Lorentz-sokaságok exponenciális leképezései

Doktori értekezés

Készítette: Szeghy Dávid

Matematika Doktori Iskola
Matematika I. Doktori Program

Iskolavezető: Dr. Laczkovich Miklós egyetemi tanár
Programvezető: Dr. Szenthe János egyetemi tanár
Témavezető: Dr. Szenthe János egyetemi tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2008

Contents

1 Bevezetés

E disszertáció fő célkitűzése az, hogy a Lorentz-sokaságok exponenciális leképezéseit, ehhez kapcsolódva az úgynevezett fokális pontok halmazát is, minél több szempont szerint megvizsgáljuk. Ezt három fejezetben fogjuk megtenni, melyekben a fő elv mindig az lesz, hogy Riemann-esetben ismert eredmények megfelelőit vizsgáljuk meg Lorentz-esetben, hogy megmutassuk az egyezéseket, illetve a különbségeket. Még mielőtt vázolnánk, hogy az egyes fejezetekben miről is lesz pontosan szó, célszerű egy-két definíciót és jelölést bevezetni.

Legyen $(M, <,>)$ egy Lorentz-sokaság, melynek exponenciális leképezését jelölje $\exp : TM \supset \widetilde{TM} \to M$, ahol TM a sokaság érintőnyalábját jelöli, és az exponenciális leképezés értelmezési tartománya pedig $\widetilde{TM}$. Ezt a leképezést megszoríthatjuk az érintőnyaláb egy alkalmas részhalmazára is pl. egy $x \in M$ pont T_xM érintőterére, pontosabban a $\widetilde{T_xM} \overset{def}{=} \widetilde{TM} \cap T_xM \subset T_xM$ részhalmazra. Ha $P \subset M$ egy szemi-Riemann-részsokaság, azaz P egy olyan sima részsokasága M-nek, hogy minden $x \in P$ esetén a szemi-Riemann metrika megszorítása T_xM-re nem elfajuló, akkor beszélhetünk egy $x \in P$ pontban az

$$N_xP \overset{def}{=} \{v \in T_xM \mid < v, w >= 0, \forall w \in T_xP \subset T_xM\}$$

normális térről, továbbá a P részsokaság $N(P)$ **normális nyaláb**járól:

$$N(P) \overset{def}{=} \cup \{N_xP \mid x \in P\}.$$

Ekkor az exponenciális leképezést megszoríthatjuk a $P \subset M$ szemi-Riemann-részsokaság $N(P)$ **normális nyaláb**jára is, ahol a megszorítást úgy értjük, hogy az $\widetilde{N(P)} \overset{def}{=} N(P) \cap \widetilde{TM}$ részhalmazon tekintjük az exponenciális leképezést, melyre az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ jelölést fogjuk használni az egyszerűség kedvéért. Vegyünk most egy $P \subset M$ szemi-Riemann-részsokaságot és tekintsük ennek normális nyalábján az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ exponenciális leképezést. Egy $v \in \widetilde{N(P)}$ vektort **fokális vektor**nak mondunk, ha az exponenciális leképezés $T_v\varepsilon$ lineáris érintőleképezésének magja nem triviális, azaz $T_v\widetilde{N(P)} \supset \ker T_v\varepsilon \neq \{0\}$. Ez a definíció ekvivalens a következővel: azokat a $v \in \widetilde{N(P)}$ vektorait a normális nyalábnak, melyeknek semmilyen $U \subset \widetilde{N(P)}$ nyílt környezetén sem diffeomorfizmus a megszorított $\varepsilon|_U$ leképezés, fokális vektoroknak nevezzük. Egy $v \in \widetilde{N(P)}$ fokális vektor $\varepsilon(v)$ képét **fokális**

pontnak fogjuk nevezni. Abban a speciális esetben, amikor a P részsokaság egyetlen pont, azaz $P = \{x\}$, a fokális vektorokat illetve pontokat **konjugált vektor**oknak illetve **pont**oknak nevezzük.

Ha adott egy $w \in N(P)$ vektor, akkor nyilvánvalóan $w \in N_x P$ valamely egyértelmű $x \in P$ pontra, így a $[0, \infty) \ni t \mapsto t \cdot w \in N_x P \subset NP$ egy félegyenest definiál. Mivel az ε leképezés nem feltétlen értelmezett az egész félegyenes mentén, csak valamilyen $[0, \delta_w)$ szakaszon (ahol $0 < \delta_w \leq \infty$), ezért az $r_w : [0, \delta_w) \ni t \mapsto t \cdot w \in N_x P \cap \widetilde{N(P)}$ leképezést (a w-irányú) **sugár**nak fogjuk nevezni. Ennek a sugárnak a képét jelölje $c_w(t) \overset{def}{=} \varepsilon(r_w(t))$, mely a részsokaságra merőlegesen induló w-irányú **geodetikus sugár**. Könnyen látható, hogy minden $\gamma : [0, \alpha) \to L$ geodetikus, melyre $\gamma(0) \in P$, $\gamma'(0) \perp T_{\gamma(0)} P$ teljesül előáll, mint valamilyen $r_w(t)$ sugár képenek a megszorítása a $[0, \alpha)$ intervallumra, azaz $\gamma(t) = c_w(t)$, ahol $w = \gamma'(0)$. Az egyszerűség kedvéért az r_w jelöléssel fogunk hivatkozni az $r_w([0, \delta_w))$ képhalmazra.

Legyen R a Lorentz-sokaság görbületi tenzora a ∇ Levi-Civitá kovariáns deriválásra nézve, $c_v(t)$, $v \in N(P)$ pedig egy geodetikus sugár a P szemi-Riemann-részsokaságra merőlegesen, továbbá $X(t) \in T_{c_w(t)} M$ egy sima vektormező e geodetikus mentén. Az $X(t)$ vektormezőt **Jacobi-mező**nek nevezzük, ha teljesíti az:

$$R(X(t), c_v'(t))\, c_v'(t) + X''(t) = 0, \ \forall t \in [0, \delta_v)$$

egyenletet, amit **Jacobi-egyenlet**nek hívunk, ahol $X'(t) \overset{def}{=} \nabla_{c_v'(t)} X(t)$. Jelölje

$$w_v : T_{c_v(0)} P \to T_{c_v(0)} P, \ v \in N(P)$$

a P szemi-Riemann-részsokasághoz tartozó v-irányú Wiengarten-endomorfizmust (ennek definícióját az analóg Riemann-esetben lásd Bishop-Crittenden [B-C] 190-191. o.). Ekkor azokat a Jacobi-mezőket, melyek kielégítik még az

1. $X(0) \in T_{c_v(0)} P$;
2. $X'(0) - w(X(0)) \in T_{c_v(0)} P^{\perp}$,

kezdeti feltételeket is **P-Jacobi-mező**knek nevezzük. Ha létezik, olyan nemtriviális P-Jacobi-mező, mely a $c_v(t_0)$ pontban eltűnik, akkor bizonyítható, hogy a $c_v(t_0)$ pont a P részsokaság fokális pontja, (ennek bizonyítását az analóg Riemann-esetben lásd [B-C] 225. o.). Használni fogjuk később az alábbi ismert lemmát is:

1.1 Lemma. *Ha* $X(t)$, $Y(t)$ P*-Jacobi-mezők a* $c_v(t)$, $v \in N(P)$ *geodetikus sugár mentén, akkor*

$$< X'(t), Y(t) > - < X(t), Y'(t) > \equiv 0.$$

Bizonyítás. Lásd [B-C] 228. o. 4. Lemma. □

Érdemes megjegyezni, hogy a P-Jacobi-mezők, (melyek a fokális pontokat adják) végig ortogonálisak a geodetikusra, hiszen ha $X(t)$ egy P-Jacobi-mező, melyre $X(t_0) = 0$, akkor a fenti lemmában $Y(t) = c_v'(t)$ választásra a következő összefüggés adódik $< X'(t), c_v'(t) > \equiv 0$. Azaz $\frac{d}{dt} < X(t), c_v'(t) > \equiv 0$, amiből $< X(t), c_v'(t) > \equiv konst$. Mivel a $t = t_0$ paraméterre $X(t_0) = 0$ miatt ez a konstans nulla, így $< X(t), c_v'(t) > \equiv 0$.

A disszertáció egyes fejezeteiben az alábbiakról lesz szó:

1. Frank Warner [W] eredményeit általánosítjuk Riemann-sokaságok konjugált vektorairól Lorentz-sokaságok fokális vektoraira, így bizonyos *jó* fokális vektorok környezetében alkalmas koordináta környezeteket véve explicite megadható az exponenciális leképezés formája. A fokális vektorok halmazából egy kivételes halmazt elhagyva a megmaradó részen ezek a *jó* fokális vektorok egy sűrű és nyílt halmazt alkotnak. A vizsgálódásaink alatt egy Warner által definiált ún. $(R2)$ tulajdonság meglétét fogjuk megkövetelni, mivel teljesen általános esetben a fokális pontok halmaza nagyon nehezen kezelhető lehet. Így például a Lorentz-esetben, egy geodetikus mentén tetszőleges zárt halmazok is részei lehetnek a fokális pontok halmazának, mint azt P. Piccione és D. V. Tausk példája mutatja [P-T]. A fejezet végén példák lesznek, melyek különböző típusú nem *jó* fokális pontok létezését bizonyítják.

2. Ebben a fejezetben az $(R2)$ tulajdonság teljesülése mellett, azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen becslések adhatóak egy geodetikus szakaszon lévő fokális pontok számára. A Maslov-indexet fogjuk használni, mely a Morse-index általánosítása a szemi-Riemann-esetre, azonban ez nem egyszerűen a fokális pontokat számolja multiplicitással, hanem

bizonyos előjellel számolja a fokális pontokat. Elsőként a Maslov-index segítségével közvetlenül adható becsléseket adunk, melyben a [P-T2] cikk egy eredményét fogjuk használni, majd Szenthe J. [Sz1] cikke alapján adunk a Riemann-esettel analóg becsléseket, végül ún. erős fokális pontok első lehetséges előfordulását vizsgáljuk.

3. Az utolsó fejezetben egy kompakt összefüggő Lie-csoport orbitjainak fokális pontjait fogjuk vizsgálni globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaságokban. Először csak az orbitokat vizsgáljuk, majd ennek segítségével a 4-dimenzós Lorentz-sokaságok esetében a szinguláris orbitokról megmutatjuk, hogy nem lehetnek izoláltak. Végül bizonyos speciális esetekben a szinguláris orbitok és principális orbitok fokális pontjai közti összefüggéseket fogunk megvizsgálni, melyekhez Szenthe J. [Sz2] cikke fog segítségül szolgálni.

2 Warner eredményeinek analogonjai

Warner egy cikkének [W] eredményei természetes módon általánosíthatóak Lorentz-sokaságok fokális vektoraira, a bizonyítások csekély módosításával, ezért sorban végigmegyünk a cikk állításain, és megfogalmazzuk azokat az általunk használni kívánt formában. Riemann-sokaságok esetén is ismertek kiterjesztések lásd pl. Hebda [H] és Molnár-Sáska, Szenthe [MS-Sz], illetve Lorentz-esetben idő-, vagy fényszerű geodetikusok menti konjugált pontokra K. Rosquit [R].

2.1 Definíció. *Legyen $P \subset M$ egy Lorentz-sokaság szemi-Riemann-részsokasága. Jelölje $\mathcal{J}(c_v, P)$ a P részsokaságra merőleges $c_v(t)$ geodetikus sugár menti P-Jacobi-mezők vektorterét és $\mathcal{J}_{\{t_0\}}(c_v, P)$ ennek azon alterét, amit a $c_v(t_0)$ pontban eltűnő P-Jacobi-mezők alkotnak. Definiáljuk a $T_{c_v(t_0)}M$ érintőtér két alterét a következő módon:*

$$\mathcal{V}_{t_0}(P, c_v) \overset{def}{=} \{X(t_0) \mid X \in \mathcal{J}(c_v, P)\};$$
$$\mathcal{D}_{t_0}(P, c_v) \overset{def}{=} \left\{X'(t_0) \mid X \in \mathcal{J}_{\{t_0\}}(c_v, P)\right\}.$$

*Ha $c_v(t_0)$ egy fokális pontja a P részsokaságnak a $c_v(t)$ geodetikus sugár mentén, akkor $\dim\left(\ker T_{r_v(t_0)}\varepsilon\right)$ e fokális pont **rendje** vagy másnéven **multiplicitása**, és igazolható a 2.4. Lemma alapján, hogy ez éppen a $\mathcal{D}_{t_0}(P, c_v) \subset T_{c_v(t_0)}M$ altér dimenziójával egyenlő (lásd [B-C] 225. o. a Riemann-esetben). Egy w fokális vektor multiplicitásán természetesen a neki megfelelő $\varepsilon(w)$ fokális pont multiplicitását értjük. Az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ exponenciális **leképezést reguláris**nak mondjuk, ha teljesülnek rá az alábbi regularitási feltételek.*

(R2) $\mathcal{D}_{t_0}(P, c_v) \oplus \mathcal{V}_{t_0}(P, c_v) = T_{c_v(t_0)}M$, *minden* $v \in \widetilde{N(P)}$ *és* $t_0 \in [0, \delta_v)$ *esetén;*

(R3) minden $v \in \widetilde{N(P)}$ esetén létezik olyan U konvex környezete a v vektortnak, hogy minden r_w sugárnak, mely metszi e környezetet, az $r_w \cap U$ szakaszán lévő fokális vektorainak száma multiplicitással számolva megegyezik v multiplicitásával.

A fenti számozás a Warner cikkel való analógia miatt történt, ahol volt még egy $(R1)$ tulajdonság is, mely mindig teljesül a mi esetünkben. Ez az

$(R1)$ tulajdonság azt követelte meg, hogy ε legyen sima az $\widetilde{N(P)}$ null-szelésén kívül és legalább C^1-osztályú a null-szelés egy kis környezetén, továbbá azt, hogy $T\varepsilon(r_v'(t)) = c_v'(t) \neq 0$, amikor $v \neq 0$. Az $(R2)$ tulajdonságnak pedig egy másik formája szerepel a Warner cikkben, mely ekvivalens az általunk kimondottal, ennek bizonyítását Riemann-sokaságok esetére lásd a [W] cikk végén. Egy az $(R2)$ tulajdonsággal ekvivalens feltétel meglétét követeli meg Mercuri, Piccione és Tausk cikke [M-P-T] is ahhoz, hogy a Maslov-index jól definiált legyen. Az [M-P-T] cikk 5.1.2 Tételének bizonyításából az is kiolvasható, hogy a szerzők által használt "non-degeneracy" feltétel az általunk használt $(R2)$ feltétellel egyenértékű. A mi esetünkben az ekvivalens megfogalmazásoknak a fent megadott $(R2)$ alakja lesz a legegyszerűbben használható, ezért fogjuk ezt alkalmazni.

Az alábbi definíció, Warner definíciójának természetes kiterjesztése részsokaságok normális nyalábjára.

2.2 Definíció. *Az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ leképezés* ***reguláris a*** $V \subset \widetilde{N(P)}$ ***halmazon****, ha a V halmaz minden pontjára teljesülnek az $(R2)$, $(R3)$ tulajdonságok.*

2.1 Lemma. *Legyen $(M, <,>)$ egy sima Lorentz-sokaság, $P \subset M$ egy sima szemi-Riemann-részsokasága, $m \in P$, $v \in N_mP$ és r_v egy sugár az $N(P)$ normális nyalábban. Legyen továbbá $A(t)$ egy olyan vektormező az r_v sugár mentén, melyre $T\varepsilon(A(t))$ egy nem azonosan nulla P-Jacobi-mező a $c_v(t)$ geodetikus sugár mentén. Ekkor*

$$T\varepsilon(A(t)) = f(t) \cdot E(t)$$

teljesül, ahol $E(t)$ egy sima sehol sem eltűnő vektormező a $c_v(t)$ geodetikus sugár mentén, és $f(t)$ egy sima függvény, melyre $f(t_0) = 0$ esetén $f'(t_0) \neq 0$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $Y(t) = T\varepsilon(A(t))$, továbbá legyenek $E_1(t), \ldots, E_n(t)$ párhuzamos vektormezők, a Levi-Cività kovariáns deriválásra tekintettel, melyek egy bázist adnak minden $T_{c_v(t)}M$ érintőtérben. Ekkor az $Y(t) = \sum f_i(t) \cdot E_i(t)$ felbontás adódik, ahol az $f_i(t)$ függvények simák. Ha $Y(t_0) = 0$, akkor $Y'(t_0) \neq 0$ teljesül, mivel $Y(t)$ nem azonosan nulla Jacobi-mező. Kihasználva, hogy az $E_i(t)$ vektormezők párhuzamosak $Y'(t) = \sum f_i'(t) \cdot E_i(t)$ adódik, melyből így következik, hogy nem minden $f_i'(t_0)$ tűnhet el, azaz az $Y(t)$ P-Jacobi-mező zérus helyei izoláltak. Sőt a $\sum f_i^2(t)$ egy sima nem azonosan nulla függvény, melynek minden zérushelye elsőrendű, mivel $(\sum f_i^2)'(t_0) = 0$, továbbá $(\sum f_i^2)'' = \sum 2f_i'' \cdot f_i + \sum 2(f_i')^2 \neq 0$ teljesül, hiszen a jobb oldali első összegzés minden tagja 0 a t_0 pontban míg a második összeg pozitív. Warner [W] cikkének 2.2 Lemmája kimondja, hogy egy sima függvénynek, melynek minden gyöke másodrendű, létezik sima négyzetgyöke. Azaz a mi esetünkben létezik olyan sima f függvény, melyre $\sum f_i^2 = f^2$. Legyen

$$E(t) \stackrel{def}{=} \frac{Y(t)}{f(t)}, \text{ ha } Y(t) \neq 0,$$
$$E(t) \stackrel{def}{=} \sum \frac{f_i'(t)}{f'(t)} E_i(t), \text{ ha } Y(t) = 0.$$

Ekkor $E(t)$ egy sima sehol sem eltűnő mindenütt jól értelmezett vektormező, hiszen ha $Y(t_0) = 0$, akkor az

$$f_i(t) = (t - t_0)k_i(t), \; f(t) = (t - t_0)g(t)$$

felbontás érvényes a t_0 pont egy környezetében, ahol $k_i(t) = f_i'(t_0)$, $g(t_0) = f'(t_0) \neq 0$, továbbá ezek a függvények simák, amiből közvetlenül adódik, hogy az $E(t)$ vektormező a t_0 pont környezetében $\frac{Y(t)}{f(t)} = \frac{(t-t_0)\sum k_i(t)\cdot E_i(t)}{(t-t_0)g(t)} = \sum \frac{k_i(t)}{g(t)} E_i(t)$ alakú, így $g(t_0) \neq 0$ miatt sima és jól értelmezett. Vegyük észre, hogy $E(t_0) = \sum \frac{k_i(t_0)}{g(t_0)} E_i(t_0) = \sum f_i'(t_0) E_i(t_0) = \frac{1}{g(t_0)} Y'(t_0)$. □

A fenti bizonyítás a [W] 2.3. Lemma bizonyításának átvitele a Lorentz-esetre. Mi az eredeti bizonyítás módosítását adtuk meg, hogy az analógia könnyen követhető legyen, habár a fentinél egyszerűbb bizonyítás is adható az $Y(t)$ Taylor-kifejtésének segítségével a $t = t_0$ pont körül, ahogyan arra J. J. Duistermaat rámutatott: $Y(t) = Y(t_0) + \int_0^1 \frac{d}{ds} Y(t_0 + s(t - t_0))\, ds$, ahol ha $Y(t_0) = 0$, akkor $Y(t) = (t - t_0) \int_0^1 Y'(t_0 + s(t - t_0))\, ds$, ahol $\int_0^1 Y'(t_0 + s(t - t_0))\, ds$ egy, a $t = t_0$ paraméter kis környezetében, nem eltűnő vektormező. A többi módosított Warner állításnál is hasonlóan, az eredeti bizonyítás enyhe megváltoztatásával megy a bizonyítás.

2.2 Lemma. *Tegyük fel, hogy az $r_v(t_0) \in \widetilde{N(P)}$ pont egy környezetében teljesül az $(R2)$ tulajdonság, továbbá e pont multiplicitása k. Ekkor léteznek olyan U és V környezetei az $r_v(t_0)$ és $c_v(t_0) = \varepsilon(r_v(t_0))$ pontoknak, továbbá $(x_1, \ldots, x_n)$ és $(y_1, \ldots, y_n)$ koordinátarendszerek az U illetve V környezeteken, hogy egyrészt $\varepsilon(U) \subset V$, másrészt*

$$T\varepsilon(\frac{\partial}{\partial x_j}(r_v(t))) = f_j(t)(\frac{\partial}{\partial y_j}(c_v(t)))$$

érvényes, ahol $j = 1, \ldots, n$ és t olyan, hogy $r_v(t) \in U$ teljesül, továbbá az f_j függvények simák, melyekre $f_j(t) \neq 0$ teljesül amennyiben $j = 1, \ldots, n-k$. Ha $j = n-k+1, \ldots, n$, akkor az $f_j(t)$ függvény csak a $t = t_0$ pontban tűnik el, ahol $f_j'(t_0) > 0$.

Bizonyítás. A fenti lemma Warner 2.5. Lemmájának általánosítása, ahol a bizonyítás is a [W] 2.5 Lemma alapján történik. A bizonyítás vázlata a következő: Az $r_v(t)$ sugár mentén vegyünk olyan $A_1(t), \ldots, A_n(t)$ bázismezőket, melyekre minden $T\varepsilon(A_i(t))$ egy P-Jacobi-mező lesz a $c_v(t)$ geodetikus mentén. - Ilyen bázismezők létezésének bizonyítását lásd az 2.4. Lemma bizonyításában. - A 2.1. Lemma alapján adódnak a $T\varepsilon(A_i(t)) = f_i(t) \cdot E_i(t)$ felbontások, ahol $E_i(t_0) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$ és ezek egy bázisát adják $T_{c_v(t_0)}M$-nek az $(R2)$ feltétel miatt, ezért az $E_i(t)$ vektormezők egy bázismezőt adnak a $c_v(t)$ geodetikus mentén a $c_v(t_0)$ pont egy kis környezetében, ennek bizonyítása a 2.3. Lemma alapján történik. Most tehát van egy-egy bázismezőnk az $r_v(t)$ sugár és a $c_v(t)$ geodetikus mentén a t_0 paraméterhez tartozó pontok egy környezetében. Warner 2.4. Lemmája alapján, ha adott egy $\varphi(t)$ sima görbe, és e mentén egy $(X_1(t), \ldots X_n(t))$ sima bázismező, akkor van olyan alkalmasan kicsiny W környezete a görbe tetszőleges pontjának és ezen a környezeten egy $(z_1, \ldots, z_n)$ koordinátarendszer, amelyre a görbe mentén $\frac{\partial}{\partial z_i}(\varphi(t)) = X_i(t)$ teljesül. Ez a lemma adja a lemmánkban szereplő U, V környezeteket, és az $(x_i), (y_i)$ koordinátarendszereket. Az $r_v(t)$ és $c_v(t)$ menti bázismezők konstruálása részletesebben megtalálható a 2.1. Fejezetben, a Whitehead determináns definiálása előtt. $\square$

2.3 Definíció. *Egy $p \in \widetilde{N(P)}$ fokális vektort* ***regulárisnak*** *nevezünk, ha létezik olyan U környezete, melyet metsző bármely r_w sugárra teljesül, hogy a sugáron pontosan egy a környezetbe eső fokális vektor van, és ennek multiplicitása megegyezik a p vektoréval. A nem reguláris fokális vektorokat* ***szingulárisnak*** *nevezzük. Jelölje $F^R(P)$ a reguláris fokális vektorok halmazát, $F^S(P)$ a szinguláris fokális vektorok halmazát továbbá $F(P)$ a fokális vektorok halmazát.*

Mivel egy $v \in \widetilde{N(P)} - F(P)$ vektort az jellemez, hogy $T_v\varepsilon$ maximális rangú, és $T_w\varepsilon$ is maximális rangú, ha w elég közel van v-hez, ezért $\widetilde{N(P)} - F(P)$ nyílt. Amiből az következik, hogy $F(P)$ zárt.

2.1 Tétel. *Tegyük fel, hogy az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ leképezés reguláris a $V \subset \widetilde{N(P)}$ nyílt halmazon. Ekkor $F^R(P) \cap V$ nyílt a fokális pontok $F(P) \cap V$ halmazában és $F^R(P) \cap V$ egy $(n-1)$-dimenziós sokaság struktúrával látható el úgy, hogy az $i : F^R(P) \cap V \to \widetilde{N(P)}$ beágyazás egy részsokaság a relatív topológiával, melyre a $T_p\widetilde{N(P)} = T_pF^R(P) \oplus r'_p(1)$ felbontás is teljesül minden $p \in F^R(P) \cap V$ esetén.*

Bizonyítás. Warner [W] cikkében a Theorem 3.1 megfelelő részének bizonyításával analóg módon. $\square$

2.4 Definíció. *Tegyük fel, hogy az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ leképezés reguláris a V nyílt halmazon, rögzítsünk továbbá egy $p \in F^R(P) \cap V$ vektort. Jelölje $K(p)$ a $T_p\varepsilon : T_p\widetilde{N(P)} \to T_{\varepsilon(p)}M$ leképezés magterét és legyen $T(p) = K(p) \cap T_p(F^R(P) \cap V)$, ami az előző tétel alapján jogosult. Ekkor, ha a p fokális vektor multiplicitása k volt, akkor $T(p)$ vagy k vagy $(k-1)$-dimenziós attól függően, hogy $K(p) \subset T_p(F^R(P) \cap V)$ vagy $K(p) \not\subseteq T_p(F^R(P) \cap V)$, mivel $T_p(F^R(P) \cap V)$ 1-kodimenziós. Jelölje $F^k_V(P)$ azon $\widetilde{p} \in F^R(P) \cap V$ vektorok* *halmazát, melyekre $T(\widetilde{p})$ dimenziója k és $F_V^{k-1}(P)$ azon $\widetilde{p} \in F^R(P) \cap V$ vektorok halmazát, melyekre $T(\widetilde{p})$ dimenziója $(k-1)$.*

2.2 Tétel. *Ha a fenti definícióban a rörzített p vektor alkalmasan kicsiny $V_p \subset V$ környezetét vesszük, akkor az $F_{V_p}^{k-1}(P)$ halmaz üres, ha $k \geq 2$. Azaz, ha az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ leképezés reguláris a $p \in F^R(P)$ vektor egy alkalmasan kicsiny $V_p \subset \widetilde{N(P)}$ környezetén, és p multiplicitása ≥ 2, akkor a $K(p)$, a $T_p\varepsilon$ leképezés magtere, része a $T_p(F^R(P) \cap V)$ érintőtérnek.*

Bizonyítás. Warner [W] Theorem 3.2 bizonyításával analóg módon látható be. □

2.3 Tétel. *Legyen az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ leképezés reguláris a V nyílt halmazon és $p \in F^R(P) \cap V$, azaz egy reguláris fokális vektor a V halmazban. Ekkor*

1. Ha a p pont multiplicitása ≥ 2, akkor vannak olyan $(x_1, \dots, x_n)$ és $(y_1, \dots, y_n)$ koordinátarendszerek a p és $\varepsilon(p)$ pontok alkalmasan kicsiny környezetein, melyekre az

$$\begin{aligned} y_i \circ \varepsilon &= x_i, & i &= 1, \dots, n-k, \\ y_i \circ \varepsilon &= x_1 \cdot x_i, & i &= n-k+1, \dots, n; \end{aligned}$$

2. Ha a p pont multiplicitása 1 és p egy alkalmasan kicsiny környezetében minden $q \in F^R(P) \cap V$ pontra $K(q) = T(q)$ teljesül, azaz $K(q) \subseteqq T_qF^R(P)$, akkor léteznek olyan $(x_1, \dots, x_n)$ és $(y_1, \dots, y_n)$ koordinátarendszerek a p és $\varepsilon(p)$ pontok alkalmasan kicsiny környezetein, melyekre az

$$\begin{aligned} y_i \circ \varepsilon &= x_i, & i &= 1, \dots, n-1, \\ y_n \circ \varepsilon &= x_1 \cdot x_n; \end{aligned}$$

3. Ha a p pont multiplicitása 1 és $T(p) = \{0\}$, azaz $K(p) \not\subseteqq T_pF^R(P)$, akkor vannak olyan $(x_1, \dots, x_n)$ és $(y_1, \dots, y_n)$ koordinátarendszerek a p és $\varepsilon(p)$ pontok alkalmasan kicsiny környezetein, melyekre az

$$\begin{aligned} y_i \circ \varepsilon &= x_i, & i &= 1, \dots, n-1, \\ y_n \circ \varepsilon &= (x_n)^2 \end{aligned}$$

összefüggések teljesülnek.

Bizonyítás. A [W] Theorem 3.3 bizonyításával analóg módon. □

A fenti 2.1. Tétel segítségével az látható, hogy $F^R(P)$ a reguláris fokális vektorok halmaza, egy sima beágyazott nyílt hiperfelület az $N(P)$ normális nyalábban, melyre az őt metsző sugarak transzverzálisak. A 2.3. Tétel pedig azt írja le, hogy az exponenciális leképezés hogyan néz ki az $F^R(P)$ hiperfelület pontjainak közelében. A Riemann-esetben konjugált vektorok esetén Warner, fokális esetben pedig Molnár-Sáska, Szenthe [MS-Sz] belátta, hogy a reguláris fokális vektorok halmaza sűrű a fokális vektorok halmazában, azaz az $F^R(P)$ sima nyílt hiperfelület lezárásával megkapjuk a fokális vektorok $F(P)$ halmazát. Ebből látható, hogy egy fokális vektor közelében az exponenciális leképezés nem $1-1$ értelmű.

2.1 A Lorentz-sokaság esete

Szemi-Riemann-esetben a konjugált vagy fokális pontok eloszlása egy geodetikus mentén sokkal bonyolultabb is lehet, mint a Riemann-esetben. Habár egy valós analitikus $(M, <,>)$ Lorentz-sokaságban, melynek $P \subset M$ egy valós analitikus szemi-Riemann-részsokasága, J.H.C. Whitehead módszerével belátható, hogy egy $c_v(t)$, $v \in N(P)$ geodetikus sugár menti fokális pontok nem torlódhatnak. Azonban A. Helfer [He] megadott egy olyan nem analitikus példát, melyben egy a Lorentz-sokaságban lévő geodetikus mentén torlódnak a konjugált pontok. Helfer példájában a részsokaság elfajuló, egyetlen pont volt. Azonban könnyen látható, hogy egy ilyen példából olyat is konstruálhatunk, melyben a részsokaság nem elfajuló. Ez elérhető például a következő egyszerű eljárással: Vegyünk Helfer példájában egy a geodetikus kezdőpontján átmenő szemi-Riemann-részsokaságot, melyre a geodetikus merőleges, ekkor a konjugált pontok e részsokaság fokális pontjai is lesznek egyben. Igazából mint azt Piccione és Tausk [P-T] megmutatta, olyan példa is adható, melyben egy $c_v(t)$, $t \in \mathbb{R}$ geodetikus mentén bármely, a $c_v(0)$ pontot nem tartalmazó zárt halmaz előállhat, mint a $c_v(0)$ ponthoz konjugált pontok halmaza.

Helfer és Piccone-Tausk példáiban nem teljesül az $(R2)$ feltétel. Ez szükségszerű, hiszen a későbbiekben majd látni fogjuk, hogy ha az $(R2)$ feltétel teljesül, akkor a geodetikus mentén nem torlódhatnak a fokális pontok. Ezért mi e feltétel mellett fogjuk megvizsgálni, hogy mennyire tud sűrű lenni a reguláris fokális vektorok $F^R(P)$ hiperfelülete a fokális vektorok $F(P)$ halmazában.

Először vizsgáljuk meg, hogy mit is jelent az $(R2)$ feltétel.

2.3 Lemma. *A $\mathcal{D}_1(P, c_v)$ és $\mathcal{V}_1(P, c_v)$ alterek mindig ortogonálisak függetlenül az $(R2)$ feltételtől. Továbbá az alábbi állítások ekvivalensek:*
(1) a $\mathcal{D}_1(P, c_v)$ és $\mathcal{V}_1(P, c_v)$ alterek fényszerűek;
(2) a $\mathcal{D}_1(P, c_v) \cap \mathcal{V}_1(P, c_v)$ metszet fényszerű és 1 dimenziós;
(3) az $(R2)$ feltétel nem teljesül a $v \in \widetilde{N(P)}$ pontban.

Bizonyítás. Egy $c_v(t)$ geodetikus menti $X(t), Y(t)$ P-Jacobi-mezőkre az

$$< X'(t), Y(t) > - < X(t), Y'(t) > \equiv 0,$$

összefüggés érvényes az 1.1. Lemma alapján. Ebből az adódik, hogy a $\mathcal{D}_1(P, c_v)$ és $\mathcal{V}_1(P, c_v)$ alterek merőlegesek egymásra, hiszen ha $X(1) = 0$, azaz $X'(1) \in \mathcal{D}_1(P, c_v)$ és $Y(1) \in \mathcal{V}_1(P, c_v)$, akkor $\langle X'(1), Y(1) \rangle - 0 = 0$. Kihasználva a $\dim \mathcal{D}_1(P, c_v) + \dim \mathcal{V}_1(P, c_v) = \dim M$ és a $\dim T_{c_v(1)} M = \dim M$ egyenlőségeket azt kaptuk, hogy a $\mathcal{D}_1(P, c_v)$ és $\mathcal{V}_1(P, c_v)$ alterek egymás ortogonalizátorai.

(1) $\Rightarrow$ (2) Az eddigiek alapján ha (1)-ben pl. $\mathcal{D}_1(P, c_v)$ fényszerű, akkor az egyértelműen meghatározott 1-dimenziós fényszerű alterét $\mathcal{D}_1(P, c_v)$-nek, ez a Lorentz metrika miatt van, a $\mathcal{D}_1(P, c_v)$ ortogonális direkt kiegészítője $\mathcal{V}_1(P, c_v)$ is tartalmazza, így $\mathcal{D}_1(P, c_v) \cap \mathcal{V}_1(P, c_v)$ legalább 1-dimenziós, és a Lorentz metrika miatt ez a metszet, melynek összes vektora ortogonális egymásra, nem is lehet nagyobb dimenziós.

(2) $\Rightarrow$ (3) Lévén, hogy $\dim \mathcal{D}_1(P, c_v) + \dim \mathcal{V}_1(P, c_v) = \dim T_{c_v(1)} M$ és $\dim (\mathcal{D}_1(P, c_v) \cap \mathcal{V}_1(P, c_v)) > 0$ teljesülnek, így $\mathcal{D}_{t_0}(P, c_v) \oplus \mathcal{V}_{t_0}(P, c_v) \neq T_{c_v(t_0)} M$ adódik.

(3) $\Rightarrow$ (2) Ha $\mathcal{D}_{t_0}(P, c_v) \oplus \mathcal{V}_{t_0}(P, c_v) \neq T_{c_v(t_0)} M$, akkor $\dim \mathcal{D}_1(P, c_v) + \dim \mathcal{V}_1(P, c_v) = \dim T_{c_v(1)} M$ alapján $\dim (\mathcal{D}_1(P, c_v) \cap \mathcal{V}_1(P, c_v)) > 0$, így a $\mathcal{D}_1(P, c_v) \perp \mathcal{V}_1(P, c_v)$ ortogonalitás miatt a $\mathcal{D}_1(P, c_v) \cap \mathcal{V}_1(P, c_v)$ altér

"önortogonális", azaz bármely két vektora ortogonális egymásra, mivel Lorentz-sokaságban vagyunk, ezért (2) teljesül.

NEM (1) $\Rightarrow$NEM (2) A $\mathcal{D}_1(P, c_v)$ és $\mathcal{V}_1(P, c_v)$ alterek direkt kiegészítő volta és a Lorentz metrika miatt, ha pl. $\mathcal{D}_1(P, c_v)$ tér-, vagy időszerű, akkor $\mathcal{D}_1(P, c_v) \cap \mathcal{D}_1(P, c_v)^\perp = \{0_{c_v(0)}\}$, ezért $\mathcal{D}_1(P, c_v)^\perp = \mathcal{V}_1(P, c_v)$ alapján NEM (2) teljesül. $\square$

Legyen $(M, <,>)$ egy Lorentz-sokaság és P ennek egy szemi-Riemann-részsokasága, továbbá $v \in \widetilde{N(P)}$ egy fokális vektora P-nek k-szoros multiplicitással. Legyen $U \subset \widetilde{N(P)}$ a v vektor és $V \subset M$ az $\varepsilon(v)$ pont olyan környezete, melyekre egyrészt $\varepsilon(U) \subset V$ teljesül, másrészt léteznek $(x_1, \ldots, x_n)$ ill. $(y_1, \ldots, y_n)$ koordinátarendszerek az U ill. V környezeteken. Tekintsük a $\det(T\varepsilon)$ függvényt az U halmazon az (x_i), (y_j) koordinátarendszerekre vonatkozóan, azaz egy $z \in U$ pontra tekintsük a $T_z\varepsilon : T_z\widetilde{N(P)} \to T_{\varepsilon(v)}M$ lineáris leképezés mátrixának determinánsát a $(\partial x_1, \ldots, \partial x_n)$, és a $(\partial y_1, \ldots, \partial y_n)$ bázisokban. Természetesen a $\det(T\varepsilon)|_U$ függvény függ az (x_i), (y_j) koordinátarendszerektől, azonban a zérushelyei nem, hiszen ezek éppen a fokális vektorok lesznek, mivel $\det(T\varepsilon)(z) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha a $T_z\varepsilon$ leképezés nem injektív vagyis, ha $\ker(T_z\varepsilon) \neq \{0_z\}$ azaz, ha z egy fokális vektor. Ha a $T_z\varepsilon$ függvénynek csak a zérushelyeire vagyunk kíváncsiak, akkor tetszőleges koordinátarendszereket vehetünk. Az alábbiakban olyan bázismezőket adunk meg az $r_v(t)$ sugár, illetve a $c_v(t)$ geodetikus mentén az $r_v(1)$ illetve $c_v(1)$ pontok környezetében, amelyekben kifejezve a $\det(T\varepsilon)(r_v(t))$ függvényt egy hasznos segédeszközt kapunk a fokális pontok vizsgálatához. Először azonban egy lemmát kell bizonyítanunk.

