelelőiről, az úgynevezett koronákról ismert. Így természetes eszköznek tűnik a fundamentális csoport használata ezek vizsgálatában. Bevezetjük egy részbenrendezés fundamentális csoportjának fogalmát – a topologikus terminológiát kombinatorikusra fordítva. A fundamentális csoporttal kapcsolatos tételek és fogalmak mind szép kombinatorikus fogalmaknak felelnek meg. Belátjuk, hogy pontosan akkor nincs korona egy véges részbenrendezés által generált rendvarietásban, ha minden összefüggő idempotens részalgebrájának triviális a fundamentális csoportja (8.1.Tétel). Sejtésünk szerint ezek éppen azok a részbenrendezések, melyeken van Taylor-term.

A dolgozat felépítése a következő. A második fejezetben találhatóak az alapvető definíciók. A harmadikban Feder és Vardi cikkének bizonyos részeit vázoljuk. A negyedikben bevezetjük a hipergráf expander fogalmát, és hatékonyan konstruálunk ilyeneket. Ezek segítségével derandomizáljuk Feder és Vardi bizonyítását, és belátjuk, hogy a CSP és $MMSNP$ osztályok ekvivalensek. Az ötödik fejezetben a Jeavons-féle algebrai módszerbe adunk bevezetőt. A hatodikban leírjuk az alapvető topologikus fogalmak megfelelőit részbenrendezéseken. Továbbá bevezetjük a rendvarietás fogalmát, és ennek alaptulajdonságait vizsgáljuk. A hetedik fejezetben topologikus-rendvarietásos jellemzést adunk azokra a részbenrendezésekre, melyeken van majdnem-többségi függvény. Továbbá Jónsson termekre és majdnem-többségi függvényre adunk hatékony konstrukciót. A nyolcadik fejezetben vázoljuk a fundamentális csoporttal kapcsolatos tudnivalókat. Majd jellemezzük azokat a véges részbenrendezéseket, melyek rendvarietásában nincs korona.

A terület jelenlegi fő kérdése a dichotómia sejtés, és az aktuális eredmények nagy része ennek bizonyítása felé tör. Mivel arra, hogy NP-ben nincs dichotómia, nem ismert igazán konstruktív bizonyítás, a dichotómia jelenlegi reális alternatívája annak bizonyítása lenne, hogy CSP ekvivalens NP-vel. A CSP osztály sokszínűségét és egyszersmind sokirányú kezelhetőségét tekintve szerintem ez egy igazán érdekes, és a kutatásokban méltatlanul mellőzött lehetőség.

Köszönetnyilvánítás: Köszönetet szeretnék mondani Szabó Csabának jóval doktori tanulmányaim előtt kezdődő, immár több, mint hétéves témavezetői tevékenységért.

2. Definíciók, jelölések

A dolgozatban gyakran előkerülnek topologikus fogalmak, de mi ezeknek csak a kombinatorikus analogonjait használjuk majd. Ezeket a megfelelő fejezetben definiáljuk majd, a topologikus alapfogalmak ismertetésétől pedig eltekintünk. Ezekhez jó referencia [13] [35] [44].

Egy A algebra formálisan egy $(H, \{f_\iota : \iota \in I\})$ pár, ahol H az A alaphalmaza, f_ι-k pedig a műveletei. Mi nem különböztetjük meg ilyen szigorúan az algebrát és alaphalmazát, és utóbbit is A-val jelöljük majd. Az algebra típusa, $\tau : F \to \mathbb{N}$ pedig egy-egy szimbólumhoz hozzárendeli a megfelelő művelet aritását. Egy algebra véges, ha az alaphalmaza véges. Az A algebrának egy részalgebrája a műveletekre zárt részhalmaz a megszorított műveletekkel, ugyanolyan típussal. Legyenek A és B ugyanolyan típusú algebrák. Egy $\varphi : A \to B$ leképezés homomorfizmus ha művelettartó. Algebrák szorzatának alaphalmaza a szorzathalmaz, a műveleteket pedig koordinátánként definiáljuk. Algebrák egy homomorfizmusra, részalgebraképzésre és (véges) direkt szorzatra zárt osztályát (pszeudo)varietásnak nevezzük. A varietások pontosan az azonosságokkal definiálható algebraosztályok. Klónnak nevezzük egy H halmazon műveletek egy halmazát, ha zárt a kompozícióra és tartalmazza a projekciókat. Általában nem teszünk majd túl szigorúan különbséget klónok és algebrák közt. Termnek nevezzük az algebra műveleteiből kifejezhető függvényeket, azaz az algebra, mint művelethalmaz által generált klón elemeit. Ezek közül kiemelten fontosak lesznek számunkra az úgynevezett Jónsson termek és a majdnem-többségi függvény. Ezek a függvények idempotensek, azaz teljesítik az $f(x, \ldots, x) = x$ azonosságot.

2.1 Definíció. *A $d_0, d_1 \dots, d_n$ függvények Jónsson termek, ha*

$$\begin{aligned}
d_0(xyz) &= x\\
d_i(xyx) &= x \text{ minden } i\text{-re}\\
d_i(xxy) &= d_{i+1}(xxy) \text{ ha } i \text{ páros}\\
d_i(xyy) &= d_{i+1}(xyy) \text{ ha } i \text{ páratlan}\\
d_n(xyz) &= z.
\end{aligned}$$

2.2 Definíció. *Az f függvény majdnem-többségi függvény, ha teljesíti az $f(y, x, \dots, x) = f(x, y, x, \dots, x) = \dots = f(x, \dots, x, y) = x$ azonosságokat.*

Az, hogy egy algebrán vannak Jónsson-termek, ekvivalens azzal, hogy az általa generált varietásban minden algebra kongruenciahálója disztributív. Majdnem-többségi függvényből könnyen kifejezhetőek Jónsson termek.

Egy r változós R reláció egy A halmazon az A^r egy tetszőleges részhalmaza. Egy τ relációs típus relációs szimbólumok egy halmaza. Egy τ típusú relációs struktúra egy halmaz, amin τ minden r változós R relációs szimbólumához létezik egy-egy $R(A) \subseteq A^r$ reláció. Ezeket általában a típus megnevezése nélkül (relációs) struktúráknak, néha hipergráfoknak nevezzük. Egy $R \subseteq A^r$ reláció elemeit pedig – próbálva elkerülni a félreérthetőséget – hiperéleknek vagy relációknak nevezzük majd. Az A és B τ típusú struktúrák közt $\varphi : A \to B$ homomorfizmus, ha minden r változós $R \in \tau$ relációs szimbólumra $R(A)$ relációban álló elemek képe $R(B)$ relációban áll, azaz $(a_1, \dots, a_r) \in R(A) \to (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_r)) \in R(B)$. Hiperélek egy rendre $r_1, \dots, r_s$ aritású $R_1, \dots, R_s$ relációban álló $E_1, \dots, E_s$ sorozatát egy struktúrában körnek nevezzük, ha az általuk lefedett elemek száma kisebb, mint $1 + \sum_{i=1}^{s}(r_i - 1)$, továbbá e hiperélek semmilyen valódi részsorozata nem ilyen tulajdonságú már. Ez könnyen láthatóan a gráfoknál megszokott definíció általánosítása. A lefedett elemek száma mínusz $(1 + \sum_{i=1}^{s}(r_i - 1))$ a kör multiplicitása. Ez legalább háromelemű kör esetén csak egy lehet. Egy elem fokszáma az őt tartalmazó hiperélek multiplicitással vett száma.

Ezek maximumát az A struktúrán $M(A)$ jelöli. Struktúrák direkt szorzata alatt mindig a kategóriaelméleti szorzatot értjük, azaz melynek alaphalmaza a szorzathalmaz, és egy elem r-ese pontosan akkor áll az r változós R relációs szimbólumhoz tartozó relációban, ha mindegyik vetülete ilyen relációban áll. A szorzat egy x elemének, H részhalmazának illetve E hiperélének az A tényezőre vett vetületét $\pi_A(x), \pi_A(H)$ illetve $\pi_A(E)$ jelöli.

A dolgozat nagy részében részbenrendezésekkel foglalkozunk. Ezek olyan relációs struktúrák, melyeken egyetlen kétváltozós, antiszimmetrikus, tranzitív és reflexív reláció van. Ezt $\leq$ jelöli majd. Legyenek P és Q részbenrendezések. A $\varphi : P \to Q$ leképezés homomorfizmus, ha monoton, azaz ha $x \leq y$ akkor $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. A $P \to Q$ monoton(!) leképezések részbenrendezését Q^P jelöli. Az x és y elem összehasonlítható, ha $x \leq y$ vagy $x \geq y$. Egy P részbenrendezés elemeinek egy $x_1, \ldots, x_k$ sorozata séta, ha x_i és x_{i+1} összehasonlíthatóak $i = 1, \ldots, (k-1)$-re. Egy részbenrendezés összefüggő, ha bármely két eleme összeköthető egy sétával. Egy P véges részbenrendezés x eleme unió irreducibilis, ha a nála kisebb elemek közt van egy legnagyobb, a kérdéses elemet pedig az x alsó fedőjének nevezzük. És duálisan, x metszet irreducibilis, ha létezik a nála nagyobb elemek közt egy legkisebb. A P identitását id_P jelöli. Egy $r : P \to P$ leképezés retrakció, ha $r = r \circ r$. Egy $R \subseteq P$ részrészbenrendezés retraktum, ha létezik $r : P \to P$ retrakció, amire $r(P) = R$. A P részbenrendezés k változós, monoton, idempotens műveleteinek részbenrendezését $I^k(P)$ jelöli. Egy $Q \subseteq P$ részrészbenrendezés idempotens részalgebra, ha zárt a monoton, idempotens műveletekre. Például P minden összefüggőségi komponense idempotens részalgebra.

3. A dichotómia keresése felé

A fejezet felépítése a Feder-Vardi [12] cikket követi. A motiváció olyan, minél nagyobb osztály keresése NP-ben, melyben minden probléma vagy P-beli vagy NP-teljes. Ezt a tulajdonságot nevezzük dichotómiának. Számos speciális problémaosztály ilyen tulajdonságú. A továbbiakban feltesszük, hogy $P \neq NP$. Ladner már 1975-ben belátta, hogy (ha $P \neq NP$ akkor) NP-ben nincs dichotómia, azaz van olyan probléma, mely sem nem P-beli, sem nem NP-teljes [26]. Ladner a szó hétköznapi értelmében nem konstruktív, átlós eljárással mutat ilyen problémát. Mivel konstruktív bizonyítás azóta sem ismert, a dichotómia hiányát az egyes osztályok tulajdonságának tekintik, bár az osztály egyetlenegy problémáján múlik. Azokról az osztályokról ismert csak, hogy nincs bennük dichotómia, melyek elég nagyok az átlós eljárás megvalósításához. A ,,szépen definiált" osztályok közül ez csak az egész NP-ről ismert, illetve a vele (számítási értelemben) ekvivalensekről.

Feder és Vardi az úgynevezett SNP osztályt kezdték vizsgálni. Az osztály minden nyelvét egy Φ formula definiálja, ami a következő formájú:

$$\exists T_1, \ldots, T_j \forall v_1, \ldots, v_k \in S \; \Psi(S_1, \ldots, S_l, T_1, \ldots, T_j, v_1, \ldots, v_k),$$

ahol a Ψ kvantormentes elsőrendű formula, az input az S struktúra az S_i relációkkal, a ,,tanú" pedig a $T_1, \ldots, T_j$ relációkból áll ugyanezen az alaphalmazon.

Ez nyilvánvalóan részosztálya NP-nek, és ismert, hogy a két osztály egyenlő. A továbbiakban SNP részosztályai között keresünk dichotóm osztályokat. Szintaktikai megszorításokat fogunk tenni Φ-re az alábbiak közül.

1. Legyenek a T_i-k monadikusak.

2. Ne szerepeljen Ψ-ben az $=$ és $\neq$ szimbólum.

3. Legyen Φ (anti)monoton, azaz minél nagyobbak az S_i-k annál kevésbé kielégíthető a formula.

Az utolsó feltétel szintaktikailag értendő, Ψ-t konjunktív normálformába írva minden S_i minden klózban negáltan szerepel majd. Ezt a feltételt monotonitásnak szokták nevezni, bár antimonotonitásnak kéne, hiszen nagyobb S_i-kre kevésbé elégíthető ki a formula.

Feder és Vardi belátták, hogy bármely két szintaktikai megszorítást téve Ψ-re a fenti háromból a kapott osztály még mindig ekvivalens lesz NP-vel. Azt az osztályt, ahol mindhárom feltétel teljesül $MMSNP$-nek (Monoton monadikus SNP) nevezték el. Ez lett az elsődleges jelöltjük nagy dichotóm osztályra.

Egy kis kitérőt teszünk, és bemutatjuk az $MMSNP$ osztály kombinatorikus megfelelőjét, az FPP (Forbidden patterns problem) osztályt. Egy FPP-beli nyelvet egy véges A halmaz és $F_1, \ldots, F_k$ véges, egyforma típusú struktúrák, továbbá a hozzájuk tartozó $f_i : F_i \to A$ függvények definiálnak. Az input egy ugyanilyen típusú struktúra, B. A kérdés pedig az, hogy létezik-e $f : B \to A$ leképezés, hogy semmilyen $1 \leq i \leq k$-ra nincs olyan $g : F_i \to B$ függvény, amire $f \circ g = f_i$.

Példa: G irányított gráf csúcsai feloszthatóak-e két részre úgy, hogy egyik rész se tartalmazzon három hosszú irányított kört? Itt A kételemű, F_1, F_2 irányított háromszögek, f_1 és f_2 pedig ezek leképezései A egy-egy elemére.

Az FPP osztályt Madeleine és Stewart definiálta [39]. Belátták (triviális formulamanipulációval), hogy az $MMSNP$-beli nyelvek pontosan az FPP-beli nyelvek véges uniói.

A relációhomomorfizmus-problémák osztályát CSP (Constraint Satisfaction Problem) jelöli. Egy fix B struktúrára a $CSP(B)$ probléma inputja egy ugyanolyan típusú A struktúra. A kérdés pedig az, hogy létezik-e homomorfizmus A-ból B-be. Világos, hogy CSP mind $MMSNP$-nek, mind pedig FPP-nek részosztálya.

Példák:

1. A k színnel színezhető irányítatlan gráfok. Tehát el kell dönteni az in-

putként kapott irányítatlan gráfról, hogy színezhető-e k színnel. Ekkor B a k csúcsú teljes gráf, pontosabban az irányított gráf megfelelője, azaz egy irányítatlan él helyett egy-egy irányított szerepel mindkét irányban. A $CSP(B)$ nyelv azokból az irányítatlan gráfokból áll, melyek minden éléhez az ellenkező irányba menőt is hozzávéve a kapott irányítatlan gráf k színnel színezhető lesz.

2. Színezhetőek-e egy inputként adott 3-uniform hipergráf csúcsai két színnel úgy, hogy semelyik hiperél ne legyen egyszínű. Itt B a kételemű halmaz, egyetlen háromváltozós relációval. Minden olyan hármas relációban áll, melynek nem ugyanaz a három koordinátája. Különböző (erős, gyenge) hipergráf-színezések hasonlóan leírhatóak.

3. Annak eldöntése, hogy egy adott lineáris egyenletrendszer megoldható-e rögzített véges test felett. Itt B a megfelelő test. Van egy három változós T relációnk: $T = \{(x, y, z) : x + y = z\}$. Továbbá a test minden eleméhez van egy egyváltozós reláció, mely csak ezt az elemet tartalmazza.

Madeleine és Stewart pontosan leírta, hogy mely FPP-beli nyelvek vannak CSP-ben. A három színezhető háromszögmentes gráfok jó példa $FPP \setminus CSP$-beli nyelvre.

3.1 Definíció. *Legyen k egész szám, B relációs struktúra. $CSP_{g>k}(B)$ jelöli azt a nyelvet, mely $CSP(B)$ legalább k derékbőségű elemeit tartalmazza.*

3.1 Lemma (Feder, Vardi [12]). *Minden $MMSNP$-beli L nyelvhez léteznek olyan $B_1, \ldots, B_n$ egyforma típusú véges relációs struktúrák és k egész szám, hogy a következők teljesülnek:*

1. *L-nek van polinomiális redukciója $\vee_{i=1}^{n} CSP(B_i)$-re.*

2. *$CSP_{g>k}(B_i)$-nek van polinomiális redukciója L-re.*

A bizonyítás nemtriviális formulamanipuláció, erre nem térünk ki. Feder és Vardi azt is belátták, hogy $CSP(B)$-nek van véletlen polinomiális visszavezetése $CSP_{g>k}(B)$-re minden k-ra. Ez a következő lemmán múlik. Először Erdős bizonyította gráfokra akármilyen nagy kromatikus számú és derékbőségű gráf létezésének bizonyítására [11]. Bár nem biztos, hogy ő maga ráismerne ebben a formájában.

3.2 Lemma (Feder, Vardi [12]). *(Algoritmus) Legyen k pozitív egész és $\varepsilon > 0$, B pedig τ-típusú struktúra. Ekkor van olyan véletlen algoritmus, mely A τ-típusú struktúrához $|A|$-ban (k, ε, τ-tól függő) polinom időben konstruál egy A' struktúrát, hogy $g(A) > k$ és A-nak pontosan akkor van homomorfizmusa B-be ha A'-nek van homomorfizmusa B-be.*

Az előző két lemmát összevetve:

3.1 Tétel (Feder, Vardi [12]). *Minden $MMSNP$-beli L nyelvhez léteznek olyan $B_1, \ldots, B_n$ egyforma típusú véges relációs struktúrák és egy k egész szám, hogy a következőek teljesülnek:*

1. *L-nek van polinomiális redukciója $\vee_{i=1}^{n} CSP(B_i)$-re.*

2. *Minden i-re van $CSP(B_i)$-nek véletlen polinomiális redukciója L-re.*

A következő fejezetben derandomizáljuk 3.2.Lemmát, így belátjuk, hogy az $MMSNP, FPP$ és CSP osztályok a (szokásos értelemben is) ekvivalensek.

A dichotómiára visszatérve: CSP majdnem ugyanolyan jó jelölt nagy dichotóm osztálynak, mint $MMSNP$, de sokkal természetesebb. A CSP osztályt már a nyolcvanas évek óta intenzíven vizsgálták számítógéptudományi berkekben. Ezért Feder és Vardi is inkább ennek az osztálynak a tulajdonságait vizsgálta. Cikkük fő sejtése az, hogy a CSP osztály dichotóm. Belátták, hogy CSP ekvivalens néhány szép részosztályával. Tehát a dichotómia sejtést elég ezekre bizonyítani. Egy S struktúrára a retrakció probléma, $Ret(S)$ a következő: Tekintsük azt az S' relációs struktúrát, melynek alaphalmaza S alaphalmaza, relációs szimbólumai S relációs szimbólumai plusz S minden s eleméhez egy-egy ρ_s egyváltozós reláció, és S-en a ρ_s reláció egyedül az s elemet tartalmazza. Ekkor $Ret(S') = CSP(S)$ egyenlőség teljesül a két nyelvre. Erre gondolhatunk úgy, mint a $CSP(S)$ probléma egy olyan általánosítására, ahol az input néhány eleme már színezettek lehet, azaz adott a képük a homomorfizmusnál. A kérdés pedig az, hogy ez a parciális homomorfizmus kiterjeszthető-e.

3.2 Tétel (Feder, Vardi [12]). *Minden B véges struktúrához van olyan*

1. *G irányított gráf, hogy $CSP(B)$ polinomiálisan ekvivalens $CSP(G)$-vel.*

2. *P részbenrendezés, hogy $CSP(B)$ polinomiálisan ekvivalens $Ret(P)$-vel.*

3. *G páros gráf, hogy $CSP(B)$ polinomiálisan ekvivalens $Ret(G)$-vel.*

4. Hipergráf-expanderek és alkalmazásuk

A fejezet fő eredménye annak bizonyítása lesz, hogy a CSP és $MMSNP$ osztályok ekvivalensek.

