Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet

Végh László

Connectivity augmentation algorithms

(Összefüggőség-növelési algoritmusok)

című doktori értekezésének tézisei

Matematika Doktori Iskola
Vezető: Laczkovich Miklós

Alkalmazott Matematika Doktori Program
Vezető: Michaletzky György

Témavezető: Frank András

ELTE Operációkutatási Tanszék
MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport

2010. január

Bevezetés

Az értekezés fő témája az összefüggőség-növelés: egy adott gráfot szeretnénk minimális számú él hozzávételével k-szorosan összefüggővé tenni. Ez négy alapkérdést foglal magában, mivel él- és pontösszefüggőség növelése is felvethető mind irányított, mind irányítatlan gráfokban. A minimális költségű változat mindegyik esetben NP-teljes; ismert viszont három esetben polinomiális algoritmus a minimális élszámú megoldás megkeresésére. Elsőként az irányítatlan élösszefüggőség esetét oldotta meg 1987-ben Watanabe és Nakamura [19]. Ezt követte az irányított élösszefüggőség megoldása 1992-ben (Frank [8]), majd az irányított pontösszefüggőségé 1995-ben (Frank és Jordán [10]).

Az értekezésben a négy alapprobléma közül hárommal foglalkozunk: az irányított és irányítatlan pontösszefüggőség, valamint az irányítatlan élösszefüggőség növelésével. Irányított élösszefüggőség-növelésről ugyan nem esik szó, viszont az utolsó részben ezzel az összefüggőség-fogalommal kapcsolatban adunk egy konstruktív karakterizációs eredményt. Az értekezés fő eredményei a következők.

- *Megadjuk az első kombinatorikus polinomiális algoritmust irányított pontösszefüggőség-növelésre.* Erre a problémára Frank és Jordán 1995-ben adtak min-max formulát. Nyitott maradt azonban a kérdés: hogyan található meg egy optimális megoldás kombinatorikus algoritmus segítségével. Az értekezésben megadunk két, teljesen különböző kombinatorikus algoritmust. A második rész az összefüggőség eggyel való növelésének speciális esetét oldja meg algoritmikusan (Frank Andrással közös eredmény), a negyedik rész pedig az általános problémára ad algoritmust (ifj. Benczúr Andrással közös eredmény). Valójában még általánosabb problémát oldunk meg: új, algoritmikus bizonyítást adunk Frank és Jordán általános halmazpárfedési tételére is.

- *Megadunk egy min-max formulát és egy kombinatorikus polinomiális algoritmust az irányítatlan pontösszefüggőség eggyel való növelésére.* Tetszőleges gráfok irányítatlan pontösszefüggőség-növelésének bonyolultsága nyitott kérdés; az eggyel való növelés önmagában is sokat vizsgált terület. A harmadik részben bizonyított formula Frank és Jordán 1994-ből származó sejtése.

- *Megadjuk a (k, ℓ)-élösszefüggő gráfok egy konstruktív karakterizációját.* A hatodik részben bemutatott, Kovács Erika Renátával közös eredmény Frank 2003-as sejtését bizonyítja be. A tétel több korábbi karakterizáció közös általánosítását adja, és természetesen illeszkedik az eddig leemelési és irányítási tételek rendszerébe.

- *Részleges eredményeket adunk a partíciókorlátos irányítatlan lokális élösszefüggőség-növelési problémára.* Az ötödik részben irányítatlan élösszefüggőség-növeléssel kapcsolatban tárgyalunk néhány klasszikus eredményt egységes keretben, az élátbillentési technikát használva. A partíciókorlátos problémával kapcsolatban megfogalmazunk és részben bebizonyítunk egy sejtést.

Irányított pontösszefüggőség-növelés

Az irányított pontösszefüggőség-növelés megoldása valójában Frank és Jordán [10] egy általánosabb tételének speciális esete. Ez az eredmény halmazpárokon értelmezett pozitívan keresztező szupermoduláris függvények fedésére vonatkozik, megfogalmazásához szükségünk lesz a következő fogalmakra.