2.4 Lemma. *Legyen $v \in \widetilde{N(P)}$ és $w \in T_vN(P)$ tetszőleges, ekkor egyértelműen létezik olyan $W(t)$ vektormező az $r_v(t)$ sugár mentén melyre $T\varepsilon(W(t))$ egy P-Jacobi-mező a $c_v(t)$ geodetikus mentén, és $W(1) = w$.*

Bizonyítás. Mivel az $N(P)$ normális nyaláb egy lokálisan triviális fibrálás, ezért, ha $v \in N_xP$, akkor vegyük az $x \in P$ pont egy alkalmasan kicsiny (φ, U) koordináta környezetét a P sokaságban, azaz $U \subset \mathbb{R}^p$ a $0_{\mathbb{R}^p}$ egy nyílt környezete és $\varphi : U \to P$, $\varphi(0_{\mathbb{R}^p}) = x$ egy sima diffeomorfizmus, ahol $\dim P = p$. Ekkor az N_xP egy nyílt környezete $N(P)$-ben diffeomorf

$U \times \mathbb{R}^{m-p}$-vel, ahol $m = \dim M$. Ekkor minden $y \in U$, $z \in \mathbb{R}^{m-p}$ esetén az $\{y\} \times r_z(t)$, $t \in \mathbb{R}$ sugár, az $N(P)$ egy sugarának felel meg. Vegyük a $v \in N(P)$ elemnek megfelelő $\{0_{\mathbb{R}^p}\} \times \widehat{v}$ pontot $U \times \mathbb{R}^{m-p}$-ben és a $w \in T_v N(P)$-nek megfelelő $\widehat{w} \in T_{\{0_{\mathbb{R}^p}\} \times \widehat{v}}(U \times \mathbb{R}^{m-p})$ vektort. A $T_{\{0_{\mathbb{R}^p}\} \times \widehat{v}}(U \times \mathbb{R}^{m-p}) = T_{0_{\mathbb{R}^p}} U \times T_{\widehat{v}} \mathbb{R}^{m-p}$ dekompozíció miatt vehetjük a $\widehat{w} = \widehat{w}_U + \widehat{w}_{\mathbb{R}^{m-p}}$ felbontást. Vegyük a $\{0_{\mathbb{R}^p}\} \times r_{\widehat{v}}(t)$ sugár mentén a $\widehat{w}_U$-irányú konstansmezőt, jelölje ezt $\widehat{W_U}(t)$. Ez a konstansmező az $\widehat{r}_0(t) : \mathbb{R}^{\geq 0} \ni t \mapsto \{0_{\mathbb{R}^p}\} \times r_{\widehat{v}}(t)$ sugár

$$\widehat{r}_\delta : \mathbb{R}^{\geq 0} \ni t \mapsto \{0_{\mathbb{R}^p} + \widehat{w}_U \cdot \delta\} \times r_{\widehat{v}}(t), \, \delta \geq 0$$

alakú sugarakon keresztül történő, δ-szerinti, deformálásánál adódó infinitézimális deformáció. Legyen az ennek megfelelő vektormező az $N(P)$ sokaságban az $r_v(t)$ sugár mentén $W_U(t)$, ami így szintén az $r_v(t)$ sugár más sugarakon keresztüli deformációjánál adódó infinitézimális deformáció. Az ε leképezésnél így a $c_v(t)$ a P-re merőlegesen induló geodetikus P-re merőlegesen induló geodetikusokon keresztüli deformációját kapjuk, ahol az infinitézimális defomáció $T\varepsilon(W_U(t))$ lesz, ezért ez egy P-Jacobi-mező. Hasonlóan vegyük a $\widehat{r}_0(t)$ sugár mentén a $\widehat{w}_{\mathbb{R}^{m-p}}$-irányú konstansmezőt, melyet jelöljön $\widehat{W}_{\mathbb{R}^{m-p}}(t)$ és tekintsük az ebből képzett $\widehat{W}_{\mathbb{R}^{m-p}}(t) \cdot t$ vektormezőt. Ez a $\widehat{r}_0(t)$ sugár

$$\widetilde{r}_\delta : \mathbb{R}^{\geq 0} \ni t \mapsto \{0_{\mathbb{R}^p}\} \times \left\{ r_{\widehat{v}}(t) + \delta \cdot \widehat{W}_{\mathbb{R}^{m-p}}(t) \cdot t \right\}, \, \delta \geq 0$$

alakú sugarakon keresztül történő, δ-szerinti deformációjánál adódó infinitézimális deformáció. Így ha $W_{\mathbb{R}^{m-p}}(t) \cdot t$ a $\widehat{W}_{\mathbb{R}^{m-p}}(t) \cdot t$ vektormezőnek megfelelő vektormező az $N(P)$ sokaságban az $r_v(t)$ sugár mentén, akkor az előbb mondottakhoz hasonlóan $T\varepsilon(W_{\mathbb{R}^{m-p}}(t) \cdot t)$ egy P-Jacobi-mező lesz. Mivel P-Jacobi-mezők összege is P-Jacobi, ezért $W(t) \stackrel{def}{=} W_U(t) + W_{\mathbb{R}^{m-p}}(t) \cdot t$ a keresett vektormező. Mivel a P-Jacobi-mezők tere m-dimenziós, továbbá $\dim T_v N(P) = m$, és különböző $w_1, w_2 \in T_v N(P)$ esetén $T\varepsilon(W_1(t)) \neq T\varepsilon(W_2(t))$ könnyen igazolható, így a P-Jacobi-mezők terének egy m-dimenziós alterét állítottuk elő, azaz minden P-Jacobi-mezőt előállítottunk egyértelműen, amiből $W(t)$ egyértelműsége is következik. $\square$

Rögzítsünk egy $v \in \widetilde{N(P)}$ vektort, és legyenek $v_1, \ldots, v_k \in T_v N(P)$ olyan lineárisan független vektorok, melyek kifeszítik a $T_v \varepsilon$ magterét. Ekkor, ha $v_{k+1}, \ldots, v_n \in T_v N(P)$ olyan vektorok, melyekre $v_{1,} \ldots, v_n$ egy bázisát adják $T_v N(P)$-nek, és ezen bázisvektorok egyértelmű kiterjesztései a 2.4. Lemma szerint a $V_1(t), \ldots, V_n(t)$ vektormezők az $r_v(t)$ sugár mentén, akkor

(*i*) $V_i(1) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$;

(*ii*) $T\varepsilon(V_i(t))$, $i = 1, \ldots, n$ P-Jacobi-mezők a $c_v(t)$ geodetikus sugár mentén;

(*iii*) a $V_1(t_0), \ldots, V_n(t_0)$ vektorok egy bázisát adják a $T_{r_v(t_0)}N(P)$ térnek minden $t_0 > 0$ esetén.

Használva a 2.1. Lemmánkat kapunk egy $T\varepsilon(V_i(t)) = f_i(t) \cdot G_i(t)$ felbontást minden $i = 1, \ldots, n$ esetén, ahol az f_i függvények simák és a G_i vektormezők sehol sem eltűnőek a $t = 1$ paraméter egy kis környezetében. Másrészről szintén könnyen látható, hogy a $G_1(1), \ldots, G_k(1)$ vektorok lineárisan függetlenek, hiszen ezek a $T\varepsilon(V_i(t))$, $i = 1, \ldots, k$, $c_v(t)$ geodetikus menti P-Jacobi vektormezők kovariáns deriváltjainak nem nulla konstansszorosai, lásd a 2.1. Lemma bizonyítását. Ezek viszont lineárisan függetlenek, hiszen egy

$$\sum_{i=1}^{k} a_i G_i(1) = 0, \ \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \neq 0, \ a_i \in \mathbb{R}$$

összefüggésre a

$$G_i(1) = b_i \left(T\varepsilon V_i(t)\right)' |_{t=1}, \ b_i \in \mathbb{R}^{\neq 0}$$

felhasználásával, ha $V(t) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot a_i V_i(t)$, akkor

$$T\varepsilon(V(1)) = T\varepsilon\left(\sum b_i \cdot a_i V_i(1)\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot b_i T\varepsilon(V_i(1)) = 0,$$

és

$$(T\varepsilon(V(t)))' |_{t=1} = \left(T\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{k} b_i \cdot a_i V_i(t)\right)\right)' |_{t=1} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot b_i \left(T\varepsilon(V_i(t))\right)' |_{t=1} = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot G_i(1) = 0$$

adódik. Mivel a $T\varepsilon(V(t)) = \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot a_i T\varepsilon(V(t))$ vektormező P-Jacobi-mezők összege, így maga is egy P-Jacobi-mező, melynek értéke és kovariáns deriváltjának értéke is 0 a $t = 1$ pontban a fentiek alapján, ezért csak a triviális vektormező lehet, azaz $T\varepsilon\left(V\left(t\right)\right) = T\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot b_i V_i\left(t\right)\right) \equiv 0$, amiből $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot b_i V_i\left(t\right) \equiv 0$. Ez azonban $t = 1$-re ellentmond a $V_1\left(1\right) = v_1, \ldots, V_k\left(1\right) = v_k$ vektorok lineáris függetlenségének, hiszen nem lehet minden $a_i{\cdot}b_i = 0$. Így tehát a $G_1\left(1\right), \ldots, G_k\left(1\right)$ vektoroknak lineárisan függetlennek kell lennie. Ebből az következik, hogy a $c_v\left(t\right)$ geodetikus mentén a $c_v(1)$ pont egy kis környezetében is lineárisan függetlenek a $G_1\left(t\right), \ldots, G_k\left(t\right)$ vektormezők. Egészítsük ki ezt a k darab geodetikus menti lineárisan független vektormezőt egy bázissá a geodetikus mentén a következők szerint:

(1) Ha az $(R2)$ feltétel teljesül a $v \in \widetilde{N\left(P\right)}$ pontban, akkor vegyük az $f_{k+1}\left(t\right)G_{k+1}\left(t\right), \ldots, f_n\left(t\right)G_n\left(t\right)$ mezőket.

(2) Ha az $(R2)$ feltétel nem teljesül $v \in \widetilde{N\left(P\right)}$ pontban, akkor a 2.3. Lemma alapján feltehető, hogy a $V_1\left(t\right)$, $V_n\left(t\right)$ vektormezőket úgy választottuk, hogy

$$G_1\left(1\right) = f_n\left(1\right) \cdot G_n\left(1\right) \in \mathcal{D}_1(P, c_v) \cap \mathcal{V}_1(P, c_v) - \left\{0_{\varepsilon(v)}\right\}$$

is teljesül, hiszen a $\left(G_1\left(1\right), \ldots, G_k\left(1\right)\right)$ vektorok a $\mathcal{D}_1(P, c_v)$ egy bázisát adják az $\left(f_{k+1}\left(1\right)G_{k+1}\left(1\right), \ldots, f_n\left(1\right)G_n\left(1\right)\right)$ vektorok pedig a $\mathcal{V}_1(P, c_v)$ egy bázisát. Így tehát a $G_1\left(t\right), \ldots, G_k\left(t\right), f_{k+1}\left(t\right)G_{k+1}\left(t\right), \ldots, f_{n-1}\left(t\right)G_{n-1}\left(t\right)$ vektormezők függetlenek a $c_v\left(t\right)$ geodetikus mentén a $c_v\left(1\right)$ pont egy kis környezetében. Vegyünk egy tetszőleges $Z\left(t\right)$ sima vektormezőt a $c_v\left(t\right)$ geodetikus mentén, melyre

$$\left(G_1\left(t\right), \ldots, G_k\left(t\right), f_{k+1}\left(t\right)G_{k+1}\left(t\right), \ldots, f_{n-1}\left(t\right)G_{n-1}\left(t\right), Z\left(t\right)\right)$$

egy bázis a geodetikus mentén a $c_v\left(1\right)$ pont egy kis környezetében.

Terjesszük ki a $V_i\left(t\right)$ vektormezőket tetszőlegesen és simán az $\widetilde{N\left(P\right)}$ sokaságon az $r_v(t)$ sugár egy kis környezetében, ahol a kiterjesztett vektormezőket jelölje $\widetilde{V}_i$. Mivel ezek a $v \in \widetilde{N\left(P\right)}$ pontban egy bázist alkotnak, így e pont egy alkalmasan kicsiny környezetében is. Hasonlóan terjesszük simán $(R2)$ teljesülése esetén a

$$G_1\left(t\right), \ldots, G_k\left(t\right), f_{k+1}\left(t\right)G_{k+1}\left(t\right), \ldots, f_n\left(t\right)G_n\left(t\right)$$

$(R2)$ nem teljesülése esetén pedig a

$$G_1\left(t\right), \ldots, G_k\left(t\right), f_{k+1}\left(t\right)G_{k+1}\left(t\right), \ldots, f_{n-1}\left(t\right)G_{n-1}\left(t\right), Z\left(t\right)$$

vektormezőket az M sokaságon, ahol a kiterjesztett mezőket jelöljék egységesen $\widetilde{G_1}, \ldots, \widetilde{G_n}$.

Tekintsük a $\Delta : \widetilde{N(P)} \supset U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix értékű függvényét a $T\varepsilon : T\widetilde{N(P)} \to TM$ függvénynek a $\left(\widetilde{V_1}, \ldots, \widetilde{V_n}\right)$, $\left(\widetilde{G_1}, \ldots, \widetilde{G_n}\right)$ bázismezőkre vonatkoztatva, ahol U olyan kis környezete a v pontnak, melyre $\left(\widetilde{V_i}\right)$ egy bázismezeje U-nak, $\left(\widetilde{G_i}\right)$ pedig egy bázismezeje $\varepsilon(U)$-nak. Azaz ha $w \in T_z\widetilde{N(P)}$, $z \in U$, akkor $T\varepsilon(w)$ koordinátái a $\left(\widetilde{G_i}(\varepsilon(z))\right)$ bázisban megegyeznek a $\Delta(z) \cdot w$ vektor koordinátáival ahol a w vektort a $\left(\widetilde{V_i}(z)\right)$ bázisban írtuk föl. Ekkor a Δ determinánsára az $r_v(t)$ sugár mentén az $r_v(1)$ pont egy kis környezetében a következő előállítás érvényes:

$$\det\Delta(r_v(t)) = f_1(t) \cdot \ldots \cdot f_k(t) \cdot \det B(t),$$

ahol a $B(t)$ mátrix a Δ egy al-mátrixa a következőképpen adva:

$$\Delta(r_v(t)) = \begin{bmatrix} f_1(t) & \ldots & 0 & a^1_{k+1}(t) & \ldots & a^1_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & f_k(t) & a^k_{k+1}(t) & \ldots & a^k_n(t) \\ 0 & \ldots & 0 & b^1_{k+1}(t) & \ldots & b^1_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & b^{n-k}_{k+1}(t) & \ldots & b^{n-k}_n(t) \end{bmatrix},$$

itt az $r_v(t)$ sugár mentén írtuk föl a Δ mátrix értékű függvényt a $\left(\widetilde{V_i}(r_v(t))\right)$, és $\left(\widetilde{G_j}(r_v(t))\right)$ bázisokban.

Mivel ez a leírás már Whiteheadnél is szerepelt [Wh] ezért:

2.5 Definíció. *Legyen $v \in \widetilde{N(P)}$ egy fokális vektor, és vegyünk olyan bázisokat, mint amilyeneket az előbb konstruáltunk meg, ezek voltak $\left(\widetilde{V_1}, \ldots, \widetilde{V_n}\right)$, és $\left(\widetilde{G_1}, \ldots, \widetilde{G_n}\right)$. Ilyen bázisokban felírva a $\det\Delta$ függvényt* ***Whitehead determinánsnak*** *fogjuk nevezni.*

2.1 Megjegyzés. *Ha az (R2) feltétel teljesül, akkor a fenti bázisban felírva $\Delta(r_v(t))$-t, az $A(t) \stackrel{def}{=} [a_{ij}(t)]^{i=1,\ldots,k}_{j=k+1,\ldots,n}$ al-mátrix a zéro mátrix, és $B(t)$*

pedig az identitás mátrix.

Ha az $(R2)$ feltétel nem teljesül, akkor

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^{k-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^k(t) \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_n^1(t) \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_n^{n-k-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & b_n^{n-k}(t) \end{bmatrix}.$$

Továbbá, ha $t = 1$ akkor $a_n^1(1) = 1, a_n^2(1) = \cdots = a_n^k(1) = b_n^1(1) = \cdots = b_n^{n-k}(1) = 0$.

2.5 Lemma. *Ha a v fokális vektor multiplictása k, akkor az r_v sugárhoz tartozó $\Delta(r_v(t))$ Whitehead determinánsnak legalább k-ad rendű zérus helye van a $t = 1$ pontban, és ez a zérus hely pontosan k-ad rendű akkor és csak akkor, ha az $(R2)$ tulajdonság teljesül a $v = r_v(1)$ pontban.*

Bizonyítás. A fenti előállításból $\Delta(r_v(t)) = f_1(t) \cdot \ldots \cdot f_k(t) \det B(t)$. Ebből pedig látható, hogy a $\Delta(r_v(t))$ függvénynek legalább k-ad rendű gyöke van az 1 pontban, hiszen az f_i, $i = 1, \ldots, k$ függvényeknek elsőrendű gyökeik vannak (lásd a 2.1. Lemmát).

A $\Delta(r_v(t))$ előállítása miatt $\frac{d^k}{dt^k}\Delta(r_v(1)) = k! f_1'(1) \cdot \ldots \cdot f_k'(1) \det B(1)$ is igaz, mely az alábbi determinánssal állítható elő:

$$\frac{d^k \Delta(1)}{dt^k} = k! \begin{vmatrix} f_1'(1) & \dots & 0 & a_{k+1}^1(1) & \dots & a_n^1(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & f_k'(1) & a_{k+1}^k(1) & \dots & a_n^k(1) \\ 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^1(1) & \dots & b_n^1(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^{n-k}(1) & \dots & b_n^{n-k}(1) \end{vmatrix}.$$

Lévén, hogy $f_i'(1) \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$ teljesül, így $\frac{d^k \Delta(1)}{dt^k} \neq 0$ akkor, és csak akkor, ha $\det B(1) \neq 0$.

Az előbbi 2.1. Megjegyzés miatt viszont $\det B(t) = 0$ akkor, és csak akkor, ha $(R2)$ nem teljesül. $\square$

2.2 Megjegyzés. *Ha az $(R2)$ teljesül, akkor minden $r_v(t)$ sugár mentén a fokális vektorok izoláltan helyezkednek el.*

Bizonyítás. Mivel minden fokális vektor multiplicitása véges, kisebb mint $\dim M$, ezért az előző lemma miatt $\Delta(r_v(t))$ gyökei, melyek a fokális vektoroknak felelnek meg, véges rendűek, következésképpen izoláltak. $\square$

2.6 Lemma. *Legyenek M és P valós analitikusak, továbbá $v \in \widetilde{N(P)}$ egy fokális vektor. Ekkor ha a Whitehead determináns előállításánál szereplő $\left(\widetilde{V_i}\right)$, $\left(\widetilde{G_j}\right)$ bázisokat analitikusan választjuk meg, akkor a* $\det \Delta(r_v(t))$ *Whitehead determináns gyökei véges rendűek és izoláltak.*

Bizonyítás. Vegyük az $r_v(t)$ sugár menti első fokális vektort (ilyen van mert a fokális vektorok halmaza zárt), melyet jelöljön v_1. Itt véve egy $\det \Delta(r_{v_1}(t))$ Whitehead determinánst alkalmas analitikus bázisban $T\varepsilon$ analitikussága miatt azt kapjuk, hogy $\det \Delta(r_{v_1}(t))$ is analitikus, továbbá ez a függvény nem lehet azonosan nulla, hiszen v_1 előtt nincs fokális vektor a sugáron, így ez a gyök véges rendű és izolált $\det \Delta(r_{v_1}(t))$ analitikussága miatt. Ugyanez teljesül a második, harmadik stb. fokális vektornál is. Mivel fokális vektorok limesze is fokális vektor, és az ez előtti fokális vektorok izoláltak a sugár mentén, így e limesz pontnál sem lehet $\det \Delta$ a sugár mentén lokálisan azonosan nulla. Ezért az analiticitás miatt, mint az előbb, ez a limesz pont is végesrendű és izolált (azaz nem is létezhet torlódási pont igazából). Az $r_v([0,1])$ kompaktsága miatt, a bizonyítás a fentiek alapján következik. $\square$

A bevezetőben említett Piccione-Tausk [P-T] példából látható, hogy a $\det \Delta(r_v(t))$ gyökei nem mindig véges rendűek, például, ha a sugár mentén egy zárt intervallum a fokális vektorok halmazához tartozik, akkor ezen intervallum bármely belső pontjában $\det \Delta(r_v(t))$ nem véges rendű.

Vegyük a következő speciális koordinátarendszert a $v \in N(P)$ pont körül. Legyen $H \subset N(P)$ egy analitikus hiperfelület mely tartalmazza a v pontot és transzverzális az $r_v(t)$ sugárra. Vegyünk egy $\Psi : \mathbb{R}^{n-1} \to H$, $0 \mapsto v$ analitikus koordinátarendszert a H hiperfelületen a $v \in H$ pont egy környezetén. Tekitsük a következő leképezést:

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \ni (t, \theta) \mapsto r_{\Psi(\theta)}(t) \in N(P).$$

Ez az $r_v(t)$ sugár egy kis környezetén egy koordinátázást ad, ha θ elég közel van 0-hoz.

2.7 Lemma. *Ha a $\Delta\left(r_{\Psi(0)}(t)\right)$ függvénynek zérushelye a $t = 1$ pont, melynek rendje $l < \infty$ véges, akkor a*

$$\det(\Delta \circ \Phi(t, 0)) = \det\left(\Delta\left(r_{\Psi(0)}(t)\right)\right)$$

függvény az $(1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ pont egy alkalmasan kicsiny V környezetén megegyezik az alábbi pszeudo-polinommal

$$t^l + t^{l-1}\phi_{l-1}(\theta) + \cdots + \phi_0(\theta),$$

ahol a ϕ_i függvények simák, vagy pedig analitikusak akkor, ha M, P és a Whitehead determináns analitikus volt.

Jegyezzük meg, hogy ha Z a $\det(\Delta \circ \Phi)$ függvény gyökeinek halmaza a $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ halmazon, akkor a $\Phi(V)$ halmazba eső fokális vektorok a $\Phi(Z)$ halmaz pontjai lesznek, hiszen Φ egy sima diffeomorfizmus V-n . Azaz e lemma szerint a Z halmaz megkapható úgy, mint egy pszeudo-polinom gyökhalmaza.

Bizonyítás. A Malgrange előkészítési tételből a sima esetben (lásd B. Malgrange [M] 78.-79. o.) vagy az analitikus esetben ennek egy speciális eseteként a Weierstrass előkészítési tételből (lásd Osgood [O] 82.-84. o.) az alábbi következik: Ha egy függvénynek, (a mi esetünkben ez a $(t, \theta) \to \det(\Delta \circ \Phi(t, \theta)) = \det \Delta\left(r_{\Psi(\theta)}(t)\right)$), van egy véges l-ed rendű gyöke, (nálunk ez a $(1, 0)$ pontban van), úgy értve, hogy a megszorított $\det \Delta\left(r_{\psi(0)}(t)\right)$ függvénynek van egy véges l-ed rendű gyöke a $t = 1$ pontban, akkor lokálisan e pont körül a függvény a lemma szerinti pszeudo-polinom alakú. $\square$

2.2 A Maslov-index

Az alábbiakban ismertetjük a Maslov-index néhány tulajdonságát, melyeket használni fogunk a fokális vektorok halmazának vizsgálatakor. A Maslov-index egy $\mu : \widetilde{N(P)} - F(P) \to \mathbb{Z}$ alakú függvény. A Maslov-index pontos definiálására nincs szükségünk, de az megtalálható a 6. fejezetben vagy F. Mercuri, P. Piccione, D. V. Tausk szerzők [M-P-T] cikkében. E cikkben a szerzők bizonyítják azt is, hogy $(R2)$ érvényessége esetén a Maslov-index megegyezik a fokális indexxel, melyet a következő módon kapunk meg. Legyen $v \in \widetilde{N(P)} - F(P)$, és vegyük az $r_v([0,1])$ szakaszra eső fokális vektorokat, mivel az $(R2)$ feltétel teljesül, így a 2.2. Megjegyzés miatt számuk véges egy kompakt szakaszon, legyenek ezek az $r_v(t_0), \ldots, r_v(t_l)$ vektorok. Ekkor

$$\mu(v) = i_{foc}(v) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{l} \operatorname{sgn}(<,> |_{\mathcal{D}_{t_i}(P,c_v)}),$$

ahol a jobb oldalon a fokális index definíciója szerepel, és $\operatorname{sgn}(<,> |_{\mathcal{D}_{t_i}(P,c_v)})$ a metrika $\mathcal{D}_{t_i}(P, c_v)$ altérre való megszorításának szignatúráját jelöli, azaz:

$$\operatorname{sgn}(<,> |_{\mathcal{D}_{t_i}(P,c_v)}) = \begin{cases} \dim \mathcal{D}_{t_i}(P, c_v), \text{ ha az altér térszerű} \\ \dim \mathcal{D}_{t_i}(P, c_v) - 2, \text{ ha az altér időszerű} \end{cases}.$$

Ha adott egy $(M, <,>)$ Lorentz-sokaság és ennek egy $P \subset M$ szemi-Riemann-részsokasága, melyre az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ exponenciális leképezés teljesíti az $(R2)$ feltételt, akkor ha adott egy $v \in \widetilde{N(P)}$, $v \notin F(P)$ vektor és ennek alkalmasan kicsiny környezetében egy $w \in \widetilde{N(P)}$, $w \notin F(P)$ vektor, úgy ezek Maslov-indexei egyenlőek, azaz $\mu(v) = \mu(w)$. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy a Maslov-index folytonos a nem fokális vektorok halmazán, azaz $\mu : \widetilde{N(P)} - F(P) \to \mathbb{Z}$ egy folytonos egész értékű függvény.

2.6 Definíció. *Egy $v \in \widetilde{N(P)}$ vektorról azt mondjuk, hogy α-**típusú**, ha a $\mathcal{V}_1(P, c_v)$ altér tartalmaz időszerű vektort. Ebben az esetben a 2.3. Lemma miatt a $\mathcal{D}_1(P, c_v)$ altér térszerű. A nem α-típusú vektorokat β-**típusú**nak nevezzük.*

Egy egyszerű folytonossági érvelés miatt igaz a következő:

2.3 Megjegyzés. *Az $\widetilde{N(P)}$-beli α-típusú vektorok az $\widetilde{N(P)}$ egy nyílt részét képezik.*

2.7 Definíció. *Tegyük fel, hogy $(M <,>)$ egy Lorentz-sokaság, $P \subset M$ ennek egy szemi-Riemann-részsokasága. Tegyük fel, hogy az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ leképezésre teljesül az $(R2)$ feltétel és vegyünk egy $v \in F(P)$ fokális vektort. Kihasználva a fokális vektorok halmzának zártságát és a fokális vektorok sugarak menti izoláltságát, találhatunk a v vektornak egy olyan $U_v \subset N(P)$ környezetét, mely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:*

1. *minden olyan r_w sugárra az $N(P)$ normalis nyalábban, ami metszi az U_v környezetet teljesül, hogy $U_v \cap r_w = r_w((t_w^-, t_w^+))$, ahol $t_w^- < t_w^+$, azaz a metszet egy nyílt szakasz;*
2. *az $r_v([t_v^-, t_v^+])$ szakaszon csak az $r_v(1) = v$ fokális vektor;*
3. *ha $r_w \cap U_v \neq \emptyset$, akkor $r_w(t_w^-), r_w(t_w^+)$ nem fokális vektorok;*
4. *U_v összefüggő;*
5. *t_w^-, t_w^+ értékek folytonosan függnek a w paramétertől, amennyiben értelmezve vannak.*

*Egy 1.-5. tulajdonságoknak eleget tevő környezetet a v vektor **jó környezetének** nevezünk.*

2.4 Megjegyzés. *Minden $v \in F(P)$ vektornak létezik jó környezete.*

Bizonyítás. Vegyük a v vektort egy kis környezetének a 2.7. Lemma előtt bevezetett $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \ni (t, \theta) \mapsto r_{\Psi(\theta)}(t) \in N(P)$ koordinátázását. Ekkor $F(P)$ zártsága miatt könnyen látható, hogy

$$U_v \stackrel{def}{=} \{\Phi(t, \theta) \mid t \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon], \|\theta\| \leq \delta\}$$

egy jó környezetet definiál, ha $\epsilon, \delta > 0$ elegendően kicsik. $\square$

2.8 Definíció. *Tegyük fel, hogy az* $(R2)$ *feltétel teljesül, és legyen a* v *fokális vektornak* U_v *egy jó környezete. Jelölje* $\overline{\mu}(v)$ *a* ***Maslov-index ugrását*** *az* $r_v([t_v^-, t_v^+])$ *szakaszon, azaz*

$$\overline{\mu}(v) = \mu(t_v^+ \cdot v) - \mu(t_v^- \cdot v).$$

Ha a v vektor multiplicitása a fenti definícióban k volt, akkor $\overline{\mu}(v) = k$ vagy $\overline{\mu}(v) = k - 2$ adódik, és minden $w \in \widetilde{N(P)}$ esetén, amelyre $r_w \cap U_v \neq \emptyset$ teljesül, $\mu(t_w^+ \cdot w) - \mu(t_w^- \cdot w) = \overline{\mu}(v)$ igaz az U_v környezetre tett feltételek miatt.

2.5 Megjegyzés. *Tegyük fel, hogy* $(R2)$ *teljesül* $N(P)$*-n. Legyen* $v \in N(P)$ *egy fokális vektor és tekintsünk egy az* r_v *sugárhoz konstruált* $\det\Delta$ *Whitehead determinánst, a 2.5. Definíció előtti konstrukció szerint. Legyen* V *a* v *vektornak egy olyan alkalmasan kicsiny környezete, amin* $\det\Delta$ *értelmezve van és amire a 2.7. Lemma alkalmazható. Tekintsük az ezen környezeten értelmezett* $\det(\Delta \circ \Phi(t,\theta))$ *függvény egy tetszőleges* (t_0, θ_0) *gyökét, amire* $w \overset{def}{=} \Phi(t_0, \theta_0) \neq v$*, továbbá a* $t \mapsto \det(\Delta \circ \Phi(t, \theta_0))$ *függvény rendjét a* t_0 *pontban, mely utóbbi függvény a 2.7. Lemma szerint lokálisan az* $r_{\Psi(\theta_0)}(t)$ *sugár mentén egy valódi polinomnak vehető, így e függvény* t_0*-beli rendje azt jelenti, hogy hányszoros gyöke a* t_0 *a* $t \mapsto \det(\Delta \circ \Phi(t, \theta_0))$ *függvénynek (polinomnak). Azt állítjuk, hogy ez a rend a* t_0 *pontban megegyezik a gyökhöz tartozó* w *fokális vektor multiplicitásával.*

Bizonyítás. Tekintsük az $r_w(t)$ sugarat, és egy e menti $\det\widetilde{\Delta}$ Whitehead determinánst. Ekkor a $\det\Delta$ és $\det\widetilde{\Delta}$ Whitehead determinánsokhoz tartozó bázisok közti áttérés egy sima bázis transzformáció, mely nem változtatja meg a gyök rendjét egy sugár mentén. Mivel $\det\widetilde{\Delta}$ függvényre a zérushely rendje a 2.7. és 2.5. Lemmák miatt éppen a w fokális vektor multiplicitása, így $\det\Delta$-nál is a gyök rendje a multiplicitással egyezik meg. □

Tegyük fel, hogy az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ leképezésre teljesül az $(R2)$ feltétel. Legyen a $v \in F(P)$ fokális vektor körüli $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \ni (t, \theta) \mapsto r_{\Psi(\theta)}(t) \in N(P)$ koordinátarendszer olyan , mint azt a 2.7. Lemma előtt definiáltuk.

Ekkor a 2.7. Lemma alapján a $\det(\Delta \circ \Phi(t,0))$ függvény az $(1,0)$ pont egy kis környezetében $t^k + t^{k-1}\phi_{l-1}(\theta) + \cdots + \phi_0(\theta)$ alakú. Ha a v pontnak U_v egy alkalmasan kicsiny jó környezete, akkor feltehető, hogy az előbbi pszeudo-polinom értelmezett az $(1,0)$ pont $\Phi^{-1}(U_v)$ környezetén. Legyen most $r_w(t)$ egy olyan sugár, melyre $r_w \cap U_v \neq \emptyset$, ekkor az $r_w(t)$ sugárnak el kell metszenie a Φ definiálásánál szereplő H hiperfelületet, méghozzá pontosan egy pontban. A Φ definíciója miatt, így létezik egy egyértelmű θ_w, melyre a $\Phi(t,\theta_w)$ az $r_w(t)$ sugár egy átparaméterezése.

2.1 Állítás. *Ha az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ leképezésre teljesül az $(R2)$ tulajdonság, akkor minden $v \in F(P)$ fokális vektornak létezik olyan U_v jó környezete, melyre minden $r_w(t)$ sugárra, amire $r_w \cap U_v \neq \emptyset$ teljesül, igazak az alábbiak:*
1. a 2.7. Lemma alapján adott $t^k + t^{k-1}\phi_{l-1}(\theta) + \cdots + \phi_0(\theta)$ pszeudo-polinom értelmezett a $\Phi^{-1}(U_v)$ környezeten, ahol Φ a v pont körül egy olyan koordinátarendszer, mint azt fenn megadtuk, azaz $r_w \cap U_v \neq \emptyset$ esetén létezik olyan θ_w paraméter, melyre $\Phi(t,\theta_w)$ az $r_w(t)$ sugár egy átparaméterezése;
2. az $r_w(t)$ sugárhoz tartozó θ_w paraméter rögzítésére a $t^k + t^{k-1}\phi_{k-1}(\theta_w) + \cdots + \phi_0(\theta_w)$ polinom gyökei mind valósak, ha v α-típusú és legfeljebb egy komplex gyöke lehet, ha v β-típusú.

Azaz egy $r_v(t)$-hez közeli $r_w(t)$ sugáron az $r_w \cap U_v$ szakaszon lévő minden fokális vektor α-típusú, ha v α-típusú volt, vagy legfeljebb egy β-típusú lehet köztük, ha v β-típusú volt.

Bizonyítás. Az állítás előtt már bizonyítottuk, hogy 1. teljesül egy alkalmasan kicsiny U_v jó környezetre.

Ha a v fokális vektor α-típusú, akkor a fenti 2.3. Megjegyzés miatt feltehető, hogy az U_v jó környezetben minden pont α típusú. Vegyünk egy $w \in U_v$ pontot és legyenek az $r_w([t_w^-, t_w^+])$ szakaszon levő fokális vektorok multiplicitásai $l_1, \ldots, l_m$. Ekkor $k = \overline{\mu}(v) = \mu(t_w^+ \cdot w) - \mu(t_w^- \cdot w) = \sum_\alpha l_i = \sum_{i=1}^m l_i$, ahol az első összegzés azt jelenti, hogy az $r_w([t_w^-, t_w^+])$ szakaszon csak az α-típusú fokális vektorokat számoljuk multiplicitással. Ez az egyenlőség azt eredményezi, hogy a 2.7. Lemmában a θ paraméter minden értelmezett értékére valósak a gyökök, hiszen a 2.5. Lemma miatt a pszeudo-polinom foka éppen v multiplicitása, ami az $r_w([t_w^-, t_w^+])$ szakaszon levő fokális vektorok összege multiplicitással. Így a 2.5. Megjegyzés miatt, valamilyen alkalmas θ_w paraméterre a $t^k + t^{k-1}\phi_{k-1}(\theta_w) + \cdots + \phi_0(\theta_w)$ közönséges polinom (valós) gyökei adják meg a fokális vektorokat multiplicitással. Mivel ennek a polinomnak legfeljebb k valós gyöke lehet multiplicitással, és $\overline{\mu}(v) = k$ miatt k valós gyöknek is kell lennie, ezért minden gyök valós.