4.1 Tétel ([23]). *Minden $MMSNP$-beli L nyelvhez léteznek $B_1, \ldots, B_n$ egyforma típusú véges relációs struktúrák, hogy a következők teljesülnek.*

1. *L-nek van polinomiális redukciója $\vee_{i=1}^{n} CSP(B_i)$-re.*

2. *Minden i-re van $CSP(B_i)$-nek polinomiális redukciója L-re.*

Ehhez – az előző fejezetben írottak alapján – elég 3.2.Lemma algoritmusát derandomizálni. Gráfok esetében a derandomizálás egy szép motivációja nagy derékbőségű és kromatikus számú gráfok konstrukciója volt. Ezt expanderek használatával sikerült megoldani.

Bevezetjük a hipergráf-expander fogalmát, és konstruálunk ilyeneket. Előtte rövid ismertető következik gráf-expanderekről. Forrásunk Nati Linial és Avi Widgerson előadássorozata [19]. A továbbiakban feltesszük, az általános gyakorlatot követve, hogy a gráf reguláris. Többfajta definíció létezik arra, hogy mit jelent gráfokon az expander tulajdonság. Az, hogy egy gráf jól expandál mindegyik definíció szerint azt jelenti, hogy a csúcsok egy nem túl nagy részhalmazának a határa nagy. A határ alatt vagy azt a csúcshalmazt értik a halmaz komplementerében, ahová él megy a halmazból, vagy azon élek halmazát, melyek egyik végpontja a halmazban van, a másik pedig nem. Mi ez utóbbival foglalkozunk, tehát az expander tulajdonság alatt azt értjük, hogy minden nem túl nagy halmaz és a komplementere közt sok él megy – a halmaz méretéhez képest. A gyakorlati ideológia olyan hálózat (gráf) tervezése, hogy ha a hálózatban sok kapcsolat megszakad (sok élet törlünk) akkor is még bármely két nagy része közt menjen él. Egy $S \subseteq V(G)$ halmaz esetében ezt az $\frac{E(S,V(G)\setminus S)}{|S|}$ hányadossal szokták mérni, ez a csúcshalmaz és komplementere közt menő élek száma lenormálva a halmaz méretével. Az expander tulajdonságot általában nem egyetlen gráf, hanem gráfok egy családjának tulajdonságaként tekintik, melyek egyenletesen regulárisak, és valamilyen értelemben egyenletesen jól expandálnak. A nehézség minél jobb expanderek gyors konstrukciója. Az expander-konstrukciók (keverési) hatékonyságát általában a második sajátérték-abszolútérték kicsisége jellemzi. A legjobb ismert konstrukciók esetében is csak ennek a becslése ismert, nem pedig közvetlenül az expandálási tulajdonságé. A második legnagyobb abszolútértékű sajátérték kicsisége jó expandálási tulajdonságot eredményez. Nemsokára pontosabban és általánosabban is kimondjuk az erre vonatkozó expander keverési lemmát. Egy d-reguláris gráfsorozat második sajátérték abszolútértékének szuprémuma legalább $2\sqrt{d-1}$. Ha egy gráf második sajátérték abszolútértéke kisebb ennél akkor Ramanujan-gráfnak nevezik. Egy véletlen reguláris gráf második sajátérték abszolútértéke nagyon közel van ehhez. Determinisztikusan csak 1988-ban sikerült egyenletesen reguláris Ramanujan-gráfsorozatot konstruálnia Lubotzkynak, Phillipsnek és Sarnaknak [36], egy lineáris csoport Cayley-gráfjaként. Ez a konstrukció több más szempontból is optimálisak, például a derékbősége aszimptotikusan optimális, logaritmikus nagyságrendű.

Hipergráfok esetére a sajátértékek használata nem tűnik általánosíthatónak. Továbbá egy halmaz szomszédságának a fogalma sem olyan természetes, mint gráfoknál. Az expandereknek arra a tulajdonságára lesz csak szükségünk, hogy bármely két nagy részhalmaz közt körülbelül annyi él van, amennyi a várható érték. Lényegében azt várjuk el egy H hipergráf-expandertől, hogy bármely k változós R relációjára és $H_1, \dots, H_k \subseteq H$-ra azoknak az R relációban álló k-asoknak a száma, melyek i-edik koordinátája H_i-ben van, ha $i = 1, \dots, k$ közel legyen a várható értékhez, azaz $\frac{\prod_{i=1}^{k} |H_i|}{|H|^k}|R|$-hez. Az alkalmazásokhoz ilyen struktúrákra lesz szükségünk, így lényegében ezt a, gráfok esetében a jó expandálással ekvivalens tulajdonságot vesszük definíciónak. Viszont a konstruálásukkor alapvető módszerünk lesz, hogy két expander direkt szorzatának némi módosításával kapunk egy újabb expandert. Erre pedig alkalmasabb lesz valami ,,folytonos definíció". Így könnyebb lesz részhalmazok, mint karakterisztikus függvények általánosításaként $H \to [0;1]$ valós értékű függvényeket használni, egy formálisan erősebb definíciót adva. Azt a – egyik k változós relációs szimbólumhoz tartozó – multilineáris függvényt használjuk, mely k darab $x_i : H \to \mathbb{R}$ függvényhez hozzárendeli a következő összeget: Minden hiperélre vesszük azt a k tényezős szorzatot, melynek i-edik tényezője az i-edik koordináta helyen felvett értéke az x_i függvénynek, majd ezeket összeadjuk az R-beli hiperélekre. Egy hipergráfot akkor nevezünk majd expandernek, ha minden R k változós relációjára és $x_1, \ldots, x_k : H \to [0;1]$-ra a fenti multilineáris függvény értéke az $(x_1, \ldots, x_k)$ helyen közel lesz a várható értékhez. A hibatag független lesz az x_i-k választásától. Ezt tehát minden alkalmazásnál csak 0–1 értékű, azaz karakterisztikus függvényekre alkalmazzuk. De a konstrukcióinkhoz alkalmasabb a bonyolultabb, folytonos definíció. Az expander-hipergráf definíciója előtt még vár ránk egy technikai definíció.

4.1 Definíció ([23]). *Legyen A relációs struktúra és R a struktúra k változós relációs szimbóluma. A félreértés túlzott veszélye nélkül jelölje R azt a multilineáris függvényt is, mely az* $x_i : A \to \mathbb{R}$ $(i = 1 \ldots k)$ *vektorokhoz az* $R(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{(h_1,\ldots,h_k)\in R(A)} \prod_{i=1}^{k} x_i(h_i)$ *számot rendeli.*

Jelölje az x vektor egyes normáját, azaz koordinátáinak abszolútérték-összegét $|x|$.

4.2 Definíció ([23]). *Az A relációs struktúrát* ε*-expandernek nevezzük, ha bármely R k változós relációjára és* $x_1, \ldots, x_k : A \to [0;1]$*-re* $\left| R(x_1, \ldots, x_k) - |R| \frac{\prod_{i=1}^{k} |x_i|}{|A|^k} \right| < \varepsilon |R|$ *teljesül.*

Végre kimondhatjuk az expander keverési lemmát saját jelöléssel $(E(s,t))$ – a szokásosnál kicsit általánosabb formában. Ezt rendszerint diszkrét esetben mondják ki, azaz $[0;1]$ értékű függvény helyett halmazok karakterisztikus függvényeivel, és nem páros gráfokra. De a bizonyítás ugyanaz, és a páros gráfok esete is közismert.

4.1 Lemma ([19]). *Legyen G irányítatlan, összefüggő, reguláris, nem páros gráf, és λ a második legnagyobb sajátérték abszolútértéke. Továbbá tekintsük az $s, t : G \to [0;1]$ függvényeket. Ezekre*
$\left|E(s,t) - 2\frac{|s||t|}{|V(G)|^2}|E(G)| - \right| \leq \lambda\sqrt{|s||t|} \leq \lambda|V(G)|$ *teljesül.*

Legyen G irányítatlan, páros, összefüggő, reguláris gráf, λ pedig a második legnagyobb sajátérték abszolútértéke. Továbbá tekintsük az $s, t : G \to [0;1]$ függvényeket, melyeknek a G egyik illetve másik osztályára vett megszorítása nulla. Ezekre
$\left|E(s,t) - 4\frac{|s||t|}{|V(G)|^2}|E(G)|\right| \leq \lambda\sqrt{|s||t|} \leq \lambda|V(G)|$ *teljesül.*

A továbbiakban akármilyen nagy derékbőségű ε-expandereket konstruálunk akármilyen kis ε-ra – hatékonyan, azaz az expander méretében polinom időben. Ha egy véletlen struktúrát kicsit módosítunk akkor tényleg alkalmas expandert kapunk. (A kis ε is a keresett struktúra ,,közel véletlen" voltára utal.) Hatékonyan viszont csak logaritmikus méretű expandert tudunk konstruálni ennek az (véletlen) egzisztenciabizonyításnak a használatával. A következő két lemma segítségével egy nagy derékbőségű és egy tetszőleges derékbőségű expanderből tudunk majd egy nagyobb, nagy derékbőségű expandert konstruálni. A két struktúra direkt szorzatát fogjuk majd egy kicsit ,,megcsavarni" az egyik koordinátában. (A konstrukció a szemidirekt szorzattal vagy a fibrálással rokon.) A nagy derékbőség eléréséhez arra is szükségünk lesz, hogy ne legyen túl nagy a maximális fokszám a struktúráinkban. A maximális fokszámot A-ban $M(A)$ jelöli.

4.2 Lemma ([23]). *Legyen A ε_1-expander, B pedig ε_2-expander, mindkettőn egyetlen r változós R reláció. Ekkor A permutációinak minden*
$S_R = \{\varphi_E^i\}$ $\Big(1 \leq i \leq r,\ E \in R(B)\Big)$ *rendszerére a*
$C_S = C = (A \times B, R(C))$*, ahol*
$R(C) = \{(a_1, b_1, \ldots a_r, b_r) : (b_1, \ldots, b_r) \in R(B)$ *és* $(\phi_E^1(a_1), \ldots, \phi_E^r(a_r)) \in R(A)\}$*, struktúra* $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$*-expander. Továbbá* $M(C) \leq M(A)M(B)$*.*

Ugyanezek teljesülnek akkor is, ha több relációnk van és mindegyikhez tartozik egy-egy permutáció-rendszer.

Bizonyítás. A dolgozat egyetlen igazán számolós része igényel némi felvezetést. A tökéletes expander a teljes-hipergráf. Az expanderség konstansa valamilyen értelemben azt méri, hogy a relációs szimbólumokhoz tartozó multilineáris függvények mennyire térnek el ettől az ideális esettől. Jelölje a teljes hipergráfot A illetve B alaphalmazán $\underline{A}$ illetve $\underline{B}$. Egy áttekinthető speciális eset, ha minden φ_E^i permutáció az A identitása, azaz $C = A \times B$. És kényelmi okokból legyen egyetlen relációs szimbólumunk. Először azt nézzük meg, hogy az $\underline{A} \times \underline{B}$-hez és $\underline{A} \times B$-hez tartozó lineáris függvények (lenormálva) mennyire térnek el egymástól, azaz megbecsüljük az $R(\underline{A} \times B) - \frac{|R(B)|}{|B|^r} R(\underline{A} \times \underline{B})$ multilineáris függvény abszolútértékének maximumát a $[0;1]$ értékű $x_1, \ldots, x_r$ függvényekből álló r-eseken. Ehhez egyetlenegyszer kell használnunk B expanderségét a következő függvényekre: Kiátlagoljuk minden $b \in B$-re az x_i értékét az (A, b) halmazon. Majd megbecsüljük $R(A \times B) - \frac{|R(A)|}{|A|^r} R(\underline{A} \times B)$ abszolútértékének maximumát is. Ehhez már nem elég egyetlenegyszer használni, hogy A expander, hanem minden $E = (e_1, \ldots, e_r) \in R(B)$-re külön használjuk. Az x_i-k (A, e_i)-re vett megszorítására, $x_i|_{(A,e_i)}$-re használjuk ki A expanderségét. A hibatagokat összeadva kijön az állítás. Jól látszik az is, hogy a lemma pontosan annyit mond ki, amennyi ebből a gondolatmenetből kijön. Direkt szorzat helyett tetszőleges $E \in R(B)$-hez vehetjük r darab permutációját A-nak. És az E „feletti" hiperéleket, mint r osztályú hipergráfot tekintve, aminek osztályai $|A|$ méretűek minden osztályban megpermutáljuk $Sym(A)$ tetszőleges elemével. Az első becslés csak egy (b, A) halmazon vett átlagát nézi a függvényeknek, ez ugyanaz, mint direkt szorzat esetén. A második becslés pedig külön-külön tekinti az egyes $R(B)$-beli hiperélek fölötti részt. És egy E hiperél feletti r osztályú hipergráf mindenképpen $A \times E$-vel izomorf – a permutációk választásától függetlenül. Ugyanez formálisabban:

Tekintsük az $x_1, \ldots, x_r : A \times B \to [0;1]$ függvényeket. Legyen $y_i : B \to \mathbb{R}$

a fent leírt kiátlagolás: $y_i(b) = \sum_{a\in A} x_i(a,b)$. Ekkor $|y_i| = |x_i|$, és minden $b \in B$-re $0 \le y_i(b) \le |A|$. Így B expandersége miatt
$|R(B)(y_1,\ldots,y_r) - |R(B)|\frac{|y_1|\ldots|y_r|}{|B|^r}| \le \varepsilon_2 |R(B)||A|^r$ teljesül.

Jelölje tetszőleges $b \in B$-re és $x : A \times B \to \mathbb{R}$-re $x^b : A \to \mathbb{R}$ a következő függvényt: $x^b(a) = x(a,b)$. Továbbá jelölje $\varphi \in Sym(A)$-ra és $x : A \to \mathbb{R}$-re $x \circ \varphi$ a szokásos függvénykompozíciót:
$x \circ \varphi(a) = x(\varphi(a))$. Világos, hogy $|x \circ \varphi| = |x|$. Tetszőleges $b_1,\ldots,b_r \in B$-re, $x_1,\ldots,x_r : A \times B \to \mathbb{R}$-re és $\phi_1,\ldots,\phi_r \in Sym(A)$-ra
$|R(A)(x_1^{b_1} \circ \phi_1,\ldots,x_r^{b_r} \circ \phi) - |R(A)|\dfrac{|x_r^{b_r}|\ldots|x_r^{b_r}|}{|A|^r}| < \varepsilon_1 |R(A)|$ teljesül. A háromszög egyenlőtlenséget és a fenti két egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\left|R(C)(x_1,\ldots,x_r) - |R(C)|\frac{\prod_{i=1}^r |x_i|}{|C|^r}\right| = \left|R(C)(x_1,\ldots,x_r) - |R(C)|\frac{\prod_{i=1}^r |y_i|}{|C|^r}\right|$$
$$\le \left|R(C)(x_1,\ldots,x_r) - \frac{|R(A)|}{|A|^r} R(B)(y_1,\ldots,y_r)\right| +$$
$$\left|\frac{|R(A)}{|A|^r} R(B)(y_1,\ldots,y_r) - |R(C)|\frac{\prod_{i=1}^r |y_i|}{|C|^r}\right| =$$
$$\left|\sum_{E=(e_1,\ldots,e_r)\in R(B)} R(A)(x_1^{e_1} \circ \phi_E^1,\ldots,x_r^{e_r} \circ \phi_E^r) - \frac{|R(A)|}{|A|^r}\prod_{i=1}^r y_i(e_i)\right| +$$
$$\frac{|R(A)|}{|A|^r}\left|R(B)(y_1,\ldots,y_r) - |R(B)|\frac{\prod_{i=1}^r |y_i|}{|B|^r}\right| <$$
$$\sum_{E=(e_1,\ldots,e_r)\in R(B)} \left|R(A)(x_1^{e_1} \circ \phi_E^1,\ldots,x_r^{e_r} \circ \phi_E^r) - \frac{|R(A)|}{|A|^r}\prod_{i=1}^r |x_i^{e_i} \circ \phi_E^i|\right| +$$
$$\frac{|R(A)|}{|A|^r}\varepsilon_2 |R(B)||A|^r < \sum_{E\in R(B)} \varepsilon_1 |R(A)| + \varepsilon_2 |R(C)| = \varepsilon |R(C)|.$$

Ezzel beláttuk az expander tulajdonságot. A fokszámokra vonatkozó állítás triviális.

□

4.3 Lemma ([23]). *(Algoritmus) Legyenek A és B véges relációs struktúrák $g(A) \ge k > 1$ és $|A|^{1/k} > M(A)M(B)$. Ekkor minden r változós R relációs szimbólumhoz létezik A permutációinak olyan $S_R = \{\varphi_E^i\}$ $\Big(1 \le i \le r,\ E \in R(B)\Big)$ rendszere, hogy $S = \cup_{R\in\tau} S_R$-re a*

$C_S = C = (A \times B, R(C))$ struktúra, ahol
$R(C) = \{(a_1, b_1, \dots a_r, b_r) : (b_1, \dots, b_r) \in R(B)$ és $(\phi_E^1(a_1), \dots, \phi_E^k(a_k)) \in R(A)\}$,
derékbőségére $g(C_S) \geq k$ teljesül. C_S konstrukciója megvalósítható polinomiális algoritmussal.

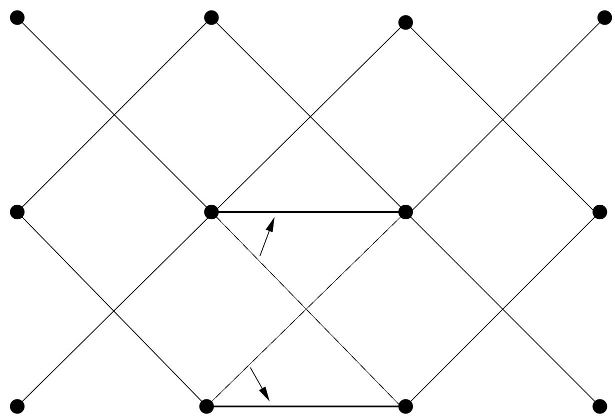
Bizonyítás. Az algoritmus egyre jobb permutáció-rendszert talál majd a következő értelemben: a kapott relációs struktúrák derékbősége monoton nő; továbbá ha egy lépésben a derékbőség j és a következő lépésben is annyi, akkor a j hosszú körök száma (multiplicitással) szigorúan kisebb lesz.

Az algoritmus indulásakor mindegyik permutáció az identitás. A már meglévő S permutáció-rendszert a következő lépéssel javítjuk.

Tegyük fel, hogy $g(C(S)) = j \leq k$, és tekintsünk egy j hosszú kört. Ennek vetülete B-re nem lehet egyetlen hiperél, különben A-ra vett vetületük is kör lenne ellentmondva a $g(A) > k$ feltételnek. Tehát a kör nem egyelemű. Feltehető, hogy a kör két szomszédos hiperélének, E_1-nek és E_2-nek B-re vett vetülete különböző, és legyen $c = (a, b) \in E_1 \cap E_2$. Az $M(A)$-ra és $M(B)$-re vonatkozó feltétel miatt van olyan $a' \in A$, hogy (a, b) és $c' = (a', b)$ távolsága legalább k. Ekkor legyen $\bar{S}$ a következő permutáció-rendszer. Legyen E_1-nek a c az i-edik koordinátája, és jelölje E_1 vetületét B-re $\pi_B(E_1)$. Ekkor S és $\bar{S}$ egy, a $\pi(B)$ hiperél i-edik koordinátájához tartozó, permutáció kivételével megegyeznek. Az ehhez tartozó két permutáció pedig csak a (cc') transzpozícióban különbözik: $\bar{\varphi}^i_{\pi_B(E_1)} = \varphi^i_{\pi_B(E_1)} \circ (cc')$.

Az ábrán a két és három élű út, mint irányítatlan gráf szorzatából indulunk ki. (Vastag helyett szaggatott élek). Majd a négy hosszú út második és harmadik csúcsa közti él harmadik csúcshoz tartozó permutációját megszorozzuk a három élű út második és harmadik elemének transzpozíciójával. Így a szaggatott élek átkerülnek a vastagokba, a kör hossza pedig négyről nyolcra nő.

Azt állítjuk, hogy $C_{\bar{S}}$-ben multiplicitással számolva kevesebb j hosszú kör lesz, mint C_S-ben.



Feleltessünk meg a $C_{\bar{S}}$-beli j-nél rövidebb köröknek C_S-belieket. Jelölje ξ a következő bijekciót. Ha E olyan típusú él, mint E_1 akkor

$$\xi(E) = \begin{cases} (e_1, \ldots, \overset{i}{c'}, \ldots, e_m) \text{ ha } E = (e_1, \ldots, \overset{i}{c}, \ldots, e_m) \text{ és } \pi_B(E) = \pi_B(E_1), \\ (e_1, \ldots, \overset{i}{c}, \ldots, e_m) \text{ ha } E = (e_1, \ldots, \overset{i}{c'}, \ldots, e_m) \text{ és } \pi_B(E) = \pi_B(E_1), \\ E \text{ különben.} \end{cases}$$

Nevezzünk kritikusnak egy H hiperélt ha $\xi(H) \neq H$, és az i-edik koordinátáját kritikus koordinátának. Ha E más típusú akkor $\xi(E) = E$. A ξ függvény egy bijekció C_S- és $C_{\bar{S}}$-beli hiperélek közt. Ez indukál egy bijekciót a $C_{\bar{S}}$-beli hiperélek sorozataiból a C_S-beli hiperélek sorozataiba. Azt állítjuk, hogy egy l ($l \leq k$) hosszú kör képe l hosszú kör lesz, vagy két l összhosszú kör uniója. Tekintve, hogy C_S-ben nincs j-nél rövidebb kör, az $l = j$ választás mellett csak az első eset fordulhat elő. A j hosszú körök összmultiplicitása pedig nem nő, sőt csökken.

A könnyebb geometriai áttekinthetőség kedvéért először a kettő hosszú körök eltüntetését vizsgáljuk, azaz ha $g(C_S) = j = 2$. Tekintsünk egy kételemű kört $C_{\bar{S}}$-ben. A $\xi(H_1) = H_1$, $\xi(H_2) = H_2$ eset érdektelen. Ha $\xi(H_1) \neq H_1$ és $\xi(H_2) = H_2$ akkor feltehető, hogy H_1-nek az i-edik koordinátája c. A H_2-nek egyik koordinátája sem lehet c, különben a H_1

és $\xi(H_2)$ metsző hiperélek tartalmaznák c-t illetve c'-t, ellentmondásban a távolságukra vonatkozó feltétellel. Ezért $\xi(H_1) \cap H_2 \subseteq H_1 \cap H_2$. Végül legyen $\xi(H_1) \neq H_1$ és $\xi(H_2) \neq H_2$. Ha a H_1 hiperél i-edik koordinátája c, H_2-nek pedig c', vagy fordítva, akkor a $\xi(H_1)$ és $\xi(H_2)$ metsző hiperélek tartalmazzák c-t illetve c'-t, ellentmondás. Ha pedig az i-edik koordinátáik egyenlőek, akkor a képeik i-edik koordinátája is megegyezik. Tehát $j = 2$ esetben egy kör képe ξ-nél legalább akkora multiplicitású kör. Így a kételemű köröket sikerül eliminálni a fenti lépés ismételgetésével, és közben nem keletkeznek egyelemű körök.

Tegyük fel, hogy alkalmas $3 \leq j \leq k$-ra már eltüntettük a j-nél rövidebb köröket. Hajtsuk végre ismét a fenti lépést alkalmas c és c' elemekre. Ekkor $C_{\bar{S}}$-ban nem lesznek olyan metsző hiperélek, hogy az egyik tartalmazza c-t és a másik c'-t. Ha egy kör képe nem kör akkor alkalmas E_1 és E_2 szomszédos hiperélének a képe nem metsz össze. Ez csak úgy lehetséges, ha az egyik hiperél kritikus de a másik nem (vagy nem ugyanúgy), és a kritikus koordináta a metszetben van. E_1 és E_2 metszeten kívüli koordinátái nagyon távol vannak egymástól, hiszen c-vel illetve c'-vel vannak egy hiperélben. Ezek az elemek a kör másik ívén haladva is összeköthetőek. Ezért ezen az íven is kell lennie egy ,,ugrásnak" a C_S-beli távolsághoz képest, azaz a fenti tulajdonságokkal bíró metsző kritikus-nemkritikus hiperél párnak. Méghozzá itt a másik fajtának kell előkerülnie, mert c' (c) nem szerepelhet többször egy minimális körben. Több ,,ugrás" tehát nem lehet, csak kettő. Ez esetben körünk képe ξ-nél nem egy hanem két körre esik szét, melyek összhossza körünk hosszával egyenlő. Ez viszont ellentmond $g(C(S)) = j$-nek. Tehát kör képe ugyanolyan hosszú kör, és a ξ leképezés injektív a legfeljebb j hosszú körök halmazán. $\square$

Megjegyzés: A futási idő nyilvánvalóan polinomiális. Bizonyítás nélkül egy pontosabb becslést is adunk. A derékbőség növeléséhez nem kell minden kört külön eltüntetni, mert egy lépésben eltüntetünk egy olyan (E, c) hiperél-pont párhoz ($E \in R(B), c \in C$), melyre c-nek B-re vett vetülete az E egyik koordinátája, minden olyan kört, mely két szomszédos hiperél metszetében tartalmazza c-t, és a kettő közül pontosan az egyik kritikus. Az ilyen párok száma $O(|R(B)||A|)$ nagyságrendű. Továbbá a keletkező új körök hossza mindig legalább $2j$, tehát a triviális k helyett $log_2 k$ szorzót kapunk. A legkomplikáltabb rész a fenti alaplépés futásidejének elemzése. A nehézség a megfelelő c és c' elem megtalálása. Ezt a legegyszerűbb a megfelelő B-beli hiperél kritikus koordinátája feletti c elemből egy szélességi kereséssel megoldani $O(|R(C)|)$ időben. Az így kapott összidő tehát $O(|A||R(A)||R(B)|^2 log_2 k)$.

4.3.Lemma segítségével két hipergráf-expanderből, melyek közül az egyik nagy derékbőségű, tudunk konstruálni egy nagyobb, nagy derékbőségű hipergráf expandert. A következő lemmában – az Erdős-féle bizonyítást másolva – megmutatjuk, hogy létezik alkalmas, nagy derékbőségű ,,kiindulási'' expander.

4.4 Lemma ([23]). *Legyen τ relációs típus, k pozitív egész és $\varepsilon > 0$. Ekkor van olyan csak τ-tól függő konstans, hogy $n > \frac{C^k}{\varepsilon^{2k}}$-ra van olyan A τ-típusú ε-expander, hogy $|A| = n$ és $g(A) > k$.*

Bizonyítás. Legyen δ később alkalmasan megválasztott kicsi pozitív szám. Tekintsük azt a V véletlen struktúrát n elemen, ahol egy r_i elemből álló vektor $n^{1-r_i+\delta}$ valószínűséggel áll R_i relációban. Ebből elhagyjuk az összes olyan hiperélt, mely benne van egy k-nál rövidebb körben. Belátjuk, hogy V' nagy valószínűséggel megfelel a lemma követelményeinek.

Rögzítsük relációs szimbólumok egy $R_1, \ldots, R_j$ $(j \leq k)$ sorozatát, aritásaik legyenek rendre $r_1, \ldots, r_j$. Tekintsünk olyan $r_1, \ldots, r_j$ elemű részhalmazokat, melyek minimális kört alkotnak (ebben a sorrendben). Annak valószínűsége, hogy az egész kör V-ben van $n^{j+\delta j-\sum_{i=1}^{j} r_i}$.

A lehetséges legfeljebb j hosszú körök száma egy adott $R_1, \ldots, R_j$ sorozatra legfeljebb $n^j \prod_{i=1}^{j} r_i(r_i-1)n^{r_i-2} = \prod_{i=1}^{j} r_i(r_i-1)n^{r_i-1}$. Legfeljebb $\prod_{i=1}^{j} r_i(r_i-1)n^{r_i-1}n^{j+\delta j-\sum_{i=1}^{j} r_i} = \prod_{i=1}^{j} r_i(r_i-1)n^{\delta j}$ az ilyen j hosszú körök számának várható értéke. Az ilyen $R_1, \ldots, R_j$ sorozatok száma $|\tau|^j$. A fentieket összeadva minden $R_1, \ldots, R_j$ sorozatra és egy csak τ-tól függő c_1 konstansra $c_1^j n^{\delta j}$ adódik. A körök számának várható értékét $j = 1, \ldots, k$-ra összeadva egy csak τ-tól függő c_2-ra $c_2^k n^{k\delta}$ az eredmény. A Markov egyenlőtlenség szerint $\frac{1}{2}$ valószínűséggel legfeljebb ennek kétszerese lesz a maximum k hosszú körök száma V-ben. Továbbiakban csak az ilyen V-kkel foglalkozunk. Jelölje V' azt a struktúrát, amit úgy kapunk, hogy V-ből elhagyjuk a k-nál rövidebb körökben szereplő hiperéleket. Megmutatjuk, hogy még az így ,,elrontott" véletlen struktúra is nagy valószínűséggel ε-expander. Először megmutatjuk, hogy nagy valószínűséggel minden $R \in \tau$-ra $|R(V) \setminus R(V')| < \frac{\varepsilon}{2}|R(V)|$. Majd azt bizonyítjuk, hogy V nagy valószínűséggel $\frac{\varepsilon}{2}$-expander.

Egy adott R-re $|R(V)|$ várható értéke $n^{1+\delta}$. Azt szeretnénk, hogy $c_2^k n^{k\delta} \leq \frac{1}{2}\varepsilon|R(V)|$ teljesüljön minden $R \in \tau$-ra. Ismét a Markov egyenlőtlenséget használjuk. Legyen $\delta = \frac{1}{2k}$, így $\varepsilon > n^{\delta}$. Tekintve, hogy a várható érték $n^{1+\delta}$, legfeljebb $\frac{c_2^k n^{k\delta}}{n^{1+\delta}\varepsilon} = o(n^{-\frac{1}{2}})$ valószínűséggel teljesül a kívánt esemény komplementere. Ha n elég nagy τ-hoz képest akkor az ilyen rossz események összvalószínűsége is tetszőlegesen kicsi.

Be kell még látnunk, hogy az eredeti V nagy valószínűséggel $\frac{\varepsilon}{2}$-expander. Rögzítsük R_i-t és $S_1, \ldots, S_{r_i} \subseteq V$ -ket. A Chernoff egyenlőtlenség szerint annak valószínűsége, hogy $R_i(S_1, \ldots, S_{r_i})$ a várható értékétől legalább $\frac{\varepsilon}{2}|R_i|$-vel eltér legfeljebb $2e^{-\frac{1}{4}\varepsilon^2 n^{1+\delta}}$. Az ilyen $S_1, \ldots, S_{r_i}$-k száma legfeljebb $2^{n max_i\{r_i\}} = e^{nc_3}$, ahol c_3 is csak τ-tól függ. Belátjuk, hogy $2e^{-\frac{1}{4}\varepsilon^2 n^{1+\delta}} e^{nc_3} \to 0$ teljesül ha $n \to \infty$. Ehhez elég, ha elég nagy n-re $-\frac{1}{4}\varepsilon^2 n^{\delta} + c_3 < 0$. Azaz $\varepsilon^2 n^{\delta}$ nagyobb kell, hogy legyen egy csak τ-tól függő konstansnál. Ezeknek a feltételeknek megfelel a $\delta = \frac{1}{2k}$ és $n > \frac{C^k}{\varepsilon^{2k}}$ választás egy alkalmas, csak τ-tól függő C-re. $\square$

Ezzel megvan a nagy derékbőségű, de még kicsi expanderünk. Nagy derékbőségű, nagy expander készítéséhez szükségünk van még egy másik, (nem feltétlenül nagy derékbőségű,) nagy expanderre. Utóbbi konstruálásához gráf-expandereket használunk. Lubotzky, Phillips és Sarnak, valamint Margulis egyidejűleg konstruáltak optimálisnak nevezhető gráf-expandereket, melyek Ramanujan-gráfok. Mi az előbbiek konstrukcióját használjuk. Ennek számos jó tulajdonsága közül csak arra van szükségünk, hogy Ramanujan-gráf, azaz a gráf reguláris, és kicsi a második legnagyobb sajátérték-abszolútértéke.

4.5 Lemma (Lubotzky, Phillips, Sarnak [36]). *Elég nagy D-re és D-től függően elég nagy N-re létezik olyan n csúcsú, d reguláris és összefüggő páros gráf, melynek két osztálya ugyanakkora, továbbá*

1. *második legnagyobb sajátérték abszolútértéke legfeljebb $2\sqrt{d-1}$, azaz a gráf Ramanujan-gráf,*
2. *$N < n < 2N$ és*
3. *$D < d < 2D$.*

A konstrukció polinom időben megvalósítható.

Bizonyítás. Legyenek p és q prímek, $p, q \equiv 1(4)$, q a p-től függően elég nagy továbbá $N < q^3 - q < 2N$ és $D < p + 1 < 2D$. Ismeretes, hogy elég nagy N-re illetve D-re ezek a feltételek kielégíthetőek. Lubotzky, Phillips és Sarnak konstruáltak $PSL(2, q)$-n olyan $(p + 1)$-reguláris páros (Cayley) gráfot, ami teljesíti a lemma feltételeit. (Pontosabban $(\frac{p}{q}) = -1$-re ilyet konstruáltak, $(\frac{p}{q}) = 1$-re pedig feleekkora méretű, nem páros gráfot. Utóbbit egy éllel direkt szorozva ismét alkalmas páros gráfot kapunk.) A konstrukció, mint algoritmus polinomiális idejű. □

4.6 Lemma ([23]). *(Algoritmus) Legyen τ véges relációs típus és $\varepsilon > 0$. Létezik olyan, csak τ-tól és ε-tól függő C konstans, hogy $N > C$ pozitív egészhez létezik olyan A, τ típusú ε-expander, hogy $M(A) < C$ és $N < |A| < 2N$. Továbbá A polinom időben megkonstruálható.*

Bizonyítás. Először azt az esetet vizsgáljuk, ha τ egyetlen R relációs szimbólumból áll, jelölje r az aritását. 4.5. Lemma segítségével alkalmas, elég nagy

c-re konstruálunk olyan d-reguláris, páros Ramanujan gráfot, hogy G két osztálya ugyanakkora, $N < |V(G)| < 2N$ és $c < d < 2c$. Tekintsünk egy $b : C_1 \to C_2$ bijekciót G két osztálya közt. Legyen a C_1 alaphalmazú G' irányított gráf élhalmaza $E(G') = \{(x,y) : x, y \in C_1, (x, b(y)) \in E(G)\}$. A G második legnagyobb sajátérték-abszolútértéke legfeljebb $\lambda = 2\sqrt{d-1}$. Az expander keverési lemma szerint bármely $x_1 : C_1 \to [0;1]$ és $x_2 : C_2 \to [0;1]$-re
$|E(x_1, x_2) - d\frac{|x_1||x_2|}{|C_1|}| \leq \lambda|C_1| < \frac{2}{\sqrt{d}}d|C_1| = \frac{2}{\sqrt{d}}|E(G')|$, azaz a G' irányított gráf $\frac{2}{\sqrt{d}}$-expander. Legyen A alaphalmaza C_1. Az r változós R reláció A-n pedig legyen a következő:
$R(A) = \{(a_1, \dots, a_r) : (a_i, a_{i+1}) \in E(G') \text{ ha } 1 \leq i \leq r-1\}$.
Ekkor $M(A) = rd^{r-1}|A|$. Belátjuk az expander tulajdonságot. Legyenek $x_1, \dots, x_r : A \to [0;1]$. Definiáljuk rekurzívan az $y_0, \dots, y_r$ függvénysorozatot: Legyen $y_0(a) = 1/d$ minden $a \in A$-ra és rekurzívan
$y_{i+1}(a) = \sum\limits_{(a',a) \in E(G')} y_i(a')x_{i+1}(a)$
Ekkor $|y_0| = |A|/d = \frac{|R(A)|}{d^r}$, $y_1 = x_1$ és könnyen láthatóan $|y_r| = R(x_1, \dots, x_r)$. Tekintve, hogy G' $\frac{2}{\sqrt{d}}$-expander és y_{i-1} értéke mindenütt legfeljebb d^{i-2}, minden i-re teljesülni fog
$\Big||y_i| - \frac{d}{|A|}|y_{i-1}||x_i|\Big| \leq \frac{2}{\sqrt{d}}|E(G')|d^{i-2} = \frac{2}{\sqrt{d}}d^{i-1}|A|$.
Ezeket $i = 1, \dots, r$-re $\frac{d^{r-i}}{|A|^{r-i}} \prod_{j=i+1}^r |x_j|$ súllyal összeadva és a háromszög egyenlőtlenséget fölhasználva $|y_r| = R(x_1, \dots, x_r)$-re az

$$\Big|R(x_1, \dots, x_r) - |y_0|\frac{d^r \prod_{i=1}^r |x_i|}{|A|^r}\Big| = \Big|R(x_1, \dots, x_r) - |R(A)|\frac{\prod_{i=1}^r |x_i|}{|A|^r}\Big|$$

$$\leq \sum_{i=1}^r \frac{d^{r-i}}{|A|^{r-i}}\frac{2}{\sqrt{d}}|A|d^{i-1}\prod_{j=i}^r |x_j| = \sum_{i=1}^r \frac{|x_i|}{|A|^{r-i}}\frac{2}{\sqrt{d}}|A|d^{r-1} \leq r\frac{2}{\sqrt{d}}|R(A)|$$

becslés adódik. A fent definiált A tehát $\frac{2r}{\sqrt{d}}$-expander.

Most tegyük fel, hogy több relációs szimbólumunk van. Legyenek ezek $R_1, \dots, R_m$, aritásaik rendre $r_1, \dots, r_m$. Készítsünk egy A ε-expandert egyetlen $r = \sum_{i=1}^m r_i$ változós R relációval, mint az előző esetben. És legyen A-n

$R_i = \{(a_1, \ldots, a_{r_i}) : \exists (b_1, \ldots, b_r) \in R, b_{\sum_{j=1}^{i-1} r_i + k} = a_k$ ha $1 \le k \le r_i\}$.
Ez megfelelő lesz. Az algoritmus polinomiális idejű. □

4.7 Lemma ([23]). *(Algoritmus) Legyen k pozitív egész, $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik olyan, csak ezektől függő $N_{\varepsilon,k}$, hogy minden $N > N_{\varepsilon,k}$-ra konstruálható olyan E ε-expander, hogy $N < |E| < 2N, M(E) < |E|^{\frac{1}{2k}}$ és $g(E) > k$. Az algoritmus polinomiális idejű.*

Bizonyítás. 4.4.Lemma segítségével készítsünk egy olyan A $\varepsilon/2$-expandert, melynek derékbősége legalább k, $M(A) < |A|^{\frac{1}{2k}}$. Az ilyen tulajdonságú A-k közül rögzítünk egyet, ami elég nagy a következőkhöz. Elég nagy b-re van olyan B $\varepsilon/2$-expander, hogy $b < |B| < 2b$ és $M(B) < |A|^{\frac{1}{2k}}$. Ez az előző lemma szerint lehetséges, ha $|A|$ és tőle függően b elég nagy. Ekkor a szorzat „megcsavarható” 4.3.Lemma szerint úgy, hogy a kapott $|A||B|$ elemű ε-expander derékbősége legalább k legyen.
Az algoritmushoz A-t rögzítjük. B-t kell megkonstruálni és egyszer kell alkalmazni 4.3.Lemma algoritmusát. □

Most már minden eszközünk megvan az Erdős lemma derandomizálásához.

4.2 Tétel ([23]). *(Algoritmus) Legyenek s, k pozitív egészek, τ véges relációs típus. Ekkor tetszőleges τ típusú B struktúrához (s, k, τ-tól függő) polinom időben konstruálható olyan B', melyre*

1. *B' derékbősége nagyobb, mint k,*
2. *B a B' homomorf képe, és*
3. *ha $|S| \le s$ teljesül az S struktúrára, akkor B'-nek pontosan akkor van homomorfizmusa S-be ha B-nek van homomorfizmusa S-be.*

Bizonyítás. Jelölje r a τ-beli relációk aritásának maximumát. Legyen A olyan $\frac{1}{s^r}$-expander, hogy $|A| < |B|^{2k}, |M(A)||M(B)| < |M(A)|^k, g(A) > k$. 4.3.Lemma algoritmusa alkalmazható A, B-re. Legyen B' a kapott C.