Másrészről azonban, ha a v pont β-típusú, akkor a

$$k - 2 = \overline{\mu}(v) = \sum_{\alpha} l_i + \sum_{\beta}(l_j - 2)$$

egyenőség teljesül, ahol külön megy az összegzés az α-, illetve a β-típusú fokális vektorokra. A $\det\Delta$ függvény gyökeit (a fokális vektorokat) multiplicitással együtt leíró pszeudó-polinom alakja miatt azonban a

$$\sum_{\alpha} l_i + \sum_{\beta} l_j \leq k$$

egyenlőtlenségnek is teljesülnie kell hasonló indokok alapján, mint az előbb. Az utóbbi két kiemelt egyenlőtlenség miatt, így vagy nincs β-típusú fokális pont az $r_w([t_w^-, t_w^+])$ szakaszon, vagy legfeljebb egy lehet. □

Vegyük észre, hogy egy α-típusú pontnál az $(R2)$ tulajdonságnak teljesülnie kell. Ez azért van így, mivel az α-típusúság definíciója miatt a $\mathcal{V}_t(P, c_v)$ altér tartalmaz időszerű vektort, ezért a 2.3. Lemma miatt az $(R2)$ feltételnek teljesülnie kell.

2.9 Definíció. *Jelölje $F^{PR}(P)$ azon $v \in F(P)$ fokális vektorok halmazát a $N(P)$ normális nyalábban, melyekre létezik olyan $U_v \subset N(P)$ környezete a v vektornak, amelyre minden $w \in U_v$ esetén az $r_w \cap U_v$ szakaszon létezik egy olyan fokális vektor, amelynek multiplicitása megegyezik a v vektor multiplicitásával. Az ilyen vektorokat **pre-reguláris vektor**oknak nevezzük. A nem pre-reguláris vektorokat **pre-szinguláris**nak nevezzük. Legyen továbbá $F^{PS}(P) = F(P) - F^{PR}(P)$ a pre-szinguláris vektorok halmaza.*

Nyilvánvaló, hogy a fenti definíció szövege lényegesen eltér a Warner által adottól, hiszen itt a v vektor alkalmasan kicsiny környezetében egy az r_v sugárhoz közeli r_w sugáron több fokális vektor is megengedett, de ezek egyikének ugyanakkora a multiplicitása, mint a v vektornak. Az a kérdés, hogy a fenti definíció tartalmilag is általánosabb-e, mint a Warner-féle, nyitottnak látszik.

A **továbbiakban**, mivel a Maslov indexet szeretnénk használni. **mindig feltesszük, hogy az** $(R2)$ **tulajdonság érvényes**, azaz minden állítás kimondásába beleértjük, hogy ez a feltétel teljesül.

2.8 Lemma. *Az $F_\alpha^{PS}(P)$ halmaz sehol sem sűrű a fokális vektorok $F(P)$ halmazában, ahol $F_\alpha^{PS}(P)$ az α-típusú vektorok részhalmaza a preszinguláris vektorok $F^{PS}(P)$ halmazában. Továbbá $F_\alpha^{PS}(P)$ nyílt része az $F^{PS}(P)$ halmaznak.*

Bizonyítás. Mivel az α-típusú vektorok halmaza nyílt $\widetilde{N(P)}$-ben, így a lemma második része következik. Elég megmutatnunk, hogy $intF_\alpha^{PS}(P) = \emptyset$ teljesül, ahol a belső pontokat a fokális vektorok $F(P)$ halmazától örökölt toplógiára nézve vesszük (azaz mint $F_\alpha^{PS}(P) \subset F(P)$). Emlékezzünk, hogy $\mathrm{sgn}(<,> |_{\mathcal{D}_t(P,c_v)})$ megegyezik az $r_v(t)$ vektor multiplicitásával, ha ez α-típusú vektor. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $v \in intF_\alpha^{PS}(P)$ vektor. Vegyük ennek egy olyan U_v jó környezetét, melyre $U_v \cap F(P) \subset intF_\alpha^{PS}(P)$ teljesül, azaz U_v csak α-típusú pre-szinguláris fokális vektorokat tartalmaz. A definíciók miatt van egy olyan $r_w(t)$, $w \in U_v$ sugár, amelynek legalább két fokális vektora van az U_v környezetbe eső részén. Ellenkező esetben minden $r_w \cap U_v$ részen pontosan egy fokális vektor lenne, ami a Maslov-index folytonossága miatt, és mivel U_v csak α-típusú vektorokat tartalmaz, ugyanolyan multiplicitású lenne, mint a v fokális vektor, azaz $v \in F^R(P)$ is igaz lenne, ami $F^R(P) \subset F^{PR}(P)$ miatt ellentmond v választásának. Ezért van egy olyan, $r_v(t)$-hez tetszőlegesen közeli, $r_w(t)$ sugár, amelyre az $r_w \cap U_v$ részen legalább két α-típusú fokális vektor van. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy a v fokális vektor környezetében **felhasad** a fokális vektorok halmaza valamely $r_w(t)$ **sugár mentén**. A Maslov-index miatt mindegyik új fokális vektornak kisebb a multiplicitása, mint a v vektoré. Vegyük ezek közül az egyiket, ez is az $intF_\alpha^{PS}(P)$ halmazban van, így az előző érvelés alapján e fokális vektor környezetében is felhasad a fokális vektorok halmaza, valamilyen $r_w(t)$-hez tetszőlegesen közeli sugár mentén. Folytatva ezt az eljárást végül egy olyan fokális vektorhoz jutunk, amely az $intF_\alpha^{PS}(P)$ halmazban van és multiplicitása 1. Azonban könnyen látható, hogy ilyen fokális vektor nincs, azaz ellentmondásra jutottunk. Mivel egy 1 multiplicitású fokális vektor kis környezetében is legfeljebb 1 multiplicitású pontok lehetnek, ebből a Maslov index folytonossága miatt könnyen látható, hogy minden ilyen vektor $F^R(P)$ eleme, lásd a 2.11. Lemmát alább, ami ettől az eredménytől független. □

Ha be tudnánk bizonyítani, hogy $F_\beta^{PS}(P)$ sehol sem sűrű a fokális vektorok halmazában, ahol $F_\beta^{PS}(P)$ a β-típusú pre-szinguláris vektorok halmaza, akkor azt is bizonyítani tudnánk, hogy $F^{PS}(P)$ sehol sem sűrű a fokális vektorok halmazában. Azonban csak egy ennél gyengébb állítást fogunk belátni. Legyen $F_{\beta 2}^{PS}(P)$ azon $F_\beta^{PS}(P)$-beli vektorok halmaza, melyek multiplicitása 2. Ezek azok a vektorok, amelyek nem változtatják meg a Maslov-indexet, melyeket nem "lát" a Maslov-index, azaz a Maslov indexük 0.

2.9 Lemma. *$int(F_\beta^{PS}(P) - F_{\beta 2}^{PS}(P)) = \emptyset$, továbbá ha $v \in (F_\beta^{PS}(P) - intF_{\beta 2}^{PS}(P))$, akkor $v \notin intF_\beta^{PS}(P)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekte, hogy $v \in int(F_\beta^{PS}(P) - F_{\beta 2}^{PS}(P))$. Ekkor létezik egy olyan U_v jó környezet, melyre

$$(U_v \cap F(P)) \subset int(F_\beta^{PS}(P) - F_{\beta 2}^{PS}(P))$$

teljesül, azaz U_v csak β-típusú nem 2 multiplicitású szinguláris vektorokat tartalmaz. Így $U_v \cap F_\alpha^{PS}(P) = \emptyset$ és $U_v \cap F^{PR}(P) = \emptyset$ teljesül. A v vektor multiplicitása pedig > 2, hiszen minden 1 multiplicitású vektor az $F^{PR}(P)$ halmazban van (lásd a 2.11. Lemmát alább, ami ettől az eredménytől független.) Mivel az $U_v \cap F(P)$ halmaz csak pre-szinguláris vektorokat tartalmaz, így az $r_v(t)$ sugárhoz tetszőlegesen közel találunk olyan $r_w(t)$ sugarat, amelyen az U_v környezetbe eső részen, felhasad a fokális vektorok halmaza, különben a

Maslov-index folytonossága miatt, és mivel U_v csak β-típusú vektorokat tartalmaz $v \in F^R(P)$ is igaz lenne. A Maslov-index $\overline{\mu}(v)$ ugrását vizsgálva a β-típusú v vektornál, és a folytonosságot használva, könnyen látható, hogy van egy olyan p_1 fokális vektor is az $r_w \cap U_v$ szakaszon, amely multiplicitása kisebb mint a v vektoré, és ez a multiplicitás nem 2, mivel $U_v \cap F_{\beta 2}^{PS}(P) = \emptyset$. Ezt a gondolatmenetet ismételgetve l lépésben egy olyan $p_l \in U_v$ fokális vektorhoz jutnánk, amely multilicitása 1 kellene hogy legyen. Azonban mint láttuk egy ilyen vektor $F^{PR}(P)$ eleme lenne, ami ellentmondana U_v választásának.

A lemma második részének bizonyításához vegyünk egy $v \in (F_\beta^{PS}(P) - intF_{\beta 2}^{PS}(P))$ vektort. Ekkor vagy van v-hez tetszőlegesen közel egy α-típusú vektor, és ezzel a bizonyítás kész, vagy minden sugáron van egy β-típusú v-vel azonos multiplicitású vektor, és ekkor $v \in F_\beta^{PR}(P)$ és kész vagyunk, vagy van egy tetszőlegesen közeli sugáron egy β-típusú vektor, aminek a multiplicitása kisebb, mint a v vektoré, és nem 2. - Ez a Maslov-index folytonossága miatt van, mivel a $\beta 2$-típusú vektorok nem változtatják meg a Maslov-indexet, és $\overline{\mu}(v) \neq 0$. - E módszer iterálásával az egyre kisebb multiplicitású β-típusú, de nem $\beta 2$-típusú vektorokra, végül egy 1 multiplicitású vektorhoz jutnánk, ami $F^R(P)$ eleme lenne, lásd a 2.11. Lemmát alább, ami ettől az eredménytől független. □

Ha sikerülne megmutatni, hogy $intF_{\beta 2}^{PS}(P) = \emptyset$, akkor azt is bizonyítani tudnánk, hogy $intF^{PS}(P) = \emptyset$. E helyett azonban egy gyengébb állítást fogunk igazolni. Vegyünk fel az $(M, <,>)$ Lorentz-sokaságon egy $(<,>_R)$ Riemann metrikát. E Riemann-metrika minden, az eredeti Lorentz-metrika szerinti, N_xP, $x \in P$ normális téren, mint vektortéren ad egy pozitív definit formát. Jelölje $S_x^P(1)$ az ezen pozitív definit forma szerinti egységgömbjét az N_xP térnek, továbbá legyen

$$S^P(1) = \cup \left\{ S_x^P(1) | x \in P \right\},$$

mely az $N(P)$ normális nyalábban a null-szelés egy környezetének peremét adja, egy gömbnyalábot, egy 1-kodimenziós hiperfelületet, amit minden $r_v(t)$, $v \in N(P)$ sugár pontosan egy pontban metsz.

2.10 Lemma. *Minden $v \in intF_{\beta 2}^{PS}(P)$ vektornak van egy olyan U_v jó környezete, amelyre még az alábbiak is teljesülnek:*
Az $r_w \cap U_v$, $w \in U_v$ sugár szakaszon pontosan egy fokális vektor van, ami természetesen $F_{\beta 2}^{PS}(P)$ eleme, továbbá a

$$K = \{x \in S^P(1) \,|\, \textit{létezik fokális vektor az } r_x \cap U_v \textit{ halmazban}\}$$

halmaz sehol sem sűrű az $S^P(1)$ halmazban, és az összes U_v-beli fokális vektor egy sima hiperfelületen helyezkedik el, melyen ezek egy sehol sem sűrű részhalmazt alkotnak.

Bizonyítás. Legyen $\widetilde{U_v}$ a v vektor egy olyan kicsiny jó környezete, melyre $\widetilde{U_v} \cap F(P) = \widetilde{U_v} \cap intF_{\beta 2}^{PS}(P)$, azaz minden $\widetilde{U_v}$-beli fokális vektor β-típusú, 2 multiplicitású és pre-szinguláris. Warner [W] dolgozatában szereplő Theorem 3.1 bizonyítása alapján képezhetjük a $T\varepsilon : T\widetilde{N(P)} \to TM$ érintőleképezés $r_v(t)$ sugár menti sajátértékeinek k-adik elemi szimmetrikus polinomját $\Delta_k(t)$-t a $t = 1$ pont egy kis környezetében egy Whitehead determinánshoz tartozó bázismezőkre vonatkoztatva. Azaz az $r_v(1)$ fokális vektor egy kis környezetében az $r_v(t)$ sugár mentén vegyünk, egy Whitehead determinánshoz tartozó, bázismezőket, és ezek segítségével felírjuk a $T\varepsilon$ leképezést, mint azt korábban tettük a Whitehead determináns definiálásánál, és így $\Delta_k(t)$ az $r_v(t)$ mentén az $r_v(1)$ vektor egy kis környezetében értelmezhető. *Ez a függvény függ a bázismezők választásától!* Az $(R2)$ feltétel miatt egy Whitehead bázisban a $\Delta(t)$ "mátrixa" diagonális, lásd a 2.1. Megjegyzést. Így ha a $\Delta(r_v(t))$ diagonálisában szereplő függvények rendre $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, melyek a sajátértékek, akkor:

$$\Delta_k(t) = \sum_{\sigma \in S(n)} f_{\sigma(1)}(t) \cdot \cdots \cdot f_{\sigma(n-k)}(t), \tag{1}$$

ahol a különböző permutációk szorzatának összegét vettük. Így azt kaptuk, hogy a v vektornál $\Delta_1(1) = 0$, de $\Delta_1'(1) \neq 0$, hiszen a két 0 sajátértékhez tartozó $f_1(t)$, $f_2(t)$ függvények tűnnek csak el a $t = 0$ pontban, és a fenti összegzés minden egyes tagjában a két függvény közül legalább az egyik szerepel, továbbá $f_1'(1) > 0$, $f_2'(1) > 0$ (lásd a 2.1. Lemmát), amiből $\Delta_1'(1) = (f_1'(1) + f_2'(1)) f_3(1) \cdot \ldots \cdot f_n(1) \neq 0$ (itt igazából $f_3(1) = \cdots = f_n(1) = 1$ a 2.1. Megjegyzésből.) A Δ_1 függvény a közeli sugarakon is értelmezhető a v vektor egy kis környezetében, a fenti bázismezőkben. Egy w fokális vektoroknál a $\Delta_1(w) = 0$ egyenlőségnek teljesülnie kell, mivel $v \in intF_{\beta 2}^{PS}(P)$ miatt minden közeli w fokális vektor másodrendű, azaz $\dim(\ker T_w\varepsilon) = 2$, így pontosan két 0 sajátértéke van $T_w\varepsilon$-nak. Ezért egy v-hez közeli w fokális vektornál a kiterjesztett $\Delta_1(w)$ függvény eltűnik. Az elöbb mondottak alapján azonban látható, hogy minden $r_v(t)$-hez közeli $r_{\widetilde{v}}(t)$ sugáron, ahol a $\widetilde{v}$ elég közel van v-hez, a v vektor közelében legfeljebb egy fokális vektor lehet, hiszen $r_v(t)$ mentén $\Delta_1(1) = 0$, $\Delta_1'(1) \neq 0$ teljesül, így egy közeli $r_{\widetilde{v}}(t)$ sugáron a sima $t \mapsto \Delta_1(r_{\widetilde{v}}(t))$ függvénynek pontosan egy gyöke van. Azaz a $\Delta_1 \equiv 0$ a v pont közelében egy sima H hiperfelületet határoz meg, ami transzverzális az $r_v(r)$ sugárra. Ezen hiperfelület nem minden pontja fokális vektor! Hiszen Δ_1 eltűnhet olyan pontban is, ami nem fokális vektor. Ha a $\Delta_1 \equiv 0$ által meghatározott H hiperfelületet a v vektor egy alkalmasan kicsiny ($\widetilde{U_v}$-ben levő) U_v jó környezetében tekintjük csak, akkor $\widetilde{U_v} \cap F(P) = \widetilde{U_v} \cap intF_{\beta 2}^{PS}(P)$ miatt $U_v \cap F(P) = U_v \cap intF_{\beta 2}^{PS}(P)$ is teljesül, azaz U_v-ben csak β-típusú, pre-szinguláris, 2 multiplicitású fokális vektorok vannak. Így $(H \cap U_v) \cap intF_{\beta 2}^{PS}(P) = \emptyset$ kell legyen, hiszen ha $w \in (H \cap U_v) \cap intF_{\beta 2}^{PS}(P)$, akkor $w \in F^{PR}(P)$ is következne a pre-regularitás definíciója szerint, sőt igazából $w \in F^R(P)$ is következne, ami ellentmond $(H \cap U_v) \subset U_v$ miatt $U_v \cap F(P) = U_v \cap intF_{\beta 2}^{PS}(P)$-nek. Azaz $(H \cap U_v) \cap intF_{\beta 2}^{PS}(P) = \emptyset$. Mivel $H \cap U_v$ és a lemma kimondásában szereplő K egymással diffeomorf, a sugarak menti projekcióra, így a lemmát bizonyítottuk K-ra. □

Az alábbi lemma Riemann-esetben triviális, és implicite megtalálható Warner [W] cikkében a 3.1-es Tétel bizonyításában is.

2.11 Lemma. *Ha egy $v \in F(P)$ fokális vektor multiplicitása* 1, *akkor $v \in F^R(P)$, azaz v reguláris fokális vektor.*

Bizonyítás. Vegyük a v fokális vektor egy alkalmasan kicsiny U_v jó környezetében, egy Whitehead determinánshoz tartozó bázismezőkben, a $T\varepsilon$ leképezés sajátértékeinek a szorzatát, melyet jelöljön Δ_0. Könnyen látható, hogy $\Delta_0(w) = \det T_w\varepsilon = 0$ akkor, és csak akkor, ha w egy fokális vektor. Mivel az $r_v(t)$ sugár mentén, $\Delta_0(r_v(1)) = 0$, $\Delta_0'(r_v(1)) \neq 0$ teljesül (hasonlóan az előző bizonyításbeli Δ_1 esetéhez), így $\Delta_0 \equiv 0$ egy hiperfelületet határoz meg, ami transzverzális az $r_v(t)$ sugárra. Ezen hiperfelületen helyezkedik el az összes fokális vektor v közelében mint mondtuk, így $v \in F^R(P)$ következik. □

2.2 Állítás. $F^{PR}(P) = F^R(P)$.

Mint korábban említettük az $(R2)$ **feltétel teljesül**ését beleértjük az állításba.

Bizonyítás. Legyen $v \in F^{PR}(P)$ egy fokális vektort, és mint az elöbbiekben, készítsük el a Δ Whitehead determináns sajátértékeinek $(k-1)$-edik elemi szimmetrikus polinomját, a Δ_{k-1} függvényt, ahol k a v vektor multiplicitása. Ekkor van egy olyan alkalmasan kicsiny V_v jó környezete a v vektornak, ahol egyrészt értelmezhető a Δ_{k-1} függvény, másrészt amilyen a pre-regularitás definíciójában szerepelt. Ekkor létezik egy $K \stackrel{def}{=} \{x \in V_v \,|\, \Delta_{k-1}(x) = 0\}$ által adott beágyazott részsokaság, pontosabban hiperfelület, amely minden (a V_v környezetet metsző) sugarat pontosan egy pontban metsz, hiszen az előzőekhez hasonlóan $\Delta_{k-1}(v) = 0$, de $\Delta_{k-1}'(v) \neq 0$ ahol a deriválást az $r_v(t)$ sugár mentén értjük. Ekkor minden $w \in K$ pont fokális vektor, amely multiplicitása k. Ez Δ_{k-1} segítségével látható hasonlóan, mint az előzőekben, mivel minden $r_v(t)$-hez közeli sugáron, mely metszi a V_v környezetet, van k multiplicitású fokális vektor e környezetében, $v \in F^{PR}(P)$ miatt, és minden $\geq k$ rendű fokális vektornál a Δ_{k-1} eltűnik, továbbá minden közeli sugáron v környezetében egy helyen tűnik csak el Δ_{k-1}, mégpedig ahol K elmetszi ezt a közeli sugarat. Tehát K minden pontja k rendű fokális vektor.

Mivel a $T\varepsilon$ leképezés sima, így a K sima hiperfelület minden w pontjában $\dim(\ker T_w\varepsilon) = k$ miatt a $\ker(T_w\varepsilon)$ altér is simán függ w-től. Ezekben az alterekben ki tudunk választani egy w-től simán függő $\widetilde{X_1}(w), \ldots, \widetilde{X_k}(w) \in T_wN(P)$ bázist. Legyenek továbbá $\widetilde{X_{k+1}}(w), \ldots, \widetilde{X_n}(w) \in T_wN(P)$ olyan sima vektormezők a K hiperfelületen, melyre $\widetilde{X_1}(w), \ldots, \widetilde{X_n}(w)$ egy (a w paramétertől simán függő) bázisát adják $T_wN(P)$-nek minden $w \in K$ esetén. Terjesszük ki ezeket a 2.4. Lemma alapján az $r_w(t)$ sugarak mentén az $X^1(w,t), \ldots, X^n(w,t)$ vektormezőkké, melyek simán függnek a $w \in K$, $t > 0$ paraméterektől. Ekkor az alábbiak teljesülnek:

(i) $X^1(w,t), \ldots, X^n(w,t)$ a $T_{r_w(t)}N(P)$ egy bázisa minden $w \in K$, $t > 0$ esetén;

(ii) $T\varepsilon(X^i(w,t))$ egy P-Jacobi-mező a $c_w(t)$ geodetikus mentén minden $i = 1, \ldots, n$ esetén;

(iii) $X^1(w,1), \ldots, X^k(w,1)$ a $\ker(T\varepsilon_w)$ egy bázisát adják minden $w \in K$ esetén.

Használva a 2.1. Lemmát kapjuk a $T\varepsilon(X^i(w,t)) = f^i(w,t) \cdot E^i(w,t)$, $i = 1, \ldots, k$ felbontásokat, ahol az $f^i(w,t)$ függvények simák mind a két paraméterben, továbbá az $E^i(w,t)$ vektormezők sehol sem eltűnőek és folytonosan függnek a paraméterektől. Lévén, hogy az $(E^1(w,1), \ldots, E^k(w,1))$ vektorok a $\mathcal{D}_1(P,c_w)$ tér egy bázisát adják és ez utóbbi k-dimenziós tér ortokomplementuma a $(T\varepsilon(X^{k+1}(w,1), \ldots, T\varepsilon(X^n(w,1)))$ vektorok által feszített $\mathcal{V}_1(P,c_w)$ térnek, könnyen látható, hogy

$$(E^1(w,t), \ldots, E^k(w,t), T\varepsilon(X^{k+1}(w,t)), \ldots, T\varepsilon(X^n(w,t)))$$

a $T_{c_w(t)}M$ érintőtér egy bázisát adják minden a $(v,1)$ pont egy alkalmasan kicsiny környezetében lévő minden (w,t) pontra. Mivel $f^i(w,1) = 0$, de $\frac{\partial}{\partial t}f^i(w,1) \neq 0$ ezért a paraméterektől való sima függés miatt létezik egy olyan $\epsilon > 0$, amelyre $f^i(w,t) \neq 0$, minden $w \in K$, $t \in [1-\epsilon, 1+\epsilon] - \{1\}$ esetén. Azaz a $(T\varepsilon(X^1(w,t)), \ldots, T\varepsilon(X^n(w,t)))$ P-Jacobi-mezők a $T_{c_w(1)}M$ érintőtér egy bázisát adják minden $w \in K$, $t \in [1-\epsilon, 1+\epsilon] - \{1\}$ esetén. Így a v fokális vektor környezetében csak a K hipersíkon lehetnek fokális vektorok. Mivel K minden pontja k multiplicitású fokális vektor, így $v \in F^R(P)$ következik a reguláris fokális vektorok definíciója miatt. □

2.1 Következmény. $F^{PS}(P) = F^{S}(P)$

2.12 Lemma. *Minden $v \in F(P) - intF^{S}_{\beta 2}(P)$ vektornak minden U_v környezetében létezik reguláris fokális vektor, azaz $F^{R}(P) \cap U_v \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Ha a $v \in F(P) - intF^{S}_{\beta 2}(P)$ vektorra a $v \in F^{PR}(P) = F^{R}(P)$ is teljesül nincs mit bizonyítanunk. Ha $v \in F^{S}_{\alpha}(P)$, akkor a 2.3. Megjegyzés és a 2.8. Lemma alapján v minden környezetében van $w \in F_{\alpha}(P) - F^{PS}(P) = F^{PR}_{\alpha}(P) = F^{R}_{\alpha}(P)$ halmazbeli vektor. Ha $v \notin F^{S}_{\alpha}(P)$, akkor $v \in F^{S}_{\beta} - intF^{S}_{\beta 2}(P)$, így a 2.9. Lemma miatt következik, hogy v minden környezetében van $F^{R}(P)$ vagy $F^{S}_{\alpha}(P)$ halmazbeli vektor. Azonban egy ilyen vektor akármilyen környezetében létezik reguláris fokális vektor, mint azt már az előbb láttuk. □

2.4 Tétel. *Egy $v \in F(P) - intF^{S}_{\beta 2}(P)$ vektor semmilyen környezetében sem injektív az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ leképezés, továbbá az $F^{R}(P)$ halmaz sűrű az $F(P) - intF^{S}_{\beta 2}(P)$ halmazban.*

Bizonyítás. Az előző 2.12. Lemma miatt egy $v \in F(P) - intF^{S}_{\beta 2}(P)$ vektorhoz tetszőlegesen közel van reguláris fokális vektor, és egy $F^{R}(P)$-beli vektor egy alkalmasan kicsiny környezetében teljesülnek az $(R2)$, $(R3)$ regularitási tulajdonságok. Így a mósosított Warner eredményeket, a 2.3. Tételt, alkalmazva bizonyítottuk a tételt. □

A bizonyításban igazából egy, a v fokális vektorhoz tetszőlegesen közeli, olyan $w \in F^{R}(P)$ fokális vektort is tudnánk találni, amelyre az $r_w([0,1])$ sugár szakasz egy környezetében teljesülnek a regularitási feltételek. Emlékeztetünk arra, hogy a 2.10. Lemma alapjn még az alábbiak is teljesülnek:

Az $intF^{S}_{\beta 2}(P)$ halmaz pontjai egy $N(P)$-beli sima, nem feltétlen összefüggő, H hiperfelületen helyezkednek el, és $intF^{S}_{\beta 2}(P)$ belseje, a H-tól örökölt topológiára véve, üres.

Ha r_v a $N(P)$ egy olyan sugara, amely időszerű, azaz ennek képe c_v időszerű geodetikus, akkor e mentén értelmezhető a Morse-index. Ez azért van így, mivel egy időszerű geodetikus mentén az $(R2)$ regularitási feltétel mindig teljesül, hiszen minden $c_v(t_0)$ pontban a $c'_v(t_0) \in \mathcal{V}_{t_0}(P, c_v)$ vektor időszerű, és a $c'_v(t_0)$-ra merőleges altér térszerű, és ennek egy altere a

$\mathcal{D}_{t_0}(P, c_v)$ tér is, a 2.3. Lemmában szereplő ortogonalitás miatt. Így a 2.3. Lemma miatt az $(R2)$ feltétel teljesül minden $c_v(t_0)$ pontban. Ennélfogva itt a Maslov-index is értelmezhező, és ennek értéke egyenlő a Morse-indexével. Továbbá az is könnyen látható, hogy egy időszerű geodetikus mentén nincsenek β-típusú szinguláris vektorok, hiszen $\mathcal{D}_{t_0}(P, c_v)$ térszerű ami a β-típus definíciójával együtt mutatja, hogy $c_v(t_0)$ nem lehet β-típusú. Jelölje

$$I(N(P)) = \{v \in N_x P \,|\, x \in P, < v, v >< 0\}$$

az időszerű vektorok halmazát a normális nyalábban. Az eddigiek alapján **az $I(N(P))$ halmazban minden fokális vektorra igaz a fenti tétel**, akkor is ha esetleg $(R2)$ valahol másutt nem telejesül $N(P)$-ben. Sőt a fényszerű geodetikusok mentén is értelmezhető a Morse-index (lásd Beem-Ehrlich [B-E]), mely rendelkezik a következő tulajdonsággal. Ha $v_i \to w$, $v_i,\ w \in N(P)$, $i = 1, \ldots, \infty$ nem fokális vektorok, ahol $r_{v_i}(t)$ időszerű és $r_w(t)$ fényszerű sugarak, akkor a $c_{v_i}(1)$ pontok Morse-indexei is tartanak a $c_w(1)$ pont Morse-indexéhez. Lévén, hogy a Morse-index ezen értelmezései is (a klasszikus esethez hasonlóan) a fokális pontokat számolják multilpicitással, így ha w (egy fényszerű) fokális vektor, akkor van hozzá tetszőlegesen közel egy időszerű fokális vektor is, amelynek semmilyen környezetében sem $1:1$ az $\varepsilon : \widetilde{N(P)} \to M$ leképezés. Ezért ha $J(N(P)) = \{v \in N_x P \,|\, x \in P, < v, v > \leq 0\}$ jelöli a kauzális vektorok halmazát a normális nyalábban, akkor azt mondhatjuk, hogy **a $J(P)$ halmazban minden fokális vektorra igaz a fenti tétel.** Ennek bizonyítása megtalálható még K. Rosquitnál is [R].

A Riemann-, és a Lorentz-eset között azonban eltérések is mutatkoznak, mint azt egy alábbi példa is mutatni fogja. Legyen adott egy $(M <,>)$ Riemann-sokaság, és ennek egy $P \subset M$ szemi-Riemann-részsokasága. Ekkor egy $w \in \widetilde{N(P)} - F(P)$ vektornak a Morse-indexe jelentse a $c_w([0,1])$ geodetikus szakasz Morse-indexét, ami megegyezik e geodetikus szakaszon a fokális pontok számával multiplicitással számolva. A Morse-index folytonossága miatt, ha $w \in \widetilde{N(P)} - F(P)$ nem fokális vektor, akkor egy kis környezetében a Morse-index konstans, azaz folytonos. Ezért ha $v \in F(P)$ egy fokális vektor, akkor az $r_v(t)$ sugárhoz közeli minden más sugáron is van fokális vektor a v vektorhoz közel, hiszen létezik olyan $\epsilon > 0$, hogy az $r_v([1-\epsilon, 1+\epsilon])$ szakaszon csak a $v = r_v(1)$ fokális vektor. Így ha w vektor a v egy alkalmasan kicsiny környezetében van, akkor az $r_w(1-\epsilon)$, $r_w(1+\epsilon)$ pontok sem fokálisak, és Morse-indexeik különbsége épp a v vektor multiplicitásával egyenlő. Ami azt mutatja, hogy van fokális vektor az $r_w([1-\epsilon, 1+\epsilon])$ szakaszon. Ezt a jelenséget úgy is nevezhetnénk, hogy a *fokális vektorok stabilak a sugarak deformálására nézve*, ahol a deformálás más sugarakon át történik. Lorentz-esetben azonban ez a stabilitás nem igaz még analitikus esetben sem. Egy ezt tanusító példa megkonstruálásához szükségünk lesz néhány állításra.

2.10 Definíció. *Legyenek (R, g_R), (M, g_M) szemi-Riemann-sokaságok, és $\phi : R \times M \to \mathbb{R}$ egy sima pozitív függvény. Vegyük az $R \times M$ sokaságon a következő szemi-Riemann metrikát, $g|_{(r,m)} \overset{def}{=} \phi(r,m) \cdot g_R + g_M$, azaz ha $X, Y \in T_{(r,m)}(R \times M)$, és $X = X_R + X_M$, $Y = Y_R + Y_M$ a $T_{(r,m)}(R \times M) = T_r R \oplus T_m M$ szerinti felbontása a vektoroknak, akkor $g(X,Y) = \phi^2(r,m) \cdot g(X_R, Y_R) + g(X_M, Y_M)$. Az így képzett*

$$R \times_\phi M$$

*szemi-Riemann-sokaságot **általánosított görbítettszorzat**nak nevezzük.*

Ez valóban általánosítása a görbítettszorzat definíciójának, hiszen, ha a ϕ függvény nem függ R pontjaitól, csak M-től, akkor a görbítettszorzat definícióját kapjuk vissza. A görbítettszorzatra ismert, hogy az R sokaság egy γ geodetikusát véve, egy tetszőleges $R \times \{m\}$ fibrumban, azaz tekintjük a $(\gamma(t), m)$ görbét, akkor a görbítettszorzatnak egy geodetikusát kapjuk. Ez azon múlik, hogy az $R \times_\phi \{m\}$ szemi-Riemann-sokaságnak is geodetikusa lesz a $(\gamma(t), m)$, hiszen itt R metrikáját csak egy konstanssal szoroztuk meg, így a geodetikusok nem változnak. Ez az állítás az általánosított görbítettszorzatra is igaz az alábbi formában.

2.13 Lemma. *Legyen $R \times_\phi M$ egy általánosított görbítettszorzat, és $(\gamma(t), x)$ az $R \times_\phi \{x\}$, $x \in M$ szemi-Riemann-részsokaság egy geodetikusa, azaz, az $(R, \phi^2(.,x) \cdot g_R)$ szemi-Riemann-sokaság geodetikusa. Ekkor $(\gamma(t), x)$ az általánosított görbítettszorzatnak is geodetikusa. Vagyis, az $R \times \{x\} \subset R \times M$ részsokaság totálgeodetikus.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $(\gamma(t), x)$ egy nem fényszerű geodetikus.

Jelölje a $(\gamma(t), x)$ geodetikust $\gamma(t)$, ha az $R \times_\phi \{x\}$ részsokaság részeként gondolunk rá, és $\widehat{\gamma(t)}$, ha az $R \times_\phi M$ általánosított görbített szorzat részeként tekintjük. Elég $\widehat{\gamma(t)}$ minden elegendően kicsiny szakaszáról belátni, hogy az geodetikus, ezért feltehető, hogy egy ilyen kis nem önmetsző darabot vizsgálunk. Legyenek $E_1(t), \ldots, E_n(t)$ párhuzamos vektormezők a $\gamma\,(t)$ mentén az $R \times_\phi \{x\}$ részsokaságban úgy, hogy $E_1(t) = \gamma'(t)$ továbbá, hogy az $E_1(t), \ldots, E_n(t)$ a $T_{\gamma(t)}(R \times_\phi \{x\}) \cong T_{\gamma(t)} R$ egy ortonormált bázisát adják, ugyanis $\phi\,(\gamma\,(t)\,, x) \cdot g_R(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \pm 1$ feltehető. Legyen $F_1, \ldots, F_m$ a $T_x M$ egy ortonormált bázisa. Mivel a $T_{(\gamma(t),x)}\,(R \times_\phi M)$ érintőtér kanonikus módon bomlik fel a $T_{\gamma(t)} R \oplus T_x M$ direktösszegre, így $F_i \in T_x M \subset T_{(\gamma(t),x)}\,(R \times_\phi M)$ miatt tekinthetjük az $F_i\,(t) \,:\, t \mapsto F_i\,(t) = F_i \in T_{(\gamma(t),x)}\,(R \times_\phi M)$ vektormezőket. Így $E_1(t), \ldots, E_n(t), F_1(t), \ldots, F_m(t)$ a $T_{(\gamma(t),x)}\,(R \times M)$ egy ortonormált bázisát adják.

A Levi-Cività kovariáns deriválást használva azt kell megmutatnunk, hogy $g(\nabla_{\widehat{\gamma(t)}} \widehat{\gamma(t)}, E_i(t)) \equiv 0$ és $g(\nabla_{\widehat{\gamma(t)}} \widehat{\gamma(t)}, F_j(t)) \equiv 0$ teljesülnek minden $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ esetén, ahol g az $R \times_\phi M$ metrikus tenzora és ∇ az ennek megfelelő Levi-Cività-féle kovariáns deriválást jelöli. Terjesszük ki az $E_1(t), \ldots, E_n(t), F_1(t), \ldots, F_m(t)$ vektormezőket a $\widehat{\gamma(t)}$ egy kis környezetében a következőképpen: kiterjesztjük az $E_1, \ldots, E_n$ mezőket a $\gamma(t)$ egy környezetében az $R \times_\phi \{x\}$ részsokaságban $\widetilde{E_1}, \ldots, \widetilde{E_n}$ vektormezőkké úgy, hogy $\phi^2\,(r, x) \cdot g_R(\widetilde{E_1}(r, x), \widetilde{E_1}(r, x)) = konst$ teljesüljön, ahol az $(r, x) \in R \times \{x\}$ pont a $\widehat{\gamma(t)}$ vizsgált darabjának megfelelően kicsiny környezetének eleme, és az F_j vektormezőket M-ben az x pont egy U környezetében az $\widetilde{F_j}$ vektormezőkké. Minden $R \times \{\widetilde{x}\}$, $\widetilde{x} \in U$ fibrumon az $\widetilde{E_i}$ mezőket, és minden $\gamma(t_0) \times U$ fibrumon az $\widetilde{F_j}$ mezőket véve $\widehat{\gamma\,(t)}$-nak egy $R \times M$-beli környezetében kapunk bázist adó mezőket, ami a $\gamma\,(t)$ menti $E_1(t), \ldots, E_n(t), F_1(t), \ldots, F_m(t)$ bázisnak a kiterjesztése (azt is mondhatnánk, hogy az $\widetilde{E_i}$ és $\widetilde{F_j}$ vektormezők horizontális és verikális *lift*-eit vettük. A Koszul-fomulát használva:

$$g(\nabla_{\widehat{\gamma'(t)}} \widehat{\gamma'(t)}, E_i(t)) = \frac{1}{2}\{2\widehat{\gamma'(t)}(g(\widehat{\gamma'(t)}, E_i(t))) - E_i(t)(g(\widetilde{E_1}, \widetilde{E_1})) -$$

$$g(E_i(t), [\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_1]) + g(\widehat{\gamma'(t)}, [\widetilde{E}_1, \widetilde{E_i}]) + g(\widehat{\gamma'(t)}, [\widetilde{E_i}, \widetilde{E}_1])\} =$$

ahol kihasználtuk, hogy $\widetilde{E}_1|_{\widehat{\gamma(t)}} = \widehat{\gamma'(t)}$. Itt az utolsó két tag éppen egymás ellentettje, és a harmadik tagban $[\widetilde{E}_i, \widetilde{E}_j](\widehat{\gamma(t)}) \in T_{\gamma(t)\times\{x\}}R \times \{x\}$, továbbá a $g(\widetilde{E_1}(r,x), \widetilde{E_1}(r,x)) = \phi^2(r,x) \cdot g_R(\widetilde{E_1}(r,x), \widetilde{E_1}(r,x)) \equiv konst$ miatt a második tag eltűnik ezért:

$$= \frac{1}{2}\{2\gamma'(t)(\phi^2(\gamma'(t),x)\cdot g_R(\gamma(t),E_i(t))) - \phi^2(\gamma(t),x)\cdot g_R(E_i(t),[\gamma'(t),\gamma'(t)])\} =$$

$$(\phi^2(\gamma(t),x)\cdot g_R)(\nabla^{R\times_\phi\{x\}}_{\gamma'(t)}\gamma'(t), E_i(t)) = 0,$$

ahol $\nabla^{R\times_\phi\{x\}}_{\gamma'(t)}\gamma'(t)$ az $R\times_\phi\{x\}$ itt ismét kihasználtuk, hogy az utolsó sor kifejtésekor a Koszul-formulában a második tag eltűnik és, hogy a két utolsó tag összege 0. A Koszul-formulából adódik, hogy:

$$g(\nabla_{\widehat{\gamma'(t)}}\widehat{\gamma'(t)}, \widetilde{F}_i(t)) = \frac{1}{2}\{2\gamma'(t)(g(\widehat{\gamma'(t)}, \widetilde{F}_i(t))) - F_i(t)(g(\widetilde{E_1}, \widetilde{E_1})) -$$

$$g(F_i(t), [\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_1]) + g(\widehat{\gamma'(t)}, [\widetilde{E}_1, \widetilde{F}_i]) + g(\widehat{\gamma'(t)}, [\widetilde{F}_i, \widetilde{E}_1])\} = 0,$$

ahol kihasználjuk, hogy $T_{(r,x)}R\times\{x\}$ ortogonális $T_{(r,x)}\{r\}\times M$-re a metrika szerint, hogy $\left[\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_1\right]\widehat{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)\times\{x\}}R\times\{x\}$, továbbá, hogy az $\widetilde{E}_r$ vektormezőre teljesül a $g(\widetilde{E_1}(r,x), \widetilde{E_1}(r,x)) = \phi^2(r,x)\cdot g_R(\widetilde{E_1}(r,x), \widetilde{E_1}(r,x)) \equiv$ *konst* egyenlőség. E két eredményt összerakva kapjuk, hogy $\nabla_{\widehat{\gamma'(t)}}\widehat{\gamma'(t)} = 0$, azaz $\widehat{\gamma(t)}$ geodetikus.

Folytonossági megfontolások alapján adódik, hogy az állítás fényszerű geodetikusokra is igaz. □

Szükségünk lesz még néhány A. Helfertől [He] származó eredményre.

2.11 Definíció. *Legyen $\eta : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy nem elfajuló szimmetrikus bilineáris forma. Legyen továbbá $Q : I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris formák sima 1-paraméteres serege, ami definiálja a $\widetilde{Q} : I\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sima leképezést az*

$$\eta(\widetilde{Q}(t)(v), w) = \eta(v, \widetilde{Q}(t)(w)) = Q(t)(v,w)$$

egyenlettel. Ekkor a

$$\frac{d^2}{dt^2}X(t)=\widetilde{Q}(X(t)),\ t\in I$$

egyenletet ***Jacobi-típusú differenciálegyenletnek*** *hívjuk, ahol* $X(t)$: $I\to\mathbb{R}^n$ *egy sima görbe.*

Ha $(M,<,>)$ egy $(n+1)$-dimenziós szemi-Riemann-sokaság és $\gamma(t)$ egy nem fényszerű geodetikusa, akkor csak a geodetikusra végig ortogonális Jacobi-mezők tűnhetnek el több mint egy helyen, kivéve az azonosan eltűnő triviális Jacobi-mezőt. Azaz, ha a $\gamma(0)$ ponthoz konjugált pontokat szeretnénk vizsgálni, akkor elég a geodetikusra merőleges a $\gamma(0)$ pontban eltűnő Jacobi-mezőket vizsgálni. Legyen $e_1,\ldots,e_n\in T_{\gamma(0)}M$ a $\gamma'(0)$-ra merőleges altér egy ortonormált bázisa. Ezek párhuzamos kiterjesztései $\gamma\left(t\right)$ mentén olyan $E_1\left(t\right),\ldots,E_n\left(t\right)$ párhuzamos vektormezők, melyekre $E_i\left(0\right)=e_i$ minden $i=1,\ldots,n$ esetén. Így a geodetikusra merőleges vektormezők felírhatók az alábbi $\sum_i f_i(t)\cdot E_i(t)$ formában. Legyen $y_1,\ldots,y_n$ egy bázis $\mathbb{R}^n$-ben és tekintsük a következő $A_t:\mathbb{R}^n\to\gamma^{\perp}\left(t\right)\subset T_{\gamma(t)}M$ vektortér izomorfizmust, $A_t:\sum_i v_iy_i\mapsto\sum_i v_iE_i\left(t\right)$. Ekkor ha a $v,w\in\mathbb{R}^n$ vektorok $\sum_i v_iy_i,\sum_i w_iy_i$ alakban állnak elő, akkor definiáljuk a $Q\left(t\right)\left(v,w\right)$ szimmetrikus formát és a $\widetilde{Q}\left(t\right)\left(v,w\right)$ leképezést a következőképpen:

$$Q(t)(v,w)\overset{def}{=}<R(A_t\left(v\right),\gamma'(t))\gamma'(t),A_t\left(w\right)>$$

és $\widetilde{Q}(t)(v)\overset{def}{=}A_t^{-1}\left(R(A_t\left(v\right),\gamma'(t))\gamma'(t)\right)$. Legyen továbbá

$$\eta\left(v,w\right)\overset{def}{=}<A_0\left(v\right),A_0\left(w\right)>.$$

Ekkor a geodetikusra merőleges vektormezőkre a Jacobi-egyenlet az

$$X''(t)+\widetilde{Q}(t)(X(t))=0,\ X(t)=\sum_i f_i(t)\cdot y_i$$

alakot ölti az A_t izomorfizmus segítségével. Ez jól mutatja Helfer állításának egyik irányát:

Állítás (Helfer). (1) Minden nem fényszerű geodetikus menti Jacobi-egyenlethez található egy Jacobi-típusú differenciálegyenlet, amelyre létezik egy izomorfizmus a nem fényszerű geodetikusra merőleges Jacobi-mezők, megoldások, vektortere és a Jacobi-típusú differenciálegyenlet megoldásainak vektortere között úgy, hogy a megfeleltetett megoldások, melyek a geodetikus *menti t paramétertől függnek, egyszerre, azonos t_0 paraméterekre, tűnnek el vagy nem tűnnek el.*

(2) *Minden Jacobi-típusú differenciálegyenlethez létezik Jacobi-egyenlet (azaz egy szemi-Riemann-sokaság és abban egy nem fényszerű geodetikus mely a Jacobi-egyenletet adja), amelyre létezik egy izomorfizmus a Jacobi-típusú differenciálegyenlet megoldásainak vektortere és a nem fényszerű geodetikusra merőleges Jacobi-mezők, megoldások, vektortere között úgy, hogy a megfeleltetett megoldások, melyek a geodetikus menti t paramétertől függnek, egyszerre, azonos t_0 paraméterre, tűnnek el vagy nem tűnnek el.*

Az (1) $\Rightarrow$ (2) irány a fentiek alapján bizonyítható, míg a (2) $\Rightarrow$ (1) iránynál a következő a bizonyítás vázlata. Ha adott az $(\mathbb{R}^n, \eta, Q)$ hármassal egy Jacobi-típusú differenciálegyenlet, akkor vegyük az $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ vektorteret, és ezen egy szemi-euklideszi metrikát úgy, hogy az $\mathbb{R} \times \{0\}$ altéren a kanonikus euklideszi metrikát vesszük, és a $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ altéren pedig az η szemi-euklideszi metrikát, továbbá legyenek $\mathbb{R} \times \{0\}$ és $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ egymásra merőlegesek. A $B_x : T_x\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ kanonikus izomorfizmus segítségével a fenti szemi-euklideszi metrika kiterjeszthető egy szemi-Riemann metrikává, jelölje ezt g, az $\mathbb{R}^{n+1}$ téren, azaz $g\,(v, w) \overset{def}{=} \eta\,(B_x(v), B_x(w))$ minden v, $w \in T_x\mathbb{R}^{n+1}$ esetén. Legyen $\omega : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ egy sima függvény, amely az $\mathbb{R} \times \{0\}$ egyenes, geodetikus, mentén elsőrendben tűnik el, azaz ha $e_1, \ldots, e_{n+1}$ az $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tér egy ortonormált bázisa melyre e_{n+1} az $\mathbb{R} \times \{0\}$ alteret határozza meg, akkor $\frac{\partial}{\partial e_i}\omega\,(t \cdot e_1) = 0$ minden $i = 1, \ldots, n+1$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén. Vegyük az $\mathbb{R}^{n+1}$ téren az $e^{\omega(x)}g(v, w)$, $v, w \in T_x\mathbb{R}^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ metrikát. Ekkor az új metrika szerint is geodetikus lesz $e_{n+1} \cdot t$. Legyenek az $e^{\omega}g$ metrika szerinti párhuzamos vektormezők az $\mathrm{e}_{n+1}{\cdot}\mathrm{t}$ geodetikus mentén $E_1(t), \ldots, E_n(t)$, melyek az $e_1, \ldots, e_n$ kiterjesztései. Ezek végig ortogonálisak lesznek a geodetikusra. Az $e_{n+1}{\cdot}t$ geodetikus mentén a geodetikusra merőleges vektormezők körében a Jacobi-egyenletnek a következő:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot (\partial_{i(n+1)}\omega)(e_{n+1} \cdot t) \equiv 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}X(t) - \frac{1}{2}\Omega(t)X(t) \equiv 0 \tag{2}$$

egyenletek felelnek meg, ahol $\Omega_{ij}(t) = (\partial_{ij}\omega)(e_1 \cdot t) \cdot \eta(e_j, e_j)$, $1 \leq\, i, j \leq n$ egy mátrix (i oszlop, j sor koordinátákkal) és $X(t) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i(t)E_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$ a geodetikusra merőleges vektormező ennek kiszámítását lásd a 6.2. Fejezetben. Ha most az $x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i$ pontban az $\omega(x)$ függvény definíciója a következő $\omega(x) \stackrel{def}{=} 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_i x_j \widetilde{Q}_{ij}(x_1) \cdot \eta(e_j, e_j)$, ahol $\widetilde{Q}_{ij}(x_1)$ természetesen a $\widetilde{Q}(x_1) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mátrix reprezentációjában az i-edik oszlop j-edik elemét jelenti, akkor a fenti kiemelt egyenlőségek közül az első egyelet teljesül az $e_1 \cdot t$ geodetikus mentén, míg a második (2) számú egyenlet épp a keresett Jacobi-típusú differenciálegyenletet adja. Sőt, a fenti ω függvény választása esetén még az is teljesül, hogy a ∂_i vektormezők, azaz az $e_1, \ldots, e_n$ konstans vektormezőkké való kiterjesztései, párhuzamos vektormezők lesznek az $e_{n+1} \cdot t$ geodetikus mentén. Helfer megmutatta, hogy létezik olyan $(\mathbb{R}^n, \eta, Q)$ Jacobi-típusú differenciálegyenlet, melynél a Q alkalmas tetszőlegesen kicsiny megváltoztatásával eltüntethető egy konjugált pont, itt η szükségszerűen szemi-euklideszi forma volt. Azaz olyan példa adható ahol a $[0, 2]$ intervallumon csak az 1 lesz a 0-hoz konjugált pont, de Q tetszőlegesen kicsit megváltoztatható úgy, hogy a $[0, 2]$ intervallumon már nem lesz a 0-hoz konjugált pont. A fenti állítás miatt úgy is fogalmazhatnánk, hogy létezik olyan szemi-Riemann-sokaság és ebben egy geodetikus, hogy meg tudjuk változtatni a metrikát, annak egy kicsiny variálásával, hogy a geodetikusunk geodetikus marad, de eltűnik egy konjugált pontja. Itt, mint látható, nem egy fix szemi-Riemann-sokaságról van szó, amelyben egy geodetikus olyan variációját vesszük más geodetikusokon keresztül, ahol a kezdőpont fix úgy, hogy a varáció hatására eltűnjön a konjugált pont a variált geodetikusokon, hanem magát a sokaságot is megváltoztatjuk. Ha fokális pontokat vizsgálunk, akkor viszont használható számunkra Helfer ezen észrevétele az általánosított görbítettszorzatról mondottakkal együtt.

2.1 Példa. *Legyen $(\mathbb{R}^3, g_M)$ egy Minkowski-tér, és (x_1, x_2, x_3) ennek egy kanonikus koordináta rendszere, melyre ∂x_1, ∂x_3 térszerű, ∂x_2 pedig időszerű vektormezők, és ezek együtt egy ortonormált bázismezőt adnak. Legyen továbbá $(\mathbb{R}, g)$ a kanonikus Riemann metrikával ellátva, és jelölje t a kanonikus koordinátarendszert. Az $\omega(x, t) \stackrel{def}{=} \pi^2 x_2^2 - \pi^2 x_1^2 + 2t x_2 x_1$ függvény segítségével képezzük a $\phi(x, t) \stackrel{def}{=} e^{\frac{1}{2}\omega(x,t)}$ függvényt, és vegyük az ez által definiált*

$$\mathbb{R}^3 \times_\phi \mathbb{R}$$

általánosított görbítettszorzatot. Ha most vesszük a $P \stackrel{def}{=} \{0\} \times \mathbb{R}$ alteret, és az erre ortogonális $\varphi_0(s) \stackrel{def}{=} (0, 0, s, 0)$, $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geodetikust, akkor ennek *a* $\varphi_t(s) \overset{def}{=} (0,0,s,t)$, $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $t \geq 0$ *variációja, éppen a keresett fenti példát adja, vagyis a* $\varphi_0(s)$ *geodetikuson a* $\varphi_0(1)$ *pont foklis pontja lesz a* P *részsokaságnak, de a* $\varphi_t(s)$ *variált geodetikusokon nem lesz fokális pontja* P*-nek, ha* $t \neq 0$.

Bizonyítás. A 2.13. Lemma miatt az $\mathbb{R}^3 \times_\phi \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$ részsokaság összes geodetikusa az általánosított görbítettszorzatnak is geodetikusa. Ezért a részsokaságban haladó $\overline{\varphi}_t(s) \overset{def}{=} (0,0,s) \times \{t\} \subset \mathbb{R}^3 \times_\phi \{t\}$, $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geodetikus **konjugált** pontjai, és a geodetikus menti a $\overline{\varphi}_t(0)$ pontban eltűnő Jacobi-mezői, a P részsokaságra merőleges $\varphi_t(s) \subset \mathbb{R}^3 \times_\phi \mathbb{R}$ geodetikus **fokális** pontjai, és P-Jacobi-mezői, is egyben, hiszen minden $\mathbb{R}^3 \times_\phi \{t\}$-beli Jacobi-mező egy geodetikus variációból származtatható, amely geodetikusok $\mathbb{R}^3 \times_\phi \mathbb{R}$-nek is geodetikusai, így egy itteni variációt is adnak, tehát $\mathbb{R}^3 \times_\phi \mathbb{R}$-ben is egy Jacobi-mezőt ad. Ahol természetesen az $\mathbb{R}^3 \times_\phi \{t\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \times_\phi \mathbb{R}$ kanonikus beágyazás segítségével történik a megfeleltetés. Így még nem az összes P-Jacobi-mezőt találtuk meg, hiszen a fent említett mezők csak egy 3-dimeniós alterét feszítik ki a $\varphi_t(s) \subset \mathbb{R}^3 \times_\phi \mathbb{R}$ geodetikus menti P-Jacobi-mezők terének. Mivel tudjuk, hogy ez a tér 4-dimenziós, így elég egy ezektől független P-Jacobi-mezőt találni, ami pedig a következő:

$$Z(0,0,s_0,t_0) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left(0,0,s_0,\tilde{t}\right)|_{\tilde{t}=t_0},$$

azaz a $\varphi_{t_0}(s_0)$ pontban a $\varphi_t(s)$ geodetikus t paraméter szerinti variációjánál adódó P-Jacobi-mezőt vesszük. Ez a P-Jacobi-mező nyilván független a korábbiaktól, az $\mathbb{R}^3 \times_\phi \{t\}$ részsokaságból származóaktól, és sehol sem tűnik el, így a fokális pontok vizsgálatához a $\varphi_t(s)$ geodetikus mentén, elegendő az $\mathbb{R}^3 \times_\phi \{t\}$ részsokaságbeli $\overline{\varphi}_t(s)$ geodetikus konjugált pontjait vizsgálni. Ehhez pedig az előző *Helfer* állítás fog segíteni, hiszen a $\overline{\varphi}_t(s)$ geodetikus mentén a részsokaságban a $\phi^2(x,t) = e^{\omega(x,t)}$ alak miatt a Jacobi-típusú differenciálegyenlet az:

$$\begin{pmatrix} f_1''(s) \\ f_2''(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi^2 & t \\ -t & -\pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix}$$

alakot ölti. Ha most a $t = 0$ pontban vagyunk, akkor a fenti egyenlet független megoldásai az:

$$\begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi}\sin(\pi \cdot s) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1'(0) \\ f_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

illetve az:

$$\begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\pi}\sin(\pi \cdot s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1'(0) \\ f_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a természetes kezdeti feltételekre. Ez jól mutatja, hogy a $\varphi_0(1)$ pont, egy 2-multiplicitású fokális pont lesz, és ez előtt nincsenek fokális pontok a $\varphi_0(0)$ pontig. Mi a helyzet akkor, ha $t \neq 0$? Ahhoz, hogy ezt könnyen láthassuk egy másik bázisban kell felírni a Jacobi-egyenletet. Jelölje T az áttérési mátrixot, mely oszlopai az új bázisvektorok a régi bázisban felírva. A fenti Jacobi-egyenlet $X''(s) = -R(X(s), \overline{\varphi}_t'(s))\,\overline{\varphi}_t'(s)$ volt, ahol $X(s) = (f_1(s) \cdot \partial x_1(\overline{\varphi}_t(s)), f_2(s) \cdot \partial x_2(\overline{\varphi}_t(s)))$. Jelölje $R_t(s)$ a görbületi tenzor mátrixát (az $R(., \overline{\varphi}_t'(s))\,\overline{\varphi}_t'(s)$ tenzor mátrixát), ekkor a fenti Jacobi-egyenlet az $X''(s) = -R_t(s)\,X(s)$ alakot ölti. Lévén, hogy egy rögzített t érték mellett vizsgálódunk, az $R_t(s) = \begin{pmatrix} -\pi^2 & t \\ -t & -\pi^2 \end{pmatrix}$ mátrix konstans, így ezt röviden jelölje R_t. A T áttérési mátrix segítségével azt kapjuk, hogy $T \cdot X''(s) = (-TR_tT^{-1}) \cdot (T \cdot X(s))$, ami azt jelenti, hogy ha $X(s)$ megodása az eredeti Jacobi-egyenletnek, akkor $T \cdot X(s)$ megoldása, az új (transzformált) egyenletnek is és megfordítva. Azaz ha $Y(s)$ megoldás az új bázisban, akkor $T^{-1} \cdot Y(s)$ megoldása a régi egyenletnek. Lévén, hogy T invertálható, így elég a transzformált rendszer megoldásait viszgálni, ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy hol, milyen multiplicitású konjugált pontok vannak. Itt nem használtuk ki, hogy a T áttérési mátrix valós vagy sem, így ez lehet akár komplex is. Legyen

$T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, ekkor az új bázisban a Jacobi-egyenlet alakja a következő:

$$Y_t''(s) = -\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\pi^2 & t \\ -t & -\pi^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} Y_t(s)\,, \text{ azaz}$$

$$Y_t''(s) = \begin{pmatrix} -\pi^2 + it & 0 \\ 0 & -\pi^2 - it \end{pmatrix} Y_t(s)\,.$$

Ez utóbbi rendszernek kell a megoldásait vizsgálni $Y_t(0) = (0,0)$ kezdeti feltétellel. Ezen megoldásoknak egy bázisát adja a következő két független megoldás:

$$Y_{t,1}(s) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - ti}} \sin\left(\sqrt{\pi^2 - ti} \cdot s\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_{t,2}(s) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + ti}} \sin\left(\sqrt{\pi^2 + ti} \cdot s\right) \end{pmatrix},$$

az $Y_{t,1}'(0) = (1,0)\,, Y_{t,2}'(0) = (0,1)$ teljesülésével. Itt nyilván, ha $t \neq 0$, $s \neq 0$, akkor $Y_{1,t}(s) \neq 0$, $Y_{2,t}(s) \neq 0$, és az alakjukból következik, hogy ezek lineárisan függetlenek. Azaz nincs a $\varphi_t(0)$-hoz konjugált pont a $\overline{\varphi}_t(s)$ geodetikuson, ami mint láttuk azzal egyenértékű, hogy nincs fokális pontja a $\varphi_t(s) \subset \mathbb{R}^3 \times_\phi \mathbb{R}$ geodetikusnak sem. Ez pedig a példa helyességét igazolja. $\square$

A fenti példa analitikus volt, és $F_{\beta 2}^S$ típusú szingularitása volt az $\varphi_0(1)$ pontban. Könnyű olyan példát is mutatni analitikus Lorentz-sokaságra, melyben az $(R2)$ feltétel nem teljesül:

2.2 Példa. *Vegyük az előző példa szerinti* $(\mathbb{R}^3, g_M)$ *Minkowski-téridőt, az elöbbi* (x_1, x_2, x_3) *kanonikus koordináta rendszerrel, ahol* $\partial x_1, \partial x_3$ *térszerű és* ∂x_2 *időszerű. Legyen* $\omega(x) \stackrel{def}{=} (\pi^2 + \pi)x_1^2 - \pi x_1 x_2 - (\pi^2 - \pi)x_2^2$*, ahol* $x = (x_1, x_2, x_3)$*. Ekkor az* $(\mathbb{R}^3, e^\omega g_M)$ *analitikus Lorentz-sokaságban a* $\gamma(s) \stackrel{def}{=} (0,0,s)\,,\ s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *geodetikuson a* $\gamma(1)$ *konjugált pont a* $\gamma(0)$ *ponthoz, és* $\gamma(1)$*-nél az* $(R2)$ *tulajdonság nem teljesül.*

Bizonyítás. A *Helfer állítás*nál mondottak alapján a görbületi mátrix a geodetikus mentén $R = \begin{pmatrix} \pi^2+\pi & -\pi \\ \pi & \pi^2-\pi \end{pmatrix}$, ahonnan egy fényszerű bázisba való áttéréssel (ahol az áttérés mátrixa legyen $T = T^{-1} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$) az új görbületi tenzor mátrixa $T^{-1}RT = \begin{pmatrix} \pi^2 & 2\pi \\ 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$. Így az előző példában ismertetett módon az új bázisban a Jacobi-egyenlet:

$$X''(s) = \begin{pmatrix} \pi^2 & 2\pi \\ 0 & \pi^2 \end{pmatrix} X(s).$$

Ezen rendszer $X(0) = (0,0)$ kezdőfeltétel melleti megoldásainak egy bázisát adják az:

$$Y_1(s) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi}\sin(\pi \cdot s) \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2(s) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} s \cdot \cos(\pi \cdot s) \\ \sin(\pi \cdot s) \end{pmatrix}.$$

Az $s = 1$ értékre $Y_1(1) = (0,0)$, $Y_1'(1) = Y_2(1) = (1,0)$. Lévén hogy a $\mathcal{V}_1(\gamma, \gamma(0))$ teret a $\gamma'(1)$, $Y_2(1)$ vektorok kifeszítik, és a $\mathcal{D}_1(\gamma, \gamma(0))$ teret pedig az $Y_1'(1)$, így $\mathcal{D}_1(\gamma, \gamma(0)) \oplus \mathcal{V}_1(\gamma, \gamma(0)) \neq T_{\gamma(1)}\mathbb{R}^3$. Azaz, az $(R2)$ tulajdonság nem teljesül a $\gamma(1)$ pontban a 2.3. Lemma alapján. □

3 Becslések a Maslov-indexre

Mint már említettük, a Maslov-indexet akkor tudjunk a Morse-indexhez hasonlóan értelmezni, ha az $(R2)$ feltétel teljesül. Tegyük fel ezért, hogy ez a feltétel teljesül ebben a fejezetben is. Legyen tehát (M, g) egy szemi-Riemann sokaság, $P \subset M$ egy szemi-Riemann-részsokasága úgy, hogy $N(P)$ minden pontjában teljesüljön az $(R2)$ feltétel. Jelölje $k = n_-(g)$ a szemi-Riemann metrika indexét, vagyis egy $T_m M$, $m \in M$ érintőtérben azon alterek dimenziójának maximumát, melyeken a metrika negatív definit, ez független az $m \in M$ választásától. Legyen továbbá $v \in N(P)$ egy nem fokális vektor, és $e_1, \ldots, e_n$ egy ortonormált bázisa a $T_{c_v(0)}M$ érintőtérnek úgy, hogy az e_i, $i = 1, \ldots, k$ vektorok időszerűek legyenek az e_j, $j = k+1, \ldots, n$ vektorok pedig térszerűek, és jelölje $E_1(t), \ldots, E_n(t)$ ezek párhuzamos kiterjesztéseit a $c_v(t)$ geodetikus mentén.

Definiálják a $\mathcal{H}$ **vektorteret** azon H^1 Szoboljev reguláris $V : [0,1] \ni t \mapsto V(t) \in T_{c_v(t)}M$ vektormezők, melyekre $V(0) \in T_{c_v(0)}P$, $V(1) = 0$,

továbbá jelölje $\mathcal{N}_t$ (illetve $\mathcal{P}_t$) azt a **maximális negatív** (ill. pozitív) **disztribúciót a c_v geodetikus mentén**, amelyet az $E_1, \ldots, E_k$ (illetve az $E_{k+1}, \ldots, E_n$) vektormezők feszítenek ki. Ezek a disztribúciók függenek az $E_1, \ldots, E_n$ vektormezőktől, így a továbbiakban feltesszük, hogy ezek rögzítve vannak a $c_v(t)$ geodetikus mentén, és az ezekhez tartozó maximális pozitív, illetve negatív disztribúciókról beszélünk. Szükségünk lesz még a $\mathcal{H}$ vektortér következő két alterére is:

$$\mathcal{K} \overset{def}{=} \{V \in \mathcal{H} \,|\, \text{a } g(V(t), E_i(t)) \text{ függvény } H^1 \text{ Szoboljev reguláris,}$$

$$\text{és } g(V''(t) + R(V(t), c_v'(t))c_v'(t), E_i(t)) \equiv 0, \text{ minden } i = 1, \ldots, k \text{ esetén}\}$$

$$\mathcal{G} \overset{def}{=} \{V \in \mathcal{H} \,|\, V(0) = 0,\ V(t) \in \mathcal{N}_t,\ t \in [0,1]\}.$$

Ekkor jelölje $I(V, W)$, $V, W \in \mathcal{H}$ a szokásos, részsokaságok esetében használatos Morse-indexformát, azaz:

$$I(V, W) \overset{def}{=}$$

$$g\left(w_v\left(V(0)\right), W(0)\right) + \int_0^1 g(V'(t), W'(t)) - g(R(V(t), c_v'(t))c_v'(t), W(t))dt,$$

ahol $w_v : T_{c_v(0)}P \to T_{c_v(0)}P$ a v-irányhoz tartozó Weingarten-endomorfizmus. Mercuri, Piccione és Tausk megmutatta (lásd [M-P-T] Theorem 5.1.2), hogy az alábbi tétel igaz az $i_{foc}(v,P) \stackrel{def}{=} \sum_{t\in[0,1]} \mathrm{sgn}(g|_{\mathcal{D}_t(P,c_v)})$ fokális indexre, ahol igazából csak a fokális pontokra megy az összegzés, hiszen a többi pontra a szignatúra értéke definíció szerint 0, a sgn definiálását lásd az előző fejezetben.

Tétel (Piccione-Tausk). Ha (M,g) egy szemi-Riemann-sokaság, P ennek egy szemi-Riemann-részsokasága és $c_v(t)$, $v \in N(P)$ egy erre ortogonális geodetikus. Tegyük fel továbbá, hogy az $(R2)$ tulajdonság teljesül, akkor az alábbi felbontás érvényes:

$$i_{foc}(v,P) = n_-(I|_{\mathcal{K}}) - n_+(I|_{\mathcal{G}}) - n_-(g|_{T_{c_v(0)}P}), \tag{3}$$

ahol n_- a megfelelő bilineáris forma indexét jelöli, és n_+ a bilineáris forma -1-szeresének az indexét jelöli.

A bizonyítást lásd [P-T2] Theorem 5.2.

Ahogyan azt már említettük, az $(R2)$ tulajdonság teljesülése esetén a fokális index megegyezik a Maslov indexel. A fenti egyenlőségből könnyen kaphatunk egy alsó és egy felső becslést a fokális indexre, és így a Maslov-indexre, ahogyan az alábbiakban látható lesz.

3.1 Definíció. *Legyen $V(t) \in \mathcal{N}_t$ egy olyan vektor mező a $c_v(t)$ geodetikus mentén melyre $g(V''(t) + R(V(t), c_v'(t))c_v'(t), W(t)) \equiv 0$, minden $W(t) \in \mathcal{N}_t$ vektormező esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy $V(t)$* ***redukált Jacobi-mezeje a maximális negatív disztribúciónak****. Jelölje $\mathcal{J}(P,\mathcal{N})$ a maximális negatív disztribúció redukált vektormezejei által alkotott vektorteret. A $c_v(t_0)$ pont* ***konjugált pontja a maximális negatív disztribúciónak****, ha létezik olyan nem triviális $V(t) \in \mathcal{J}(P,\mathcal{N})$ vektormező, melyre $V(0) = V(t_0) = 0$. E pont multiplicitásán a $\{V(t) \in \mathcal{J}(P,\mathcal{N}) \,|\, V(0) = V(t_0) = 0\}$ altér dimenzióját értjük. Hasonlóan definiálhatjuk a fentieket a maximális pozitív disztribúcióra is. Jelölje $C_{\mathcal{N}}(v)$, illetve $C_{\mathcal{P}}(v)$, a maximális negatív, illetve pozitív, disztribúció konjugált pontjainak számát multiplicitással számolva a $c_v([0,1])$ geodetikus szakaszon.*

3.1 Következmény. *Az előző tétel feltételei mellett a*

$$-n_-(g|_{T_{c_v(0)}P}) - C_{\mathcal{N}}(v) \le i_{foc}(v,P) \le n_+(g|_{T_{c_v(0)}P}) + C_{\mathcal{P}}(v)$$

becslések igazak, ha $v \in N(P) - F(P)$.

Bizonyítás. Vegyük a triviális $n_-(I|_{\mathcal{K}}) \geq 0$ becslést, és vegyük észre, hogy $n_+(I|_{\mathcal{G}}) = C_{\mathcal{N}}(v)$. Így megkaptuk a becslés bal oldalát.

Ha most megváltoztatjuk a metrikát és g helyett a $-g$ metrikus tenzort tekintjük, akkor a P-Jacobi-mezők nem változnak meg az $(M, -g)$, $P \subset M$, $v \in N(P)$ rendszer esetén a c_v geodetikus mentén, hiszen a Koszul-formula miatt sem a Levi-Cività kovariáns deriválás, sem a görbületi tenzor nem változik meg, ezért a fokális index $-i_{foc}(v, P)$ értékű lesz, míg $n_-(-g|_{T_{c_v(0)}P})$ értéke éppen $n_+(g|_{T_{c_v(0)}P})$, továbbá $C_{\mathcal{N}}(v)$ értéke $C_{\mathcal{P}}(v)$-vé fog változni. A *Piccione-Tausk Tétel* szemi-Riemann-sokaságok esetén igaz, ezért használva az eddigieket az $(M, -g)$, P, v rendszerre

$$-i_{foc}(v, P) \geq -n_+(g|_{T_{c_v(0)}P}) - C_{\mathcal{P}}(v)$$

összefüggést kapjuk. Ez épp a becslésünk jobb oldalát adja. □

3.2 Következmény. *Tegyük fel, hogy a $\mathcal{P}_t$ disztribúció mentén a görbületi tenzor maximális sajátértéke κ, azaz κ a legkissebb érték, melyre minden $t_0 \in [0,1]$ esetén $g(R(V(t_0), c_v'(t_0))c_v'(t_0), V(t_0)) \leq \kappa \cdot g(V(t_0), V(t_0))$ teljesül minden $V(t) \in \mathcal{P}_t$ vektormező és $t_0 \in [0,1]$ esetén. Az $\mathcal{N}_t$ disztribúció mentén a görbületi tenzor minimális sajátértékét pedig jelölje δ. Ekkor teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$-n_-(g|_{T_{c_v(0)}P}) - n_-(g) \cdot \varrho(\delta, 1) \leq i_{foc}(v, P) \leq n_+(g|_{T_{c_v(0)}P}) + n_+(g) \cdot \varrho(\kappa, 1),$$

ahol $\varrho(\alpha, 1)$ a $\sin(t \cdot \sqrt{\alpha})$ függvény valós gyökeinek a száma a $[0,1]$ intervallumon.

Bizonyítás. A $C_{\mathcal{N}}(v) \leq \dim \mathcal{N}_0 \cdot \varrho(\delta, 1)$, $C_{\mathcal{P}}(v) \leq \dim \mathcal{P}_0 \cdot \varrho(\kappa, 1)$ becslések egy ismert összehasonlítási tétel segítségével kaphatóak meg, lásd Szenthe [Sz1], továbbá $\dim \mathcal{N}_0 = n_-(g)$ és $\dim \mathcal{P}_0 = n_+(g)$. □

Vizsgáljuk most meg a *Piccione-Tausk Tétel*ben szereplő indexforma első tagját, az $n_-(I|_{\mathcal{K}})$ tagot, mivel hasznos lehet ennek a tagnak az alaposabb megismerése. Át fogjuk írni ezt a tagot egy másik, néha könnyebben kezelhető formába.