4.3.Lemma szerint $g(B) > k$, és B a B' homomorf képe. Így ha B-nek van homomorfizmusa S-be akkor B'-nek is. Legyen $\varphi : B' \to S$ egy homomorfizmus. Definiáljuk a $\psi : B \to S$ függvényt a következőképpen. Legyen $\psi(b)$ az egyik olyan S-beli elem, hogy legalább $\frac{|A|}{s}$ darab $a \in A$-ra $\varphi((a, b)) = \psi(b)$. Belátjuk, hogy ψ is homomorfizmus. Legyen $H = (h_1, \ldots, h_j)$ egy R relációban álló hiperél B-ben, és $A_i = \{a \in A : \varphi((a, h_i)) = \psi(h_i)\}$. Ekkor $|A_i| \geq \frac{|A|}{s}$. Alkalmazzuk az A $\frac{1}{s^r}$-expander tulajdonságát az A_i halmazok karakterisztikus függvényeire, $\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_j}$-re:
$\left| R(\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_j}) - |R(A)| \frac{\prod_{i=1}^{j} |A_i|}{|A|^r} \right| < \frac{1}{s^r}|R(A)| \leq \frac{1}{s^j}|R(A)|$ adódik. Mivel $|R(A)| \frac{\prod_{i=1}^{j} |A_i|}{|A|^r} > \frac{1}{s^j}|R(A)|$ ezért $R(\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_j}) > 0$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy van olyan R relációban álló hiperél, melynek első koordinátája A_1-beli, $\ldots$,j-edik A_j-beli. A φ homomorfizmus, ezért ennek képe, ami éppen $(\psi(h_1), \ldots, \psi(h_j))$, is R relációban áll. Az algoritmus polinomiális idejű. $\square$

5. Az algebrai megközelítés

Ebben a fejezetben Jeavons [20] illetve Jeavons és Bulatov [5] cikkét vázoljuk. A cikkek lényegi része kicsit nehézkes, és bizonyos tételeket csak speciális esetekben mondanak ki, bár általánosabban bizonyítanak. Ezeket a részeket átdolgoztuk. Nincsenek különösebben nehéz bizonyítások ezekben a munkákban, nagy részük szerepel is a fejezetben. Inkább a módszerek és a szemlélet érdekesek, amivel CSP problémák közti redukciók egy nagy családjára adható algebrai leírás. Rövid bevezetőt és áttekintést adunk a módszerről és az ehhez kapcsolódó főbb eredményekről.

Kiindulópontunk a következő észrevétel. Legyen τ véges típus, A egy véges τ típusú relációs struktúra. Legyen S is egy véges τ-típusú struktúra k címkével. Tekintsük a következő k változós R relációt A-n: $R = \{x_1, \ldots, x_k : \exists\varphi : S \to A$ homomorfizmus, hogy az i címkéjű elem képe $x_i\}$. Ekkor R, mint új relációs szimbólum hozzáadása nem változtatja a CSP probléma bonyolultságát, azaz $CSP(A, \tau \cup R)$ a $CSP(A, \tau)$-ra redukálható. Ezek az R-k éppen a pozitív formulákkal kifejezhető új relációk, azaz amik felírhatóak a relációs szimbólumok mellett a $\exists, =, \wedge$ jelekből álló formulákkal.

Példa: Legyen a C_5 irányítatlan gráf az öt hosszú kör. Tekintsük rajta azt a kétváltozós relációt, hogy két csúcs össze van kötve egy három hosszú úttal, ez az $R = \{(x, y) : \exists z, v\ E(x, z) \wedge E(z, v) \wedge E(v, y)\} \subseteq C_5^2$ kétváltozós reláció. Az R reláció ezen az ötelemű halmazon éppen egy teljes öt csúcsú gráfot ad, amire a homomorfizmus-probléma NP-teljes, így $CSP(C_5)$ is az. A visszavezetés a következő. Egy G gráfról el akarjuk dönteni, hogy színezhető-e öt színnel. Felosztjuk G minden élét két csúccsal, azaz kicseréljük egy három élű útra. A kapott G'-nek pontosan akkor van homomorfizmusa C_5-be, ha G színezhető öt színnel.

5.1 Definíció. *Jelölje adott Γ relációhalmazra $\langle\Gamma\rangle$ a Γ-ból pozitív formulával kifejezhető relációk halmazát.*

5.1 Tétel (Jeavons [20]). *Legyenek* Γ_1 *és* Γ_2 *véges relációhalmazok egy véges halmazon. Ha* $\langle\Gamma_1\rangle \subseteq \langle\Gamma_2\rangle$ *akkor* $CSP(\Gamma_1)$*-nek van polinomiális redukciója* $CSP(\Gamma_2)$*-re.*

Tehát $\langle\Gamma\rangle$ minden véges Γ' részére $CSP(\Gamma')$ a $CSP(\Gamma)$-ra redukálható. Ez a CSP problémák közti ismert redukciók jelentős részét leírja. Természetes igény a $\langle\ \rangle$ lezárás-operátor jobb megismerése, mivel $\langle\Gamma\rangle$ „kompaktabbul tárolja" az információkat $CSP(\Gamma)$ bonyolultságáról, mint maga Γ. A továbbiakban egy véges halmaz fölötti Γ relációhalmaz véges részeihez tartozó CSP problémák bonyolultságát vizsgáljuk majd Γ tulajdonságain keresztül.

5.2 Definíció (Bulatov,Jeavons [5]). *Legyen* Γ *relációhalmaz egy véges halmazon. Azt mondjuk, hogy* $CSP(\Gamma)$ NP*-teljes, ha létezik véges* $\Gamma' \subseteq \Gamma$*, hogy* $CSP(\Gamma')$ NP*-teljes. És* $CSP(\Gamma)$ *polinomiális, ha minden véges* $\Gamma' \subseteq \Gamma$*-ra polinomiális.*

Ha nem lesz Γ minden véges részéhez tartozó CSP probléma polinomiális, vagy nem lesz legalább egy NP-teljes, akkor nem nagyon érdemes a Γ-hoz bonyolultságot rendelni. De a redukció fogalmát kiterjeszthetjük végtelen relációhalmazokra is. Jeavonsék a dichotómia sejtésre koncentráltak, így ezt nem tették meg.

5.3 Definíció. *Legyenek* Γ_1 *és* Γ_2 *relációhalmazok egy-egy véges halmazon. Azt mondjuk, hogy* Γ_1 *(polinomiálisan) redukálható* Γ_2*-re ha minden véges* $\Gamma_1' \subseteq \Gamma_1$*-hez van olyan véges* $\Gamma_2' \subseteq \Gamma_2$*, hogy* $CSP(\Gamma_1')$*-nek van polinomiális redukciója* $CSP(\Gamma_2')$*-re. Ha mindkét irányban van redukció akkor (polinomiálisan) ekvivalenseknek nevezzük őket.*

A következő tétel a $\langle\Gamma\rangle$ relációhalmazokat egy Galois kapcsolat zárt halmazaiként jellemzi – algebrák segítségével.

5.4 Definíció. $Pol(\Gamma)$ *jelöli a* Γ*-val kompatibilis függvények halmazát* H*-n. Egy* A *algebra (klón) műveleteivel kompatibilis relációk halmazát pedig jelölje* $Inv(A)$*. Vegyük észre, hogy ezek éppen* A *részalgebrái.*

Példa :[Greenwell, Lovász [15]] Jelölje K_n az n csúcsú teljes gráfot, és legyen $f : K_n^k \to K_n$ egy polimorfizmus. Ekkor alkalmas $\pi_i : K_n^k \to K_n$ projekcióra és K_n egy ν automorfizmusára $f = \nu \circ \pi_i$ teljesül.

A következő tételt Jeavons mondta ki először az általunk használt formában, bár Geiger [14] már sokkal régebben bizonyította.

5.2 Tétel (Jeavons [20]). *Legyen Γ relációk halmaza egy véges alaphalmazon. Ekkor $\langle\Gamma\rangle = Inv(Pol(\Gamma))$.*

Így a Galois kapcsolat zárt relációhalmazai pontosan leírhatóak a pozitív formulákra való zártsággal. Nem ismert semmilyen leírás a zárt algebrákról, azaz olyan A algebrákról, amikre $A = Pol(Inv(A))$.

A tétel szerint az $Inv(\Gamma)$ algebra meghatározza Γ bonyolultságát. Terjesszük ki az NP-teljesség, P-beliség és a redukció definícióját (véges alaphalmazú) algebrákra.

5.5 Definíció. *Legyen A egy véges alaphalmazú algebra. Azt mondjuk, hogy $CSP(A)$ NP-teljes, ha $CSP(Inv(A))$ NP-teljes. Továbbá $CSP(A)$ polinomiális ha $CSP(Inv(A))$ polinomiális.*

5.6 Definíció. *Legyenek A és B véges alaphalmazú algebrák. Azt mondjuk, hogy A (polinomiálisan) redukálható B-re, ha $Inv(A)$-nak van polinomiális redukciója $Inv(B)$-re. Ha mindkét irányban van redukció akkor (polinomiálisan) ekvivalenseknek nevezzük őket.*

A következő tétel teszi lehetővé komolyabb algebrai módszerek használatát. Jeavons belátta, hogy a szokásos algebrai konstrukciók egyben redukciók is: A véges algebra minden részalgebrája, homomorf képe és véges hatványa redukálható A-ra. Azaz az A által generált (pszeudo)varietás minden eleme redukálható A-ra.

5.3 Tétel (Jeavons [20]).

1. *Legyen A véges alaphalmazú algebra, B pedig a homomorf képe. Ekkor B redukálható A-ra.*

2. *Legyen A véges alaphalmazú algebra, B pedig egy részalgebrája. Ekkor B redukálható A-ra.*

3. *Legyen A véges alaphalmazú algebra, $k > 0$ egész szám. Ekkor A^k redukálható A-ra.*

4. *Legyen A véges alaphalmazú algebra, B az általa generált varietás egy véges alaphalmazú algebrája. Ekkor B redukálható A-ra.*

Bizonyítás. Legyen $B \leq A$ és $\Gamma_1 \subseteq Inv(B)$ véges. A $\rho \in \Gamma_1$ reláció, mint B egy hatványának részalgebrája egyben A megfelelő hatványának részalgebrája is. Jelölje ezt a relációt $\bar{\rho}$. És tekintsük a $\Gamma_2 = \left\{\bar{\rho} : \rho \in \Gamma\right\}$ relációhalmazt A alaphalmazán. Ekkor $CSP(\Gamma_1) = CSP(\Gamma_2)$, hiszen (A, Γ_2) egy $|B \setminus A|$ elemű, relációk nélküli struktúra és (B, Γ_1) diszjunkt uniója.

Legyen $\varphi : A \to B$ homomorfizmus, és $\Gamma_1 \subseteq Inv(B)$ véges. Most a $\rho \in \Gamma_1$ relációhoz a $\bar{\rho} = \varphi^{-1}(\rho)$ összefüggéssel definiált A-beli relációt rendeljük. $\Gamma_2 = \left\{\bar{\rho} : \rho \in \Gamma\right\}$-ra a két CSP nyelv egyenlősége ismét könnyen ellenőrizhető.

Végül legyen $B = A^k$. Ekkor B relációi, mint A egy hatványának részalgebrái egyben A részalgebrái is, azaz (k-szoros aritású) relációi. Legyen ismét $\Gamma_1 \subseteq Inv(B)$, és $\rho \in \Gamma_1$ egy t változós reláció. Legyen $\bar{\rho} = \{(x_1, \ldots, x_{tk}) : \big((x_1, \ldots, x_k), \ldots, (x_{tk-k+1}, \ldots, x_{tk})\big) \in \rho\}$. És legyen $\Gamma_2 = \{\bar{\rho} : \rho \in \gamma_1\}$. A $CSP(\Gamma_1)$ most is visszavezethető $CSP(\Gamma_2)$-re. Az $CSP(\Gamma_1)$ egy S inputjának minden s elemét helyettesítsük az $s^1, \ldots s^k$ elemekkel. És legyen $(s_1^1, \ldots, s_1^k, \ldots, s_t^1, \ldots, s_t^k) \in \bar{\rho}$ ha $(s_1^i, \ldots, s_t^i) \in \rho$ $(1 \leq i \leq t)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott struktúra pontosan akkor $CSP(\Gamma_2)$-beli, ha $S \in CSP(\Gamma_1)$.

Ismert, hogy ha egy véges algebra benne van egy másik véges algebra által generált varietásban akkor az általa generált pszeudovarietásban is benne van, azaz előáll véges hatvány részalgebrájának homomorf képeként is. □

A fenti tétel segítségével visszavezetések egy nagy családja algebraizálható. Az algebráról az is feltehető, hogy (minden művelete) idempotens. Ebben az esetben még többet mondhatunk majd. Az előző tétel következményeit is csak ennek bizonyítása után tárgyaljuk majd.

5.1 Lemma (Bulatov,Jeavons [5]). *Minden véges alaphalmazú A algebrához létezik egy vele ekvivalens véges idempotens algebra.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $A = Pol(Inv(A))$, azaz A a Galois kapcsolat zárt halmaza.

Először azt az esetet vizsgáljuk, ha $Pol(A)$-ban minden egyváltozós művelet bijekció. Az alaphalmaz minden a eleméhez hozzávesszük a $\rho_a = \{a\}$ egyelemű relációt. Be fogjuk látni, hogy $Inv(A)$ és $Inv(A) \cup \{\rho_a : a \in A\}$ ekvivalensek. Mivel $Pol(\{\rho_a : a \in A\})$ éppen az A-n idempotens függvényekből áll, $Pol(Inv(A) \cup \{\rho_a : a \in A\})$ egy A-val ekvivalens idempotens algebra lesz.

Legyen $\Gamma \subset Inv(A)$ egy véges relációhalmaz, Γ' pedig a következő bővebb relációhalmaz: $\Gamma' = \Gamma \cup \{\rho_a : a \in A\}$. Ekkor $CSP(\Gamma)$ és $CSP(\Gamma')$ ekvivalensek. Mivel Γ szűkebb halmaz, világos, hogy $CSP(\Gamma)$ redukálható $CSP(\Gamma')$-re. A másik irány bizonyításához a következő $\rho \in \Gamma$ reláció segít majd.
Legyen $A = \{x_1, \ldots, x_{|A|}\}$ és legyen A-n
$\rho = \{(y_1, \ldots, y_{|A|})$: létezik olyan f egyváltozós művelet A-n, hogy $f(y_i) = x_i\}$. Tehát $\rho \cup \Gamma \subset Inv(A)$. Belátjuk, hogy $CSP(\Gamma')$ visszavezethető $CSP(\rho \cup \Gamma)$-ra.

Legyen S a $CSP(\Gamma')$ egy inputja. Vegyünk hozzá $|A|$ darab elemet, amik rendre $\rho_{x_1}, \ldots, \rho_{x_n}$ relációban állnak, jelölje ezt S'. Ebből úgy kapjuk $CSP(\Gamma)$ egy T inputját, hogy elhagyjuk a ρ_a egyváltozós relációkat, és hozzávesszük a következőt:
$\rho = \{(y_1, \ldots, y_{|A|})$: létezik olyan f egyváltozós művelet A-n és $z_1, \ldots, z_{|A|} \in A$, hogy $\rho_{z_i}(y_i)$ és $f(x_i) = z_i$ ha $1 \leq i \leq |A|\}$
Azaz $|A|$ darab elem akkor van ρ relációban, ha S'-ben mindegyik szerepel valamelyik ρ_a-ban, tehát a képe a homomorfizmusnál már rögzített, továbbá ha a képeik ρ relációban állnak. Ha $S' \in CSP(\Gamma')$ akkor $T \in CSP(\Gamma)$ is teljesül, ugyanaz a függvény a tanú rá. Tegyük fel, hogy létezik $\varphi : T \to A$ relációhomomorfizmus. Ez egyben egy $\varphi' : S' \to A$ függvény is, a ρ_a

egyváltozós relációkat leszámítva relációhomomorfizmus. Minden $a \in A$-ra a ρ_a-ban lévő elemek képe ugyanaz φ-nél a T-re tett ρ reláció miatt. Továbbá van olyan egyváltozós f függvénye A-nak, hogy minden $a \in A$-ra egy ρ_a relációban álló elem éppen $f(a)$-ba képződik. Mivel A minden egyváltozós művelete bijektív, f^{-1} is A egy művelete. Ekkor $f^{-1} \circ \varphi : S' \to (A, \Gamma')$ alkalmas homomorfizmus lesz.

Tegyük fel, hogy van olyan egyváltozós $\varphi : A \to A$, ami nem bijektív. Feltehető továbbá, hogy $\varphi = \varphi \circ \varphi$. Legyen B az az algebra, aminek alaphalmaza $\varphi(A)$, és függvényei
$\{f : B^n \to B |\ \exists g$ függvény A-n, hogy $f = \varphi \circ g\}$. Ez nem feltétlenül homomorf képe A-nak. A φ függvényről annyit tudunk, hogy $Pol(Inv(A))$-beli. Ez azt jelenti, hogy minden $Inv(A)$-beli relációval kompatibilis, tehát A minden véges hatványának minden részalgebrája zárt erre a műveletre. Belátjuk, hogy a két algebra ekvivalens.

Legyen $\Gamma_1 \subseteq Inv(B)$ véges, és $\rho \in \Gamma_1$ az egyik k változós reláció. A $\bar{\rho}$ reláció A-n pedig legyen a $\bar{\rho}$ által generált részalgebrája A^k-nak. Legyen $\Gamma_2 = \{\bar{\rho} : \rho \in \Gamma_1\}$. Vegyük észre, hogy $\bar{\rho}$ megszorítása B^k-ra éppen ρ. Azaz (B, Γ_1) („feszített") részstruktúrája (A, Γ_2)-nek.

Belátjuk, hogy $CSP(\Gamma_1) = CSP(\Gamma_2)$, tehát a nyelvek nem csak polinomiálisan ekvivalensek, de egyenlőek is. Jelölje S az input struktúrát. Ha ennek van homomorfimusa (A, Γ_1)-be akkor az ezt tartalmazó (A, Γ_2)-be is. Ha pedig (A, Γ_2)-be van homomorfimusa akkor ezt φ-vel komponálva egy (A, Γ_1)-be menő homomorfizmust kapunk.

A másik irány bizonyításához legyen a k változós $\rho \in Inv(A)$ relációra a $\bar{\rho}$ reláció a ρ megszorítása B^k-ra. Ez tényleg részalgebrája B^k-nak. A két megfelelő CSP nyelv egyenlősége ugyanúgy bizonyítható, mint az előbb.

Tehát a kapott B algebra ekvivalens A-val és kisebb nála. Ha φ-t úgy választjuk, hogy $\varphi(A)$ minimális méretű legyen, akkor a kapott B-nek minden egyváltozós művelete bijekció, így ekvivalens az idempotens reduktumával. □

5.4 Megjegyzés. *A bizonyítás első felében azt is beláttuk, hogy amennyiben $Pol(Inv(A))$ minden egyváltozós művelete bijektív, akkor ekvivalens az idempotens reduktumával. A másodikban pedig azt, hogy egy struktúrának és egy retraktumának a bonyolultsága megegyezik.*

Most már kimondhatjuk a dichotómia sejtés algebrai verzióját. Ez pontos sejtés arra, hogy mely CSP nyelvek polinomiálisak és melyek NP-teljesek. Tehát ebből következne a dichotómia sejtés.

Sejtés:[Bulatov, Jeavons, Krokhin [6]] Legyen A véges alaphalmazú idempotens algebra. Ha A részalgebrájának homomorf képe egy olyan kételemű algebra, amin minden művelet projekció, akkor létezik olyan $\Gamma \subseteq Inv(A)$, amire $CSP(\Gamma)$ NP-teljes. Különben minden véges $\Gamma \subseteq Inv(A)$-ra $CSP(\Gamma) \in P$.