Legyen $\mathcal{K}_0 \overset{def}{=} \{V \in \mathcal{K} \,|\, V(0) = 0\}$ továbbá $V_i \in \mathcal{K}$, $i = 1, \ldots, l$ egy maximális elemszámú rendszer, melyre a $V_1(0), \ldots, V_l(0)$ vektorok lineárisan függetlenek. (A függetlenség miatt $V_i(0) \neq 0$, $i = 1, \ldots, l$ is teljesül.) Jelölje $\mathcal{K}_{\neq 0}$ azt az alterét a $\mathcal{K}$ térnek, melyet a $V_1, \ldots, V_l$ mezők feszítenek ki. Ekkor érvényes a $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_{\neq 0}$ előállítás. Ha $V, W \in \mathcal{K}$, és $V(t) = \sum_{i=1}^n V_i(t) \cdot E_i(t)$, $W(t) = \sum_{j=1}^n W_i(t) \cdot E_i(t)$ a felbontásuk a korábbi párhuzamos vektormezők szerint, akkor jelölje

$$\overrightarrow{V}(t) \overset{def}{=} (V_1(t), \ldots, V_n(t)), \overrightarrow{W}(t) \overset{def}{=} (W_1(t), \ldots, W_n(t))$$

a megfelelő vektor értékű függvényeket. Továbbá tekintsük az $\widetilde{A} \overset{def}{=} -Id^{k \times k}$, $\widetilde{D} \overset{def}{=} Id^{(n-k)\times(n-k)}$ mátrixokat, és a

$$\begin{aligned}
\widetilde{B} \overset{def}{=} \left[\widetilde{B}_{ij}(t)\right], \ i, j = 1, \ldots, k, \text{ ahol } \widetilde{B}_{ij}(t) = g\left(R\left(E_i(t), c_v(t)\right) c_v(t), E_j(t)\right) \\
\widetilde{C} \overset{def}{=} \left[\widetilde{C}_{ij}(t)\right], \ i = 1, \ldots, k, \ j = k+1, \ldots, n, \text{ ahol} \\
\widetilde{C}_{ij}(t) = g\left(R\left(E_i(t), c_v(t)\right) c_v(t), E_j(t)\right) \\
\widetilde{E} \overset{def}{=} \left[\widetilde{E}_{ij}(t)\right], \ i = k+1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, k, \text{ ahol} \\
\widetilde{E}_{ij}(t) = g\left(R\left(E_i(t), c_v(t)\right) c_v(t), E_j(t)\right) \\
\widetilde{F} \overset{def}{=} \left[\widetilde{F}_{ij}(t)\right], \ i, j = k+1, \ldots, n, \text{ ahol} \\
\widetilde{F}_{ij}(t) = g\left(R\left(E_i(t), c_v(t)\right) c_v(t), E_j(t)\right),
\end{aligned}$$

mátrixokat. Ekkor az indexformában az integrál mögötti részt mátrix alakba írva, a következő adódik:

$$\begin{aligned}
& I(V, W) = \\
& g(w_v(V(0)), W(0)) + \int_0^1 g(V'(t), W'(t)) - g(R(V(t), c_v(t))c_v(t), W(t))dt = \\
& g\left(w_v\left(V(0), W(0)\right)\right) + \\
& \int_0^1 \left(\overrightarrow{V}'(t) \begin{bmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & \widetilde{D} \end{bmatrix} \left(\overrightarrow{W}'(t)\right)^T - \overrightarrow{V}(t) \begin{bmatrix} \widetilde{B}(t) & \widetilde{C}(t) \\ \widetilde{E}(t) & \widetilde{F}(t) \end{bmatrix} \left(\overrightarrow{W}(t)\right)^T \right) dt,
\end{aligned}$$

ami kiírva

$$g(w_v(V(0)), W(0)) + \int_0^1 \{\sum_{i=1}^{k} g(V_i'(t) \cdot E_i(t), W_i'(t) \cdot E_i(t)) -$$

$$\sum_{i,j=1}^{k} g(R(V_i(t) \cdot E_i(t), c_v(t))c_v(t), W_j(t) \cdot E_j(t)) -$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} g(R(V_i(t) \cdot E_i(t), c_v(t))c_v(t), W_j(t) \cdot E_j(t)) +$$

$$\sum_{j=l+1}^{n} g(V_j'(t) \cdot E_j(t), W_j'(t) \cdot E_j(t)) -$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} g(R(V_i(t) \cdot E_i(t), c_v(t))c_v(t), W_j(t) \cdot E_j(t)) -$$

$$\sum_{i,j=k+1}^{n} g(R(V_i(t) \cdot E_i(t), c_v(t))c_v(t), W_j(t) \cdot E_j(t))\}dt,$$

alakú. Jelölje A, B, C, D, E, F az integrál megfelelő helyein álló összegzéseket az előjelek nélkül. Így

$$I(V, W) = g(w_v(V(0), W(0)) + \int_0^1 (A - B - C + D - E - F)\, dt$$

adódik, ahol $A, B, C \ldots$ természetesen a $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \ldots$ részmártixokból adódó összegeket jelölik. Figyelembe véve a

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{k} g(V_i' E_i, W_i E_i) = \sum_{i=1}^{k} g(V_i'' E_i, W_i E_i) + \sum_{i=1}^{k} g(V_i' E_i, W_i' E_i) \tag{4}$$

összefüggést, a következő átalakításokat végezhetjük el:

$$\int_0^1 (A - B - C)\, dt =$$

$$\sum_{i=1}^{k} [g(V_i' E_i, W_i E_i)]_0^1 + \int_0^1 \left(- \sum_{i=1}^{k} g(V'' E_i, W_i E_i) - B - C \right) dt =$$

$$\sum_{i=1}^{k} [g(V_i' E_i, W_i E_i)]_0^1 + \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{k} g(V'' E_i, W_i E_i) + B + C \right) dt,$$

ahol kihasználtuk, hogy az integrálon belüli függvény értéke azonosan 0, hiszen $V, W \in \mathcal{K}$ volt, így a triviális $0 = -0$ átalakítást végeztük el. A fenti (4) összefüggést újból alkalmazva az elöbbi átalakításban szereplő utolsó integrálra, az

$$\int_0^1 (A - B - C)\, dt = 2\sum_{i=1}^{k} [g(V_i' E_i, W_i E_i)]_0^1 + \int_0^1 (-A + B + C)\, dt$$

összefüggés adódik. Azaz, ha $V, W \in \mathcal{K}$ akkor

$$I(V, W) = g(w_v(V(0), W(0)) + 2\sum_{i=1}^{k} [g(V_i' E_i, W_i E_i)]_0^1 +$$
$$\int_0^1 (-A + B + C + D - E - F)\, dt.$$

Ha most feltesszük, hogy $W \in \mathcal{K}_0$, ez esetben az első két integrálon kívüli tag eltűnik, továbbá ha még $V = W \in \mathcal{K}_0$ is teljesül akkor az:

$$I(V, V) = \int_0^1 (-A + B + D - F)\, dt,$$

egyenlőség lesz igaz, ahol kihasználtuk, hogy speciálisan $C = E$ is teljesül. Legyen most a $\mathcal{K}_0$ altéren egy szimmetrikus bilineáris forma adva a következő módon:

$$\widehat{I}(V, W) \overset{def}{=} \int_0^1 (-A + D) + (B - F) dt =$$
$$\int_0^1 \{\sum_{i=1}^{n} g(V_i'(t) E_i(t), W_i'(t) E_i(t)) \cdot g(E_i(t), E_i(t)) +$$
$$\sum_{i,j=1}^{k} g(R(V_i(t) E_i(t), c_v(t)) c_v(t), W_j(t) E_j(t)) -$$
$$\sum_{i,j=k+1}^{n} g(R(V_i(t) E_i(t), c_v(t)) c_v(t), W_j(t) E_j(t))\} dt.$$

Ami a korábbi mátrix alakban kiírva:

$$\int_0^1 \left(\overrightarrow{V}'(t) \, [Id]^{n \times n} \left(\overrightarrow{W}'(t) \right)^T - \overrightarrow{V}(t) \begin{bmatrix} -\widetilde{B}(t) & 0 \\ 0 & \widetilde{F}(t) \end{bmatrix} \left(\overrightarrow{W}(t) \right)^T \right) dt,$$

ahol a fenti formális indexformában a $\begin{bmatrix} -\widetilde{B}\,(t) & 0 \\ 0 & \widetilde{F}\,(t) \end{bmatrix}$ mátrix szimmetrikus, ami formálisan olyan alakú, mint egy Riemann-sokaság görbületi mátrixa egy geodetikus mentén. Sőt az előző fejezetben leírt Helfer módszerrel, valóban konstruálható egy olyan Riemann-sokaság, és abban egy geodetikus, mely mentén ez a mátrix lesz a görbület mátrixa, azaz éppen $\widehat{I}$ lesz a Morse-index forma a geodetikus mentén. A fenti számolás a következő egyenlőséget igazolja:

$$n_-(I|_{\mathcal{K}_0}) = n_-(\widehat{I}|_{\mathcal{K}_0}).$$

Itt azonban az új indexforma csak olyan, mintha egy Riemann indexforma volna. A valódi Morse-index forma a $\mathcal{K}_0$ térnél nagyobb téren, a $\mathcal{H}_0 \overset{def}{=} \{V \in \mathcal{H} \,|\, V(0) = 0\}$ téren van értelmezve. Ezt a nagyobb teret használva a következő $n_-(\widehat{I}|_{\mathcal{K}_0}) \leq n_-(\widehat{I}|_{\mathcal{H}_0}) = C_{\mathcal{P}}(v) + C_{\mathcal{N}}(v)$ összefüggést kapjuk, ahol a jobb oldal bizonyos konjugált pontokat számol multiplicitással, továbbá az egyenlőség bizonyítása triviális, ha az alábbi 3.1. Lemmát az ott szereplő $\mathcal{F}_t = \mathcal{N}_t$, $\mathcal{S}_t = \mathcal{P}_t$ esetre nézzük.

3.1 Lemma. *Legyen (M, g) egy Riemann-sokaság $\gamma(t) : [0,1] \to M$ egy geodetikusa, továbbá $E_1(t), \ldots, E_n(t)$ párhuzamos ortonormált vektormezők γ mentén úgy, hogy minden $\gamma(t)$ pontban egy ortonormált bázist adjanak. Ezen felül legyenek $\mathcal{F}_t$ illetve $\mathcal{S}_t$ azok a disztribúciók γ mentén, amit az $E_1, \ldots, E_k$, illetve az $E_{k+1}, \ldots, E_n$ vektormezők feszítenek ki. Jelölje $\mathcal{H}_0$ azon H^1 Szoboljev reguláris vektormezőket a γ mentén, melyek eltűnnek a kezdő-, és végpontokban. Ha az $\mathcal{F}_t$ disztribúciót a görbületi tenzor önmagába képezi, azaz $\mathcal{F}_t \ni V(t) \mapsto R(V(t), \gamma(t))\gamma(t) \in \mathcal{F}_t$, akkor*

$$n_-(I|_{\mathcal{H}_0}) = n_-(I|_{\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{F}_t}) + n_-(I|_{\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{S}_t}).$$

Bizonyítás. Lásd Szenthe [Sz1] Proposition 1. és Proposition 2. a konjugált, illetve a fokális esetre. □

Ezt a lemmát természetesen az $\widehat{I}$ indexformára alkalmazzuk. (Formálisan a hozzá gyártott Riemann-sokaságra.) Mivel az $\widehat{I}$ formában szereplő görbületi tenzor mátrixa, szimmetrikus és blokkmátrix alakú, ezért a fenti 3.1. Lemma valóban alkalmazható lesz. Ezen megjegyzések alapján adhatunk egy másik bizonyítást is az elöbbi 3.2. Következményre. Tekintsük az

$$n_-(I|_{\mathcal{K}}) \leq n_-(I|_{\mathcal{K}_0}) + n_-(I|_{\mathcal{K}_{\neq 0}}) \leq n_-(\widehat{I}|_{\mathcal{K}_0}) + \dim P \leq n_-(\widehat{I}|_{\mathcal{H}_0}) + \dim P = \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(v) + \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(v) + \dim P$$

egyenlőtlenséget és azt a tényt, hogy $n_+(I|_{\mathcal{G}}) = C_{\mathcal{N}}(v)$. Ezeket behelyettesítve a *Piccione-Tausk tétel*be megkapjuk a 3.2. Következménybeli jobb oldali becslést. Látható, hogy ebben a bizonyításban sok helyen alkalmaztunk a $\leq$ becslést. Ha egy konkrét példával dolgozunk, akkor esetleg ez a bizonyítás a *3.2. Következény*nél jobb eredményt is adhat.

Vegyünk most egy speciális esetet.

3.1 Tétel. *Legyenek (M, g), illetve $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ szemi-Riemann-sokaságok, melyek dimenziójára $m \leq \widetilde{m}$ teljesül. Legyenek továbbá $P \subset M$, illetve $\widetilde{P} \subset \widetilde{M}$ ezek szemi-Riemann-részsokaságai, és $c_v : [0,1] \to M$, $\widetilde{c_{\widetilde{v}}} \to \widetilde{M}$ geodetikusok, amelyekre $v \in N(P)$, $\widetilde{v} \in N\left(\widetilde{P}\right)$. Ha léteznek olyan párhuzamos ortonormált vektormezők által feszített maximális negatív és pozitív disztribúciók, $\mathcal{N}_t =< E_1(t), \ldots, E_k(t) >$, $\mathcal{P}_t =< E_{k+1}(t), \ldots, E_m(t) >$, a $c_v(t)$ mentén illetve, $\widetilde{\mathcal{N}_t} =< \widetilde{E_1}(t), \ldots, \widetilde{E_k}(t) >$, $\widetilde{\mathcal{P}}_t =< \widetilde{E_{k+1}}(t), \ldots, \widetilde{E_{\widetilde{m}}}(t) >$ a $\widetilde{c_{\widetilde{v}}}(t)$ mentén, melyeknél a $\phi : T_{c_v(t)}M \to T_{\widetilde{c_{\widetilde{v}}}(t)}\widetilde{M}$, $\phi(E_i(t)) \mapsto \widetilde{E_i}(t)$, $i = 1, \ldots, m$ vektortér monomorfizmusnál a következők teljesülnek:*

1. *$g(R(V(t), c_v'(t))c_v'(t), E_i(t)) = \widetilde{g}(\widetilde{R}(\phi(V(t)), \widetilde{c_{\widetilde{v}}'}(t))\widetilde{c_{\widetilde{v}}'}(t), \widetilde{E_i}(t))$, minden $V(t) \in \mathcal{N}_t$, $i = 1, \ldots, m$ esetén;*
2. *$\phi(T_{c_v'(0)}P) \subset T_{\widetilde{c_{\widetilde{v}}}(0)}\widetilde{P}$;*
3. *a maximális sajátértéke az R görbületi tenzornak a $\mathcal{P}_t$ disztribúcióra megszorítva $\leq$ minimális sajátértéke az $\widetilde{R}$ görbületi tenzornak a $\widetilde{\mathcal{P}}_t$ disztribúcióra megszorítva;*
4. *a w_v Weingarten-endomorfizmus minimális sajátértéke $\geq$ a $\widetilde{w_{\widetilde{v}}}$ Weingarten-endomorfizmus maximális sajátértéke,*

akkor

$$i_{foc}(v,P) \le i_{foc}(\widetilde{v},\widetilde{P}) - \left(n_-\left(\widetilde{g}|_{T_{\widetilde{c_{\widetilde{v}}}(0)}\widetilde{P}}\right) - n_-\left(g|_{T_{c_v(0)}P}\right)\right).$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy

$$g(V'(t),V'(t)) = \widetilde{g}(\phi(V'(t)),\phi(V'(t))) \tag{5}$$

teljesül, minden a $c_v\,(t)$ geodetikus menti $V\,(t)$ vektormezőre.

A feltételek miatt $\phi\,(\mathcal{K}) \subset \widetilde{\mathcal{K}}$ is teljesül, mivel ha

$$g(V''(t),E_i(t)) + g(R(V(t),c_v(t))c_v(t),E_i(t)) = 0,\ i=1,\ldots,k$$

minden $V(t) \in \mathcal{K}$ esetén, akkor a

$$g(V''(t),E_i(t)) = \widetilde{g}(\phi(V''(t)),E_i(t)),\ i=1,\ldots,m,$$

és a

$$g(R(V(t),c_v'(t))c_v'(t),E_i(t)) = \widetilde{g}(\widetilde{R}(\phi(V(t)),\widetilde{c_{\widetilde{v}}'}(t))\widetilde{c_{\widetilde{v}}'}(t),\widetilde{E_i}(t)),\ i=1,\ldots k$$

egyenlőségekből következik, hogy

$$0 = g(V''(t),E_i(t)) + g(R(V(t),c_v'(t))c_v'(t),E_i(t)) =$$
$$\widetilde{g}(\phi(V''(t)),\widetilde{E_i}(t)) + \widetilde{g}(\widetilde{R}(\phi(V(t)),\widetilde{c_{\widetilde{v}}'}(t))\widetilde{c_{\widetilde{v}}'}(t),\widetilde{E_i}(t)),\ i=1,\ldots k.$$

Legyen adva egy $V(t) \in \mathcal{K}$ vektormező, ekkor definiálhatóak a $V_{\mathcal{N}}(t) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{k} V_i(t)E_i(t)$, $V_{\mathcal{P}}(t) \stackrel{def}{=} \sum_{i=k+1}^{m} V_i(t)E_i(t)$ vektormezők. E jelölések segítségével

$$g(R(V(t),c_v'(t))c_v'(t),V(t)) = g(R(V_{\mathcal{N}}(t),c_v'(t))c_v'(t),V_{\mathcal{N}}(t)) +$$
$$2g(R(V_{\mathcal{N}}(t),c_v'(t))c_v'(t),V_{\mathcal{P}}(t)) + g(R(V_{\mathcal{P}}(t),c_v'(t))c_v'(t),V_{\mathcal{P}}(t)),$$

ahol kihasználtuk, hogy a görbületi tenzor szimmetrikus a metrikára nézve. A *3. feltevés* szerint:

$$g(R(V_{\mathcal{P}}(t),c_v'(t))c_v'(t),V_{\mathcal{P}}(t)) \le \widetilde{g}(\widetilde{R}(\phi(V_{\mathcal{P}}(t)),\widetilde{c_{\widetilde{v}}'}(t))\widetilde{c_{\widetilde{v}}'}(t),\phi(V_{\mathcal{P}})(t)).$$

Az *1. feltevés* azt adja, hogy

$$2g(R(V_{\mathcal{N}}(t), c_v'(t))c_v'(t), V_{\mathcal{P}}(t)) = 2\widetilde{g}(\widetilde{R}(\phi(V_{\mathcal{N}})(t), \widetilde{c}_{\widetilde{v}}'(t))\widetilde{c}_{\widetilde{v}}'(t), \phi(V_{\mathcal{P}})(t)),$$

ahol fontos megjegyezni, hogy $V_{\mathcal{P}}(t) \in < E_{k+1}(t), \ldots, E_m(t) >$ miatt $\phi(V_{\mathcal{P}}(t)) \in < \widetilde{E_{k+1}}, \ldots, \widetilde{E_m} >$ teljesül. Továbbá szintén az *1. feltevés* miatt

$$g(R(V_{\mathcal{N}}(t), c_c'(t))c_v'(t), V_{\mathcal{N}}(t)) = \widetilde{g}(\widetilde{R}(\phi(V_{\mathcal{N}})(t), \widetilde{c}_{\widetilde{v}}'(t))\widetilde{c}_{\widetilde{v}}'(t), \phi(V_{\mathcal{N}})(t)).$$

Ez utóbbi három összefüggés eredményeként kapjuk, hogy

$$g(R(V(t), c_v'(t))c_v'(t), V(t)) \leq \widetilde{g}(\widetilde{R}(\phi(V(t)), \widetilde{c}_{\widetilde{v}}'(t))\widetilde{c}_{\widetilde{v}}'(t), \phi(V(t))). \quad (6)$$

A fenti egyenlőtlenség a *4. feltétel*lel, és a kiemelt (5) egyenlőséggel együtt pedig a következő egyenlőtlenséget adja:

$$\begin{gathered} I(V,V) = g(w_v(V(0)), V(0)) + \int_0^1 g(V'(t), V'(t)) - \\ g(R(V(t), c_v'(t))c_v'(t), V(t))dt \geq \widetilde{g}(\widetilde{w_{\widetilde{v}}}(\phi(V(0)), \phi(V(0))) + \\ \int_0^1 \widetilde{g}(\phi(V'(t)), \phi(V'(t))) - \widetilde{g}(\widetilde{R}(\phi(V(t)), \widetilde{c}_{\widetilde{v}}')\widetilde{c}_{\widetilde{v}}', \phi(V(t))) = \\ \widetilde{I}(\phi(V), \phi(V)). \end{gathered} \quad (7)$$

Ennek eredményeként kapjuk, hogy $n_-(I|_{\mathcal{K}}) \leq n_-(\widetilde{I}|_{\widetilde{\mathcal{K}}})$. Az *1. feltétel* miatt $n_+(I|_{\mathcal{G}}) = n_+(\widetilde{I}|_{\widetilde{\mathcal{G}}})$. Így a fenti eredmények együttesen a bizonyítást adják. □

3.1 Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy* $n_-(\widetilde{g}|_{T_{\widetilde{c}_{\widetilde{v}}(0)}\widetilde{P}}) - n_-(g|_{T_{c_v(0)}P}) \geq 0$ *miatt az*

$$i_{foc}(v, P) \leq i_{foc}(\widetilde{v}, \widetilde{P})$$

is igaz.

Riemann-esetben ismert, hogy ha az (M, g) Riemann-sokaságban $P \subset \widetilde{P} \subset M$ részsokaságok, és $v \in N\left(\widetilde{P}\right) \subset N(P)$, akkor a $c_v|_{[0,1]}$ Morse-indexe a P részsokaságra vonatkoztatva $\leq c_v|_{[0,1]}$ Morse-indexe a $\widetilde{P}$ részsokaságra vonatkoztatva, mivel a fokális index, a Maslov-index és a Morse-index egybe esik a Riemann estben, így

$$i_{foc}(v,P) \leq i_{foc}\left(v,\widetilde{P}\right).$$

Szemi-Riemann-esetben ez azonban nem igaz. Vegyük $\mathbb{R}^n$-en a kanonikus szemi-euklideszi metrikából származtatott $g_{\mathbb{R}^n}$ szemi-Riemann metrikát. Legyen $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ az egységgömb és $m \in S^{n-1}$. Ekkor ismert, hogy az m pontban az S^{n-1}-re ortogonálisan induló egység sebességgel paraméterezett $\gamma(t)$ geodetikuson a $\gamma(1) = 0_{\mathbb{R}^n}$ lesz csak fokális pont, amely multiplicitása $n-1$. Tekintsük az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sokaságot a $g_{\mathbb{R}^n} \times (-g_{\mathbb{R}^n})$ szemi-Riemann metrikával, és ebben az $S^{n-1} \times S^{n-1}$ részsokaságot. Ekkor az (m,m) pontból induló $(\gamma(t), \gamma(t))$ geodetikus mentén a $(0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n})$ lesz csak fokális pont, mely multiplicitása $2(n-1)$, de a fokális index végig 0 a geodetikus mentén, hiszen $(0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n})$-ben $(n-1)-(n-1)=0$ az ugrása. Könnyen látható, hogy az $S^{n-1} \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ és a $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \times S^{n-1}$ részsokaságok fokális indexei a $(\gamma(t), \gamma(t))$ mentén minden $t>1$ pontban $(n-1)$ illetve $-(n-1)$. Azaz

$$i_{foc}\left((\gamma'(0), \gamma'(0)), \{0_{\mathbb{R}^n}\} \times S^{n-1}\right) \leq i_{foc}\left((\gamma'(0), \gamma'(0)), S^{n-1} \times S^{n-1}\right) \leq$$
$$i_{foc}\left((\gamma'(0), \gamma'(0)), S^{n-1} \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right).$$

A feni 3.1. Tétel mintájára az alábbi állítás is igaz.

3.1 Állítás. *Legyen (M,g) egy szemi-Riemann-sokaság és $P \subset \widetilde{P} \subset M$ szemi-Riemann-részsokaságok. Legyen $v \in N\left(\widetilde{P}\right) \subset N(P)$. Tegyük fel, hogy $n_-\left(g|_{T_{c_v(0)}P}\right) = n_-\left(g|_{T_{c_v(0)}\widetilde{P}}\right)$. Ekkor*

$$i_{foc}(v,P) \leq i_{foc}(\widetilde{v},\widetilde{P})$$

teljesül.

Bizonyítás. A $c_v(t)$ geodetikus mentén tetszőleges $\mathcal{P}_t$, $\mathcal{N}_t$ pozitív, ill. negatív disztribúciót véve $\widetilde{\mathcal{P}_t} = \mathcal{P}_t$, $\widetilde{\mathcal{N}_t} = \mathcal{N}_t$ választásra a $\phi = id$ mellett, a 3.1. Tétel 1., 2. pontjai teljesülnek. A 3. és 4. feltételek azonban nem feltétlen teljesülnek. Mivel a definíciók szerint $\mathcal{K} \subset \widetilde{\mathcal{K}}$ teljesül, és a tétel bizonyításában a (6) egyenlőtlenség triviálisan teljesül, (ehhez kellet a tételben a 3. feltétel), továbbá a (7) egyenlőtlenségnél a Weingarten-endomorfizmust tartalmazó tagokra is egyenlőség teljesül, (ehhez kellett a tételben 4. feltétel), így a 3.1. Tétel bizonyítása erre az esetre is igaz, amiből $I(V,V) = \widetilde{I}(V,V)$ minden $V \in \mathcal{K}$ estén. A már említett $\mathcal{K} \subset \widetilde{\mathcal{K}}$ tartalmazás miatt pedig $n_-(I|_{\mathcal{K}}) \leq n_-(\widetilde{I}|_{\widetilde{\mathcal{K}}})$ teljesül. Mivel a Piccione-Tausk által adott (3) index felbontásban a többi tag egyenlő P illetve $\widetilde{P}$ esetén, így a bizonyítani kívánt $i_{foc}(v,P) \leq i_{foc}(\widetilde{v},\widetilde{P})$ összefüggés adódik. □

3.3 Következmény. *Legyenek (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ szemi-Riemann-sokaságok, melyek dimenziója $m \leq \widetilde{m}$. Legyenek továbbá $P \subset M$, $\widetilde{P} \subset \widetilde{M}$ szemi-Riemann-részsokaságok, és $v \in N(P)$, $\widetilde{v} \in N\left(\widetilde{P}\right)$. Ha vannak olyan $c_v(t)$, $\widetilde{c_{\widetilde{v}}}(t)$, $t \in [0,1]$ geodetikusok menti párhuzamos ortonormált vektormezők által feszített maximális pozitív illetve negatív disztribúciók $\mathcal{P}_t =< E_1(t), \ldots, E_k(t) >$, $\mathcal{N}_t =< E_{k+1}(t), \ldots, E_m(t) >$, a $c_v(t)$ mentén, és $\widetilde{\mathcal{P}_t} =< \widetilde{E_1}(t), \ldots, \widetilde{E_k}(t) >$, $\widetilde{\mathcal{N}_t} =< \widetilde{E_{k+1}}(t), \ldots, \widetilde{E_{\widetilde{m}}}(t) >$ a $\widetilde{c_{\widetilde{v}}(t)}$ mentén, amelyekre a $\phi : T_{c_v(0)}M \to T_{\widetilde{c_{\widetilde{v}}}(0)}\widetilde{M}$, $\phi(E_i(t)) \mapsto \widetilde{E_i}(t)$, $i = 1, \ldots, m$ monomorfizmusnál a következő tulajdonságok teljesülnek:*

1. *$g(R(V(t), c_v'(t))c_v'(t), E_i(t)) = \widetilde{g}(\widetilde{R}(\phi(V(t)), \widetilde{c_{\widetilde{v}}}(t))\widetilde{c_{\widetilde{v}}}(t), \widetilde{E_i}(t))$, minden $V(t) \in \mathcal{P}_t$, $i = 1, \ldots, m$ esetén;*

2. *$\phi(T_{c_v'(0)}P) \subset T_{\widetilde{c_{\widetilde{v}}}(0)}\widetilde{P}$;*

3. *a minimális sajátértéke az R görbületi tenzornak az $\mathcal{N}_t$ disztribúcióra megszorítva $\geq$ maximális sajátértéke a $\widetilde{R}$ görbületi tenzornak az $\widetilde{\mathcal{N}_t}$ disztribúcióra megszorítva;*

4. *a w_v Weingarten-endomorfizmus maximális sajátértéke $\leq$ a $\widetilde{w_{\widetilde{v}}}$ Weingarten-endomorfizmus minimális sajátértéke,*

akkor

$$i_{foc}(v,P) \geq i_{foc}(\widetilde{v},\widetilde{P}) + \left(n_+\left(\widetilde{g}|_{T_{\widetilde{c_{\widetilde{v}}}(0)}\widetilde{P}}\right) - n_+\left(g|_{T_{c_v(0)}P}\right)\right).$$

Bizonyítás. Használhatjuk a fenti 3.1. Tételt az $(M,-g)$, P, v illetve az $(\widetilde{M},-\widetilde{g})$, $\widetilde{P}$, $\widetilde{v}$ rendszerekre. Ismét megjegyezzük, hogy a metrika -1-szeresére való megváltoztatásánál a geodetikusok, a P-Jacobi-mezők, a görbületi tenzor, a Weingarten-endomorfizmus nem változik meg, de a fokális index a -1-szeresére fog változni. Továbbá az $(M,-g)$, P,v és a $(\widetilde{M},-\widetilde{g})$, $\widetilde{P}$, $\widetilde{v}$ rendszerek szintén teljesítik az $(R2)$ regularitási feltételt, hiszen ehhez elég a P-Jacobi-mezőket ismerni, melyek nem változnak a metrika -1-vel való szorzásánál. □

3.2 Megjegyzés. *Ismét igaz a következő egyenlőtlenség:*

$$i_{foc}(v,P) \geq i_{foc}(\widetilde{v},\widetilde{P}),$$

mivel az előző következményben $n_+(\widetilde{g}|_{T_{c_{\widetilde{v}}(0)}\widetilde{P}}) - n_+(g|_{T_{c_v(0)}P}) \geq 0$.

3.3 Megjegyzés. *Legyen* (M,g) *egy szemi-Riemann-sokaság és* $P \subset \widetilde{P} \subset M$ *szemi-Riemann-részsokaságok. Legyen* $v \in N\left(\widetilde{P}\right) \subset N(P)$. *Tegyük fel, hogy* $n_+\left(g|_{T_{c_v(0)}P}\right) = n_+\left(g|_{T_{c_v(0)}\widetilde{P}}\right)$. *Ekkor*

$$i_{foc}(v,P) \geq i_{foc}(\widetilde{v},\widetilde{P})$$

teljesül.

3.2 Definíció. *Jelölje* $T_{c_v(0)}P(t)$, $N_{c_v(0)}P(t)$ *a* c_v *geodetikus mentén a* $T_{c_v(0)}P$, $N_{c_v(0)}P$ *alterek párhuzamos eltoltjait a* $c_v(t)$, $t \in [0,1]$ *pontba. Így egy*

$$T_{c_v(t)}M = T_{c_v(0)}P(t) \oplus N_{c_v(0)}P(t)$$

dekompozíciót kaptunk. Ha a görbületi tenzor a $T_{c_v(0)}P$ *teret önmagába képezi, azaz*

$$T_{c_v(0)}P(t) \ni V(t) \mapsto R(V(t),c_v'(t))c_v'(t) \in T_{c_v(0)}P(t),$$

akkor azt mondjuk, hogy ***a Jacobi-egyenlet felhasad*** c_v ***mentén a*** P***-re vonatkoztatva***.

Használva, hogy a görbületi tenzor szimmetrikus a metrikus tenzorra nézve, azt kapjuk, hogy a görbületi tenzor az $N_{c_v(0)}P(t)$ alteret is önmagába képezi. Ha a Jacobi-egyenlet felhasad c_v mentén a P-re vonatkoztatva, akkor minden Jacobi-mező is felhasad két részre.

3.3 Definíció. *Az éritőtér eltoltjaiban haladó Jacobi-mezőket, melyek teljesítik a*

$$1.\, V(0) \in T_{c_v(0)}P;$$
$$2.\, V'(0) - w_v(V(0)) = 0,$$

feltételeket, ***erős Jacobi-mező****knek nevezzük, ahol $w_v : T_{c_v(0)}P \to T_{c_v(0)}P$ a v által meghatározott Weingarten-endomorfizmus. Az erős Jacobi-mezők vektorterét jelölje $\mathcal{J}_S(c_v, P)$. A normális tér eltoltjaiban haladó Jacobi-mezők terét, melyek teljesítik a*

$$1.\, V(0) = 0;$$
$$2. V'(0) \in N_{c_v(0)}P$$

feltételeket, jelölje $\mathcal{J}_0\left(c_v, P\right)$.
Az erős Jacobi-mezők zérushelyeit ***erős fokális pont****oknak hívjuk.*

Jelölje $C^S_{\mathcal{N}}(v)$ (illetve $C^S_{\mathcal{P}}(v)$) az $\mathcal{N}_t \cap T_{c_v(0)}P(t)$, (illetve a $\mathcal{P}_t \cap T_{c_v(0)}P(t)$) disztribúciókhoz tartozó konjugált pontok számát multiplicitással a $c_v(t)$, $t \in [0,1]$ geodetikus mentén, a precíz definíciót lásd a $C_{\mathcal{N}}(v)$ definiálásánál (3.1. Definíció), ahol az $\mathcal{N}_t$ helyett az $\mathcal{N}_t \cap T_{c_v(0)}P(t)$ disztribúciót használjuk. Továbbá jelölje $i^S_{foc}(v, P)$ a $c_v\left([0,1]\right)$ geodetikus szakaszon az erős fokális pontok indexeinek összegét, azaz a fokális index definíciójához hasonlóan, ha $c_v\left(t_i\right)$ egy erős fokális pont, akkor legyen

$$\mathcal{D}^S_{t_i}\left(P, c_v\right) \stackrel{def}{=} \left\{X'\left(t_i\right) \mid X \in \mathcal{J}_S\left(c_v, P\right),\, X\left(t_i\right) = 0\right\}$$

a $c_v\left(t_i\right)$ pontban eltűnő erős P-Jacobi-mezők deriváltjai által a $c_v\left(t_i\right)$ pontban feszített altér. Ekkor

$$i^S_{foc}\left(v, P\right) \stackrel{def}{=} \sum_{t \in [0,1]} \operatorname{sgn}\left(g|_{\mathcal{D}^S_t(P, c_v)}\right),$$

ahol sgn definícióját lásd a 2.6. Definíció előtt.

3.2 Állítás. *Legyen az (M,g), P, v rendszer mint az előző tételben. Tegyük fel, hogy a Jacobi-egyenlet felhasad a c_v geodetikus mentén. Ekkor:*

$$\begin{aligned}
&i^S_{foc}(v,P) = n_-(I|_{\mathcal{K}\cap T_{c_v(0)}P(t)}) - n_+(I|_{\mathcal{G}\cap T_{c_v(0)}P(t)}) - n_-(g|_{T_{c_v(0)}P});\\
&-n_-(g|_{T_{c_v(0)}P}) - C^S_{\mathcal{N}} \le i^S_{foc}(v,P) \le n_+(g|_{T_{c_v(0)}P}) + C^S_{\mathcal{P}};\\
&-n_-(g|_{T_{c_v(0)}P}) - n_-(g|_{T_{c_v(0)}P})\cdot\varrho(\delta,1) \le i^S_{foc}(v,P)\\
&\le n_+(g|_{T_{c_v(0)}P}) + n_+\left(g|_{T_{c_v(0)}P}\right)\cdot\varrho(\kappa,1),
\end{aligned}$$

ahol δ (illetve κ) a minimális (illetve maximális) sajátértékei a görbületi tenzornak az $\mathcal{N}_t \cap T_{c_v(0)}P(t)$, (illetve a $\mathcal{P}_t \cap T_{c_v(0)}P(t)$) disztribúciókon (lásd 3.2. Következményt), továbbá a ϱ függvény definíciójához is lásd a 3.2. Következményt.

Bizonyítás. A *Piccione-Tausk Tétel* indexformája felhasad, (ez a Theorem 5.2 [P-T2] bizonyításának értelemszerű módosításából látszik) így a fenti eredményeink a felhasadt indexforma erős részére alkalmazhatóak. □

Megjegyezzük, hogy ha a Jacobi-egyenlet felhasad c_v mentén, és a $g|_{T_{c_v(0)}P}$ pozitív (vagy negatív) definit, akkor $i^S_{foc}(v,P) = n_-(I|_{\mathcal{H}\cap T_{c_v(0)}P(t)})$, (vagy $i^S_{foc}(v,P) = n_-(-I|_{\mathcal{H}\cap T_{c_v(0)}P(t)})$). Így ez olyan mintha egy "Riemann indexforma" lenne, ezért a Riemann-esetben ismert becslések igazak maradnak. Például Szenthe J. [Sz1] cikkében szereplő 2. Lemma, mely Warner egy eredményének kiterjesztése, a szemi-Riemann-esetben az alábbi alakban fogalmazható meg:

3.2 Lemma. *Legyenek (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ szemi-Riemann-sokaságok, továbbá $P\subset M$, $\widetilde{P}\subset\widetilde{M}$ ezek részsokaságai, és $v\in N(P)$, $\widetilde{v}\in N\left(\widetilde{P}\right)$. Tegyük fel, hogy $g|_{T_{c_v(0)}P}$ és $\widetilde{g}|_{T_{c_v(0)}\widetilde{P}}$ pozitív definit, és hogy a Jacobi-egyenlet felhasad a c_v illetve a $\widetilde{c_{\widetilde{v}}}$ geodetikusok mentén. Ha teljesülnek még az alábbi feltételek is:*

1. *a maximális sajátértéke az R görbületi tenzornak a $T_{c_v(0)}P(t)$ disztribúción $\le$ a minimális sajátértéke a $\widetilde{R}$ görbületi tenzornak a $T_{\widetilde{c_{\widetilde{v}}}(0)}\widetilde{P}(t)$ disztribúción minden $t\in[0,1]$ esetén;*

2. a minimális sajátértéke $c_v'(0)$-hoz tartozó w_v Weingarten-endomorfizmusnak $\geq$ a maximális sajátértéke a $\widetilde{c_{\widetilde{v}}'}(0)$-hoz tartozo $\widetilde{w_{\widetilde{v}}}$ Weingarten-endomorfizmusnak,

akkor az $i_{foc}^S(v,P) \leq i_{foc}^S\left(\widetilde{v},\widetilde{P}\right)$ egyenlőtlenség teljesül.

Bizonyítás. A Szenthe [Sz1] cikkének 2. Lemmája alapján. □

Vegyük továbbra is azt az esetet, amikor a Jacobi-egyenlet felhasad a c_v geodetikus mentén, az (M,g), P, v rendszerben. Jelölje $R(t)$ az alábbi

$$[R(t)]_{ij} \overset{def}{=} g(R(E_i(t),c_v(t))c_v(t),E_j(t)) \cdot g(E_j(t),E_j(t)),\ i,j=1,\dots,p,$$

(i oszlop j sor), ahol $E_i(t)$, $i=1,\dots,p$ párhuzamos vektormezők a $c_v(t)$ geodetikus mentén, úgy hogy az $E_1(0),\dots,E_p(0)$ vektorok a $T_{c_v(0)}P$ vektortér egy bázisát adják. Ekkor a $T_{c_v(0)}P(t)$ disztribúcióban haladó vektormezőkre a Jacobi-egyenlet a $\frac{d^2}{dt^2}V(t)+R(t)V(t)\equiv 0$, $V(t)=(V_1(t),\dots,V_p(t))\in\mathbb{R}^p$ alakot ölti, ahol a $V(t)=\sum_{i=1}^p V_i(t)\,E_i(t)$ felbontás volt érvényes. A nem triviális erős Jacobi-mezők ezen egyenleten kívül még a $V(0)\neq 0$, $w_v(V(0))=V'(0)$ kezdetiérték feltételeket is teljesítik. Ha $V(t)$ egy erős Jacobi-mező, akkor a $c\cdot V(t)$, $c\in\mathbb{R}-\{0\}$ is az, amely zérushelyei megegyeznek $V(t)$ zérushelyeivel. Ha tehát azt a legkisebb pozitív t_0 értéket keressük, amire létezik olyan nem triviális erős Jacobi-mező, amelynek t_0 zérushelye, akkor elég, ha csak azokat az erős Jacobi-mezőket vizsgáljuk, melyek eleget tesznek a $<V(0),V(0)>=1$, $V'(0)=w(V(0))$ kezdetiérték feltételeknek, ahol $<,>$ az $\mathbb{R}^p$ kanonikus metrikája, azaz $<E_i(0),E_j(0)>=\delta_{ij}$, ahol δ_{ij} a Kronecker-delta szimbólum. Használva az $\mathbb{R}^p \underset{(E_i(0))}{\cong} T_{c_v(0)}P$ izometriát, melyet az $E_i(0)$ vektormezők segítségével definiálunk, és a fent már implicite bevezetett $\mathbb{R}^p \underset{(E_i(t))}{\cong} T_{c_v(0)}P\,(t)$ izometriát, a következőt mondhatjuk:

3.3 Állítás. *Ha a $t\mapsto R(t)\in\mathbb{R}^{p\times p}$ mátrix értékű függvénynél, egy rögzített t_0 értékre vesszük azt a minimális κ_{t_0} értéket, melyre $<R(t_0)W,W>\leq \kappa_{t_0}\cdot <W,W>$ minden $W\in\mathbb{R}^p$ esetén, majd minden értelmezett $t_0\geq 0$ esetén veszzük a κ_{t_0} szuprémumát melyet jelöljön κ, továbbá, ha a $w_v:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ Weingarten-endomorfizmus minimális sajátértéke σ, akkor nincsen erős* *fokális pont a $c_v(t)$ geodetikus mentén a következő paraméter értékig:*

$$\inf\{t_0 \mid \textit{létezik az } f''(t) \geq -\kappa f(t),\ t \in [0,t_0],\ f(0)=1,\ f'(0)=\sigma,\ f(t_0)=0 \\ \textit{feltételeknek eleget tevő függvény}\}$$

Bizonyítás. Tekintsük a $V(t)$ erős Jacobi-mezőt, mint egy $t \mapsto V(t) \in \mathbb{R}^p$ görbét, és legyen t_0 ennek az első zérushelye, ahol, mint ahogyan azt láttuk az állítás előtt, feltehető, hogy $< V(0), V(0) >= 1$. Legyen $f(t) \stackrel{def}{=} < V(t), V(t) >^{\frac{1}{2}}$, ekkor

$$f'(t) = < V(t), V(t) >^{-\frac{1}{2}} < V'(t), V(t) > = < V'(t), \frac{V(t)}{\|V(t)\|} >$$

$$f''(t) = < V(t), V(t) >^{-\frac{1}{2}} < V''(t), V(t) > + \\ < V(t), V(t) >^{-\frac{1}{2}} \left\{ < V'(t), V'(t) > - \left(\frac{< V'(t), V(t) >}{< V(t), V(t) >^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right\}.$$

Könnyen látható, hogy

$$g(t) \stackrel{def}{=} < V(t), V(t) >^{-\frac{1}{2}} \left\{ < V'(t), V'(t) > - \left(\frac{< V'(t), V(t) >}{< V(t), V(t) >^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right\} \geq 0,$$

ha $t \in [0, t_0)$, mivel $\sqrt{< V'(t), V'(t) >} \geq \sqrt{\left| < V'(t), \frac{V(t)}{\|V(t)\|} > \right|}$. A Jacobi-egyenletből következik, hogy $< V''(t), V(t) > = < -R(t)V(t), V(t) > \geq -\kappa < V(t), V(t) >$, amelyből $< V''(t), \frac{V(t)}{\|V(t)\|} > \geq -\kappa < V(t), V(t) >^{\frac{1}{2}}$, ami azt adja, hogy:

$$f''(t) - g(t) \geq -\kappa f(t).$$

Mivel $g(t) \geq 0$, ha $t \in [0, t_0)$ így a folytonosság miatt:

$$f''(t) \geq -\kappa f(t),\ t \in [0, t_0] \tag{8}$$

érvényes, és a kezdeti feltétel szerint pedig:

$$f(0) = 1$$

teljesül. □

Vegyük észre, hogy az állításban nem az R görbületi tenzornak a g metrikus tenzor segítségével vett maximális sajátértékét vettük, hanem valami mást.

4 Izometrikus csoporthatás

Ebben a fejezetben kompakt összefüggő Lie-csoportok izometrikus hatását vizsgáljuk, úgynevezett globálisan hiperbolikus összefüggő Lorentz-sokaságokon. Mielőtt definiálnánk pontoson mit is jelent ez, néhány szó arról, hogy miért lehet érdekes ennek a vizsgálata. Számtalan eredmény van kompakt összefüggő Lie-csoportok izometrikus hatásáról kompakt összefüggő Riemann-sokaságokon. Ha meg szeretnénk vizsgálni, hogy mi a helyzet Lorentz-esetben az első kérdés mit vegyünk a sokaság kompaktsága helyett feltételnek, hiszen ha egy Lorentz-sokaság kompakt, akkor létezik benne egy időszerű geodetikus hurok. Időorientált Lorentz-sokaságok esetén, amelyekkel mi foglalkozni fogunk, egy ilyen geodetikus hurok azt jelentené a fizikusoknak, hogy egy pont jövője és múltja nem választódik szét, azaz a pont jövője (a jövőjében lejátszódó események) hatással lennének a múltjára. Azért, hogy ilyen keveredés ne legyen, azaz a múlt és jövő minden pont esetében jól elválasztódjon, de valamilyen értelemben a kompaktságból származó jó tulajdonságok is megmaradjanak, a globális hiperbolicitás definícióját fogjuk alkalmazni.

E fejezetben végig minden $(L, <,>)$ Lorentz-sokaság legyen időorientált, továbbá jelöljön G egy kompakt Lie-csoportot, amely izometrikusan hat a sokaságon, azaz G elemei az L izometriái lesznek, ahol a $G \times L \to L$ hatás sima. Jól ismert, hogy ebben az esetben az orbitok sima kompakt részsokaságai L-nek.

4.1 Definíció. *Az $(L, <,>)$ időorintált Lorentz-sokaság* ***globálisan hiperbolikus****, ha minden $x, y \in L$ esetén a $J^+(x) \cap J^-(y)$ metszet kompakt és L erősen kauzális, azaz minden pontnak létezik egy olyan tetszőlegesen kicsiny U környezete, melyre nem létezik olyan $\sigma : I \to L$ kauzális görbe, amelyre $\sigma(I) \cap U$ nem összefüggő.*

Az erős kauzalitás lényegében, a kompaktsági feltevéstől eltekintve, ekvivalens azzal, hogy minden pontnak van olyan alkalmasan kicsiny környezete, hogy minden e környezetből induló kauzális görbe, ha elhagyja a környezetet, akkor sohasem tér vissza oda.

Környezeten mindig nyílt környezetet értünk, és az alábbi definíciókat és jelöléseket fogjuk haználni.

- $G(x)$ jelöli az x pont **orbitját**, azaz $G(x) \stackrel{def}{=} \{g \cdot x \,|\, g \in G\}$;

- G_x az x pont **izotrópia részcsoport**ja, vagyis $G_x \stackrel{def}{=} \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$;
- $N_z(x)$ a $z \in G(x)$ pont **normális tere**, azaz legyen $N_z(x) \stackrel{def}{=} \{v \in T_z L \mid g(v,w) = 0, \forall w \in T_z G(x)\}$;
- $NG(x)$ a $G(x)$ orbit **normális nyaláb**ja, vagyis $NG(x) \stackrel{def}{=} \cup\{N_z G(x) \mid z \in G(x)\}$;
- $I^+(N_z G(x))$, illetve $J^+(N_z G(x))$ jelölje a jövőbe mutató időszerű, illetve kauzális vektorokat a $N_z G(x) \subset T_z L$ térben;
- $I^+(NG(x))$ a **null szelés időszerű jövője a normális nyalábban**, azaz $I^+(NG(x)) \stackrel{def}{=} \cup\{I^+(N_z G(x)) \mid z \in G(x)\}$;
- $\mathcal{L} : \Omega \to \mathbb{R}$ legyen a hosszúság függvény a szakaszonként sima görbéken, vagyis ha $\sigma : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ egy ilyen görbe, akkor
$$\mathcal{L}(\sigma) \stackrel{def}{=} \int_0^\alpha \epsilon(\sigma'(t)) |< \sigma'(t), \sigma'(t) >|^{\frac{1}{2}} \, dt,$$
ahol $\epsilon(\sigma'(t))$ értéke $+1$, 0, -1 attól függően, hogy $< \sigma'(t), \sigma'(t) >$ pozitív, nulla, vagy negatív;
- $d : L \times L \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a Lorentz távoság függvény (vagy időszeparáció), azaz ha Ω_x^y jelöli a jövőbe mutató kauzális x-ből y-ba menő szakaszonként sima görbék halmazát, ahol egy görbe jövőbe mutató kauzális, ha a deriváltjából származó érintővektorai jövőbe mutató és kauzális vektorok, akkor a Lorentz távolság a $d(x,y) \stackrel{def}{=} |\inf\{\mathcal{L}(\sigma) \mid \sigma \in \Omega_x^y\}|$ függvény, ahol kivételesen $\inf \emptyset \stackrel{def}{=} 0$;
- ha $\gamma : [0, \alpha] \to L$ egy jövőbe mutató kauzális geodetikus a $\gamma(0), \gamma(\alpha)$ pontok között, és $d(\gamma(0), \gamma(\alpha)) = \mathcal{L}(\gamma)$, akkor a γ **geodetikus**t **maximális**nak mondjuk;
- az $x \in L$ pont **kauzálisan megelőzi** az $y \in L$ pontot, jelölésben $x \leqq y$, ha létezik x-ből y-ba menő szakaszonként sima jövőbe mutató kauzális görbe, ekkor azt mondjuk, hogy a két pont **kauzális relációban áll**. Ha a kauzális görbe nem triviális, konstans leképezés, akkor az $x \lneqq y$ jelölést fogjuk használni. Ez nem okoz majd félreértést, hiszen $x \lneqq x$ nem állhat elő a globális hiperbolocitás miatt;

- $v \in NG(x)$ **fokális vektor**, ha $\ker(T_v\varepsilon) \neq \{0\}$;
- továbbra is jeölje $\varepsilon : \widetilde{NG(x)} \to L$ az első fejezetben is használt $\exp|_{\widetilde{NG(x)}}$ leképezést, ahol $\widetilde{NG(x)}$ az exponenciális leképezés értelmezési tartománya.

A következő lemma bizonyításához megemlítjük, hogy a globális hiperbolicitás miatt minden $x \in L$ pontra $J^+(x) = \overline{J^+(x)}$, ahol természetesen $\overline{J^+(x)}$ a $J^+(x)$ halmaz lezárását jelöli.

4.1 Lemma. *Legyen L egy globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság, amin a kompakt összefüggő G Lie-csoport izometrikusan hat. Ekkor minden $G(x)$, $x \in L$ orbit egy összefüggő Riemann-részsokasága az L-nek.*

Bizonyítás. Jól ismert, hogy a $G(x)$ orbit egy sima kompakt részsokaság L-ben. Először azt mutatjuk meg, hogy nincsenek kauzális relációban álló pontjai a $G(x)$ orbitnak. Tegyük fel indirekt, hogy léteznek olyan $y_1, y_2 \in G(x), y_1 \neq y_2$ elemek, amelyekre $y_1 \lneqq y_2$. Ekkor minden $g \in G$ csoport elemre $g \cdot y_1 \lneqq g \cdot y_2$. Mivel G tranzitíven hat $G(x)$-en, így minden $y \in G(x)$ pontra létezik egy olyan $z \in G(x)$ amire $y \lneqq z$ teljesül.

Mivel $x \lneqq x$ nem fordulhat elő a globális hiperbolicitás miatt, így $\lneqq$ egy parciális rendezés lesz $G(x)$-en, ahol minden láncnak van felső korlátja, ahogyan azt bizonyítani fogjuk. Legyen $y_1 \lneqq y_2 \lneqq y_3 \lneqq \dots$ egy lánc $G(x)$-ben. Mivel G tranzitíven hat $G(x)$-en, így ez a lánc $y_1 \lneqq g_2 \cdot y_1 \lneqq g_3 \cdot y_3 \lneqq \dots$ alakban is írható alkalmas $g_2, g_3, \dots \in G$ elemekre. G kompaktsága miatt létezik egy olyan $n_i \to \infty$ részsorozat, mely konvergens, $g_{n_i} \to g \in G$. Ekkor azonban $g_{n_i} \cdot y_1 \to g \cdot y_1$ is teljesül. Mivel a kauzális jövőkre az alábbi tartalmazások teljesülnek

$$J^+(y_1) \supset J^+(g_{n_1} \cdot y_1) \supset J^+(g_{n_2} \cdot y_1) \supset \dots,$$

és mivel minden $i \in \mathbb{Z}^+$ indexre létezik egy olyan $k \in \mathbb{Z}^+$ index, melyre

$$J^+(g_{n_k} \cdot y_1) \supset J^+(g_i \cdot y_1) \supset J^+\left(g_{n_{k+1}} \cdot y_1\right),$$

továbbá a $g_{n_i} \cdot y_1 \to g \cdot y_1$ konvergencia teljesül, így $g \cdot y_1 \in J^+(g_i \cdot y_1)$ bizonyítható az alábbiak szerint minden $i \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Ha $g \cdot y_1$ nem eleme a zárt $\cap_{j=1}^{\infty} J^+(g_j \cdot y_1)$ halmaznak, akkor létezik egy olyan n_k index, melyre $g \cdot y_1$ nem lesz eleme a zárt $J^+(g_{n_k} \cdot y_1)$ halmaznak, azaz eleme lesz a nyílt $L - J^+(g_{n_k} \cdot y_1)$ halmaznak, de a minde $n_l \geq n_k$ esetén fennálló $g_{n_l} \cdot y_1 \in J^+(g_{n_k} \cdot y_1)$ tartalmazás ellentmondana a $g_{n_i} \cdot y_1 \to g \cdot y_1$ konvergenciának. Így tehát $g \cdot y_1 \in J^+(g_i \cdot y_1)$ minden $i \in \mathbb{Z}^+$ esetén, azaz $g_i \cdot y_1 \leqq g \cdot y_1$ minden i indexre, sőt $g_i \cdot y_1 \lneqq g_{i+1} \cdot y_1 \leqq g \cdot y_1$ miatt $g_i \cdot y_1 \lneqq g \cdot y_1$ is teljesül. Tehát találtunk egy felső korlátot a lánchoz. Ekkor a *Zorn lemma* szerint a $G(x)$ parciális rendezésénél létezik egy maximális elem $w \in G(x)$. Egy ilyen elem azonban nem létezhet, mivel a bizonyítás elején megmutattuk, hogy minden elemre létezik nála nagyobb, azaz létezik egy $v \in G(x)$ amire $w \lneqq v$, ami azonban ellentmondana w maximalitásának. Ezzel ellentmodásra jutottunk, tehát nincsenek kauzális relációban lévő pontjai a $G(x)$ orbitnak.

Elég azt megmutatnunk, hogy $T_xG(x)$ térszerű. Ha időszerű lenne, akkor lenne egy x-hez közeli olyan $y \in G(x) \cap I^+(x)$ pont, amelyre $x \lneqq y$ teljesülne, ami mint láttuk nem lehet. Ha $T_xG(x)$ fényszerű, G tranzitivitása miatt minden $T_zG(x), z \in G(x)$ is fényszerű, így minden érintőtér tartalmaz egy egyértelmű fényszerű egyenest, ami adna egy fényszerű "intergrál görbét" $G(x)$-ben, ami kauzális relációban álló orbit pontokat adna, de ez nem lehetséges. Azaz $T_xG(x)$ valóban csak térszerű lehet. $\square$

A lemmára adható olyan bizonyítás is, mely a kiválasztási axiómát nem használja.

E lemmában a globális hiperbolicitás feltétele szükséges, mint azt az alábbi példa mutatja.

4.1 Példa. *Legyen $L = \mathbb{R} \times \mathbb{S}_1^1$, ahol az $\mathbb{R}$ téren a kanonikus Riemann metrikát vesszük, az $\mathbb{S}_1^1$ körvonalon pedig a kanonikus metrika mínusz egyszeresét. Ha vesszük az $\mathbb{S}^1$ Lie-csoport kanonikus hatását az $\mathbb{S}_1^1$ sokaságon, akkor adódik egy hatás az L sokaságon is, amelyre az orbitok időszerű részsokaságok (hurkok).*

4.1 Következmény. *Legyen L egy globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság és G egy nem feltétlen összefüggő kompakt Lie-csoport, mely izometrikusan hat L-en. Ekkor minden orbit előáll, mint kompakt Riemann-részsokaságok véges uniója.*

Bizonyítás. A fenti 4.1. Lemma G minden összefüggőségi komponensére alkalmazható. Mivel G kompakt, így véges sok összefüggőségi komponens van. □

A következő geometriai tényt fogjuk bizonyítani: egy orbit időszerű (illetve fényszerű) jövőjében lévő minden y ponthoz találhatunk olyan időszerű (illetve fényszerű) geodetikust, mely az orbitra merőlegesen indul és az y pontban végződik.

4.2 Lemma. *Ha L egy globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság, melyen a kompakt G Lie-csoport izometrikusan hat. Ekkor $\varepsilon\left(I^{+}\left(NG\left(x\right)\right)\right)=I^{+}\left(G\left(x\right)\right)$ és $\varepsilon\left(J^{+}\left(NG\left(x\right)\right)\right)=J^{+}\left(G\left(x\right)\right)$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy

$$\varepsilon\left(I^{+}\left(NG\left(x\right)\right)\right)=\varepsilon\left(\cup\left\{I^{+}\left(N_{z}G\left(x\right)\right)\mid z\in G\left(x\right)\right\}\right)\subset I^{+}\left(G\left(x\right)\right).$$

Ha most $y\in I^{+}\left(G\left(x\right)\right)$, akkor van egy fényszerű, jövőbe mutató görbe a $G\left(x\right)$ orbit és az y pont között, ahol feltehetjük, hogy a görbe kiinduló pontját neveztük x-nek. A globális hiperbolicitás miatt létezik egy maximális kauzális görbe is x-ből y-ba (lásd [B-E-E] Theorem 6.1). Ha ez a geodetikus maximális hosszúságú a $G\left(x\right)$-ből y pontba menő görbék között is, akkor könnyen látható, hogy a $G\left(x\right)$ orbitra merőlegesen kell indulnia, különben nem lenne maximális. Amennyiben ez nem maximális a fenti görbék között, akkor létezik egy olyan $G\left(x\right)$-ből y-ba menő kauzális geodetikusokból álló $\gamma_{1},\gamma_{2},\ldots$ sorozat, melyre $\mathcal{L}\left(\gamma_{i}\right)\to\sup\left\{d\left(z,y\right)\mid z\in G\left(x\right)\right\}$. Ekkor a kompaktság miatt feltehető, hogy egy olyan sorozatot választottunk, melyre $G\left(x\right)\ni\gamma_{i}\left(0\right)\to w\in G\left(x\right)$. Mivel $J^{-}\left(y\right)$ zárt és $\gamma_{i}\left(0\right)\in J^{-}\left(y\right)$, így $w\in J^{-}\left(y\right)$ adódik. Ebből következik, hogy létezik egy $n_{1}<n_{2}<\ldots$

részsorozat és egy γ kauzális geodetikus a w pontból y-ba, melyekre $\gamma_{n_i} \to \gamma$, továbbá $\mathcal{L}(\gamma_{n_i}) \to \mathcal{L}(\gamma)$ is teljesül (lásd [B-E-E] Corollary 3.32). Lévén, hogy $\mathcal{L}(\gamma_{n_i}) \leq \mathcal{L}\left(\gamma_{n_{i+1}}\right) \leq \cdots \leq \mathcal{L}(\gamma)$ és $\mathcal{L}(\gamma_i) \to \sup\{d(z,y) \mid z \in G(x)\}$ volt, így γ egy maximális kauzális geodetikus a $G(x)$ orbit és az y pont között. Így az első egyenlőséget igazoltuk, hiszen $0 < \mathcal{L}(\gamma_1) \leq \mathcal{L}(\gamma_2) \leq \cdots \leq \mathcal{L}(\gamma)$ miatt γ időszerű.

A második egyenlőség igazolásához legyen $y \in J^+(G(x)) - I^+(G(x))$, így létezik egy $\gamma : [0,1] \to L$, $\gamma(0) \in G(x)$, $\gamma(1) = y$ fényszerű geodetikus. Amennyiben ez nem lenne ortogonális az orbitra, úgy vegyük egy U geodetikusan konvex környezetét a $\gamma(0)$ pontnak. Könnyen látható, hogy a $G(x)$ orbit elmetszi az $I^+(\gamma(\epsilon)) \cap U$ környezetet, ha $\epsilon \in [0,1]$ kellően kicsi, ami azt mutatja, hogy az időszerű geodetikus $G(x)$ és $\gamma(\epsilon)$ között összefűzve a $\gamma|_{[\epsilon,1]}$ fényszerű geodetikussal, egy kauzális görbét ad, mely nem fényszerű, így létezik időszerű görbe is (sőt igazából egy geodetikus is) $G(x)$ és y között, ami ellentmond az $y \in J^+(G(x)) - I^+(G(x))$ választásnak. Így γ-nak az orbitra merőleges fényszerű geodetikusnak kell lennie, ami azt mutatja, hogy $y \in \exp(\cup\{J^+(N_zG(x)) \mid z \in G(x)\})$. Ezzel a $J^+(G(x)) \subset \exp(J^+(NG(x)))$ tartalmazást bizonyítottuk, míg a $J^+(G(x)) \supset \exp(J^+(NG(x)))$ irány triviális. $\square$

4.2 Definíció. *Az $S \subset L$ részhalmazt Cauchy hiperfelületnek nevezzük, ha minden kiterjeszthetetlen kauzális görbe pontosan egy pontban metszi.*

E definíciót lásd még [B-E-E] 65. o.

4.2 Következmény. *Legyen L egy összefüggő globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság, melyen izometrikusan hat egy kompakt összefüggő G Lie-csoport, ha létezik egy orbit melyre $\dim G(x) = \dim L - 1$, akkor $G(x)$ egy Cauchy hiperfelület, és minden más orbit is Cauchy hiperfelület.*

Bizonyítás. Mivel $G(x)$ 1-kodimenziós, így az $N_zG(x)$ normális tér egy 1-dimenziós időszerű altér minden $z \in G(x)$ esetén, ezért az $I^+(N_zG(x)) \cup$

$\{0_z\} = J^+(N_zG(x))$ egyenlőség érvényes minden $z \in G(x)$ pontra, továbbá a globális hiperbolicitás miatt $\overline{I^+(G(x))} = J^+(G(x))$. Ekkor:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\varepsilon(NG(x))} = \overline{\varepsilon(I^+(NG(x)))} \cup \overline{\varepsilon(I^-(NG(x)))} = \\
&\overline{I^+(G(x))} \cup \overline{I^-(G(x))} = J^+(G(x)) \cup J^-(G(x)) = \\
&\varepsilon\left(\cup\left\{J^+(N_zG(x))\,|z \in G(x)\right\}\right) \cup \varepsilon\left(\cup\left\{J^-(N_zG(x))\,|z \in G(x)\right\}\right) = \\
&\varepsilon\left(\cup\left\{I^+(N_zG(x))\,|z \in G(x)\right\}\right) \cup \varepsilon\left(\cup\left\{I^-(N_zG(x))\,|z \in G(x)\right\}\right) \cup G(x) = \\
&\varepsilon\left(I^+(NG(x))\right) \cup \varepsilon\left(I^-(NG(x))\right) \cup G(x) = \varepsilon(NG(x)).
\end{aligned}
$$

Itt azonban a bal oldal zárt, míg a jobb oldal nyílt, ez pedig csak úgy lehet, ha $\varepsilon(NG(x)) = L$.

Mivel $\dim G(x) = \dim L - 1$, így mint említettük $I^+(N_zG(x))$ egy 1-dimenziós időszerű altér minden $z \in G(x)$ esetén. A 4.1. Lemma szerint G_z triviálisan hat ezen az altéren, ezért ha minden $I^+(N_zG(x))$ altérben (egyenesen) vesszük a jövőbe mutató egység hosszúságú (-1 hosszú) vektort, akkor egy G-invariáns jövőbe mutató sima időszerű egységvektormezőt kaptunk, melyet jelöljön W.

A 4.1. Lemmánk következtében minden $y \in L$ pontból csak jövőbe vagy csak múltba irányított kauzális geodetikussal érhetjük el a $G(x)$ orbitot, és a *mostani bizonyítás első szakasza* értelmében, valamelyik típusúval el is érhetjük az orbitot, sőt azt is tudjuk, hogy időszerű geodetikussal is elérhetjük, mely az orbitra merőleges. Tegyük fel, hogy egy $\gamma_1 : [0,\alpha] \to L$, $\gamma_1(0) = y$, $\gamma_1(\alpha) \in G(x)$ múltba mutató időszerű egység sebességgel paraméterezett geodetikussal érjük el az orbitot, mely merőleges az orbitra. Ha létezne egy $\gamma_2 : [0,\beta] \to L$ hasonló tulajdonságú geodetikus, azaz $\gamma_2(0) = y$, $\gamma_2(\beta) \in G(x)$ múltba mutató időszerű egység sebességgel paraméterezett geodetikus, mely merőleges az orbitra, akkor $\alpha = \beta$. Ez azért van így, mert tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$, ekkor a *bizonyításunk második szakasza* értelmében $g \cdot \gamma_1|_{[0,\alpha]} = \gamma_2|_{[\beta-\alpha,\beta]}$ arra a $g \in G$ elemre, melynél $g \cdot \gamma_1(\alpha) = \gamma_2(\beta)$ (itt használjuk ki az egység sebességű paraméterezést). Ekkor azonban $\gamma_2|_{[0,\beta-\alpha]}$ egy múltba mutató időszerű nem triviális geodetikus lenne a

$g \cdot y \in G(y)$ pontból az y pontba, ami ellentmondana a 4.1. Lemmának. Ebből adódik, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén az $\exp(t \cdot W)$ halmaz egy orbit lesz, és minden orbit előáll ilyen alakban valamely $t \in \mathbb{R}$ esetén. Azt is mondhatnánk, hogy egy $f_{G(x)} : L \to \mathbb{R}$, $f_{G(x)}(y) \mapsto t_0$, melyre $G(y) = \exp(t_0 \cdot W)$ alakú időszeparáció függvényt alkottunk, mely konstans szintjei az orbitok. Ez a függvény jól definiált, épp ezt mutatta a γ_1, γ_2 geodetikusokra elmondott érvelés. És ez a függvény valóban az időszeparációt, azaz a Lorentz távolságot fogja megadni egy pont és a $G(x)$ orbit között.

Vegyünk egy tetszőleges $G(y) = \exp(t_0 \cdot W)$ orbitot. Ekkor az $f_{G(x)}$ függvény folytonossága miatt könnyen látható, hogy az $\left\{y \in L \mid f_{G(x)}(y) < t_0\right\}$ és az $\left\{y \in L \mid f_{G(x)}(y) > t_0\right\}$ halmazok diszjunktak, továbbá

$$\left\{y \in L \mid f_{G(x)}(y) < t_0\right\} \cup \left\{y \in L \mid f_{G(x)}(y) > t_0\right\} = L - G(y).$$

Viszont, ha $\dim G(y) < \dim L - 1$, akkor $L - G(y)$ összefüggő lenne, ezért a $G(y)$ orbit valóban egy hiperfelület.

Legyen $\varphi : (\alpha, \beta) \to L$ egy kiterjeszthetetlen kauzális görbe. A 4.1. Lemmánk miatt az $f_{G(x)} \circ \varphi : (\alpha, \beta) \to f_{G(x)}(L) \subset \mathbb{R}$ függvény injektív. Ezért feltehetjük, hogy az $f_{G(x)} \circ \varphi$ függvény szigorúan monoton növő. Elég azt megmutatnunk, hogy $f_{G(x)} \circ \varphi$ szuperjektív, hiszen ebből következne, hogy a φ görbe minden orbitot pontosan egy pontban metsz. Ha $\lim_{t\to\beta} f_{G(x)} \circ \varphi(t) = t_0 \in f_{G(x)}(L)$, azaz $\lim_{t\to\beta} f_{G(x)} \circ \varphi(t) \neq \sup f_{G(x)}(L)$, akkor, mivel az $f^{-1}_{G(x)}(t_0)$ orbit egy sima kompakt Riemann-sokaság, ami hiperfelület is, könnyen látható, hogy a $\lim_{t\to\beta} \varphi(t)$ létezik (mivel φ kauzális és L globálisan hiperbolikus). Így azonban a φ görbe folytatható lenne a $\lim_{t\to\beta} \varphi(t)$ pontból, ami ellentmondana annak, hogy φ kiterjeszthetetlen. Hasonlóan látható, hogy $\lim_{t\to\alpha} f_{G(x)} \circ \varphi((\alpha, \beta)) = \inf f_{G(x)}(L)$. □

4.3 Következmény. *Legyenek G és L mint fenn. Ha van egy orbit, ami 2-kodimenziós, akkor ez egy maximális dimenziós orbit.*

A fenti két következmény mutatja, hogy eltérés van a Riemann-, és a Lorentz-eset között, hiszen ha $\mathbb{S}^2$ az egységgömb $\mathbb{R}^3$-ban és rögzítünk egy origón átmenő tengelyt, majd vesszük az e tengely körüli forgatásokat, akkor az $\mathbb{S}^1$ Lie-csoport hatását kapjuk az $\mathbb{S}^2$ komakt Riemann-sokaságon. Ebben a példában 1-, és 2-kodimenziós orbitok is vannak.

Az orbitokon definiálható egy parciális rendezés. A $G(x)$ orbitot nem kisebb orbit típusúnak mondjuk, mint a $G(y)$ orbitot, jelölésben $G(x) \succeq G(y)$, ha $G_x \leq g \cdot G_y \cdot g^{-1}$ valamely $g \in G$ elemre. Bizonyítható, hogy létezik egy maximális orbit típus erre a részben rendezésre, amit **principális orbit**nak nevezünk. Könnyen látható, hogy egy princiális orbit maximális dimenziós is. Az olyan maximális dimenziós orbitot, amely nem principális **kivételes orbit**nak hívjuk, a nem maximális dimenziósokat pedig **kivételes orbit**oknak, lásd Bredon [Br].

A következő tétel jól ismert, és igen hasznos az orbitok tanulmányozásában.

[Principális orbit típus tétel] Legyen L egy összefüggő Lorentz-sokaság, melyen izometrikusan hat a G kompakt összefüggő Lie-csoport. *Ekkor létezik egy egyértelmű maximális orbit típus, és a maximális típusú orbitok egy összefüggő nyílt sűrű halmazt alkotnak.*

Lásd [Br].

Ismert, lásd A. N. Bernal, M. Sánchez [B-S], hogy egy globálisan hiperbolikus L Lorentz-sokaság diffeomorf $\mathbb{R} \times S$-vel, ahol S egy Cauchy hiperfelület L-ben. A mi esetünkben erre egy egyszerű bizonyítás adható, mint azt az alábbi állítás mutatja.

4.1 Állítás. *Legyen L egy összefüggő globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság, G egy kompakt összefüggő Lie-csoport, ami izometrikusan hat a sokaságon. Ha van egy 1-kodimenziós orbit, akkor L diffeomorf a $G/G_x \times (\alpha, \beta)$ sokasággal, ahol $x \in L$ tetszőleges, továbbá $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$.*

Bizonyítás. A 4.2. Következmény alapján minden orbit egy Cauchy hiperfelület, továbbá az orbitok az $f_{G(x)}$ időszeparáció függvény konstans szintjei. Mivel az $L - G(z) = L - f_{G(x)}(t_\star)$ nem összefüggő, mint azt láttuk, így a *principális orbit tétel* miatt minden orbitnak principálisnak kell lennie. Emlékezzük, hogy az előbbi bizonyításból az is kijön, hogy $d(y, G(x)) = f_{G(x)}(y)$, minden $y \in L$ esetén. Ez azt eredményezi, hogy minden $v \in NG(x)$ esetén a $c_v(t)$ geodetikus minden orbitot ortogonálisan metsz, hiszen ha lenne egy $G(y)$ orbit, amit nem ortogonálisan metszene a $c_v(t_0) \in G(y)$ pontban, akkor egyrészt minden $\widetilde{t} > t_0$ esetén $\mathcal{L}\left(c_v|_{[0,\widetilde{t}]}\right) = d\left(G(x), c_v\left(\widetilde{t}\right)\right)$, hiszen $f_{G(x)}\left(c_v\left(\widetilde{t}\right)\right) = \mathcal{L}\left(c_v|_{[0,\widetilde{t}]}\right)$, lásd a 4.2. Következmény bizonyítását, másrészt $d\left(G(x), c_v\left(\widetilde{t}\right)\right) = \mathcal{L}\left(c_v|_{[0,\widetilde{t}]}\right) = \mathcal{L}\left(c_v|_{[0,t_0]}\right) + \mathcal{L}\left(c_v|_{[t_0,\widetilde{t}]}\right) = d\left(G(x), G(y)\right) + \mathcal{L}\left(c_v|_{[t_0,\widetilde{t}]}\right) < d\left(G(x), G(y)\right) + d\left(G(y), c_v\left(\widetilde{t}\right)\right) \leq d\left(G(x), c_v\left(\widetilde{t}\right)\right)$, ahol az egyenlőtlenségnél azt használtuk, hogy c_v nem ortogonális a $G(y)$ orbitra. Azaz azt kaptuk, hogy $d\left(G(x), c_v\left(\widetilde{t}\right)\right) < d\left(G(x), c_v\left(\widetilde{t}\right)\right)$, ami ellentmondás.

Az ε leképezés injektív, hiszen ha $v, w \in NG(x)$, $v \neq w$, melyekre $c_v(\alpha) = c_w(\beta)$, akkor az $f_{G(x)}$ függvény miatt $\mathcal{L}\left(c_v|_{[0,\alpha]}\right) = \mathcal{L}\left(c_w|_{[0,\beta]}\right)$. Ekkor azonban a c_v illetve c_w geodetikusok nem maximálisak a $c_v(\alpha)$ illetve $c_w(\beta)$ pontokon túl, mivel ha például $\widetilde{t} > \alpha$, akkor $d\left(G(x)\, c_v\left(\widetilde{t}\right)\right) = f_{G(x)}\left(c_v\left(\widetilde{t}\right)\right) = \mathcal{L}\left(c_v|_{[0,\widetilde{t}]}\right) = \mathcal{L}\left(c_w|_{[0,\beta]} \cup c_v|_{[\alpha,\widetilde{t}]}\right)$, azonban e jövőbe mutató időszerű görbének töréspontja van a $c_v(\alpha) = c_w(\beta)$ pontban, ami azt mutatja, hogy nem maximális a kezdő-, és végpontja között, így $d\left(G(x)\, c_v\left(\widetilde{t}\right)\right) = \mathcal{L}\left(c_w|_{[0,\beta]} \cup c_v|_{[\alpha,\widetilde{t}]}\right) < d\left(c_w(0), c_v\left(\widetilde{t}\right)\right) \leq d\left(G(x), c_v\left(\widetilde{t}\right)\right)$ miatt ellentmondásra jutunk.

Tehát megkaptuk, hogy ε homeomorfizmus. Annak belátására, hogy ez diffeomorfizmus is elég megmutatni, hogy nincsenek fokális pontok az $NG(x)$ normális térben. Ez pedig a 2.4. Tételből, és az utánna tett megjegyzésekből közvetlenül adódik, hiszen egy fokális pont azt eredményezné, hogy az ε nem lehetne homeomorfizmus.

Azaz L diffeomort $\widetilde{NG(x)}$-vel, ami pedig kanonikus módon diffeomorf a $G/G_x \times (\alpha, \beta)$ szorzattal, ahol $\alpha = \inf f_{G(x)}L$, $\beta = \sup f_{G(x)}L$. $\square$

A bizonyításból az is kiderül, hogy a fenti diffeomorfizmusnál minden $\{z\} \times (\alpha, \beta)$, $z \in G/G_x$ görbe egy időszerű geodetikus, melyen a metrika az (α, β) szakasz kanonikus metrikájának a mínusz egyszerese. Érdekes tény, hogy a Riemann-eset bonyolultabb a Lorentz-esetnél, ha azt vizsgáljuk, hogy milyen lehet a sokaság, ha van egy 1-kodimenziós orbitunk (lásd A.V. Alekseevsky, D.V. Alekseevsky [A-A]).