Az állítás első része ismert, ennek bizonyításához már mindent tudunk. Csak annyit kell belátni, hogy egy olyan kételemű algebrához, aminek minden művelete projekció, vannak alkalmas invariáns relációk, amikre a probléma NP-teljes. Mivel a projekciók minden relációval kompatibilisek, elég belátni, hogy a kételemű halmazon vannak olyan relációk, amikre a megfelelő CSP probléma NP-teljes. Például a 3-SAT probléma ilyen. A bizonyítás hatvány részalgebrájának homomorf képére is működik. De egy ilyen kételemű algebrára ekvivalens az, hogy egy idempotens algebra részalgebrájának homomorf képe, és az, hogy benne van az algebra által generált varietásban. Ennek belátása nem igényel különösebb algebrai ismereteket.

Ha nincs ilyen algebra egy véges algebra által generált varietásban, az azzal ekvivalens, hogy kifejezhető egyfajta speciális idempotens függvény, úgynevezett Taylor-term az algebra függvényeiből. Ez egy olyan idempotens függvény, ami teljesít olyan azonosságokat, amik miatt nem lehet projekció.

5.7 Definíció (Taylor [46]). *Az A algebrán Taylor-termnek nevezünk egy A függvényeiből kifejezhető k változós f idempotens függvényt, ha a következők* *teljesülnek. Jelöljenek x és y változókat. Minden $1 \leq i \leq k$-ra létezik $u_i, v_i \in \{x, y\}^k$, hogy*

$f(u_i) = f(v_i)$

és u_i-nek az i-edik koordinátája x, v_i-nek az i-edik koordinátája pedig y. Tehát az i-edik azonosság tanúsítja, hogy f nem lehet projekció az i-edik koordinátára.

Példa: Az úgynevezett Malcev-term három változós, és az $f(x, y, y) = f(x, x, x) = f(y, y, x) = x$ azonosságokat teljesíti. Egy csoporton az $xy^{-1}z$ mindig Malcev-term.

A CSP algebrai megközelítése eléggé hatékonynak bizonyult. Jó néhány érdekes speciális esetben is sikerült bebizonyítani a dichotómia sejtést. A legfontosabbakat említve: Bulatov belátta arra az esetre, ha minden polimorfizmus konzervatív, azaz minden részhalmaz részalgebra. Ez kombinatorikus szemmel nézve éppen a listás homomorfizmus probléma. Azt is Bulatov bizonyította először, hogy ha a polimorfizmusok közt van Malcev-term akkor a probléma polinomiális, majd Dalmau adott szép bizonyítást ugyanerre az esetre. A probléma akkor is polinomiális, ha a polimorfizmusok közt van majdnem-többségi függvény. Az eddig ismert esetekben, ahol sikerült belátni a dichotómiát, ott az algebrai verzió is igaznak bizonyult. Így az NP-teljességnek mindig sikerült megtalálni az algebrai okát. És ez ad egy, a tárgyalt módon, a relációk kifejezésén alapuló visszavezetést.

A probléma bonyolultságának ilyen hatékony algebrai kódolását látva számomra az a meglepő, hogy a kombinatorikus szemléletnek is van létjogosultsága. Kombinatorikus szemlélet alatt azt értem, hogy bizonyítás közben nem változtatjuk meg (nagyon) a vizsgált struktúrát.

Abban az esetben, amikor a célstruktúra egy irányított gráf, Hell és Nešetřil látták be, hogy dichotómia áll fenn [17]. Méghozzá pontosan akkor polinomiális a probléma ha a célgráf páros. Bulatov lefordította algebrai nyelvre Hell és Nešetřil bizonyítását [4]. A nehéz rész annak bizonyítása, hogy ha G tartalmaz páratlan kört akkor $CSP(G)$ NP-teljes.

Fordítás után a bizonyításuk úgy olvasható, hogy a G irányítatlan gráfból (nem túl lehetetlen módon) kifejezhető egy másik G' irányítatlan gráf, aminek egy háromszög retraktuma. Azaz majdnem van „kézzelfogható” kombinatorikus oka is az NP-teljességnek (pontosabban G'-n van). A következő fejezetekben részbenrendezések néhány algebrai és bonyolultságelméleti szempontból is érdekes osztályát karakterizáljuk. Az osztályokhoz tartozó részbenrendezéseket tiltott algebrai-kombinatorikus (részalgebra retraktuma) rész-részbenrendezésekkel jellemezzük majd.

6. Részbenrendezések topológiája és rendvarietásai

A továbbiakban részbenrendezésekkel foglalkozunk. Ebben a fejezetben leírjuk a részbenrendezések alapvető topologikus tulajdonságait, és a topologikus alapfogalmak megfelelőit részbenrendezéseken. A fundamentális csoporttal csak a nyolcadik fejezetben foglalkozunk. Formálisan sehol sem lenne szükségünk a topologikus fogalmak használatára, mindent definiálunk a részbenrendezések terminológiájában is. De mivel a legtöbb használt ötlet topologikus eredetű, érdemes látni az analóg topologikus fogalmakat is. Csak azokat az állításokat bizonyítjuk majd, amiket használunk a későbbiekben, bár a többi bizonyítás sem túl bonyolult.

Továbbá bevezetjük a rendvarietás fogalmát. A következő két fejezetben részbenrendezések egy-egy érdekes osztályát karakterizáljuk olyan módon, hogy az általuk generált rendvarietásban nincsenek benne bizonyos tiltott részbenrendezések. A szereplő bizonyítások és a rendvarietás fogalmának bevezetése Szabó Csabával közös munkánk.

Egy részbenrendezés egy I részhalmaza ideál, ha leszálló, azaz minden $x \in I$-re és $y \leq x$-re $y \in I$ is teljesül. Egy részbenrendezés egyben topologikus térnek is tekinthető az ideáltopológiával, azaz amelynek nyílt halmazai éppen az ideálok. Akik elvi megfontolásokból nem foglalkoznak véges topologikus terekkel, azok gondolhatnak arra a szimpliciális komplexusra, melynek szimplexei a részbenrendezés láncai. Ez gyengén homotopikusan ekvivalens az ideáltopológiával. Szimpliciális komplexushoz is rendelhető részbenrendezés: a cellák részbenrendezése tartalmazásra nézve. Az X szimpliciális komplexus celláinak részbenrendezéséhez rendelt láncok komplexusa éppen az X baricentrikus felosztása. Azaz lényegében minden szimpliciális komplexus megkapható a fenti módon. A szimpliciális komplexusoknál kényelmesebb a geometriailag kevésbé természetes ideáltopológia használata. Ugyanis a részbenrendezéseknél használatos fogalmak gyakran egybeesnek topologikus fogalmakkal az ideáltopológiában. Részbenrendezések közti monoton leképezések éppen a folytonos leképezések az ideáltopológiában. Egy részbenrendezés pontosan akkor összefüggő, ha az ideáltopológiával (útszerűen) összefüggő. Így részbenrendezések retrakciója egyben topologikus értelemben vett retrakció is, és fordítva. Részbenrendezések véges szorzatán az ideáltopológia pedig éppen a megfelelő topologikus terek szorzata. Érdekesebb megfeleltetést kapunk majd, ha a homotópia kombinatorikus megfelelőjét keressük.

6.1 Állítás. *Legyenek P és Q részbenrendezések, $f, g : P \to Q$ monoton leképezések. Ekkor a következőek ekvivalensek:*

1. *f és g homotópak az ideáltopológiában.*
2. *Létezik egy $f = f_1 \leq \cdots \geq f_k = g$ séta P^Q-ban (azaz minden i-re $f_i \leq f_{i+1}$ vagy $f_i \geq f_{i+1}$), ami összeköti f-et és g-t.*

A bizonyítás tipikus kompaktsági érvelés. A következő fejezetben a deformáció egy közeli rokona játszik majd nagy szerepet, ami nagyon kezelhetőnek bizonyul.

6.1 Definíció. *Legyen P egy véges részbenrendezés, R pedig a retraktuma. Azt mondjuk, hogy P a R-re bontható, ha létezik P retrakcióinak egy r_0, r_1, $\ldots$, r_k sorozata, hogy $P = r_0(P) \supset r_1(P) \supset \cdots \supset r_k(P) = R$, és az r_{i-1} és r_i retrakciók összehasonlíthatóak P^P-ben, ha $i = 1, \ldots, k$.*

Az ilyen speciális retraktumok jól jellemezhetőek: Pontosan azok lesznek ilyenek, amik megkaphatóak irreducibilis elemek egy sorozatának elhagyásával. Így egy részrészbenrendezésről polinomiálisan eldönthető lesz, hogy a részbenrendezés rábontható-e.

6.2 Állítás ([24]). *Legyen P egy véges részbenrendezés, $x \in P$. Ekkor P pontosan akkor bontható $P \setminus \{x\}$-re, ha x irreducibilis P-ben. Ha x unió irreducibilis akkor létezik olyan ρ retrakció, hogy $\rho(P) = P \setminus \{x\}$ és $\rho \leq id_P$, és duálisan, ha x metszet irreducibilis akkor létezik ρ retrakció, hogy $\rho(P) = P \setminus \{x\}$ és $\rho \geq id_P$.*

Bizonyítás. Legyen x unió irreducibilis eleme P-nek, és legyen l az egyértelmű alsó fedője. Legyen $r \in P^P$ a következő: $r(x) = l$ és $r(y) = y$ ha $y \neq x$. Világos, hogy r monoton, továbbá a képére megszorítva identikus, és $id_P \geq r$. Tehát az id_P, r retrakciók tanúsítják, hogy P a $P \setminus \{x\}$-re bontható.

Legyen r a P retrakciója és tegyük fel, hogy $id_P \geq r$ és $r(P) = P \setminus \{x\}$. Ekkor $r(x) < x$ és $r(y) = y$ minden $y \neq x$-re. Az x nem lehet minimális P-ben, legyen l egy alsó fedője. Mivel $r(l) = l$ és $x > r(x) \geq l$, csak $r(x) = l$ lehetséges. Ezért x alsó fedője egyértelmű, azaz x unió irreducibilis. $\square$

6.3 Állítás ([24]). *Legyen P véges részbenrendezés és $Q \subseteq P$. Ekkor a következőek ekvivalensek.*

1. *Létezik $P \to P$ monoton függvények egy $f_0, f_1, \ldots, f_k$ sorozata, hogy $f_0 = id_P, f_k : P \to Q$ retrakció, $f_i|_Q = id_Q$ és az f_{i-1} és f_i függvények összehasonlíthatóak P^P-ben, ha $i = 1, \ldots, k$.*

2. *P a Q-ra bontható.*

3. *Létezik $x_1, \ldots, x_n \in P$, hogy $P = Q \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$, ahol x_i irreducibilis $Q \cup \{x_i, \ldots, x_n\}$-ben ha $i = 1, \ldots, n$.*

Bizonyítás. (1) $\to$ (2): Feltehető, hogy f_i-k retrakciók, hiszen tetszőleges N-re az f_i^N sorozat is kielégíti a feltételeket. Definiáljuk rekurzívan az $r_0, \ldots, r_k$ retrakciósorozatot. Legyen $r_0 = id_P$, és ha már r_i-t definiáltuk, akkor r_{i+1} legyen $(r_i \circ f_i)^N$, ahol N-et olyannak választjuk, hogy r_{i+1} retrakció legyen. Ez a sorozat tanusítja, hogy a P a Q-ra bontható.

(2) $\to$ (3) bizonyításához legyen $Q \neq P$, és P a Q-ra bontható, $r_0, \ldots, r_n$ a megfelelő retrakciósorozat. $P \setminus Q$ elemszáma szerinti indukcióval bizonyítunk. Feltehető, hogy $id_P = r_0 > r_1$. Legyen x minimális eleme $P \setminus r_1(P)$-nek, és ρ a következő retrakció: $\rho(x) = r_1(x)$ és $\rho(y) = y$ ha $y \neq x$. Belátjuk, hogy ρ tényleg monoton. ρ identikus $P \setminus \{x\}$-en, és egyenlő r_1-gyel $(r_1(P) \cup \{x\})$-en. Ha pedig $y \in P \setminus (r_1(P) \cup \{x\})$ és y összehasonlítható x-szel akkor $y > x$ az x minimalitása miatt, így $\rho(y) = y > x > \rho(x)$. Világos, hogy

ρ identikus a képén, ezért retrakció. P a $\rho(P)$-re bontható $id_P \geq \rho$ miatt. Az előző állítás szerint x unió irreducibilis P-ben. A kapott $\rho(P) = P \setminus \{x\}$ retraktum továbbra is Q-ra bontható, ezt az $r_0|_{\rho(P)}, \ldots, r_n|_{\rho(P)}$ sorozat tanusítja. Az indukciós feltevés szerint Q megkapható $\rho(P)$-ből a kívánt módon, irreducibilis elemek elhagyásával, ezért megkapható P-ből is.

(3) $\to$ (1) bizonyításához legyenek $x_1, \ldots, x_n \in P$ olyan elemek, hogy x_i irreducibilis $Q \cup \{x_i, \ldots, x_n\}$-ben. Az előző állítás szerint $Q \cup \{x_i, \ldots, x_n\}$ a $Q \cup \{x_{i+1}, \ldots, x_n\}$-re bontható, azaz létezik olyan $r_i : Q \cup \{x_i, \ldots, x_n\} \to Q \cup \{x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ retrakció, amire $r_i \geq id_{Q\cup\{x_i,\ldots,x_n\}}$ (vagy $r_i \leq id_{Q\cup\{x_i,\ldots,x_n\}}$). Legyen $f_i = r_i \circ r_{i-1} \circ \cdots \circ r_1$, ahol $i = 1, \ldots, n$. Ez a sorozat megfelelő. □

6.4 Állítás ([24]). *Legyenek $Q \subseteq R \subseteq P$ véges részbenrendezések, R a P-nek retraktuma. Ha P a Q-ra bontható akkor R is.*

Bizonyítás. Legyen $r : P \to R$ retrakció, $f_0 = id_P, \ldots, f_n$ pedig a P-nek Q-ra bonthatóságát igazoló, az előző állítás (1) feltételének eleget tevő függvénysorozat. Tekintsük az $s_i = r \circ f_i|_R$ monoton függvényeket. Ezek tanusítják, hogy R a Q-ra bontható. □

6.1 Következmény ([24]). *(Algoritmus) Polinom időben eldönthető egy P véges részbenrendezésről és $Q \subseteq P$-ről, hogy P a Q-ra bontható-e.*
Az algoritmus: Legyen $P_0 = P$ és tegyük fel, hogy már definiáltuk P_i-t. Ha van $P_i \setminus Q$-ban irreducibilis elem, akkor hagyjuk el, és jelölje a kapott részbenrendezést P_{i+1}. Ha nincs, akkor megállunk. Ha az eljárás végén Q-t kapjuk, akkor P a Q-ra bontható, különben nem.

Megjegyzés: Az ilyenfajta retrakciósorozatok kezelhetősége a részbenrendezések sajátossága. Például reflexív, szimmetrikus gráfok esetén nem ismert polinomiális algoritmus az analóg kérdés eldöntésére.

Most áttérünk a rendvarietások vizsgálatára. A rendvarietás fogalmát Duffus és Rival definiálták részbenrendezések szorzásra és retraktumképzésre zárt osztályaként. Mi ezekhez hozzávesszük az idempotens részalgebraképzést is. Jelölje részbenrendezések egy C osztályára rendre $\mathrm{R}(C)$, $\mathrm{I}(C)$, $\mathrm{I}_k(C)$, $\mathrm{P}(C)$ és $\mathrm{P}_\mathrm{v}(C)$ a C-beliek retraktumainak, idempotens részalgebráinak, k elemmel generált idempotens részalgebráinak, szorzatainak illetve véges szorzatainak osztályát. A C által generált rendvarietást $\mathrm{V}(C)$, a legszűkebb retraktumképzésre, idempotens részalgebraképzésre és véges szorzatra zárt osztályt pedig $\mathrm{V}_\mathrm{v}(C)$ jelöli.

Megjegyzés: Részbenrendezések bizonyos azonosságoknak eleget tevő idempotens függvényekkel definiált osztályai is rendvarietások. Például a hálók rendvarietást alkotnak.

Az algebrai esettel összevetve, lényegében a retrakciók veszik át a homomorfizmusok szerepét, az idempotens részalgebrák a részalgebrákét és a struktúraszorzás lép az algebrák szorzásának helyébe. Algebrák varietásának generálásakor nem kell a direkt szorzás, részalgebraképzés és homomorfizmus operátorokat többször alkalmazni, hanem minden algebra megkapható a generáló algebrák szorzata részalgebrájának homomorf képeként. Rendvarietások esetében bonyolultabb a helyzet.

6.5 Állítás ([24]). *Legyen C részbenrendezések egy tetszőleges osztálya. Ekkor a következők teljesülnek.*

1a. $\mathrm{R}\,\mathrm{P}_\mathrm{v}(C) \supseteq \mathrm{P}_\mathrm{v}\,\mathrm{R}(C)$

1b. $\mathrm{R}\,\mathrm{P}(C) \supseteq \mathrm{P}\,\mathrm{R}(C)$

2. $\mathrm{R}(C) = \mathrm{R}\,\mathrm{R}(C)$

3a. $\mathrm{P}_\mathrm{v}(C) = \mathrm{P}_\mathrm{v}\,\mathrm{P}_\mathrm{v}(C)$

3b. $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}\,\mathrm{P}(C)$

4. $\mathrm{I}(C) = \mathrm{I}\,\mathrm{I}(C)$

5. $\mathrm{R}\,\mathrm{I}(C) \supseteq \mathrm{I}\,\mathrm{R}(C)$

6.a $\mathrm{P}_\mathrm{v}\,\mathrm{I}(C) \supseteq \mathrm{I}\,\mathrm{P}_\mathrm{v}(C)$

6.b $\mathrm{P}\,\mathrm{I}_k(C) \supseteq \mathrm{I}_k\,\mathrm{P}(C)$

7. Ha P *véges részbenrendezés és* $P \in \mathrm{R}\,\mathrm{P}\,\mathrm{I}\,\mathrm{P}\,\mathrm{I}(C)$*, akkor* $P \in \mathrm{R}\,\mathrm{P}\,\mathrm{I}(C)$*.*

Bizonyítás. (1a) bizonyításához legyenek $r_i : P_i \to P_i$ retrakciók, ahol $1 \leq i \leq k$. A retraktumok szorzata éppen az $r : \prod_{i=1}^k P_i \to \prod_{i=1}^k r_i(P_i)$: $r(x_1, \ldots, x_k) = (r_1(x_1), \ldots, r_k(x_k))$-val definiált retrakciónál áll elő képként. (1b) is ugyanígy bizonyítható, utóbbit természetesen Duffus és Rival is belátták.
(2), (3a), (3b) és (4) triviálisak.
(5) bizonyításához legyen r a $P \in C$ retrakciója és Q az $r(P)$ egy idempotens részalgebrája. P-nek Q által generált idempotens részalgebrájára, $\langle Q \rangle$-ra $r(\langle Q \rangle) = Q$ teljesül.
(6a) bizonyításához legyen $Q \in \mathrm{I}(P_1 \times P_2)$. A $\pi_1(Q) \times \pi_2(Q)$ szorzat tartalmazza Q-t, és az $\{(f_1, f_2) \mid f_i \in I^k(P_i), i = 1, 2\}$ függvényhalmaz generálja $\pi_1(Q) \times \pi_2(Q)$-t, így ez egyenlő Q-val. (6b) bizonyítása hasonló.
Végül bizonyítsuk (7)-et. Legyen $P \in \mathrm{R}\,\mathrm{P}\,\mathrm{I}\,\mathrm{P}\,\mathrm{I}(C)$ véges. Léteznek $Q_\alpha \in \mathrm{I}\,\mathrm{P}\,\mathrm{I}(C)$ részbenrendezések, hogy $P = r(\prod_\alpha Q_\alpha)$ alkalmas r retrakcióra. Jelölje $\pi_\alpha(P)$ a P képét a megfelelő projekciónál. Ekkor $\langle \pi_\alpha(P) \rangle \in \mathrm{I}_k(Q_\alpha)$ teljesül $k = |P|$-re. A $\prod_\alpha \langle \pi_\alpha(P) \rangle$ direkt szorzat $\prod_\alpha Q_\alpha$-nak P-t tartalmazó része. Így $P = r(\prod_\alpha \langle \pi_\alpha(P) \rangle)$, tehát $P \in \mathrm{R}\,\mathrm{P}\,\mathrm{I}_k\,\mathrm{P}\,\mathrm{I}(C)$. Végül (6b), (3b) és (4) miatt $P \in \mathrm{R}\,\mathrm{P}\,\mathrm{I}(C)$. □

Megjegyzés: Legyen $P = \{0, 1 | 0 \leq 1\}$ a kételemű lánc, ekkor $\mathrm{I}\,\mathrm{P}(P)$ nem része $\mathrm{P}\,\mathrm{I}(P)$-nek. Ugyanis P egy végtelen hatványában a véges tartójú elemek, azaz amiknek csak véges sok koordinátája 1, idempotens részalgebrát alkotnak. Ebben a részalgebrában nincsen legnagyobb elem, viszont minden $\mathrm{P}\,\mathrm{I}(P)$-beli részbenrendezésben van.
Részbenrendezések véges szorzatra, idempotens részalgebrák képzésére és retraktumképzésre zárt osztályáról a következőt mondhatjuk.