4.1 Szinguláris orbitok

4.3 Definíció. *Legyen* $(\mathbb{M}^n, <,>)$ *az* n*-dimenziós Minkowski-tér és* $0_{\mathbb{M}^n}$ *ennek origója. Ekkor e téren az* ***szemi-ortogonális csoport*** *a*

$$MO(n) \stackrel{def}{=} \{\phi \in Iso(\mathbb{M}^n, <,>) \mid \phi(0_{\mathbb{M}^n}) = 0_{\mathbb{M}^n}\},$$

ahol $Iso(\mathbb{M}^n, <,>)$ *a Minkowski-tér izometriáinak csoportja. Azon szemi-ortogonális izometriák csoportját, melyek megőrzik az időorientációt, jelölje* $MSO(n)$*, melyet a* ***speciális szemi-ortogonális csoport****nak hívunk.*

4.3 Lemma. *Minden* $G \subset MSO(n)$ *kompakt Lie-csoportra, létezik egy olyan időszerű* $v \in \mathbb{M}^n$*,* $v \neq 0$ *vektor, mely fixen marad a* G *csoport hatásánál.*

Bizonyítás. Tekintsük a $H \stackrel{def}{=} \{w \in \mathbb{M}^n \mid < w, w >= -1,\ w \text{ jövőbe mutató}\}$ hiperkvadrik komponenst, mely egy sima 1-kodimenziós Riemann-részsokasága $\mathbb{M}^n$-nek. Ezen a Riemann-sokaságon izometrikusan hat a G Lie-csoport. Ismert, hogy H a hiperbolikus tér egy modellje, így nem pozitív görbületű. Ekkor azonban E. Cartan egy ismert tétele alapján (lásd S. Kobayashi, K. Nomizu [K-N] 111. o.) H-nak van egy v fix pontja a G csoport hatásánál. □

A következő lemmában a Lorentz-sokaságnak nem kell feltétlenül globálisan hiperbolikusnak lennie.

4.4 Lemma. *Legyen* L *egy Lorentz-sokaság, melyen a* G *kompakt Lie-csoport izometrikusan hat. Tegyük fel, hogy* $G(x) \subset L$ *egy térszerű szinguláris orbit, azaz minden* $T_yG(x)$*,* $y \in G(x)$ *térszerű. Ekkor a* $G(x)$ *orbit nem izolált szinguláris orbit, azaz* $G(x)$ *bármely környezete tartalmaz szinguláris orbitot.*

Bizonyítás. Tekintsük az x pont G_x izotrópia csoportját, és annak G_x^0 egység komponensét. A G_x^0 izometrikusan hat az $N_xG(x)$ normális téren, amely legalább 2-dimenziós $G(x)$ szingularitása miatt. Mivel $G(x)$ térszerű, így $N_xG(x)$ egy Minkowski-térnek tekinthető, ahol a metrika a $<,>|_{N_xG(x)}$ szemi-euklideszi metrikából származik a kanonikus $A_z : T_zN_xG(x) \to N_xG(x)$ vektortér izomorfizmus segítségével. Ezen az $N_xG(x)$ Minkowski-téren a kompakt összefüggő G_x^0 Lie-csoport izometrikusan hat, így $G_x^0 \subset MSO(n)$. Az előző 4.3. Lemma miatt, létezik egy olyan $v \in N_xG(x)$ időszerű vektor, mely fixen marad a G_x^0 hatásánál, így az $\varepsilon|_{N_xG(x)}$ leképezés $0_{N_xG(x)}$ körüli lokális diffeomorfitása miatt, a c_v geodetikus is fix a G_x^0 hatásánál. Ezért minden $\delta \in \mathbb{R}$ esetén $G_x^0 \leq G_{c_v(\delta)}$ teljesül az izotrópia részcsoportokra. Mivel $G(x) \approx G/G_x$ és $G(c_v(\delta)) \approx G/G_{c_v(\delta)}$, így

$$\dim G(x) = \dim G/G_x = \dim G/G_x^0 \geq \dim G/G_{c_v(\delta)} = \dim G(c_v(\delta)).$$

Azaz a $G(c_v(\delta))$ is szinguláris orbit. $\square$

Az előző bizonyításban könnyen látható, hogy ha δ elég kicsi, akkor kihasználva, hogy ε diffeomorfizmus a null-szelés egy kis környezetében, $G(x)$ és $G(c_v(\delta))$ orbittípusa megegyezik.

A lemma nem feltétlen igaz kivételes orbitokra, ahogyan ezt az alábbi példa is mutatja.

4.2 Példa. *Legyen* $\mathbb{S}^1 \stackrel{def}{=} \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \|\alpha\| = 1\}$ *a kanonikus Riemann metrikával ellátva, és az* $\mathbb{R}_1^1$ *valós egyenes a kanonikus Riemann metrika mínusz egyszeresével ellátva. Vegyük a* $G \stackrel{def}{=} \mathbb{S}_I^1 \cup \mathbb{S}_{II}^1$ *kommutatív Lie-csoportot, ahol elemek* α_I, α_{II} *alakúak, és a csoportművelet* $\alpha_I \cdot \beta_I \stackrel{def}{=} \alpha_I\beta_I \in \mathbb{S}_I^1$, $\alpha_{II} \cdot \beta_{II} \stackrel{def}{=} \alpha_{II}\beta_{II} \in \mathbb{S}_I^1$, $\alpha_I \cdot \beta_{II} \stackrel{def}{=} \alpha_I\beta_{II} \in \mathbb{S}_{II}^1$. *Ez a Lie csoport izometrikusan hat az*

$$L \stackrel{def}{=} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_1^1$$

Lorentz-sokaságon a $\theta : G \times L \to L$ *hatásnál, ahol* $\alpha_I \times (\alpha, x) \mapsto (\alpha_I\alpha, x)$, $\alpha_{II} \times (\alpha, x) \mapsto (\alpha_{II}\alpha, -x)$. *Itt a principális orbitok* $\mathbb{S}^1 \times \{x\} \cup \mathbb{S}^1 \times \{-x\}$ *alakúak, ahol* $x \in \mathbb{R}_1^1 - \{0\}$, *és az egyetlen kivételes orbit az* $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$.

4.1 Tétel. *Legyen* L *egy globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság,melyen a* G *kompakt összefüggő Lie-csoport izometrikusan hat. Ekkor nincsenek izolált szinguláris orbitok* L*-ben, sőt minden szinguláris* $G(x)$ *orbit tetszőleges környezetében van vele azonos típusú szinguláris orbit is.*

Bizonyítás. Mivel a 4.1. Lemma miatt minden orbit térszerű, így használhatjuk a 4.4. Lemmánkat, és az utánna tett megjegyzésünket. $\square$

4.2 Maximális dimenziós orbitok fokális pontjai és a szinguláris orbitok közötti kapcsolatról

Ha Szenthe egy tételének (Theorem 1. [Sz2]), Lorentz analogonját szeretnénk bizonyítani, akkor szükségünk lesz a cut pont és az injektivitási halmaz definíciójára, melyeket a fenti cikk használ a bizonyítások során.

Rögzítsünk egy $G(x)$ orbitot. Mivel $\varepsilon : NG(x) \to L$ lokálisan diffeomorf a null-szelés egy alkalmas környezetében, és mivel L globálisan hiperbolikus, így könnyen látható, hogy ha r_v, $v \in NG(x)$ egy kauzális sugár, akkor annak "lokális" képe a $c_v([0,\delta])$ maximális geodetikus lesz, ha $\delta > 0$ alkalmassan kicsiny. Ezért létezik egy olyan $\infty \geq t_v > 0$ egyértelmű paraméter, melyre $c_v([0,t_v])$ maximális geodetikus, de minden $t > t_v$ értékre, $c_v([0,t])$ már nem maximális geodetikus. Ekkor az $r_v(t_v)$ pont, $t_v < \infty$ esetén, egy **jövőbeli kauzális cut pont**. Az alábbi definíciója a cut pontnak a [B-E-E] 302. o. Definition 9.9 természetes általánosításaként adódik (lásd még [B-E-E] 299. o. és 305. o. Definitoin 9.3).

4.4 Definíció. *Jelölje $TL(-1)$ a -1 hosszúságú vektorok halmazát a TL érintőtérben. Definiáljuk az $s_{G(x)} : TL(-1) \cap NG(x) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvényt a következő módon*

$$s_{G(x)}(v) \stackrel{def}{=} \sup\{t \geq 0 \mid d(G(x), c_v(t)) = t\}.$$

Ekkor egy $v \in NG(x)$ pontot ***jövőbeli időszerű cut pont****nak hívunk, ha $S_{G(x)}\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \|v\|$, ahol v egy jövőben mutató időszerű vektor, és $\|v\| \stackrel{def}{=} |< v, v >|^{\frac{1}{2}}$.*

Jelölje $TL(0)$ a fényszerű vektorok halmazát a TL érintőtérben. Definiáljuk az $l_{G(x)} : TL(0) \cap NG(x) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvényt a következő módon:

$$l_{G(x)}(v) \stackrel{def}{=} \sup\{t \geq 0 \mid d(G(x), c_v(t)) = 0\}.$$

Egy $v \in NG(x)$ pontot ***jövőbeli fényszerű cut pont****nak hívunk, ha az $l_{G(x)}(v) = 1$ teljesül, és v jövőbe mutató.*

Tekintsük most a definíció előtti jelölést, azaz egy r_v sugár mentén $\infty \geq t_v > 0$ jelöli a cut pont paraméterét ($t_v = \infty$ esetén természetesen nincs valódi cut pont). Ekkor tekinthetjük az

$$\cup \left\{ r_v\left([0, t_v)\right) \mid v \in I^+\left(NG\left(x\right)\right) \right\} \tag{9}$$

halmazt. Ennek a halmaznak a képe az alábbi 4.7. Lemma alapján, majdnem lefedi a $G(x)$ orbit jövőjét, és ezen a halmazon nyílvánvalóan injektív az ε leképezés. A fenti (9) halmazt formálisan az alábbiak szerint is definiálhatjuk.

4.5 Definíció. *A $G(x)$ orbit **jövőbe mutató időszerű injektivitási halmaz**a:*

$$\mathrm{Inj}^+_{<0}\left(G\left(x\right)\right) \overset{def}{=} \left\{ v \in I^+\left(NG\left(x\right)\right) \mid s\left(\frac{v}{\|v\|}\right) > \|v\| \right\},$$

ahol $\|v\| = |< v, v >|^{\frac{1}{2}}$.
*A $G(x)$ orbit **jövőbe mutató fényszerű injektivitási halmaz**a:*

$$\mathrm{Inj}^+_{=0}\left(G\left(x\right)\right) \overset{def}{=} \left\{ v \in J^+\left(N_zG\left(x\right)\right) - I^+\left(N_zG\left(x\right)\right) \mid z \in G\left(x\right), \, l\left(v\right) > 1 \right\},$$

*és a **jövőbe mutató kauzális injektivitási halmaz**a:*

$$\mathrm{Inj}^+_{\leq 0}\left(G\left(x\right)\right) \overset{def}{=} \mathrm{Inj}^+_{<0}\left(G\left(x\right)\right) \cup \mathrm{Inj}^+_{=0}\left(G\left(x\right)\right)$$

Először megmutatjuk a cut pontok, és az injektivitási halmazok néhány elemi tulajdonságát.

4.5 Lemma. *Az ε leképezés injektív az injektiviási halmazokon.*

Bizonyítás. A 4.4. Definíció előtti jelöléseket használva, ha $c_v(\alpha) = c_w(\beta)$, $0 \leq \alpha < t_v$, $0 \leq \beta < t_w$, ahol w, v a vizsgált időszerű, fényszerű, vagy kauzális injektivitási halmaz elemei, akkor minden $\alpha < \delta < t_v$ esetén egyrészt $d(G(x), c_v(\delta)) = \mathcal{L}(c_v([0, \delta]))$, másrészt $\mathcal{L}(c_v([0, \alpha])) = d(G(x), c_v(\alpha)) = \mathcal{L}(c_w([0, \beta]))$ a maximalitások miatt. Azonban $\mathcal{L}(c_v([0, \delta])) = \mathcal{L}(c_v([0, \alpha])) + \mathcal{L}(c_v([\alpha, \delta])) = \mathcal{L}(c_w([0, \beta])) + \mathcal{L}(c_v([\alpha, \delta])) = \mathcal{L}(c_w([0, \beta]) \cup c_v([\alpha, \delta]))$, ahol a jobb oldali kauzális görbe megtörik a $c_v(\alpha)$ pontban, így nem lehet maximális a $c_w(0) \in G(x)$ és a $c_v(\delta)$ pont között, azaz $\mathcal{L}(c_v([0, \delta])) < d(c_w(0), c_v(\delta)) \leq d(G(x), c_v(\delta))$, ami ellentmond a bizonyítás elején mondott $d(G(x), c_v(\delta)) = \mathcal{L}(c_v([0, \delta]))$ egyenlőségnek. $\square$

4.6 Lemma. *Ha L egy globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság, melyen egy G kompakt összefüggő Lie-csoport izometrikusan hat, akkor minden $G(x)$ orbitra létezik egy jövőbe (illetve egy múltba) mutató kiterjeszthetetlen kauzális geodetikus $\gamma : [0, \alpha) \to L$, $\gamma(0) = x$ kezdeti feltétellel, melyre $d(\gamma(t), G(x)) = \mathcal{L}\left(\gamma|_{[0,t)}\right)$, minden $t \in [0, \alpha)$ esetén. Ez a γ geodetikus ortogonális a $G(x)$ orbitra.*

Bizonyítás. A bizonyítás a [B-E-E] Theorem 8.10 alapján történik, mely e lemmának speciális esete a triviális $G(x) = x$ Lie-csoport hatás esetén. A Theorem 8.10 bizonyításának lényege, hogy vehetünk maximális geodetikusoknak egy olyan alkalmas sorozatát, melyek hossza monoton nő, és amelyek épp a kiterjeszthetelen maximális geodetikushoz fognak konvergálni. A mi esetünkben annyi a különbség, hogy míg az eredeti bizonyításban a kezdőpont fix volt, addig nálunk ez változhat, de a kompakt $G(x)$ orbiton marad. Így egy alkalmas részsorozatra, ezen kezdőpontok is konvergálni fognak, és a maximális geodetikusok is egy kiterjeszthetetlen maximális geodetikushoz fognak konvergálni. A bizonyítás során azt a tényt kell még kihasználni, hogy ha $q \in I^+(G(x))$, akkor létezik egy $c : [0,1] \to L$, $c(0) \in G(x)$, $c(1) = q$ geodetikus a globális hiperbolicitás miatt, melyre $\mathcal{L}(c) = d(c(0), c(1))$, továbbá használni kell még G kompaktságát is. A kiterjeszthetetlen geodetikus ortogonalitása a maximalitásból következik. □

A fenti lemmából következik, hogy létezik egy kauzális sugár az $N_x G(x)$ normális térben minden $x \in L$ esetén, amelyen nincs egyetlen cut pont sem. A következő lemma azt adja, hogy egy orbit kauzális jövőjében lévő tetszőleges pontra létezik az orbitot és a pontot összekötő maximális geodetikus.

4.7 Lemma. *Ha L, G mint fenn, akkor az*

$$I^+(G(x)) = \varepsilon\left(I^+(NG(x))\right) = \varepsilon\left(\overline{\mathrm{Inj}^+_{<0}(G(x))} \cap I^+(NG(x))\right)$$

$$J^+(G(x)) = \varepsilon\left(J^+(NG(x))\right) \cup = \varepsilon\left(\overline{\mathrm{Inj}^+_{\leq 0}(G(x))}\right)$$

egyenlőségek igazak.

Bizonyítás. Az első egyenlőséget az időszerű halmazoknál már igazoltuk a 4.2. Lemmában. A másodikhoz azt kell csupán belátnunk, hogy $\varepsilon\left(I^{+}\left(NG\left(x\right)\right)\right) \subset \varepsilon\left(\overline{\mathrm{Inj}^{+}_{<0}\left(G\left(x\right)\right)} \cap I^{+}\left(NG\left(x\right)\right)\right)$. Ha $y \in \varepsilon\left(I^{+}\left(NG\left(x\right)\right)\right)$, akkor a globális hiperbolicitás és $G\left(x\right)$ kompaktsága miatt, létezik egy $\gamma : [0,\alpha] \to L$, $\gamma\left(0\right) \in G\left(x\right)$, $\gamma\left(\alpha\right) = y$, $\gamma \perp G\left(x\right)$, $\mathcal{L}\left(\gamma\right) = d\left(y, G\left(x\right)\right)$ tulajdonságokkal bíró időszerű geodetikus, azaz egy maximális időszerű geodetikus $G\left(x\right)$ és y között. Ebből pedig az következik, hogy $r_{\gamma'(0)}\left(\alpha\right) \in \overline{\mathrm{Inj}^{+}_{<0}\left(G\left(x\right)\right)}$, melynek képe $\varepsilon(r_{\gamma'(0)}(\alpha)) = \gamma(\alpha) = y$, hiszen $\gamma(t)$ időszerű, így $r_{\gamma'(0)}(\alpha) \in I^{+}(NG(x))$. A kauzális halmazokra kimondott egyenlőségek hasonlóan igazolhatóak. □

4.6 Definíció. *Legyen $V_{G(x)}$ azon $v \in NG\left(x\right)$ pontoknak a halmaza, melyekre $r_v\left(t\right)$, $t \in [0,1]$ nem tartalmaz fokális pontokat.*

4.1 Megjegyzés. *Az $\varepsilon|_{V_{G(x)}}$ leképezés immerzió.*

4.4 Következmény. *Az $\varepsilon|_{V_{G(x)} \cap \mathrm{Inj}^{+}_{\leq 0}(G(x))}$ egy G-ekvivariáns diffeomorfizmus, ahol $NG\left(x\right)$-en a G csoport $NG\left(x\right)$ normális nyalábon indukált hatását tekintjük, továbbá az $\varepsilon\left(V_{G(x)} \cap \mathrm{Inj}^{+}_{\leq 0}\left(G\left(x\right)\right)\right)$ halmaz G-invariáns.*

Bizonyítás. A $V_{G(x)}$ és $\mathrm{Inj}^{+}_{\leq 0}\left(G\left(x\right)\right)$ halmazok definíciója G-invariáns, így $V_{G(x)} \cap \mathrm{Inj}^{+}_{\leq 0}\left(G\left(x\right)\right)$ is az. Mivel a 4.5. Lemma miatt ε injektív az $\mathrm{Inj}^{+}_{\leq 0}\left(G\left(x\right)\right)$ halmazon, és lokálisan diffeomorfizmus a $V_G\left(x\right)$ halmazon, hiszen csupa nem fokális vektorból áll, így ε diffeomorfizmus a $V_{G(x)} \cap \mathrm{Inj}^{+}_{\leq 0}\left(G\left(x\right)\right)$ halmazon. A G-ekvivariancia, ekkor a sugarak segítségével közvetlenül látható. A $V_{G(x)} \cap \mathrm{Inj}^{+}_{\leq 0}\left(G\left(x\right)\right)$ halmaz G-invarianciája és a G-ekvivariáns diffeomorfizmus miatt $\varepsilon\left(V_{G(x)} \cap \mathrm{Inj}^{+}_{\leq 0}\left(G\left(x\right)\right)\right)$ G-inavriáns lesz. □

Bebizonyítható a [B-E-E] 327-334. o. illetve a 365-394. oldalakon lévő állítások értelemszerű módosításainak segítségével, hogy a $J^{+}\left(NG\left(x\right)\right)$ halmazban futó minden $r_v\left(t\right)$ sugáron, az első cut pont $r_v\left(t_v\right)$ előrébb helyezkedik el, mint ez első fokális pont $r_v\left(t_f\right)$, azaz $t_v \leq t_f$, (ha van egyáltalán fokális pont a sugáron), vagy az első cut pont az első fokális ponttal esik egybe. Így az $\mathrm{Inj}^{+}_{\leq 0}\left(G\left(x\right)\right) \subset V_{G(x)}$ tartalmazás teljesül, ezért a fenti 4.4. Következményben $\varepsilon|_{\mathrm{Inj}^{+}_{\leq 0}(G(x))}$-t írhattunk volna.

4.7 Definíció. *Legyen $x \in L$, egy $S \subset L$ halmazt az x pontnál lévő* ***szelet****nek hívunk, ha létezik egy olyan U környezete a $G(x)$ orbitnak, amely G-invariáns, és létezik egy $r : U \to G(x)$ sima retrakció, melyre $S = r^{-1}(x)$.*

A szeletnek ez a definíciója megtalálható Bredon könyvében [Br]. Az alábbi eredmények Riemann-esetre megtalálhatóak Szenthe [Sz2] cikkében, az általunk kimondott Lorentz kontextusbeli megfogalmazásuk ugyanúgy bizonyíthatóak, csak az objektumok Lorentz megfelelőit kell használnunk.

4.8 Lemma. *Legyen L egy globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság, melyen izometrikusan hat a G kompakt összefüggő Lie-csoport. Legyen továbbá $G(x)$ egy principális orbit, mely G_x izotrópia részcsoportja maximális rangú, és $V \subset NG(x)$ egy olyan G-invariáns környezete az orbitnak, melyre $\varepsilon|_V$ diffeomorfizmus. Ekkor minden az $\varepsilon(V)$ környezetbe eső, x pontnál lévő szelet az $\varepsilon(N_xG(x))$ szelet egy részhalmaza.*

Bizonyítás. Mivel $\varepsilon|_V$ diffeomorfizmus, így könnyen látható, hogy $\varepsilon(N_xG(x))$ egy szelet. Továbbá az [Sz2] Lemma 1. bizonyítása igaz marad, így kész vagyunk. □

4.5 Következmény. *Legyenek $L, G, G(x)$ és G_x mint az elöbbi lemmában, ekkor az $\varepsilon\left(N_xG(x) \cap \mathrm{Inj}^+_{\leq 0}\right)$ és az $\varepsilon\left(N_xG(x) \cap V_{G(x)}\right)$ halmazok totál geodetikusok.*

Bizonyítás. Lásd Szenthe [Sz2] cikkében a Lemma 1. következményét. □

4.8 Definíció. *Legyen $w \in NG(x)$ és $\chi_w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ az a legnagyobb érték, melyre a $c_v|_{[0,\chi_w)}$ szakaszon nincsenek konjugált pontok.*

4.9 Lemma. *Legyen L egy globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság, melyen izometrikusan hat a G kompakt összefüggő Lie-csoport. Legyen továbbá $G(x)$ egy principális orbit, mely G_x izotrópia részcsoportja maximális rangú, továbbá $w \in N_xG(x)$. Tekintsünk a $c_w(t)$ geodetikus mentén egy $X(t)$ Jacobi-mezőt. Ekkor az*

$$X(t) = Y(t) + Z(t)\,,\ t \in [0, \chi_w)$$

egyértelmű felbontás érvényes, ahol $Y(t), Z(t)$ *olyan Jacobi-mezők a* $c_w|_{[0,\chi_w)}$ *geodetikus mentén, melyekre* $Y(t) \in T_{c_w(t)}\varepsilon\left(V_{G(x)} \cap N_x G(x)\right)$ *és* $Z(t) \in T_{c_w(t)} G(c_w(t))$ *teljesül.*

Bizonyítás. Ha w nem fényszerű, akkor az [Sz2] cikk beli Lemma 2. bizonyításának Lorentz analogonja működik.

Ha w fényszerű, akkor a bizonyításban vegyünk egy $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormált bázist úgy, hogy $(e_1, \ldots, e_{n-k})$ az $N_x G(x)$ normális tér egy bázisa legyen, továbbá úgy, hogy az $e_1 + e_2 = w$ felbontás érvényes legyen. Létezik olyan bázis, melyben $e_1 + e_2 = konst \cdot w$, $konst \neq 0$, majd a $c_w(\tau)$ geodeikust átparaméterezhetjük úgy, hogy $konst = 1$ legyen. Így a bizonyításban szereplő $E_i(\tau)$ vektormezőkre, az $(E_1 + E_2)(\tau) = c_w'(\tau)$, továbbá az

$$R\left(\left(E_1 + E_2\right)(\tau,)\, E_j(\tau)\right)\left(E_1 + E_2\right)(\tau) \in T_{c_w(\tau)} U_x$$

érvényes minden $j = 1, \ldots, n-k$ esetén. Ezen változtatások mellett a bizonyítás az eredeti bizonyítás mentén halad. □

4.6 Következmény. *Az* $r_w(\xi) \in N_x G(x)$, $\xi > 0$ *pont akkor, és csak akkor az első fokális pontja a* $G(x)$ *orbitnak az* $r_w(t)$ *sugár mentén, ha az alábbi két lehetőség közül legalább az egyik teljesül:*
1. Az $r_w(\xi)$ *pont az első konjugált pont az* r_w *sugár mentén;*
2. Létezik egy nem-triviális $G(x)$*-Jacobi-mező, jelölje ezt* $Z(t)$*, a* c_w *geodetikus mentén, melyre* $Z(t) \in T_{c_w(t)} G(c_w(t))$ *nem a nulla vektor minden* $t \in [0, \xi)$ *esetén, és* $Z(\xi) = 0$.

Bizonyítás. Lásd az [Sz2] cikkben a Lemma 2. következményét. □

4.10 Lemma. *Legyenek* $\theta : G \times M \to M$ *és* $\psi : G \times N \to N$ *az összefüggő kompakt* G *Lie-csoport sima hatásai az* M, N *sima sokaságokon, továbbá:*

$$\varphi : N \to M$$

egy sima ekvivariáns leképezés a θ, ψ *hatásokra nézve. Tegyük fel, hogy a* ψ *hatásnál van az* $y \in N$ *pontnál egy olyan* S_y *szelet, továbbá a* θ *hatásnál az*

$x=\varphi(y)\in M$ pontnál egy olyan S_x szelet, melyekre:

$$\varphi(S_y)\subset S_x$$

érvényes. Ekkor a $T_y\varphi$ érintőleképezés magja K megkapható a következő direktösszegként:

$$K=K'\oplus K'',$$

ahol $K_y\subset T_yS_y$ és $K''\subset T_yG(y)$.

Bizonyítás. Lásd [Sz2] Lemma 3. □

4.7 Következmény. *Legyen L egy globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság melyen izometrikusan hat a G kompakt összefüggő Lie-csoport. Legyen továbbá $G(x)$ egy principális orbit, mely G_x izotrópia részcsoportja maximális rangú. Tekintsük a $w\in N_xG(x)$ vektort és tegyük fel, hogy $r_w(\chi)$, $\chi>0$ egy fokális pontja a $G(x)$ orbitnak. Ha K a $T_{r_w(\chi)}\varepsilon$ érintőleképezés magja, akkor*

$$K=K'\oplus K'',$$

ahol a $K',K''\subset K$ alterekre $K'\subset T_{r_w(\chi)}N_xG(x)$ és $K''\subset T_{r_w(\chi)}G(r_w(\chi))$.

Bizonyítás. A G csoport kanonikusan ha a TL érintőtéren is, így az $NG(x)$ normális téren is. A $G(r_w(\chi))$ orbitot ennél a hatásnál vesszük. A bizonyítás pedig az [Sz2] cikkben szereplő 3. Lemma következményének mintájára történik. □

4.11 Lemma. *Legyen $G,L,G(x),G_x$ mint fenn, és $r_w(\tau_w)\in N_xG(x)$ az első fokális pontja a$G(x)$ orbitnak az r_w sugár mentén. Tekintsük az elöbb definiált dekompozícióját a $T_{r_w(\tau_w)}\varepsilon$ érintőleképezés K magjának:*

$$K=K'\oplus K''.$$

Ekkor a $c_w(\tau_w)$ pont orbitja akkor, és csak akkor szinguláris, ha a K'' altér nem-triviális.

Bizonyítás. Lásd az [Sz2] cikk beli Lemma 4.-et. □

4.8 Következmény. *Legyen* $r_w(\tau_w) \in N_xG(x)$ *az első fokális pontja a* $G(x)$ *principális orbitnak az* r_w *sugár mentén, mely izotrópia részcsoportja maximális rangú. Ha* $r_w(\tau_w)$ *nem konjugált vektor (azaz a* $c_w(\tau_w)$ *pont nem konjugált az* x *ponthoz a* c_w *geodetikus mentén), akkor a* $c_w(\tau_w)$ *pont orbitja szinguláris.*

Bizonyítás. Lásd [Sz2] Lemma 4. következménye. □

4.2 Tétel. *Legyen* L *egy globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság, mely metszetegörbülete a kauzális geodetikusok mentén nem pozitív, továbbá* G *egy kompakt összefüggő Lie csoport, mely izometrikusan hat az* L *sokaságon. Ha* $G(x)$ *egy principális orbit, mely* G_x *izotrópia részcsoportja maximális rangú, akkor egy* $G(z)$, $z \in J^+(G(x))$ *orbit akkor, és csak akkor szinguláris, ha* z *egy első fokális pontja a* $G(x)$ *orbitnak valamilyen kauzális geodetikus mentén.*

Bizonyítás. Lásd [Sz2] Thoerem 1. bizonyítását, ahol az $\mathrm{Inj}^+_{\leq 0}(G(x))$ halmazt használjuk V'_C helyett a bizonyításban. □

Egy speciális esetben valami hasonlót bizonyíthatunk anélkül, hogy az izotrópia részcsoport maximalitását feltennénk.

4.3 Tétel. *Legyen* L *egy globálisan hiperbolikus Lorentz-sokaság, melyen izometrikusan hat a* G *kompakt összefüggő Lie-csoport, továbbá* $G(x)$ *egy olyan orbit, melyre* $\mathrm{codim} G(x) = 2$. *Legyen továbbá* $c_v : [0, \alpha) \to L$, $c_v(0) = x$, $v \in NG(x)$ *egy fényszerű geodetikus. Ha* $c_v(t_0)$ *egy fokális pont a geodetikus mentén, akkor a* $G(c_v(t_0))$ *orbit szinguláris.*

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy ha $v \in NG(x)$, akkor $c_v(t)$ merőlegesen metsz minden orbitot, azaz $c'_v(t) \perp T_{c_v(t)}G(c_v(t))$. Legyen $X \in \mathfrak{g}$ egy Lie algebra elem és jelölje $X_G(t)$ az X által generált infinitézimális izometriánál előálló vektormezőt a $c_v(t)$ geodetikus mentén. Ez, mint ismert, egy $G(x)$-Jacobi mező lesz. Ekkor a Jaobi-mezőkre ismert

$$< (c_v')'(t), X_G(t) > - < c_v'(t), X_G'(t) > \equiv konst.$$

összefüggés alapján, $(c_v')'(t) = \nabla_{c_v'(t)} c_v'(t) \equiv 0$ miatt, $- < c_v'(t), X_G'(t) > \equiv konst.$ adódik. Azaz

$$konst. \equiv - < c_v'(t), X_G'(t) > = < c_v'(t), A_{X_G}(c_v')(t) >,$$

ahol A_{X_G} az X_G vektormezőből származtatott konstans tenzormező. Mivel X_G egy Killing-mező, hiszen egy infinitézimális izometria generálta, ezért az A_{X_G} konstans tenzormező antiszimmetrikus lesz a metrikára nézve, azaz $< c_v'(t), A_{X_G}(c_v')(t) > = - < A_{X_G}(c_v'(t)), c_v'(t) >$. Ez viszon csak akkor lehet, ha mind két oldal 0, azaz

$$0 \equiv < c_v'(t), X_G'(t) > = \frac{d}{dt} < c_v'(t), X_G(t) > .$$

Amiből $< c_v'(t), X_G(t) > \equiv konst.$ adódik. Mivel $< c_v'(0), X_G(0) > = 0$, így ez a konstans 0. Ez pedig az $\{X_G(t) \mid X \in \mathfrak{g}\} = T_{c_v(t)} G(c_v(t))$ miatt azt eredményezi, hogy a $c_v(t)$ geodetikus végig ortogonális az orbitokra.

Tegyük fel, hogy $c_v(t_0)$ egy fokális pont. Ekkor létezik egy olyan $w \in T_{r_v(t_0)} NG(x)$, $w \neq 0$ vektor, melyre $T\varepsilon(w) = 0$. Emlékezzük rá, hogy az $NG(x)$ normális nyalábon indukálódik a G csoportnak egy hatása, és mivel $G(x)$ maximális dimenziós volt, így minden orbit az $NG(x)$ normális nyalábban ugyanilyen dimenziós. Ez pedig egy kanonikus dekompozíciót ad a $T_{r_v(t_0)} NG(x)$ érintőtérre:

$$T_{r_v(t_0)} NG(x) = T_{r_v(t_0)} N_x G(x) \oplus T_{r_v(t_0)} G(r_v(t_0)) .$$

Így egy $w = w_N + w_G$, $w_N \in T_{r_v(t_0)} N_x G(x)$, $w_G \in T_{r_v(t_0)} G(r_v(t_0))$ felbontás adódik. Ha $w_N = konst. \cdot r_v'(t_0)$, akkor $T\varepsilon(w_N) = konst. \cdot c_v'(t_0)$. Ha $w_N \neq konst. \cdot r_v'(t_0)$, akkor a Gaus lemma miatt (lásd [B-E-E] 338. o.) a $< c_v'(t_0), T\varepsilon(w) > \neq 0$ adódik, hiszen az $N_x G(x)$ tér 2-dimenziós, így a fényszerű $r_v'(t_0)$ nem ortogonális semmilyen $w \neq konst. \cdot r_v'(t_0)$ vektorra sem, hiszen v fényszerű volt. Mivel $T_{c_v(t_0)}G(c_v(t_0)) \perp c_v'(t_0)$, ezért $T\varepsilon(w_N) \notin T_{c_v(t_0)}G(c_v(t_0))$. Jegyezzük meg azt is, hogy ha $w_N \neq konst. \cdot r_v'(t_0)$, akkor $T\varepsilon(w_N) \neq 0$, így $T\varepsilon(w_N) = 0$ akkor, és csak akkor, ha $w_N = 0$. Mivel az ε leképezés G-invariáns, így $T\varepsilon(w_G) \in T_{c_v(t_0)}G(c_v(t_0))$, ami a fenti tényekkel együtt azt adja, hogy ha $T\varepsilon(w) = 0$ akkor $w_N = 0$. Emiatt létezik egy olyan A eleme a $\mathfrak{g}$ Lie algebrának, melyre a $w = w_G$ vektort az A elemhez tartozó infinitézimális izometria adja az $r_v(t_0)$ pontban. Így tehát $A \notin \mathfrak{g}_x$, de $A \in \mathfrak{g}_{c_v(t_0)}$, hiszen $w \neq 0$, de $T\varepsilon(w) = 0$. Mivel $\mathfrak{g}_x \subset \mathfrak{g}_{c_v(t_0)}$ igaz a mi esetünkben, hiszen $G(x)$ maximális dimenziós volt, így a G_x^0 egységkomponens triviálisan hat $N_xG(x)$-en, így $A \notin \mathfrak{g}_x$, $A \in \mathfrak{g}_{c_v(t_0)}$ miatt $\mathfrak{g}_x \subsetneqq \mathfrak{g}_{c_v(t_0)}$. Ezért a $G(x)$ orbit dimenziója nagyobb, mint a $G(c_v(t_0))$ orbité, ami így szinguláris orbit kell legyen. □

4.9 Következmény. *Legyenek $L, G, G(x)$ mint fenn, ekkor egy $G(z)$ orbit a $J^+(G(x)) - I^+(G(x))$ térben szinguláris akkor, és csak akkor, ha ez egy első fokális pont valamely az orbitra merőlegesen induló fényszerű geodetikus mentén.*

Bizonyítás. Ha z egy első fokális pont egy fényszerű geodetikus mentén, mely ortogonális a $G(x)$ orbitra, akkor $G(z)$ szinguláris orbit, mint azt az előző tétel mutatja.

Ha $G(z)$ egy szinguláris orbit, ahol $z \in J^+(G(x)) - I^+(G(x))$, akkor használva a 4.5. Lemmát azt kapjuk, hogy van egy olyan fényszerű geodetikus $c_v : [0,1] \to L$, $v \in NG(x)$, $c_v(1) = z$, melyre $r_v|_{[0,1)} \in \mathrm{Inj}^+_{=0}(G(x))$, ahol emlékezzünk, hogy $\mathrm{Inj}^+_{=0}(G(x))$ volt a jövőbe mutató fényszerű injektivitási halmaz. Ahogyan azt láthattuk a fenti 4.3. Tétel bizonyításában, a c_v geodetikus ortogonálisan metszi a geodetikus menti orbitokat, továbbá a $G(c_v(1)) = G(z)$ orbit szinguláris a feltételek szerint. Így, mivel a $G(x) = G(c_v(0))$ orbit maximális és $G(c_v(1))$ szinguláris, van egy olyan A Lie-algebra elem amire $A \in \mathfrak{g}_{c_v(1)}$, $A \notin \mathfrak{g}_{c_v(0)}$ teljesül. Az ehhez a Lie-algebra elemhez tartozó infinitézimális izometriánál az $r_v(t)$ sugár mentén keletkező

$X(t) \in T_{r_v(t)}NG(x)$ vektormezőre, és a $c_v(t)$ geodetikus mentén keletkező $Y(t) \in T_{c_v(t)}L$ vektormezőre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

- $T\varepsilon(X(t)) = Y(t)$, hiszen a ε leképezés G-ekvivariáns;
- $Y(t)$ egy $G(x)$-Jacobi-mező, mivel ezt egy infinitézimális izometria indukálta;
- $X(1) \neq 0$, de $T\varepsilon(X(1)) = Y(1) = 0$, lévén, hogy $G(x)$ maximális dimenziós volt, így $\mathfrak{g}_{r_v(0)} = \mathfrak{g}_{r_v(t)}$, minden $t \in [0,\infty)$ esetén, továbbá $A \in \mathfrak{g}_{c_v(1)}$, $A \notin \mathfrak{g}_{c_v(0)} = \mathfrak{g}_{r_v(0)} = \mathfrak{g}_{r_v(t)}$ volt.