6.6 Állítás ([24]). *Részbenrendezések tetszőleges* C *osztályára* $\mathrm{V}_\mathrm{v}(C) = \mathrm{R}\,\mathrm{P}_\mathrm{v}\,\mathrm{I}(C)$*.*

Zádori következő észrevételét használhatjuk abban az esetben, ha a varietást véges sok részbenrendezés generálja.

6.7 Állítás (Zádori [47]). *Álljon C véges sok véges részbenrendezésből, és legyen $P \in \mathrm{R\,P}(C)$ véges. Ekkor $P \in \mathrm{R\,P_v}(C)$ is teljesül.*

Az eddigieket összegezve a következőt állapíthatjuk meg egy rendvarietás véges elemeiről.

6.1 Tétel ([24]). *Legyen C részbenrendezések tetszőleges osztálya. Ekkor $\mathrm{V}(C)$ minden véges eleme $\mathrm{R\,P\,I}(C)$-beli is. Ráadásul ha C véges sok véges részbenrendezésből áll, akkor $\mathrm{V}(C)$ véges elemeinek halmaza pontosan $\mathrm{V_v}(C) = \mathrm{R\,P_v\,I}(C)$.*

Bizonyítás. A tétel első fele a 6.5.Állítás alkalmazása. Ha C véges sok véges részbenrendezésből áll, akkor a 6.7.Állítást alkalmazhatjuk $\mathrm{I}(C)$-re. $\square$

7. Abszolút összefüggő részbenrendezések

Ebben a fejezetben némi plusz bevezető után Szabó Csabával közös cikkeim leírását folytatom – áttérve az érdekesebb tételekre. Számos algebrai tulajdonság ekvivalens véges, összefüggő részbenrendezéseken definiált, úgynevezett rendezésprimál algebrákra: a kongruenciamodularitás, kongruenciadisztributivitás és majdnem-többségi függvény létezése. Az ilyen részbenrendezéseket abszolút összefüggőnek nevezzük számos, a fejezet során bizonyított, rendkívül erős összefüggőségi tulajdonságuk miatt.

7.1 Definíció. *Egy P véges részbenrendezést abszolút összefüggőnek nevezünk ha az általa generált rendvarietás minden eleme összefüggő.*

A retrakció probléma szempontjából is érdekes ez az osztály. Pontosan azok a P véges részbenrendezések tartoznak ebbe az osztályba, amelyekre a $Ret(P)$ osztály komplementere elsőrendben definiálható. Más szóval $Ret(P)$ véges sok tiltott rész-részbenrendezéssel jellemezhető. Emlékezzünk, hogy a P-cikkcakkok a pont-minimális nem kiterjeszthető P-színezésű részbenrendezések.

7.1 Tétel (Dalmau, Krokhin, Larose [7]). *Egy P véges részbenrendezésre a következőek ekvivalensek.*

1. *P-n van majdnem-többség függvény.*
2. *Véges sok P-cikkcakk van.*
3. *$Ret(P)$ komplementere elsőrendben definiálható.*

Ennek bizonyítására nem térünk ki. A majdnem-többségi függvények és cikkcakkok közti kapcsolat gyors megértéséhez Tardos következő tételét bizonyítjuk.

7.2 Tétel (Tardos [45]). *Egy P véges részbenrendezésre a következőek ekvivalensek.*

1. P-n van k változós majdnem-többség függvény.

2. Minden P-cikkcakkban kevesebb, mint k darab színezett elem van.

Bizonyítás. Legyen $f : P^k \to P$ többségi függvény, és tegyük fel, hogy létezik olyan cikkcakk, aminek legalább k darab színezett eleme van. Legyenek $a_1, \ldots, a_k$ ilyenek. Bármely a_i-t elhagyva létezik majd $f_i : Q \setminus \{a_i\} \to P$ kiterjesztése a színezésnek. Legyen

$$g(x) = \begin{cases} g(f_1(x), \ldots, f_k(x)), \text{ ha } x \neq a_i \ (i = 1, \ldots, k) \\ \text{az előírt elem, ha } x = a_i \ (i = 1, \ldots, k). \end{cases}$$

Ez megfelelő kiterjesztése Q színezésének, ellentmondásban azzal, hogy Q cikkcakk.

Tegyük fel, hogy minden cikkcakknak kevesebb, mint k eleme van. Tekintsük $Q = P^k$-nak a következő (részleges) színezését. Legyen minden olyan $v \in P^k$ elem színe x, aminek a koordinátái legfeljebb egy kivételével x-ek. Ennek a kiterjeszthetősége ekvivalens k változós majdnem-többségi függvény létezésével. Tegyük fel indirekt módon, hogy nem terjeszthető ki. Ekkor tartalmaz olyan $S \subseteq Q$ cikkcakkot, melynek kevesebb, mint k darab színezett eleme van. Ezért valamilyen $1 \leq i \leq k$-ra minden színezett S-beli elem többségi koordinátája éppen az i-edik koordináta lesz. Így az i-edik projekció kiterjesztése S színezésének, ellentmondás. □

Példa: Legyen $R = \{a, b, c, d, e, f | a \leq b, c, \leq d, e \leq f\}$ hatelemű részbenrendezés, $R \subseteq P$. R pontosan akkor retraktuma P-nek, ha nincs olyan $x \in P$, hogy $b, c \leq x \leq d, e$. Azaz $Ret(P)$ komplementere elsőrendben definiálható.

Példa:(Tardos [45]) Legyen $T = \{a, b, c, d, e, f, g, h | a \leq b, c, \leq d, e \leq f, g \leq h\}$ nyolcelemű részbenrendezés. Ekkor létezik tetszőlegesen nagy T-cikkcakk. Legyen $C_n = \{B, C, D, E, F, G, p_1, \ldots, p_n | D \geq p_1 \leq p_2 \geq \cdots \geq p_{n-1} \leq p_n \geq E$, továbbá $B, C \leq p_i \leq F, G$ minden i-re $\}$, és a $B, \ldots, G$ elemek legyenek rendre $b, \ldots, g$ színnel színezve. Nem nehéz belátni, hogy ezek tényleg cikkcakkok. Tehát $Ret(P)$ komplementere nem definiálható elsőrendben.

Rátérünk Larose és Zádori tételére, mely – Davey és McKenzie munkáját kiterjesztve – az osztály számos karakterizációját adja.

7.3 Tétel (Larose, Zádori [27]). *Egy P véges összefüggő részbenrendezésre a következőek ekvivalensek.*

1. *P-n van majdnem-többségi függvény.*
2. *P-n vannak Jónsson-termek.*
3. *P-n vannak Gumm-termek.*
4. *P hatványainak minden idempotens részalgebrája lebontható, azaz az ideáltopológiában pontrahúzható.*
5. *A két projekció összeköthető $I^2(P)$-ben kétváltozós idempotens függvények egy sorozatával, azaz az ideáltopológiában homotópak.*
6. *Létezik korlát a P-cikkcakkok átmérőjére.*
7. *Véges sok P-cikkcakk van.*

Megjegyzés: A tétel (analóg feltételekkel) reflexív, szimmetrikus gráfokra is igaz [29].

A feltételek halmazában való könnyebb eligazodást segítendő: A (6) $\rightarrow$ (7) implikáció bizonyítása a nehéz rész. Továbbá (3) $\rightarrow$ (4) sem könnyű. Nyilvánvaló hiányosság, hogy a függvények konstrukciója – a cikkcakkok használata miatt – nem konstruktív a szó hétköznapi értelmében. Továbbá nem látszik, milyen nehéz annak eldöntése, hogy egy részbenrendezés ilyen tulajdonságú-e. Larose és Zádori felvetették a kérdést, hogy egyáltalán NP-beli-e. Nem szabad megmosolyogni a kérdést, ugyanis algebrákra számos, a majdnem-többségi függvénnyel kapcsolatos kérdés algoritmikusan eldönthetetlen [41] [42]. Csak tavaly bizonyította Maróti [43], hogy egy véges alaphalmazú és véges típusú algebráról eldönthető, hogy kifejezhető-e a függvényeiből majdnem-többségi függvény. Bizonyítása nem ad használható korlátot az eldöntés idejére és a függvény aritására vonatkozóan.

Larose és Zádori tétele volt Szabó Csabával közös munkáink kiindulópontja. A következő plusz feltételek ekvivalenciáját bizonyítottuk. Rendvarietás részbenrendezések egy retraktumképzésre, idempotens részalgebraképzésre és szorzásra zárt osztálya.

7.4 Tétel ([24]). *P véges, összefüggő részbenrendezésre a következőek ekvivalensek.*

1. *A kételemű antilánc nincs benne a P által generált rendvarietásban.*
2. *P minden idempotens részalgebrája összefüggő.*
3. *A P által generált rendvarietás minden véges eleme összefüggő.*
4. *A P által generált rendvarietás minden véges eleme bármelyik retraktumára bontható.*
5. *P^2 az átlójára bontható.*
6. *A két projekció összeköthető $I^2(P)$-ben kétváltozós idempotens függvények egy sorozatával, azaz az ideáltopológiában homotópak.*
7. *P abszolút összefüggő, azaz az általa generált rendvarietás minden eleme összefüggő.*

Itt a fő nehézség (3) $\to$ (4) bizonyítása lesz (föntről lefelé haladva). Ez az implikáció például reflexív gráfok esetén nem működik. (Ezekre nem is teljesül a fenti feltételek analogonjainak ekvivalenciája.)

Ennek az új karakterizációnak három fontos alkalmazása van. A bontások segítségével elegáns módszert adunk Jónsson-termek konstruálására, és valamivel munkásabbat majdnem-többségi függvényére. A tétel egyben igazolja rendvarietás-fogalmunk helyességét is. Erre a következő fejezet főtétele is jó példa lesz. Végül (5) miatt már polinomiálisan eldönthető lesz, hogy egy részbenrendezés abszolút összefüggő-e, hiszen polinom időben eldönthető, hogy egy részbenrendezés egy részére bontható-e.

7.1 Következmény ([24]). *Egy részbenrendezésről polinomiális időben eldönthető, hogy abszolút összefüggő-e.*

A következő lemma lesz a legfontosabb része a tétel bizonyításának.

7.1 Lemma ([24]). *Tegyük fel, hogy P véges, abszolút összefüggő részbenrendezés és R a retraktuma. Ekkor P az R-re bontható.*

Bizonyítás. $P \setminus R$ elemszámára vonatkozó indukcióval bizonyítunk.
Először tegyük fel, hogy van olyan $a \in P \setminus R$, hogy minden $r : P \to R$ retrakcióra a és $r(a)$ nem összehasonlíthatóak. Jelölje r az egyik retrakciót. Tekintsük az a és $f(a)$ által generált idempotens részalgebrát. Tudjuk, hogy ez összefüggő, ezért létezik kétváltozós idempotens függvények egy $f_0, \dots, f_j$ sorozata, hogy $a = f_0(a, r(a)) \leq \cdots \geq f_j(a, r(a)) = r(a)$ egy séta P-ben. Feltehető, hogy $f_1(a, r(a)) \neq a$. Legyen $F : P \to P$: $F(x) = f_1(x, r(x))$. Ekkor elég nagy N-re $r = F^N$ retrakció. Az F monotonitása miatt ha $F(a) < a$ akkor $r(a) < a$, és ha $F(a) > a$ akkor $r(a) > a$. Azaz $r(a) \neq a$, de a két elem összehasonlítható. Továbbá f_1 idempotenciája miatt R benne van az $r(P)$ retraktumban. Tudjuk, hogy $r(P) \neq R$, hiszen a és $r(a)$ összehasonlíthatóak. És $r(P) \neq P$, hiszen akkor az r retrakció csak az identitás lehetne, de $r(a) \neq a$. Emiatt $|P \setminus r(P)|$ és $|r(P) \setminus R|$ is kisebb, mint $|P \setminus R|$. Az indukciós feltétel miatt $r(P)$ a R-re bontható, és $r(P)$ is R-re, tehát P is R-re.

Most tegyük fel, hogy minden $x \in P$-re van olyan $r : P \to R$ retrakció, hogy $r(a)$ és a összehasonlíthatóak. Ha $P \setminus R$ egyelemű akkor készen vagyunk. Különben legyen m a $P \setminus R$-ben minimális elem, és legyen r egy megfelelő retrakció. Ha $r(m) < m$ akkor tekintsük a következő ρ retrakciót.

$$\rho(x) = \begin{cases} r(x) = x \text{ ha } x \in R \\ r(m) \text{ ha } x = m \\ x \text{ különben.} \end{cases}$$

Ez tényleg retrakció lesz, azaz monoton és a képére megszorítva az identitás. Mivel $\rho(P)$ szigorúan R és P közt van, az indukciós feltevést használva ebben az esetben is beláttuk az állítást. Ha $r(m) > m$ akkor pedig legyen ρ a következő.

$$\rho(x) = \begin{cases} r(x) = x \text{ ha } x \in R \\ m \text{ ha } x = m \\ r(x) \text{ különben.} \end{cases}$$

Itt sem nehéz ellenőrizni, hogy retrakciót kapunk. És ismét szigorúan P és R közt lesz a retraktum. Ezzel a lemmát beláttuk. ☐

Ez volt az a bizonyítás, ami nem működik reflexív, szimmetrikus gráfokra. Rátérhetünk a 7.4.Tétel bizonyítására.

Bizonyítás. Az (1),(2) és (3) ekvivalenciája könnyen látszik a rendvarietás alaptulajdonságait leíró 6.5.Állításból és 6.1.Tételből.

(3) $\to$ (4): Egy abszolút összefüggő részbenrendezés rendvarietásának minden véges eleme abszolút összefüggő. Ezért 7.1.Lemma szerint tetszőleges retraktumára bontható.

(4) $\to$ (5): P^2-nek retraktuma az átlója.

(5) $\to$ (6): Tegyük fel, hogy P^2 az átlójára, $D = \{(x,x) : x \in P\}$-re bontható, és legyen $r_1, \dots, r_k$ az ezt tanusító retrakciósorozat, azaz $r_1 = id_{P^2}, r_k(P) = D, r_i(P^2) \supseteq D$ minden i-re, továbbá az r_i és r_{i+1} retrakciók összehasonlíthatóak. Tekintsük a $\pi_1 \circ r_1, \dots, \pi_1 \circ r_k = \pi_2 \circ r_k, \dots, \pi_2 \circ r_1 \in I^2(P)$ függvénysorozatot. Ez megfelel a feltételeknek.

(6) $\to$ (7): Legyen $Q \in V(P)$, $x, y \in Q$ tetszőleges elemek. Belátjuk, hogy az általuk generált idempotens részalgebra összefüggő. Legyen $\pi_1 = f_1 \leq f_2 \geq \dots \geq f_k = \pi_2$ a két projekciót összekötő idempotens függvénysorozat. Az $x = f_1(x,y) \leq \dots \geq f_k(x,y) = y$ séta az $\langle x, y\rangle$-ban van, tanusítva annak összefüggőségét.

(7) $\to$ (3) triviális. ☐

A fejezet további részei másik Szabó Csabával írt cikkemből származnak. Először Jónsson-termeket konstruálunk, majd majdnem-többségi függvényt. Zádori egzisztenciabizonyítást adott Jónsson-termek létezésére cikkcakkok segítségével. McKenzie pedig egy elég nehézkes konstrukciót mutatott a két projekciót összekötő függvénysorozatot használva. A bontás fogalmát használva ez könnyedén fog menni.

7.5 Tétel ([25]). *Legyen P abszolút összefüggő részbenrendezés. Ekkor vannak P-n Jónsson-termek, sőt polinom időben meg is konstruálhatóak.*

Bizonyítás. Legyen $R = \{(a, b, a) \mid a, b \in P\}$, ez P^3 retraktuma. Eszerint P^3 a R-re bontható, így létezik olyan $r_1, \ldots, r_k$ retrakciósorozat, hogy

1. r_i és r_{i+1} összehasonlíthatóak,
2. $r_i(P^3) \supseteq r_{i+1}(P^3)$, $|r_i(P^3) \setminus r_{i+1}(P^3)| = 1$,
3. $r_1 = id_{P^3}$ és
4. $r_k(P^3) = R$.

Legyen $1 \leq m \leq k-1$, feltehető, hogy $r_m \geq r_{m+1}$. Jelölje $r_m^{-1}(r_m(P^3) \setminus r_{m+1}(P^3))$ elemszámát l, és legyen $p_1, \ldots, p_l$ egy topologikus sorrendje, azaz $p_i \leq p_j$-re $i \leq j$. Tekintsük a következő $F_m^1, \ldots, F_m^l : P^3 \to P^3$ monoton függvényeket.

$$F_m^i = \begin{cases} r_{i+1}(x) \text{ ha } x = y_j \text{ valamilyen } j \leq i\text{-re} \\ r_i(x) \text{ különben.} \end{cases}$$

Az F_m^i függvénysorozatokat összefűzve egy olyan $G_1, \ldots, G_l$ függvénysorozatot kapunk, mely a következő feltételeket teljesíti.

1. G_i és G_{i+1} minden i-re legfeljebb egy helyen térnek el.
2. $G_i|_R = id_R$ minden i-re.
3. $G_1 = id_{P^3}$.

4. $G_l(P^3) = R$.

Tekintsük a következő $I^3(P)$-beli függvényeket.

$$f_i(x,y,z) = \begin{cases} \pi_1 \circ G_i \text{ ha } 1 \leq i \leq l \\ \pi_3 \circ G_{2l-i} \text{ ha } l \leq i \leq 2l-1. \end{cases}$$

Az f_i és f_{i+1} függvények legfeljebb egy elemben térnek el, legyen ez (a,b,c). Ha $b \neq c$ akkor $f_i(y,x,x) = f_{i+1}(y,x,x)$, és ha $a \neq b$ akkor $f_i(x,x,y) = f_{i+1}(x,x,y)$ teljesül minden $x, y \in P$-re. Továbbá $f_i(x,y,x) = f_{i+1}(x,y,x) = x$ ha $1 \leq i \leq 2l-1$. Tehát az f_i-k Jónsson-termek. $\square$

Ennél nehezebb feladat lesz a majdnem-többségi függvény konstrukciója. Ezt is P megfelelő hatványát bontva konstruáljuk majd meg. Bevezetünk néhány technikai definíciót.

7.2 Definíció. *Legyen f egy kétváltozós idempotens függvény P-n, $\underline{w} \in P^n$ és $a \in P$. Ekkor $f(\underline{w}(a))$-val jelöljük $(f(w_1,a),\ldots,f(w_n,a))$-t.*

7.3 Definíció. *Jelölje $\bar{x}\overset{i}{y} \in P^n$ azt az elemet, melynek i-edik koordinátája y, a többi pedig x.*

7.4 Definíció. *Egy $f : P^n \to P^n$ függvény (retrakció) P^n_{nuf}-függvény (P^n_{nuf}-retrakció), ha minden $x, y \in P$-hez van $z \in P$, hogy $f(\bar{x}\overset{i}{y}) = \bar{x}\overset{i}{z}$.*

Elég nagy N-re olyan P^N_{nuf}-retrakciót szeretnénk készíteni, mely az $\bar{x}\overset{i}{y}$ alakú elemeket az átlóra képezi. Ezt egy projekcióval komponálva majdnem-többségi függvényt kapunk majd. A természetes választás a mohó algoritmus: Minél több metszet irreducibilis elemet a fedőjébe képzünk úgy, hogy P^N_{nuf}-retrakciót kapjunk. Amikor már nem tudjuk folytatni, akkor a kapott retraktumban ugyanezt csináljuk az unió irreducibilisekkel. Majd ismét a metszet irreducibilisek jönnek, és így tovább. Erről be fogjuk látni, hogy elég nagy N-re tényleg működik, azaz a kritikus elemek tényleg az átlóra képződnek. Érezhető, hogy valamilyen értelemben ez az eljárás a leghatékonyabb. De nem erről fogjuk bebizonyítani, hogy alkalmas majdnem-többségi függvény konstruálására. Először bonyolultabban állítjuk elő a függvényt.

P^N_{nuf}-retrakciókból álló ,,bontási sorozatot" készítünk majd. Ilyen létezését nem garantálják az eddigi tételek, így saját kezűleg készítjük el a két projekciót összekötő sorozat segítségével. A konstruált P^N_{nuf}-retrakció folyamatosan javulni fog. Jelölje r az aktuális P^N_{nuf}-retrakciót, $R = r(P^N)$. Egy $\underline{w} \in R$ elemmel az történik majd, hogy egy f kétváltozós függvényre és $\underline{w}$ egy elég sokszoros a koordinátájára $r(f(\underline{w}(a)))$-ba képezzük. Ilyen lépésekkel elérjük majd, hogy egyre több f kétváltozós függvényre teljesüljön $r(f(\underline{w}(a))) = \underline{w}$ minden $\underline{w} \in R$-re, aminek elég sok koordinátája a. Ez $f = \pi_1$-re minden retrakció esetén fennáll. A cél az, hogy $f = \pi_2$ esetén is teljesüljön minden, legalább $(N-1)$-szeres koordináta esetén. Ez jelenti azt, hogy a kritikus elemeket sikerült az átlóra képezni. A következő állítás arra vonatkozik, hogy ha már teljesülnek a fentiek egy f függvényre, akkor elérhetőek egy f-fel összehasonlítható g függvényre, mondjuk $g < f$-re is. A meglevő r retrakció helyett egy $q \leq r$ retrakciót készítünk. Nem egyszerre mozdítjuk el R összes elemét lefelé, hanem a minimálisakkal kezdjük. Egy elemet majd csak akkor mozdítunk lefelé, ha a nála kisebbeket már elmozdítottuk.

7.1 Állítás ([25]). *Legyenek f és g kétváltozós idempotens függvények a P véges részbenrendezésen, $|P| = n$ és $f \geq g$. Legyen r a P^M egy retrakciója, $R = r(P^M)$, továbbá a következők teljesülnek:*

1. *Minden $x, y \in P$-re létezik $z \in P$, hogy $r(\bar{x}\overset{i}{y}) = (\bar{x}\overset{i}{z})$, azaz r P^M_{nuf}-retrakció,*

2. *$r(f(\underline{w}(a))) = \underline{w}$ minden $\underline{w} \in R$-re és a legalább k-szoros koordinátájára $\underline{w}$-nek.*

Ekkor létezik olyan q retrakció, hogy

1. *minden $x, y \in P$-re létezik $z \in P$, hogy $r(\bar{x}\overset{i}{y}) = (\bar{x}\overset{i}{z})$, azaz q P^M_{nuf}-retrakció,*

2. *$q(g(\underline{w}(a))) = \underline{w}$ minden $\underline{w} \in q(R)$-re és minden a legalább $k2^n$-szeres koordinátájára $\underline{w}$-nek, továbbá*

3. $q = q \circ r = r \circ q \leq r$.

Bizonyítás. Tekintsük a P elemeinek egy topologikus sorrendjét, azaz egy olyan P elemeiből álló $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sorozatot, hogy $x_i \leq x_j$ esetén $i \leq j$. Egy q_j $(0 \leq j \leq n)$, $q_0 = r$ retrakciósorozatot konstruálunk. Azt mondjuk $\underline{v} \in P^M$-re, hogy x_i-zárt, ha x_i nem legalább $k2^i$-szeres koordinátája $\underline{v}$-nek vagy $\underline{v} = q_{i-1}(g(\underline{v}(x_i)))$. A q_j $(1 \leq j \leq n)$ retrakciókra a következő feltételek teljesülnek majd:

1. Minden $x, y \in P$-re létezik $z \in P$, hogy $q_j(\bar{x}\overset{i}{y}) = (\bar{x}\overset{i}{z})$.

2. Minden $l \leq j$ és $\underline{v} \in q_j(P^M)$-re $\underline{v}$ x_l-zárt.

3. $q_j = q_j \circ q_l = q_l \circ q_j \leq q_l (l \leq j)$.

Legyen $s_1 : P^M \to P^M$ a következő monoton függvény.

$$s_1(\underline{v}) = \begin{cases} r(\underline{v}) \text{ ha } x_1 \text{ nem legalább } k\text{-szoros koordinátája } r(\underline{v})\text{-nek} \\ r(g(r(\underline{v})(x_1))) \text{ ha } x_1 \text{ legalább } k\text{-szoros koordinátája } r(\underline{v})\text{-nek.} \end{cases}$$

A $\underline{v} \to r(\underline{v})$ és $\underline{v} \to r(g(r(\underline{v})(x_1)))$ függvények monotonok, és $r(\underline{v}) \geq r(g(r(\underline{v})(x_1)))$, mivel $r(\underline{v}) = r(f(r(\underline{v})(x_1))) \geq r(g(r(\underline{v})(x_1)))$. Ha $\underline{v} \geq \underline{w}$ és x_1 legalább k-szoros koordinátája $\underline{v}$-nek akkor x_1 legalább k-szoros koordinátája $\underline{w}$-nek is, mivel x_1 minimális. Ezért s_1 is monoton. Világos, hogy $s_1 \leq r$, és hogy s_1 P^M_{nuf}-függvény. Elég nagy N-re $q_1 = s_1^N$ retrakció. Mivel $s_1^l \geq s_1^{l+1}$ minden l-re, s_1^l teljesíti az (1) és (3) feltételeket. És ha x_1 legalább k-szoros koordinátája $\underline{v} \in q_1(P^M)$-nek, akkor $\underline{v} = q_1(\underline{v}) = r(g(\underline{v}(x_1))) = q_0(g(\underline{v}(x_1)))$, azaz $\underline{v}$ x_1-zárt. Tegyük fel, hogy (1)-(3) teljesülnek a q_{j-1} retrakcióra. Tekintsük a következő függvényeket.

$$s_j(\underline{v}) = \begin{cases} q_{j-1}(g(q_{j-1}(\underline{v})(x_j))) \text{ ha } x_j \text{ legalább } k\text{-szoros koordinátája } r(\underline{v})\text{-nek,} \\ \text{ és létezik } \underline{s} \geq \underline{v}, \text{ hogy } x_j \text{ legalább } k2^j\text{-szeres koordinátája } \underline{s}\text{-nek} \\ q_{j-1}(\underline{v}) \text{ különben} \end{cases}$$

Azt állítjuk, hogy s_j is monoton. A $\underline{v} \to q_{j-1}(\underline{v})$ és $\underline{v} \to q_{j-1}(g(q_{j-1}(\underline{v})(x_j)))$ függvények monotonok, és $q_{j-1}(\underline{v}) \geq q_{j-1}(g(q_{j-1}(\underline{v})(x_j)))$, mivel $q_{j-1}(\underline{v}) = q_{j-1}(r(\underline{v})) = q_{j-1}(r(f(q_{j-1}(\underline{v})(x_j)))) = q_{j-1}(f(q_{j-1}(\underline{v})(x_j)))$
$\geq q_{j-1}(g(q_{j-1}(\underline{v})(x_j)))$. Tegyük fel, hogy $\underline{v} \geq \underline{w}$, x_j legalább k-szoros koordinátája $\underline{v}$-nek, és x_j valamely $\underline{s} \geq \underline{v}$ legalább $k2^j$-szeres koordinátája, de x_j nem legalább k-szoros koordinátája $\underline{w}$-nek. Mivel $\underline{s} \geq \underline{v}$, létezik $i < j$ és $x_i < x_j$, hogy x_i legalább $k2^i$-szeres koordinátája $\underline{w}$-nek. Ezért $q_j(\underline{w}) = q_{j-1}(\underline{w}) = q_{j-1}(g(q_{j-1}(\underline{w})(x_i))) \leq q_{j-1}(g(q_{j-1}(\underline{v})(x_j))) = q_j(\underline{v})$. Elég nagy N-re $q_j = s_j^N$ ismét retrakció. (1) és (3) minden s_j^l-re teljesül, mert $s_j^l \geq s_j^{l+1}$. (2) bizonyításához legyen x_l ($l \leq j$) legalább k-szoros koordinátája $\underline{v}$-nek, $\underline{v} \in q_j(P^M) \subseteq q_l(P^M)$. Tudjuk, hogy $\underline{v} = q_l(\underline{v}) = q_l(g(\underline{v}(x_l)))$, azaz $\underline{v}$ x_l-zárt. $q = q_n$ teljesíti az állítás feltételeit. $\square$

7.6 Tétel ([25]). *Legyen P abszolút összefüggő részbenrendezés, $|P| = n$, és $\pi_1 = f_1 \leq f_2 \geq \cdots \geq f_m = \pi_2$ kétváltozós idempotens függvényeknek a két projekciót összekötő sorozata. Ekkor P-n van $M = 2^{(m-1)n+1} + 1 < 2^{mn}$ aritású majdnem-többségi függvény.*

Bizonyítás. Először alkalmazzuk az előző állítást $r = id_{P^k}, k = 2$ és $f = f_1 \geq f_2 = g$ választással. Egy s_1 retrakciót kapunk. Majd az állítás duálisát alkalmazzuk $r = s_1, f_2 \leq f_3$ és $k = 2^{|P|+1}$ feltételek mellett. Így kapunk egy s_2 retrakciót, stb. Miután s_i-t már definiáltuk, az állítást (vagy a duálisát) $r = s_i$-re, az f_{i+1}, f_{i+2} függvényekre és $k = 2^{i|P|+1}$-re alkalmazzuk. Így egy s_{i+1} retrakciót kapunk. Tekintsük az utolsó ilyet, s_m-et. Az s_m is P^n_{nuf}-retrakció, mint minden s_i. Az x elem multiplicitása $s_m(\bar{x}\overset{i}{y}) = \bar{x}\overset{i}{z}$-ben $M-1 \geq 2^{(m-1)n+1}$, ezért $f_m((\bar{x}\overset{i}{z})(x) = \bar{x}\overset{i}{z}$, $z = f_m(z, x) = x$ teljesülnek. Tehát $\bar{x}\overset{i}{y}$ képe $(x, \ldots, x)$, így $\pi_1 \circ q_m$ majdnem-többségi függvény. $\square$

Sikerült megkonstruálni a majdnem-többségi függvényt. Ezek után könnyen látszik majd, hogy a leírt mohó algoritmussal is elérhető ugyanez.

7.7 Tétel ([25]). *(Algoritmus) Legyen P abszolút összefüggő részbenrendezés, $|P| = n$, $M = 2^{2n^3+1} + 1$. Kezdjük el P^M bontását a következőképpen.*

1. *Egy-egy metszet irreducibilis elemet a fedőjébe képezünk úgy, hogy* $(\bar{x}\overset{i}{y})$ *alakú elemet csak akkor mozdítunk el, ha a fedője valamely* $(\bar{x}\overset{i}{z})$*. Ha már nem maradtak mozdítható metszet irreducibilis elemek, akkor*

2. *ugyanezt elismételjük az unió irreducibilisekkel,* $(\bar{x}\overset{i}{y})$ *alakú elemet csak* $(\bar{x}\overset{i}{z})$ *alakúba képezve.*

3. *Ha már nincs megfelelő unió irreducibilis elem, akkor ismét az első lépést hajtjuk végre.*

4. *A végén egy olyan retrakciót kapunk, ami a kritikus elemeket, azaz amiknek csak egy koordinátája tér el a többitől, az átlóra képezi. Ezt egy projekcióval komponálva majdnem-többségi függvényt kapunk.*

Bizonyítás. Jelölje ρ azt a retrakciót, amit az algoritmus ad. Ez P^M_{nuf}-retrakció. Az előző tételben egy olyan $r_0, \ldots, r_m$ P^M_{nuf}-retrakciósorozatot konstruáltunk, amire $r_0 = id_{P^M}, r_{k+1} = r_{k+1} \circ r_k$ és $r_{2k-1} \leq r_{2k} \geq r_{2k+1}$ teljesülnek. Továbbá r_m a kritikus elemeket az átlóra képezi. Definiálunk egy $\rho_0, \ldots, \rho_k$ retrakciósorozatot. Legyen $\rho_i = (\rho \circ r_i \circ \rho)^N$, ez alkalmas N-re retrakció. Könnyű ellenőrizni, hogy ha $r_k \leq r_{k+1}$ akkor $\rho_k \leq \rho_{k+1}$, és duálisan. Továbbá $\rho_{k+1}(P^M) \subseteq \rho_k(P^M)$. Azt állítjuk, hogy $\rho(P^M) = \rho_k(P^M)$ teljesül minden k-ra. Mivel $\rho_m(P^M)$ nem tartalmaz átlón kívüli kritikus elemet, elég ezt belátni. Indirektül bizonyítunk, vegyük a legkisebb k-t, amire nem teljesül. Feltehető, hogy $r_k \geq r_{k+1}$, így $\rho_k \geq \rho_{k+1}$. Továbbá ρ_k és ρ_{k+1} megszorítása $\rho(P^M)$-re retrakció, ρ_k megszorítása identikus. Ezért $\rho_{k+1}(P^M)$ metszet irreducibilisek elhagyásával kapható $\rho(P^M)$-ből, ami ellentmond ρ választásának. $\square$

8. Részbenrendezések fundamentális csoportja

Motivációnk azoknak a részbenrendezéseknek a jellemzése, melyekre a retrakció probléma nehéz. Csak az úgynevezett koronákról ismert az NP-teljesség, illetve olyan részbenrendezésekről, amik retrakció problémájára közvetlenül visszavezethető egy koronáé. A koronák projektívek, azaz minden idempotens műveletük projekció. Ez az ötödik fejezet észrevételeit használva tanusítja az NP-teljességet. Jellemezni fogjuk azokat a részbenrendezéseket, melyek rendvarietása nem tartalmaz koronát. A következő tételt bizonyítjuk majd. Egy részbenrendezés fundamentális csoportját még nem definiáltuk, de elöljáróban annyit elárulunk, hogy ez izomorf lesz az ideáltopológia fundamentális csoportjával.

8.1 Tétel ([22]). *Egy P véges részbenrendezésre a következőek ekvivalensek:*

1. *P minden összefüggő idempotens részalgebrájának triviális a fundamentális csoportja.*
2. *Nem áll elő korona P idempotens részalgebrájának retraktumaként.*

Megjegyzés: Ez ekvivalens azzal is, hogy a P által generált rendvarietásban nincs korona. Ez a rendvarietás véges elemeit leíró 6.1.Tételnek és annak a következménye, hogy részbenrendezések véges szorzatának fundamentális csoportja a fundamentális csoportok szorzata.
A tétel érdekessége, hogy a (2) feltétel miatt algoritmikusan eldönthető, hogy egy részbenrendezés teljesíti-e a tétel feltételeit. Pedig az algoritmikusan eldönthetetlen, hogy egy részbenrendezés fundamentális csoportja triviális-e.

Tekintve, hogy a koronán nincsen Taylor-term, ez bizonyítja a következő tételt is. Larose és Zádori is belátták algebraibb eszközökkel [27].

8.1 Következmény ([22]). *Legyen P véges, összefüggő részbenrendezés. Ha P fundamentális csoportja nemtriviális akkor P-n nincsen Taylor-term.*

Sejtés: Egy P véges részbenrendezésen pontosan akkor van Taylor-term, ha az általa generált rendvarietásban nincs korona, azaz idempotens részalgebrája retraktumaként nem áll elő semelyik korona.

Sejtésem nincs logikai kapcsolatban a dichotómia sejtéssel, de annak algebrai változata mellett teszi le a voksot. Ugyanis pontosan az NP-teljesnek illetve polinomiálisnak sejtett esetek topologikus megkülönböztetéséről szól.

A koronák, mint a hurkok megfelelőjének megismeréséhez természetes eszköz a fundamentális csoport használata. Definiálni fogjuk egy részbenrendezés fundamentális csoportját. Ennek részletei megtalálhatóak a diplomamunkámban. A bizonyításokat nem írom le. Ezek általában vagy kompaktsági érveléseken múlnak, amik nem illenek a dolgozat fő vonalába, vagy triviálisak. Csak egy rövid, informális bevezetőt adunk a fundamentális csoport e kombinatorikus változatáról – a precizitás minden igénye nélkül. Majd definiáljuk a használt fogalmakat és kimondjuk a szükséges állításokat.

Nem nehéz fundamentális csoportot definiálni részbenrendezéseken, az ideáltopológia fundamentális csoportja tökéletes jelölt. Az általunk definiált fundamentális csoport ezzel izomorf lesz majd. Viszont egy tisztán kombinatorikus változatot szeretnénk csak részbenrendezések terminológiájában: A hurkok legyenek körséták, az utak séták. Legyen értelme például egy hurok hosszáról beszélni. Továbbá alkalmasan definiáljuk hurkok (szabad) homotópiáját. Két hurok lényegében akkor lesz homotóp, ha összehasonlíthatóak egymással. Ezek a fogalmak már kompatibilisek szokásos, rendvarietásos technikáinkkal. A csoportszorzás természetesen a konkatenáció lesz. Az így definiált kombinatorikus hurkokhoz könnyen hozzárendelhetőek hurkok az ideáltopológiában úgy, hogy a hozzárendelés a fundamentális csoportok izomorfizmusát indukálja.

Mivel minden (véges) szimpliciális komplexushoz van vele homotóp (véges) ideáltopológia, tetszőleges (végesen generált) csoport előáll majd egy (véges) részbenrendezés fundamentális csoportjaként. Ezért részbenrendezések fundamentális csoportja teljes általánosságban ugyanúgy kezelhetetlen (algoritmikus értelemben), mint komplexusoké.

A fundamentális csoporthoz kötődő egyéb fogalmak és tételek, például a fedések, fedőterek és a van Kampen tétel megfelelői is szépen leírhatóak kombinatorikus terminológiában. Ennek fő oka az, hogy az ideáltopológia megfelelő fogalmai rendszerint egybeesnek nem túl erőltetett kombinatorikus fogalmakkal.

Precízebb tárgyalásmódra áttérve definiáljuk a használt fogalmakat, és kimondjuk a fontosabb állításokat.

8.1 Definíció ([22]). *Legyen P_{2n+1} a $2n+1$ elemű út, P pedig egy részbenrendezés. Egy $\alpha : P_{2n+1} \to P$ monoton leképezést, a félreértés túlzott veszélye nélkül, (P-beli) útnak nevezünk. Ha pedig $\alpha(p_0) = \alpha(p_{2n})$ akkor α hurok.*

8.2 Definíció ([22]). *Definiáljuk hurkok szabad homotópiaosztályait a P részbenrendezésen, mint a legszűkebb, a következő tulajdonságokat teljesítő $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályait.*

1. *Legyenek $\alpha, \beta : P_{2n+1} \to P$ hurkok. Ha $\alpha \leq \beta$ akkor $\alpha \sim \beta$.*

2. *Legyenek $P_{2n-1} = \{p_0 \geq p_1 \leq p_2 \geq \cdots \leq p_{2n-2}\}$, és $P_{2n+1} = \{q_0 \geq q_1 \leq q_2 \geq \cdots \geq q_{2n}\}$ a $2n-1$ illetve $2n+1$ elemű utak, továbbá $\alpha : P_{2n-1} \to P, \beta : P_{2n+1} \to P$ hurkok. Ha $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ minden $0 \leq i \leq 2n-2$-re, és $\beta(q_{2n-2}) = \beta(q_{2n-1}) = \beta(q_{2n})$ akkor $\alpha \sim \beta$.*

A két szabály megfelel a homotópiaosztályokkal szembeni szemléletes igényeinknek. Az első szerint, ha két hurok, mint leképezés az ideáltopológiában homotóp akkor kombinatorikus értelemben is. A második szerint egy hurokba egy konstans hurkot befűzve a kapott hurok az eredetivel homotóp lesz. Beszélhetünk egy hurok hosszáról, ezt $P_{2n+1} \to P$ leképezés esetén $2n$-nek definiáljuk.