Azaz $c_v(1)$ a $G(x)$ orbit fokális pontja, és mivel $r_v|_{[0,1)} \in \mathrm{Inj}^+_{=0}(G(x))$ volt, így nincsen fokális pont az $c_v|_{[0,1)}$ szakaszon, ez a 4.4. Következmény utáni megjegyzésből, vagy a 2.4. Tételből és az utánna tett megjegyzésekből látható. □

Az alábbi példák azt mutatják, hogy ha a $G(x)$ principális orbithoz tartozó G_x izotrópia részcsoport nem maximális rangú, akkor a $G(x)$ orbithoz tartozó fokális pont mely első fokális pont egy idő-, vagy egy fényszerű geodetikus mentén nem feltétlen tartozik szinguláris orbithoz.

4.3 Példa. *Vegyük az $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ gömbfelületet, és az $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ körvonalat a kanonikus Riemann metrikával ellátva. Vegyük továbbá az $\mathbb{R}^1_1$ valós egyenest, ahol a kanonikus Riemann metrika mínusz egyszeresét vesszük. Ha most vesszük a következő görbített szorzatot*

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1_1,$$

ahol az $\mathbb{S}^1$ Lie-csoport kanonikusan hat önmagán, akkor minden orbit principális, de minden orbit esetében találhatóak olyan fény-, illetve időszerű geodetikusok, melyek mentén vannak fokális pontok.

A most következő példa azt mutatja, hogy egy cut pont nem feltétlen tartozik egy szinguláris orbithoz, tartozhat kivételes orbithoz is.

4.4 Példa. *Vegyük az* $\mathbb{R} \times [0,1]$ *szalagot a kanonikus Riemann metrikával, és ragasszuk össze a két szélét (*$\mathbb{R} \times \{0\}$*, illetve* $\mathbb{R} \times \{1\}$*) úgy, hogy egy Mőbiusz-szalagot kapjunk, melynek* $\{0\} \times [0,1]$ *a közép köre. Jelölje ezt a Riemann-sokaságot* M*. Ha most vesszük az* $\mathbb{R}^1_1$ *valós egyenest a kanonikus Riemann metrika mínusz egyszeresével, akkor az*

$$M \times \mathbb{R}^1_1$$

görbítettszorzat lesz a keresett sokaság. Ezen az $\mathbb{S}^1$ *Lie-csoportnak van egy kanonikus hatása, ami a következő. Vegyük az* $\mathbb{S}^1$*-nek az* M*-en vett kanonikus hatását, melyre a principális orbitok* $\{a\} \times [0,1] \cup \{-a\} \times [0,1]$ *alakúak, ahol* $a \neq 0$*, az egyetlen kivételes orbit pedig* $\{0\} \times [0,1]$*, a görbítettszorzat* $\mathbb{R}^1_1$ *részén pedig legyen a hatás triviális. Ekkor, ha veszünk az* $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}^1_1$ *részben egy múltba mutató fényszerű* $\gamma(t)$ *geodetikust a* $\{0\} \times \{0\} \times \{0\}$ *pontból, és ezen egy a* $\{0\} \times \{0\} \times \{0\}$ *ponttól különböző* x *pontot, akkor a* $G(x) \subset M \times \mathbb{R}^1_1$ *orbitra merőlegesen induló* $\gamma(-t)$ *jövőbe mutató fényszerű geodetikuson a* $\{0\} \times \{0\} \times \{0\}$ *pont egy cut pont lesz, ami kivételes orbithoz tartozik. (Itt* $\gamma(-t)$ *a* $\gamma(t)$ *geodetikus egy ellenkező irányú paraméterezését jelöli). Könnyen látható az is, hogy az* $N_x G(x)$ *normális térben lesznek olyan időszerű sugarak is, melyeken vannak cut pontok, (amik kivételes orbitokhoz tartoznak).*

5 Összegzés

Célunk az volt, hogy minél több szempont szerint vizsgáljuk meg a Lorentz-sokaságok exponenciális leképezéseit. Mi főként a talán izgalmassabb fokális pontokat vizsgáltuk elsősorban. Általában bizonyos feltételek mellett vizsgálódtunk csak, mivel az általános eset vizsgálata túlságosan szerteágazó lett volna, mint azt a bevezetőben említett Piccione, Tausk [P-T] példa is mutatja, és a speciális feltételekkel jobban átlátható képet tudtunk nyújtani. Persze számtalan nyitott kérdés maradt, mint például a nem reguláris fokális pontok környezetében az exponenciális leképezés leírása vagy, hogy az utolsó fejezetben mit tudunk mondani a térszerű geodetikusok fokális pontjairól.

6 Appendix

6.1 A Masov-index

A Maslov-indexnek többféle definíciója ismert, mi azt a definícót adjuk meg, melyet a Mercuri, Piccione, Tausk szerzők [M-P-T] cikke is használ. Az első lépés, hogy egy n-dimenziós (M, g) szemi-Riemann-sokaság egy P szemi-Riemann-részsokaságára merőlegesen induló, $c_v\,(t)\,,\; v \in \widetilde{N\,(P)}$, $t \in [0,1]$ geodetikus szakaszához konstruálni fogunk egy $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ szimplektikus vektorteret és ennek $\Lambda\,(\mathbb{R}^{2n})$ Lagrange-sokaságában egy $L\,(c_v, t)\,,\; t \in [0,1]$ görbét, ahol az $L\,(c_v, t_0)$ altér a $c_v(t_0)$ ponthoz fog tartozni.

Legyen tehát (M, g) egy szemi-Riemann-sokság, $P \subset M$ egy szemi-Riemann-részsokaság és $c_v\,(t)\,,\; v \in \widetilde{N\,(P)}$, $t \in [0,1]$ egy a részsokaságra ortogonálisan induló geodetikus. Legyen $U \subset M$ a $c_v\,(0)$ pont egy alkalmasan kicsiny környezete és $(W_1, \ldots, W_n)$ egy ortonormált bázismező az U halmazon, azaz $(W_1\,(z)\,, \ldots, W_n\,(z))$ vektormezők egy ortonormált bázist adnak minden $z \in U$ pontban, továbbá feltehető az is, hogy $(W_1\,(z)\,, \ldots, W_p\,(z))$ a T_zP alteret feszíti minden $z \in P \cap U$ esetén. Ez a Riemann-esetben ismert Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás megfelelőjével látható be. A $T_{c_v(0)}M$ térben ortonormált bázist adó $(W_1\,(c_v\,(0))\,, \ldots, W_n\,(c_v\,(0)))$ vektorokat terjesszük ki a $c_v\,(t)$ geodetikus mentén párhuzamos eltolással $(E_1\,(t)\,, \ldots, E_n\,(t))$ párhuzamos vektormezőkké, melyek így a geodetikus bármely $c_v\,(t)$ pontjában, a $T_{c_v(t)}M$ érintőtér egy ortonormált bázisát adják. A Jacobi egyenlet a $c_v\,(t)$ geodetikus mentén a következő:

$$X''\,(t) + R\,(X\,(t)\,, c_v'\,(t))\, c_v'\,(t) = 0,\; t \in [0,1] \tag{10}$$

ahol $X\,(t)$ egy vektormező a $c_v\,(t)$ geodetikus mentén. Ez a differenciálegyenlet az előbbi párhuzamos vektormezők segítségével, egy úgynevezett Morse-Sturm rendszert ad a következő módon. Legyen $(a_1, \ldots, a_n)$ az $\mathbb{R}^n$ egy bázisa, $K : T_{c_v(0)}M \to \mathbb{R}^n$, az $(E_1\,(0)\,, \ldots, E_n\,(0)) \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$ által definiált kanonikus izomorfizmus, és tekintsük azt az $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ szemi-euklideszi metrikát, melyet $\eta\,(a_i, a_j) \overset{def}{=} g\,(E_i\,(0)\,, E_j\,(0))$ értelmez. Ekkor

$$R\,(E_i\,(t)\,, c_v'\,(t))\, c_v'\,(t) = \sum_{j=1}^{n} \varrho_i^j\,(t)\, E_j\,(t)\,,\; i = 1, \ldots, n$$

felbontás érvényes az egyértelműen meghatározott ϱ_i^j függvényekel. Ez definiálja a $Q_v : [0,1] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ folytonos függvényt az alábbi

$$Q_v(t)(a_i) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{n} \varrho_i^j(t)\, a_j(t)$$

egyenlettel, ahol $Q_v(t)$ egy η-szimmetrikus lineáris leképezés. Ez abból adódik, hogy az R görbületi tenzor szimmetrikus a g metrikus tenzorra, és az E_i vektormezők egy ortonormált bázist adnak végig a geodetikus mentén, így csupán a görbületi tenzor metrikára vett szimmetriáját fogalmaztuk meg egy másik alakban. Vegyük az $\widetilde{A} : Y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\, E_i(t) \mapsto \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\, a_i$ leképezést, mely a geodetikus menti folytonos vektormezők vektortere és az $\mathbb{R}^n$ folytonos görbéinek a pontonkénti összegre vett vektortere között ad meg egy lineáris izomorfizmust. Ez az A leképezés egy azonosítást is megad a Jacobi-egyenlet és a következő Morse-Sturm egyenlet között:

$$J''(t) + Q_v(t)[J(t)] = 0, \tag{11}$$

ahol $J : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ egy vektor értékű függvény és $J'(t)$ a szokásos deriválást jelöli. Jelölje $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$ az $a_1, \ldots, a_p$ vektorok által feszített p-dimenziós alteret, azaz a $K : T_{c_v(0)}M \to \mathbb{R}^n$ izometriánál a $T_{c_v(0)}P$ altér képét. A $w_v : T_{c_v(0)}P \to T_{c_v(0)}P$ Weingarten-endomorfizmusnak a K izometriánál egy $\widehat{w} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ endomorfizmus felel meg. Azon megoldásai az (10) Jacobi-egyenletnek, melyek eleget tesznek az

1. $X(0) \in T_{c_v(0)}P$;
2. $X'(0) - w_v(X(0)) \in T_{c_v(0)}P^{\perp}$,

kezdetiérték feltételeknek, a P-Jacobi-mezők. A P-Jacobi-mezőknek az A leképezésnél azon görbék felelnek meg melyek kielégítik a (11) Morse-Sturm rendszert az

1. $J(0) \in \mathbb{R}^p$;
2. $J'(0) - \widehat{w}(J(0)) \in (\mathbb{R}^p)^{\perp}$,

kezdetiérték feltételekkel, ahol $(\mathbb{R}^p)^{\perp}$ az $\mathbb{R}^p$-re ortogonális altér az η szemi-euklideszi metrika szerint. Jelölje a fenti feltételekkel vett megoldások vektorterét $\mathcal{J}(Q, \widehat{w})$. Ekkor $\widetilde{A}(\mathcal{J}(c_v, P)) = \mathcal{J}(Q, \widehat{w})$, ahol $\widetilde{A}$ egy vektortér izomorfizmus $\mathcal{J}(c_v, P)$ és $\mathcal{J}(Q, \widehat{w})$ között. A P-Jacobi-mezőkre ismert

$$g(X'(t), Y(t)) - g(X(t), Y'(t)) \equiv 0$$

egyenletnek a $\widetilde{A}$ izomorfizmusnál az

$$\eta\left(\widetilde{A}(X)'(t),\widetilde{A}(Y)(t)\right)-\eta\left(\widetilde{A}(X)(t),\widetilde{A}(Y)'(t)\right)\equiv 0 \tag{12}$$

egyenlet felel meg, hiszen $g(E_i(t),E_j(t))=g(E_i(0),E_j(0))=C_{ij}$ konstans miatt, a következő összefüggés érvényes

$$\eta\left(\widetilde{A}(X)(t),\widetilde{A}(Y)(t)\right)=g(X(t),Y(t))$$

minden a $c_v(t)$ geodetikus menti $X(t)$, $Y(t)$ vektormezőre. Tekintsük most az $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n)^*$ vektorteret az alábbi ω szimplektikus formával, ahol természetesen az η-szerinti duális vektorteret vettük, azaz $v^*=\eta(v,.)$:

$$\omega((v_1,v_2),(z_1,z_2))\overset{def}{=}z_2^*(v_1)-v_2^*(z_1),\ \text{ahol}\ (v_1,v_2),\ (z_1,z_2)\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n)^*.$$

Ekkor az (12) egyenlet alapján minden $J_1,J_2\in\mathcal{J}(Q,\widehat{w})$ görbére

$$\omega((J_1(t),J_1'(t)),(J_2(t),J_2'(t)))\equiv 0 \tag{13}$$

teljesül. Szükségünk lesz még egy leképezésre amit

$$B:\mathcal{J}(Q,\widehat{w})\times[0,1]\ni(J,t)\mapsto(J(t),J'(t))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

értelmez. Vegyük észre, hogy (13) egyenlet miatt $B\left(\mathcal{J}(Q,\widehat{w})\times\{\widetilde{t}\}\right)$ tér egy Lagrange-altere lesz az $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$ szimplektikus térnek minden $\widetilde{t}\in[0,1]$ esetén, hiszen $\dim B\left(\mathcal{J}(Q,\widehat{w})\times\{\widetilde{t}\}\right)=n$ és az (13) egyenlet miatt minden $z,q\in\mathcal{B}\left(\mathcal{J}(Q,\widehat{w})\times\{\widetilde{t}\}\right)$ esetén, $\omega(z,q)=0$. V. I. Arnol'd [A] eredményei alapján az $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$ szimplektikus tér Lagrange altereinek $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ halmaza egy kompakt, összefüggö, sima részsokasága a $G_n(\mathbb{R}^{2n})$ Grassmann-sokaságnak, melyet Lagrange-sokaságnak nevezünk. Így a fentiek alapján az

$$L\left(\widetilde{t}\right)\overset{def}{=}B\left(\mathcal{J}(Q,\widehat{w})\times\{\widetilde{t}\}\right)=\left\{\left(J\left(\widetilde{t}\right),J'\left(\widetilde{t}\right)\right)\mid J\in\mathcal{J}(Q,\widehat{w})\right\}$$

egy Lagrange-altér lesz minden $\widetilde{t}\in[0,1]$ esetén, azaz

$$L(t)=B\left(\widetilde{A}(\mathcal{J}(c_v,P))\times\{t\}\right),\ t\in[0,1]$$

egy sima görbét definiál $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$-ben. Az

$$L_0\overset{def}{=}\{0\}\times\mathbb{R}^n$$

Lagrange-altérnek kitüntetett szerepe lesz a Maslov-index definiálása során, mivel a fokális pontok ennek segítségével kereshetők. A $c_v(t_0)$ pont pontosan akkor fokális pont, ha létezik egy $X \in \mathcal{J}(c_v, P)$ P-Jacobi-mező melyre $X(t_0) = 0$, ennek bizonyítása (2.4) Lemma alapján látható. Ez utóbbi feltétel viszont az $\widetilde{A}$ leképezés miatt pontosan azt jelenti, hogy van egy $J = \widetilde{A}(X) \in \mathcal{J}(Q, \widehat{w})$ görbe, melyre $J(t_0) = \widetilde{A}(X)(t_0) = 0$, azaz $B(J \times \{t_0\}) = B\left(\widetilde{A}(X) \times \{t_0\}\right) \in L_0$, ahol definíció szerint $B(J \times \{t_0\}) \in L(t_0)$ is teljesül. Így tehát azt kaptuk, hogy $c_v(t_0)$ pontosan akkor fokális pont, ha $L(t_0) \cap L_0 \neq \{0\}$. Ez a megfigyelés motiválja a következő definíciót:

$$\Lambda^k\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \stackrel{def}{=} \left\{L_\star \in \Lambda\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \mid \dim(L_\star \cap L_0) = k\right\},\ k = 0, \ldots, n,$$

ekkor az $\mathcal{M} \stackrel{def}{=} \cup_{i=1}^n \Lambda^i(\mathbb{R}^{2n})$ halmazt **Maslov-ciklus**nak hívjuk. Ennek segítségével úgy is fogalmazhatnánk, hogy $c_v(t_0)$ pontosan akkor fokális pont, ha az $L(t)$ görbénk, melyet a geodetikushoz asszociáltunk, metszi a Maslov ciklust a t_0 paraméternél, azaz $L(t_0) \in \mathcal{M}$. Továbbá egyszerűen látható az is, hogy $L(t_0) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^{2n})$ pontosan akkor teljesül, ha a $c_v(t_0)$ pont multiplicitása pontosan k, azaz éppen k darab lineárisan független P-Jacobi-mezőt választhatunk, melyek mind eltűnnek a $c_v(t_0)$ pontban. A Maslov-ciklus struktúráját V. I. Arnol'd [A] írta le. Innen tudjuk többek közt, hogy a Maslov-ciklus a $\Lambda^i(\mathbb{R}^{2n})\,,\ i > 0$ sima beágyazott sztrátumok uniójából áll. Jegyezzük még meg, hogy ha $L_\star \in \Lambda^k(\mathbb{R}^{2n})$, akkor létezik ennek a pontnak egy olyan alkalmasan kicsiny $U_{L_\star} \subset \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ környezete, melyre $U_{L_\star} \cap \Lambda^i(\mathbb{R}^{2n}) = \emptyset$ teljesül, minden $i > k$ esetén, azaz ha egy $L_\star$ Lagrange altérre az $L_\star \cap L_0$ metszet k-dimenziós, akkor minden az $L_\star$-hoz elég közeli $\widetilde{L_\star}$ Lagrange altérre $\dim\left(\widetilde{L_\star} \cap L_0\right) \leq k$. Továbbá a $\Lambda^0(\mathbb{R}^{2n})$ egy nyílt sűrű halmaz $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$-ben, és $H_1(\Lambda(\mathbb{R}^{2n}), \Lambda^0(\mathbb{R}^{2n}); \mathbb{Z})$, az első relatív homológia egész együtthatókkal, kiszámolható és az eredmény:

$$H_1\left(\Lambda\left(\mathbb{R}^{2n}\right), \Lambda^0\left(\mathbb{R}^{2n}\right); \mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}.$$

Tegyük fel, hogy $c_v(1)$ nem fokális pont, azaz $L(1) \in \Lambda^0(\mathbb{R}^{2n})$, ekkor ha $\delta > 0$ kellően kicsiny, akkor $L(t)\,,\ t \in [\delta, 1]$ egy relatív homológia osztályt reprezentál $H_1(\Lambda(\mathbb{R}^{2n}), \Lambda^0(\mathbb{R}^{2n}); \mathbb{Z})$-ben, mely független a kellően kicsiny $\delta > 0$ választásától. Ez a homológia osztály egy egész szám, melyet a $c_v(t)\,,\ t \in [0,1]$ **geodetikus szakasz Maslov-index**ének nevezünk. Ha most $v \in \widetilde{N(P)}$, $v \notin F(P)$, akkor a $c_v(t)\,,\ t \in [0,1]$ geodetikus szakasz

Maslov-indexét **a v vektor Maslov-indexé**nek nevezzük. Mint látható ez egy $\mu : \widetilde{N(P)} - F(P) \rightarrow \mathbb{Z}$ egészértékű függvény. Mercuri, Piccione és Tausk [M-P-T] cikkükben egy ún. "non-degeneracy" feltételt használnak. Az 5.1.2 Tételük [M-P-T] bizonyításából kiderül, hogy ez éppen a mi $(R2)$ feltételünknek felel meg. Ez a "non-degeneracy" kikötés annak a lefordítása, hogy az $L(t)$ görbe transzverzálisan metszi a Maslov-ciklust. E feltétel mellett egy $c_v(t)$, $t \in [0,1]$ geodetikus szakaszon véges sok $c_v(t_0), \ldots, c_v(t_k)$ fokális pont van, és ahogyan azt cikkükben bizonyították, az $(R2)$ feltétel mellett, a Maslov-index megegyezik a fokális indexxel, azaz

$$\mu(v) = \sum_{i=0}^{k} \operatorname{sgn}(<,> |_{\mathcal{D}_{t_i}(c_v)}), \tag{14}$$

ahol a képlet jobb oldalán szereplő fokális indexben a $\operatorname{sgn}(<,> |_{\mathcal{D}_{t_i}(c_v)})$ kifejezés a $<,> |_{\mathcal{D}_{t_i}(P,c_v)}$ szemi-euklideszi metrika szignatúráját jelöli, azaz a {pozitívdefinit alterek dimenzóinak maximuma} mínusz a {negatívdefinit alterek dimenzióinak maximuma}, és az összegzés a geodetikus szakasz fokális pontjaira megy.

Ne felejtsük el, hogy az $L(t)$ görbe függ a $c_v(t)$ geodetikustól, pontosabban a $v \in \widetilde{N(P)}$ ponttól, ezért helyesebb az

$$L(t,v) \stackrel{def}{=} L(t)$$

jelölés. Azt szeretnénk elérni, hogy ha egy másik, a $c_v(t)$-hez elég közeli $c_w(t)$ geodetikust veszünk, akkor $L(t,w)$ ugyanabban a $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ Lagrange-sokaságban legyen értelmezve. Itt kap szerepet az az U környezet, és az ezen vett (W_i) bázismező, amit e fejezet elején választottunk. Mivel minden $z \in P \cap U$ esetén $(W_1(z), \ldots, W_p(z))$ a T_zP alteret feszíti, és $(W_1, \ldots, W_n)$ az U környezet minden pontjában egy ortonormált bázist ad, ezért

$$g(W_i(z), W_j(z)) = g(W_i(c_v(0)), W_j(c_v(0))) = \eta(a_i, a_j)$$

minden $z \in U$ esetén, speciálisan minden $z \in P \cap U$ pontra is. Így $K_z : (T_zM, g|_{T_zM}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \eta), (W_1(z), \ldots, W_n(z)) \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$ egy izometrikus izomorfizmus lesz minden $z \in P \cap U$ esetén, ahol még $K_z(T_zP) = \mathbb{R}^p$ is teljesül. Ezért minden $c_w(t)$, $w \in N(P)$ geodetikusra, melyre $c_w(0) \in P \cap U$ teljesül, ugyanabban az $(\mathbb{R}^n, \eta)$ térben vehetjük a geodetikushoz asszociált Morse-Sturm-rendszert, ahol a geodetikus menti $R(., c_w'(t))\, c_w'(t)$ görbületből származó $(1,1)$ tenzornak megfelelő $Q_w(t)$ tenzor, és a Morse-Sturm-rendszer kezdeti feltételei simán függnek az $w \in \widetilde{N(P)}$ ponttól. Azaz az $L(t,w)$ görbék, mind ugyanannak a $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ Lagrange-sokaságnak a görbéi, melyek simán függnek a t és w paraméterektől. Ebből látszik, hogy ha $v(\tau) : [0,\epsilon] \to \widetilde{N(P)} - F(P)$ a $v = v(0)$ pont egy egyparaméteres sima variációja, akkor az $L(t,v)$ görbéknek egy $L(t,v(\tau))$ egyparaméteres variációja adódik, ahol az $L(t,v(\tau))$ görbék mind ugyanazt a homológia osztályt reprezentálják, azaz a $\mu : \widetilde{N(P)} - F(P) \to \mathbb{Z}$ függvény folytonos, így lokálisan konstans.

Érdemes megjegyzeni, hogy Riemann-esetben az 2.3. Lemma miatt az $(R2)$ feltétel mindig teljesül, így a Maslov-index egyenlő a fokális indexel. Az (14) egyenlőség jobb oldalán szereplő fokális indexben $\mathrm{sgn}(<,> |_{\mathcal{D}_{t_i}(c_v)}) = \dim \mathcal{D}_{t_i}(c_v)$, ami így éppen a fokális pontokat számolja multiplicitással, és mint tudjuk ezt teszi a Morse-index is. Azt kaptuk tehát, hogy Riemann-esetben a Maslov-index megegyezik a Morse-indexxel.

6.2 Helfer állításának igazolása

Tekintsünk egy $(n+1)$-dimenziós szemi-euklideszi vektorteret és a belőle származtatott $(\mathbb{R}^{n+1}, < .,. >)$ szemi-Reimann sokaságot. Jelölje $\tilde{\nabla}$ ennek a $(\mathbb{R}^{n+1}, < .,. >)$ szemi-Riemann-sokaságnak a Levi-Cività-féle kovariáns driválását. Rögzítsük egy $e_1, \ldots, e_{n+1}$ ortonormált bázisát a szemi-Euklideszi térnek, ahol e_{n+1} térszerű, azaz $< e_{n+1}, e_{n+1} >= 1$, jelölje továbbá $E_1, \ldots, E_{n+1}$ ezek kiterjesztéseit konstans vektormezőkké $\mathbb{R}^{n+1}$-re. Legyen $\omega : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ egy sima függvény, mely a $t \mapsto t \cdot e_{n+1}$ egyenes mentén azonosan nulla és $\partial_i \omega|_{t \cdot e_{n+1}} = 0$ minden i esetén, azaz ω elsőrendben tűnik el a $t \cdot e_{n+1}$ egyenes mentén. Vegyük az $(\mathbb{R}^{n+1}, \eta \stackrel{def}{=} e^{\omega(x)} \cdot < .,. >)$ szemi-Riemann-sokaságot, mely a Helfer-féle állításnál is szerepelt. Jelölje ∇ a Levi-Cività-féle kovariáns deriválást ezen a sokaságon. Ekkor a Koszul formula szerint

$$\eta(\nabla_{E_i} E_j, E_k) = \frac{1}{2} \cdot e^{\omega(y)} \{< \tilde{\nabla}_{E_i} E_j, E_k > + \partial_i \omega(y) \delta^\star_{jk} + \partial_j \omega(y) \delta^\star_{ik} - \partial_k \omega(y) \delta^\star_{ij}\},$$

az $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ pontban, ahol $\delta^\star_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \langle E_i(y), E_j(y) \rangle$, azaz e szimbólum a $0, 1, -1$ értékket veheti fel. Mivel $< \tilde{\nabla}_{E_i} E_j, E_k >= 0$ ezért

$$e^{\omega(y)} \cdot \nabla_{E_i} E_j = e^{\omega(y)} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \{\partial_i \omega(y) \delta^\star_{jk} + \partial_j \omega(y) \delta^\star_{ik} - \partial_k \omega(y) \delta^\star_{ij}\} E_k \cdot \delta^\star_{kk}.$$

Mivel $e^{\omega(y)} \neq 0$, így ezzel le is egyszerűsíthetünk a fenti formulában. Vegyük észre, hogy $\nabla_{E_i} E_j = 0$ érvényes a $t \cdot e_{n+1}$ mentén, hiszen $\partial_i \omega(t \cdot e_{n+1}) \equiv 0$, amiből rögtön következik, hogy $t \cdot e_{n+1}$ geodetikusa lesz az $(\mathbb{R}^{n+1}, \eta)$ szemi-Riemann-sokaságnak és, hogy $E_1, \ldots, E_{n+1}$ párhuzamos vektormezők maradnak e geodetikus mentén. Használva, hogy $\nabla_{E_i} E_j = 0$ a $t \cdot e_{n+1}$ geodetikus mentén, és $\delta^\star_{ij}$ tulajdonságait, továbbá, hogy $\partial_{n+1}\partial_{n+1}\omega|_{t \cdot e_{n+1}} \equiv 0$ a következők adódnak:

$$\nabla_{E_{n+1}} \nabla_{E_{n+1}} (\sum_{k=1}^{n+1} f_k\,(y) \cdot E_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \partial_{n+1}\partial_{n+1} f_k\,(y) \cdot E_k + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \partial_{n+1} f_k\,(y)\, \nabla_{E_{n+1}} E_k$$

$$+ \sum_{k=1}^{n+1} f_k\,(y)\, \nabla_{E_{n+1}} \nabla_{E_{n+1}} E_k =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \partial_{n+1}\partial_{n+1} f_k\,(y) \cdot E_k + 0 + \sum_{k=1}^{n+1} f_k\,(y)\, \nabla_{E_{n+1}} \{ \sum_{l=1}^{n+1} \frac{1}{2} (\partial_{n+1}\omega(y)\delta^\star_{kl} + \partial_k \omega(y) \delta^\star_{(n+1)l} -$$

$$\partial_l \omega(y) \delta^\star_{(n+1)k}) E_l \delta^\star_{ll} \} = \sum_{k=1}^{n+1} \partial_{n+1}\partial_{n+1} f_k\,(y) \cdot E_k +$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_k\,(y)\, \frac{1}{2} \partial_{n+1}\partial_{n+1}\omega(y) \delta^\star_{kk} E_k \delta^\star_{kk} + \sum_{k=1}^{n+1} f_k\,(y)\, \frac{1}{2} \partial_{n+1}\partial_k \omega(y) E_{n+1} -$$

$$\frac{1}{2} f_{n+1}\,(y) \sum_{l=1}^{n+1} \partial_{n+1}\partial_l \omega(y) E_l \delta^\star_{ll} + 0 = \sum_{k=1}^{n+1} \partial_{n+1}\partial_{n+1} f_k\,(y) \cdot E_k +$$

$$0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} f_k\,(y)\, \partial_{n+1}\partial_k \omega(y) E_{n+1} - \frac{1}{2} f_{n+1}\,(y) \sum_{l=1}^{n+1} \partial_{n+1}\partial_l \omega(y) E_l \delta^\star_{ll}$$

Hasonlóan az előző megjegyzések felhasználásával, a $t \cdot e_{n+1}$ mentén egy y pontban a következők adódnak

$$R(E_i, E_{n+1})E_{n+1} = \nabla_{E_i} \nabla_{E_{n+1}} E_{n+1} - \nabla_{E_{n+1}} \nabla_{E_i} E_{n+1} - \nabla_{[E_i, E_{n+1}]} E_{n+1} =$$

$$\nabla_{E_i} \{ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2} (\partial_{n+1}\omega(y) \delta^\star_{(n+1)k} + \partial_{(n+1)}\omega(y) \delta^\star_{(n+1)k} - \partial_k \omega(y) \delta^\star_{(n+1)(n+1)}) E_k \delta^\star_{kk} \} -$$

$$\nabla_{E_{(n+1)}} \{ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2} (\partial_i \omega(y) \delta^\star_{(n+1)k} + \partial_{(n+1)}\omega(y) \delta^\star_{ik} - \partial_k \omega(y) \delta^\star_{(n+1)i}) E_k \delta^\star_{kk} \} + 0 =$$

hiszen $[E_i, E_j] \equiv 0$. Kihasználva $\delta^\star_{ij}$ tulajdonságait, hogy $\nabla_{E_i} E_j = 0$ a $t \cdot e_{n+1}$ mentén, és azt, hogy $\partial_{n+1}\partial_{n+1}\omega|_{t\cdot e_{n+1}} \equiv 0$:

$$= \frac{1}{2}\{\sum_{k=1}^{n+1}(\partial_i\partial_{n+1}\omega(y)\delta^\star_{(n+1)k} + \partial_i\partial_{n+1}\omega(y)\delta^\star_{(n+1)k} - \partial_i\partial_k\omega(y)\delta^\star_{(n+1)(n+1)})E_k\delta^\star_{kk}\}$$

$$-\frac{1}{2}\{\sum_{k=1}^{n+1}(\partial_i\partial_{n+1}\omega(y)\delta^\star_{(n+1)k} + \partial_{n+1}\partial_{n+1}\omega(y)\delta^\star_{ik} - \partial_{n+1}\partial_k\omega(y)\delta^\star_{(n+1)i})E_k\delta^\star_{kk}\} =$$

$$\frac{1}{2}\{\partial_i\partial_{n+1}\omega(y)E_{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1}(\partial_i\partial_k\omega(y)E_k\delta^\star_{kk}) + \sum_{k=1}^{n+1}(\partial_{n+1}\partial_k\omega(y)\delta^\star_{(n+1)i}E_k\delta^\star_{kk})\},$$

adódik. Ekkor a fenti két számolás alapján a $t \cdot e_{n+1}$ mentén egy y pontban:

$$\nabla_{E_{n+1}}\nabla_{E_{n+1}}(\sum_{k=1}^{n+1} f_k(y) \cdot E_k) + R(\sum_{k=1}^{n+1} f_i(y) \cdot E_k, E_{n+1})E_{n+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\partial_{n+1}\partial_{n+1}f_k(y) \cdot E_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} f_k(y)\,\partial_{n+1}\partial_k\omega(y)E_{n+1} -$$

$$\frac{1}{2}f_{n+1}(y)\sum_{l=1}^{n+1}\partial_{n+1}\partial_l\omega(y)E_l\delta^\star_{ll} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} f_i(y)\,\{\partial_i\partial_{n+1}\omega(y)E_{n+1} -$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(\partial_i\partial_k\omega(y)E_k\delta^\star_{kk}) + \sum_{k=1}^{n+1}(\partial_{n+1}\partial_k\omega(y)\delta^\star_{(n+1)i}E_k\delta^\star_{kk})\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\partial_{n+1}\partial_{n+1}f_k(y) \cdot E_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} f_k(y)\,\partial_{n+1}\partial_k\omega(y)E_{n+1} +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} f_i(y)\,\partial_i\partial_{n+1}\omega(y)E_{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} f_i(y)\,(\sum_{k=1}^{n+1}\partial_i\partial_k\omega(y)\delta^\star_{kk}E_k).$$

Ha most $\sum_{k=1}^{n+1} f_k(y)\,E_k$ egy Jacobi-mező a $t \cdot e_{n+1}$ geodetikus mentén, akkor $\nabla_{E_{n+1}}\nabla_{E_{n+1}}(\sum_{k=1}^{n+1} f_k(t)E_k) + R((\sum_{k=1}^{n+1} f_k(t)E_k), E_{n+1})E_{n+1} \equiv 0$ alapján azt kaptuk, hogy E_k szorzójának a fenti formulában 0-nak kell lennie. Így $k = n+1$ esetén

$$\partial_{n+1}\partial_{n+1}f_{n+1}\left(y\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}x_k\partial_k\partial_{n+1}\omega(y)\equiv 0$$

mivel minket csak a $t\cdot e_{n+1}$ geodetikusra ortogonális megoldások érdekelnek, így feltehető, hogy $f_{n+1}\left(y\right)\equiv 0$, aminél a fenti egyenlet a (2) egyenlet első sorát adja. Ha $k\neq n+1$ akkor

$$\partial_{n+1}\partial_{n+1}f_k\left(y\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}f_i\left(y\right)\partial_i\partial_k\omega(y)\delta^{\star}_{kk}\equiv 0,$$

akkor szintén kihasználva, hogy $f_{n+1}\left(y\right)\equiv 0$, a (2) egyenlet második sorát kapjuk.

7 Irodalomjegyzék

[A] Arnol'd, V. I. On a characteristic class entering into conditions of quantization. *Funkcional. Anal. i Priložen.* **1** 1967 1–14.

[A-A] Alekseevsky A. V., Alekseevsky D. V., Riemannian G-Manifolds with One-Dimensional Orbit Space, *Annals of Glob. Anal. and Geo.*, **11** (1993), 197-211.

[Br] Bredon, G. E., Introduction to compact transformation groups, *Academic Press.* New York-London (1972)

[B-E] Beem J. K., Ehrlich P. E., A Morse index theorem for null geodesics. *Duke Math. J.* **46** (1979) no. 3., 561-569.

[B-E-E] Beem, J. K.; Ehrlich, P. E.; Easley, K. L., Global Lorentzian Geometry. *Marcel Dekker Inc.* New York (1996)

[B-S] Antonio N. Bernal; Miguel Sánchez, On Smooth Cauchy Hypersurfaces and Geroch's Splitting Theorem, *Commun. Math. Phys.*, vol. **243** (2003), 461-470.

[H] Hebda J. J., The regular focal locus, *J. of Diff. Geom.*, **16** (1981), 421-429.

[He] Helfer A., Conjugate points on space-like geodesics or pseudo-self-adjoint Morse-Sturm-Liouville systems. *Pacific J. Math.* **164** (1994) no. 2., 321-350.

[K-N] Kobayashi S., Nomizu K., Fundation of differential geometry Vol. II., *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*, New York-London-Sydney, (1969)

[M] Malgrange B.,Ideals of Differentiable functions, Oxford University Press, (1966)

[M-P-T] Mercuri F., Piccione P., Tausk D.V., Stability of the focal and geometric index in semi-Riemannian geometry via the Maslov index, arXiv-math:DG/9905096 v. 3. 24. apr. 2000

[MS-Sz] Molnár G. S., Szenthe J., The focal locus of a submanifold in a Riemannian manifold, *Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **30** (1987), 101-114.

[O] Osgood W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie II. Leipzig, Teubner Berlin (1929)

[P-T] Piccione P., Tausk D.V., On the Distribution of Conjugate Points along semi-Riemannian Geodesics, preprint 2000. (LANL math.DG/0011038)

[P-T2] Piccione P., Tausk D.V., The Morse index theorem in semi-Riemannian geometry, *Ann. Glob. Analysis and Geometry.* **1** No 3. (1983), 23-36.

[R] K. Rosquist, On the structure of space-time caustics. *Comm. Math. Phys.* **88** (1983), 339–355.

[Sz1] Szenthe J., On the comparison of isometric actions, *Ann. Glob. Analysis and Geometry.* **1** No 3. (1983), 23-36.

[Sz2] Szenthe J., On the cut locus of a principal orbit in a Riemannian manifold of non-positive sectional curvature, *Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **24** (1981), 227-240.

[W] Warner F., The conjugate locus of a Riemannian manifold, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 575-604.

[Wh] Whitehead J. H. C., On covering of a complete space by the geodesics through a point. *Ann. of Math.* **36** (1935) no. 3. 679-704.