Megjegyzés: Egy rögzített végpontú sétához is hozzárendelhető egy hurok: Ha a séta szomszédos x, y, z elemeire $x \leq y \leq z$ áll fenn, akkor kicseréljük őket az $x \leq y \geq y \leq z$ négyesre. Így véges sok lépésben olyan sétát kapunk, ami a séta hosszával megegyező elemszámú korona képe. Eljárhattunk volna úgy is, hogy az $x \leq y \leq z$ hármasból elhagyjuk y-t. Bármelyik eljárás, vagy tetszőleges keverésük egy hurkot rendel a sétához, ami homotópia erejéig egyértelmű.

A kellemetlenség az, hogy lehetnek különböző hosszú hurkok is homotópak. Ez elkerülhetetlen, ha a megfelelő ideáltopológiával vagy szimpliciális komplexussal izomorf csoportot akarunk, hiszen azokra algoritmikusan eldönthetetlen, hogy egy hurok nullhomotóp-e, vagy maga a csoport triviális-e. A fundamentális csoport definiálásához rögzítünk P-ben egy bázispontot, és az ebben végződő hurkok homotópiaosztályai lesznek majd a csoport elemei.

8.3 Definíció ([22]). *Legyen P részbenrendezés, $x_0 \in P$. Két x_0 végpontú hurok homotóp, ha szabadon homotópak, sőt van olyan, a homotópiájukat igazoló huroksorozat, hogy minden hurok végpontja x_0.*

Azonos végpontú hurkok egy félcsoportot alkotnak a konkatenációval, mint szorzással. A homotópiaosztályok ennek egy faktorát definiálják. Nem lenne nehéz belátni erről a félcsoportról, hogy csoport. Alaptulajdonságai is mind bebizonyíthatóak kombinatorikus terminológiában. De könnyebb ezeket visszavezetni az ideáltopológiára, arra hivatkozva, hogy a két homotópiafogalom kompatibilis.

8.4 Definíció ([22]). *Legyen $\varphi_n : [0;1] \to P_{2n+1}$ a következő függvény.*

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} p_{2k} \ \textit{ha}\ x = \frac{k}{n} \\ p_{2k+1} \ \textit{ha}\ \frac{k}{n} < x < \frac{k+1}{n}. \end{cases}$$

Ez folytonos az ideáltopológiában. Ezért minden P részbenrendezésre, $\alpha : P_{2n+1} \to P$ hurokra $\alpha \circ \varphi_n$ hurok lesz az ideáltopológiában. Ezt a hurkot $\bar{\alpha}$ jelöli.

8.1 Állítás ([22]). *Legyen P összefüggő részbenrendezés.*

1. *α és β P-beli hurkok pontosan akkor homotópak, ha az $\bar{\alpha}$ és $\bar{\beta}$ hurkok homotópak a topologikus értelemben.*

2. *α és β P-beli hurkok pontosan akkor lesznek szabadon homotópak, ha az $\bar{\alpha}$ és $\bar{\beta}$ hurkok szabadon homotópak a topologikus értelemben.*

3. *Az $\alpha \to \bar{\alpha}$ által indukált leképezés a homotópiaosztályokon, ami (1) szerint jóldefiniált, szürjektív lesz.*

Az $\alpha \to \bar{\alpha}$ leképezés konkatenációtartó, injektív és szürjektív, így a homotópiaosztályok félcsoportjának izomorfizmusát indukálja az ideáltopológia fundamentális csoportjával. Eszerint a részbenrendezés homotópiaosztályainak félcsoportja is csoport. Továbbá a csoport (izomorfizmus erejéig) független a bázispont választásától.

8.5 Definíció ([22]). *Legyen P összefüggő részbenrendezés és nevezzük az $x_0 \in P$ elemet bázispontnak. Tekintsük az x_0 végpontú hurkok homotópiaosztályain a konkatenációval, mint szorzással definiált csoportot. Ezt nevezzük P fundamentális csoportjának, és $\pi_1(P)$-vel jelöljük.*

8.2 Tétel ([22]). *Legyen P egy összefüggő részbenrendezés. Ekkor az $\alpha \to \bar{\alpha}$ leképezés konkatenációtartó. Egy tetszőleges α hurok pontosan akkor lesz szabadon nullhomotóp, ha $\bar{\alpha}$ nullhomotóp. A leképezés egy izomorfizmust indukál a részbenrendezés és az ideáltopológia fundamentális csoportja között.*

Az α huroknak megfelelő elemet a fundamentális csoportban $[\alpha]$ jelöli.

8.2 Következmény ([22]). *Legyen P összefüggő részbenrendezés.*

1. *Egy P-beli α hurok pontosan akkor nullhomotóp, ha szabadon nullhomotóp.*

2. *Legyenek α és β hurkok P-ben, közös végpontjuk legyen a fundamentális csoport bázispontja. A két hurok pontosan akkor szabadon homotóp, ha $[\alpha]$ és $[\beta]$ konjugáltak.*

8.3 Következmény ([22]). *Legyenek P és Q részbenrendezések. Ekkor $\pi_1(P \times Q) \cong \pi_1(P) \times \pi_1(Q)$.*

Példa: Egy koronához rendelt lánckomplexus éppen a zárt körvonal, S^1 lesz. Így $\pi_1(C_{2n}) \cong \mathbb{Z}$. A korona egy hatványának fundamentális csoportja $\pi_1(C_{2n})^k \cong \mathbb{Z}^k$.
Most már minden eszközünk megvan az 8.1.Tétel bizonyításához.

Bizonyítás. (1) $\to$ (2): Egy részbenrendezés fundamentális csoportjába beágyazható egy retraktumának fundamentális csoportja. A korona fundamentális csoportja pedig $\mathbb{Z}$.
(2) $\to$ (1): Vesszük a legrövidebb nem nullhomotóp hurkot, feltehető, hogy ez nem injektív. A hurok (képe) pedig egy korona, jelölje C, a hosszát pedig $2n$. Tehát minden $2n$-nél rövidebb hurok nullhomotóp. Be fogjuk látni, hogy C retraktuma az általa generált idempotens részalgebrának, $\langle C \rangle$-nek. Tudjuk, hogy van egy olyan $f : P^k \to P$ idempotens függvény, hogy $f(C^k) = \langle C \rangle$. Belátjuk, hogy C a retraktuma $\langle C \rangle$-nek. Valamilyen $1 \leq i \leq k$-ra a következő r_i retrakciót szeretnénk definiálni:
Minden $a \in \langle C \rangle$-re legyen

$$r_i(a) = \pi_i f^{-1}(a).$$

Azt állítjuk, hogy van olyan i, amire r_i jóldefiniált és monoton, így C a retraktuma $\langle C \rangle$-nek. Ezt a következőképpen bizonyítjuk majd. Feltehető, hogy $\pi_1(\langle C \rangle)$ bázispontja $x_0 \in C$, és C^k bázispontja $y_0 = (x_0, \dots, x_0)$, így $f(x_0) = y_0$. Tudjuk, hogy f indukál egy $f^* : \pi_1(C^k) \to \pi_1(\langle C \rangle)$ homomorfizmust. Továbbá $\pi_1(C^k) \cong \mathbb{Z}^k$, és az $(1, \dots, 1)$ elemnek, aminek egy reprezentánsa C^k átlója, a képe az idempotencia miatt éppen a C által reprezentált csoportelem, $[C]$ lesz. Be fogjuk látni, hogy ha a fenti r_i nem jóldefiniált vagy nem monoton, akkor van olyan C_i hurok C^k-ban, ami a $\bar{0}\overset{i}{1} = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ csoportelemet reprezentálja $\pi_1(C^k)$-ban, és $f(C_i)$ nullhomotóp. Ez viszont nem teljesülhet minden i-re. Különben a C_i-k szorzata, mint nullhomotóp hurkok szorzata, maga is nullhomotóp lenne. Másrészt viszont a szorzat az $(1, \dots, 1)$ elemet reprezentálná a fundamentális csoportban, akárcsak az átló. Ennek képe viszont C-vel homotóp, C pedig feltevésünk szerint nem nullhomotóp.

Állítás: Tegyük fel, hogy az $r_i : \langle C \rangle \to C$:

$$r_i(a) = \pi_i f^{-1}(a)$$

függvény nem jóldefiniált. Ekkor van olyan C_i, ami $\pi_1(C^k)$-ban a $\bar{0}\overset{i}{1}$ csoportelemet reprezentálja, és $f(C_i)$ nullhomotóp.

Létezik $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ a C^n-ben, hogy $f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2)$, és az i-edik koordinátáik különböznek, azaz $(\underline{v}_1)_i \neq (\underline{v}_2)_i$. Legyen $(\underline{v}_1)_i = a \neq b = (\underline{v}_2)_i$. Mutatunk két olyan, $\underline{v}_1$-t és $\underline{v}_2$-t összekötő utat, amiknek a képe $2n$-nél rövidebb hurok, továbbá a konkatenációjuknak a képe a j-edik projekciónál C, ha $i = j$, és nullhomotóp, ha $i \neq j$. Az i-edik vetülete a két útnak az a-t és b-t összekötő egyik, illetve másik út lesz. A j-edik pedig, ahol $j \neq i$, a C-nek ugyanazon a, $(\underline{v}_1)_j$-t és $(\underline{v}_2)_j$-t összekötő, legfeljebb n hosszú ívén. Az utak alkalmas választásával ezek a feltételek kielégíthetőek. Legyen az utak konkatenációja a C_i hurok. A C_i hurok szabadon homotóp egy, a $\bar{0}\overset{i}{1}$ hurkot reprezentáló hurokkal. Továbbá $f(C_i)$ metszi önmagát $f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2)$-ben, így két, $2n$-nél rövidebb hurok konkatenációja. Mivel ezek nullhomotópok az $f(C_i)$ is az.

Állítás: Tegyük fel, hogy az $r_i : \langle C \rangle \to C$:

$$r_i(a) = \pi_i f^{-1}(a)$$

függvény jóldefiniált, de nem monoton. Ekkor van olyan C_i, ami $\pi_1(C^k)$-ban a $\bar{0}\overset{i}{1}$ csoportelemet reprezentálja, és $f(C_i)$ nullhomotóp.

Ez csak kicsit különbözik az előző esettől. Ha r_i jóldefiniált, de nem monoton, akkor létezik $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ a C^k-ban, hogy $a = f(\underline{v}_1) \leq f(\underline{v}_2) = b$, de $(\underline{v}_1)_i \not\leq (\underline{v}_2)_i$. Ismét veszünk két utat $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ közt úgy, hogy az i-edik koordinátában az utak vetülete éppen a $(\underline{v}_1)_i$-t és $(\underline{v}_2)_i$-t összekötő két út. Más $j \neq i$ koordinátákban pedig ugyanaz a $(\underline{v}_1)_j$-t és $(\underline{v}_2)_j$-t összekötő, legfeljebb n hosszú ív. Mint az előző esetben, most is $\bar{0}\overset{i}{1}$-gyel lesz homotóp C_i.

Most $f(C_i)$ nem metszi saját magát, de $a = f(\underline{v}_1) \leq f(\underline{v}_2) = b$-nél ismét kettévágható. Ez alatt azt értjük, hogy, mint P-beli sétában, az a elemet az $a \leq b \geq a$ hármasra cseréljük. Ezután szétvágjuk két sétára, majd egyszerűsítünk: ha van a kapott hurkokban, mint sétákban $x \leq y \leq z$ akkor az y elemet elhagyhatjuk. Először két, $\underline{v}_1$-t és $\underline{v}_2$-t összekötő utat kell alkalmasan megválasztani. Ha $(\underline{v}_1)_i$ és $(\underline{v}_2)_i$ távolsága $d \geq 2$ a koronában, akkor ezt könnyű megvalósítani. Egy $d+1$ és egy $2n-d+1$ hosszú sétát kapunk, amiket egyszerűsítve a kapott hurkok esetleg még rövidebbek. Tekintsük a $d = 1$, $(\underline{v}_1)_i > (\underline{v}_2)_i$ esetet. A C_i hurok egy 2 és egy $2n$ hosszú sétára esik szét. Elég belátni, hogy a $2n$ hosszú séta nullhomotóp hurkot reprezentál. Azt állítjuk, hogy a séta elemei nem alkotnak koronát, és így egy $2n$-nél rövidebb hurokkal is homotópak. Különben, C_i konstrukciójából adódóan, $\pi_i f^{-1}$ izomorfizmus lenne a hurok és C közt. Viszont $a \leq b$-re $\pi_i f^{-1}(a) > \pi_i f^{-1}(b)$, ellentmondás. Ezzel az állítást beláttuk.

Tehát alkalmas i-re $\pi_i f^{-1} : \langle C \rangle \to C$ jóldefiniált és monoton. Továbbá C elemein f idempotenciája miatt könnyen láthatóan identikus, azaz retrakció.

$\square$

Felhasznált irodalom

[1] N. Alon, A. Lubotzky, A. Widgerson, *Semidirect products in graphs and zig-zag products in graphs: Connections and applications*, Proc. of the 42nd FOCS, (2001), 630 – 637.

[2] A. A. Bulatov, *Malt'sev constraints are tractable*, Technical report PRG-RR-02-06, Oxford University, (2002).

[3] A. A. Bulatov, *Tractable conservative constraint satisfaction problems*, Proceedings of the 18th IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2003), (2003), 321–330.

[4] A. A. Bulatov, *H-coloring dichotomy revisited*, 2001, kézirat.

[5] A. A. Bulatov, P. Jeavons, *Algebraic structures in combinatorial problems*, Int. J. of Algebra and Computing, 2001, beküldve.

[6] A. A. Bulatov, P. Jeavons, A. A. Krokhin, *Constraint satisfaction problems and finite algebras*, Automata, languages and programming (Geneva, 2001), Lecture notes in Comput. Sci., **1853**, Springer, Berlin, (2002), 272–282.

[7] V. Dalmau, A. Krokhin, B. Larose, *First order definable retraction problems for posets and reflexive graphs*, Proceedings of the 19th IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2004), (2004), 232-241.

[8] B. Davey, *Monotone clones and congruence modularity*, Order **6**, (1990), 389–400.

[9] Demetrovics J., Rónyai L., *Algebraic properties of crowns and fences*, Order **6**, (1989), 91-100.

[10] D. Duffus, I. Rival, *A structure theory for ordered sets*, Discrete Math **35**, (1981), 53–118.

[11] Erdős P., *Graph theory and probability*, Canad. J. Math., **11**, (1959), 34–38.

[12] T. Feder, M. Y. Vardi, *The computational stucture of monotone monadic (SNP) and constraint satisfaction: A study through datalog and group theory*, SIAM Journal of Computing **28**, (1998), 57–104.

[13] A. T. Fomenko, D. B. Fuchs and V. L. Gutenmacher, *Homotopic topology*, (1986), Hungarian Foreign Trading Company.

[14] D. Geiger, *Closed systems of functions and predicates*, Pac. J. of Math. **27**, (1968), 95 – 100.

[15] D. Greenwell, Lovász L., *Applications of product coloring*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **25**, (1974), 335 – 340.

[16] H.P. Gumm, *Congruence modularity is permutability composed with congruence distributivity*, Archiv der Math. **36**, (1981), 569–576.

[17] P. Hell, J. Nesetril, *On the complexity of H-coloring*, J. Combin. Theory Ser. B, **48**, (1990), 92–110.

[18] P. Hell, J. Nesetril, *Graphs and homomorphisms*, (2004), Oxford University Press.

[19] S. Hoory, N. Linial, A. Widgerson, *Expander graphs and their applications*, előadássorozat, megtalálható a http://www.cs.huji.ac.il/ nati/ címen.

[20] P. G. Jeavons, *On the algebraic structure of combinatorial problems*, Theoretical Computer Science, (1998), **200**, 185-204.

[21] B. Jónsson, *Algebras whose congruence lattices are distibutive*, Math. Scand. **21**, (1967), 110–121.

[22] Kun G., *Részbenrendezések fundamentális csoportjáról*, (2003), szakdolgozat.

[23] Kun G., *CSP and MMSNP are computationally equivalent*, Proceedings of the 21th IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2006), beküldve.

[24] Kun G., Szabó Cs., *Order varieties and monotone retractions of finite posets*, Order **18**, (2001), 79–88.

[25] Kun G., Szabó Cs., *Jónsson terms and near-unanimity functions in finite posets*, Order **20**, (2003), 291–298.

[26] R. E. Ladner, *On the structure of polynomial time reducibility*, J. Assoc. comput. Math. **22**, (1975), 155–171.

[27] B. Larose, Zádori L., *Algebraic properties and dismantlability of finite posets*, Discrete Math. **163**, (1997), 89–99.

[28] B. Larose, Zádori L., *Finite posets and topological spaces in locally finite varieties*, (2002), kézirat.

[29] B. Larose, C. Loten, Zádori L., *A polynomial-time algorithm for near-unanimity graphs*, J. Algorithms **55**, no. 2, (2005), 177–191.

[30] B. Larose, Zádori L. „The complexity of the extendibility problem for finite posets", SIAM J. Discrete Math. **17**, no.1., (2003), 114–121.

[31] Larose B., Zádori L., „Finite posets and topological spaces in locally finite varieties", Algebra Universalis **52**, no. 2-3, (2005), 119–136.

[32] A. Krokhin, B. Larose, „Solving order constraints in logarithmic space", Proceedings of 20th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'03), Berlin, Germany, Lecture Notes in Computer Science 2607, (2003), 379–390.

[33] V. Dalmau, A. Krokhin, B. Larose, „Retractions onto series-parallel posets", Discrete Mathematics, (2003), elfogadva.

[34] Larose B. „Isotone analogs of results by Malt'sev and Rosenberg", Beitrge Algebra Geom., elfogadva.

[35] A. T. Lundell, S. Weingram, *The topology of CW complexes*, (1969), Van Nostrand, New York.

[36] A. Lubotzky, R. Phillips, P. Sarnak, *Ramanujan graphs*, Combinatorica **8**(3): 261 – 277, 1988.

[37] A. Lubotzky, B. Samuels, V. Vishne, *Ramanujan complexes of type A_d*, Israel J. of Math., 2005, elfogadva.

[38] A. Lubotzky, B. Samuels, V. Vishne, *Explicit constructions of Ramanujan complexes of type A_d*, Europ. J. of Combinatorics, 2005, beküldve.

[39] F. Madeleine, I. A. Stewart, *Constraint Satisfaction, Logic and Forbidden Patterns*, SIAM J. on Computing, 2005, beküldve.

[40] R. McKenzie, *Monotone clones, residual smallness and congruence distributivity*, Bull. Australian Math. Soc. **41**, (1990), 283–300.

[41] R. McKenzie, *Is the presence of a nu-term a decidable property of a finite algebra?*, 1997, kézirat.

[42] Maróti M., *On the undecidability of a NU-term*, 2003, kézirat.

[43] Maróti M., *The existence of a near-unanimity function in an algebra is decidable*, 2005, kézirat.

[44] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, (1984), Addison-Wesley, Menlo Park, CA.

[45] Tardos G., *A maximal clone of monotone operations which is not finitely generated*, Order **3**, (1986), 211–218.

[46] W. Taylor, *Varieties obeying homotopy laws*, Canadian J. Math. **29**, (1977), 498–527.

[47] Zádori L., *Order varieties generated by finite posets*, Order **8**, (1992), 341–348.