Egy adott V alaphalmaz diszjunkt nemüres K^- és K^+ részhalmazaiból álló $K = (K^-, K^+)$ párt **halmazpárnak** hívunk. $\mathcal{S}$ jelöli az összes halmazpár halmazát. Egy $xy \in V^2$ irányított él[1] **fedi** a K halmazpárt, ha $x \in K^-$ és $y \in K^+$. **Függetlennek** nevezzük a $K = (K^-, K^+)$ és $L = (L^-, L^+)$ halmazpárokat, ha $K^- \cap L^- = \emptyset$ vagy $K^+ \cap L^+ = \emptyset$. Ez éppen akkor teljesül, hogyha nincs mindkettejüket fedő V^2-beli él. A nem független párokat **függőnek** hívjuk. Halmazpárok egy $\mathcal{F}$ halmazát **függetlennek** mondjuk, ha páronként független elemekből áll.

$\mathcal{S}$-en megadható egy természetes részbenrendezés: legyen $K \preceq L$ akkor, ha $K^- \subseteq L^-$ és $K^+ \supseteq L^+$. A K és L halmazpárokat akkor nevezzük **összehasonlíthatónak**, ha $K \preceq L$ vagy $L \preceq K$. Két függő, de nem összehasonlítható halmazpárt **keresztezőnek** mondunk. Egy halmazpárokból álló $\mathcal{F}$ halmaz **keresztezésmentes**, ha nem tartalmaz keresztező halmazpárokat, azaz bármely két eleme vagy független, vagy összehasonlítható.

K és L függő halmazpárokra definiálhatjuk a $K \wedge L = (K^- \cap L^-, K^+ \cup L^+)$ és $K \vee L = (K^- \cup L^-, K^+ \cap L^+)$ halmazpárokat. A $\mathcal{S}$-en értelmezett, nemnegatív egészértékű p függvényt akkor nevezzük **pozitívan keresztező szupermodulárisnak**, ha

$$p(K) + p(L) \leq p(K \wedge L) + p(K \vee L)$$

fennáll, amennyiben $K, L \in \mathcal{S}$, K és L függők, továbbá $p(K), p(L) > 0$.

Jelölje $\delta_F(K)$ a K-t fedő F-beli élek számát egy F él-multihalmaz és egy $K \in \mathcal{S}$ halmazpár esetén. F **fedi** a p függvényt, ha $\delta_F(K) \geq p(K)$ teljesül minden $K \in \mathcal{S}$ párra. Jelölje τ_p a p-t fedő élek minimális számát, és legyen $\nu_p = \max\{\sum_{K \in \mathcal{F}} p(K) : \mathcal{F} \text{ független}\}$. Világos, hogy $\nu_p \leq \tau_p$, hiszen egy él egy független rendszernek legfeljebb egy tagját fedheti. Az alábbi tétel szerint itt valójában egyenlőség áll fenn.

1. Tétel (Frank és Jordán, 1995 [10]). *Ha p pozitívan keresztező szupermoduláris függvény egy V alaphalmaz halmazpárjain, akkor $\tau_p = \nu_p$.*

A tétel alkalmazásai között szerepel mind az él-, mind a pontösszefüggőség-növelés irányított gráfokban, az ST-élösszefüggőség-növelés, Győri útrendszer-generálási tétele, valamint maximális K_{tt}-mentes t-párosítás keresése páros gráfokban.

Tekintsük most az irányított pontösszefüggőség-növelés problémáját. Adott $D = (V, A)$ irányított gráf és k összefüggőségi igény esetén nevezzük a $K \in \mathcal{S}$ halmazpárt **egyirányú párnak**, ha $\delta_D(K) = 0$, azaz D egyetlen éle sem fedi K-t. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_D$-val jelöljük az egyirányú párok halmazát. Legyen $s(K) := |V - (K^- \cup K^+)|$.

[1] V^2-tel a V halmazon levő összes irányított él halmazát jelöljük, $\binom{V}{2}$ pedig az összes irányítatlan él halmaza.

2. Tétel. *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban azon élek minimális száma, melyeket D-hez adva k-pontösszefüggő gráfot kapunk, megegyezik a $\sum_{i=1}^{\ell}(k - s(K_i))$ összeg maximumával, ahol $K_1, \ldots, K_\ell$ páronként független egyirányú párok.*

Tegyük most fel, hogy D már eleve $(k-1)$-pontösszefüggő; ezt az esetet az eggyel való növelés problémájának nevezzük. Ekkor minden egyirányú párra $s(K) \geq k-1$ teljesül. **Szoros**nak hívjuk azon egyirányú párokat, melyekre $s(K) = k-1$, ezek halmazát pedig $\mathcal{O}^1 = \mathcal{O}^1_D$-vel jelöljük. Ekkor a tétel az alábbi formára egyszerűsíthető:

3. Tétel. *Egy $(k-1)$-pontösszefüggő $D = (V, A)$ irányított gráf esetén azon élek minimális száma, melyeket D-hez adva k-pontösszefüggő gráfot kapunk, megegyezik a páronként független szoros egyirányú párok maximális számával.*

Az 1. Tétel eredeti bizonyítása nem volt algoritmikus. Az eredeti cikk tartalmazott egy polinomiális algoritmust, amelyik azonban az ellipszoid módszeren alapult. Nyitva maradt tehát a kérdés, hogy adható-e kombinatorikus polinomiális algoritmus. Az első kapcsolódó eredményt Enni adta 1-ST-élösszefüggőség-növelésre 1999-ben [5]. Rögzített k-ra Frank és Jordán adtak szintén 1999-ben [11] kombinatorikus összefüggőség-növelési algoritmust, melynek futásideje n polinomjának és k exponenciális függvényének szorzata.

Az értekezés második részében az összefüggőség eggyel való növelésére adunk kombinatorikus algoritmust; a negyedik részben leírt, teljesen más megközelítést használó algoritmus tetszőleges irányított gráf pontösszefüggőség növelésére szolgál. Ez egyben az általános 1. Tételre is új, algoritmikus bizonyítást szolgáltat.

Az összefüggőség növelése eggyel

A második részben két algoritmust is adunk az eggyel való növelésre. Az első egy egyszerű duális orákulumot használ, a második pedig új bizonyítást is ad a 3 Tételre. A duális orákulum a következő tételen alapul. **Váz** alatt egy maximális keresztezésmentes rendszert értünk.

4. Tétel (Frank, V. [V1]). *Egy tetszőleges $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}^1$ vázra a $\mathcal{K}$-beli páronként független egyirányú párok maximális száma ugyanannyi, mint $\mathcal{O}^1$-ben, vagyis $\nu(\mathcal{K}) = \nu(\mathcal{O}^1) = \nu(D)$.*

Egy váz esetén $\nu(\mathcal{K})$ értékét egyszerűen meg tudjuk határozni Dilworth tételének segítségével. A duális optimum értékének kiszámításához tehát mindössze egy vázat kell építenünk. Ugyan tetszőleges maximális keresztezésmentes rendszer megfelel, a feladat mégsem triviális, mivel $\mathcal{O}^1$ exponenciális méretű lehet. A vázépítő eljárás központi fogalma a **stabil keresztezésmentes rendszer**.

Általános összefüggőség-növelés

A 4. részben leírt, [V4]-ben megjelent eredmény Benczúr korábbi, eggyel növelő algoritmusát [2] terjeszti ki. Az 1. Tétel ekvivalens átfogalmazását adjuk részbenrendezett halmazokra. A vizsgált probléma bizonyos fajta részbenrendezett halmazok súlyozott fedése minimális számú intervallummal. **Intervallum** alatt itt egy minimális és egy maximális elem közti elemek halmazát értjük; két elem akkor **függő**, ha van mindkettejüket tartalmazó intervallum, egyébként pedig **függetlenek**. A részbenrendezett halmazoktól az ún. **erős intervallum tulajdonságot** várjuk el, amely a függő elemeken értelmezi a $\vee$ és $\wedge$ operációkat, és ezekre szab bizonyos feltételeket.

A halmazpárokhoz analóg módon értelmezzük részbenrendezett halmazokon is a **pozitívan keresztező szupermoduláris** függvényeket. p akkor rendelkezik e tulajdonsággal, ha bármely függő x és y elemekre $p(x) > 0$ és $p(y) > 0$ esetén $p(x) + p(y) \leq p(x \wedge y) + p(x \vee y)$ teljesül.

Legyen $\mathcal{I}$ intervallumok egy multihalmaza. $\mathcal{I}$ **fedi** a p függvényt, ha minden x elem legalább $p(x)$ intervallumban szerepel. A következő tétel az 1. Tétel megfelelője részbenrendezett halmazokra, sőt, kimutatható a két tétel ekvivalenciája is.

5. Tétel (V. és Benczúr [V4]). *Legyen $(\mathcal{P}, \preceq)$ az erős intervallum tulajdonsággal rendelkező részbenrendezett halmaz, p pedig egy $\mathcal{P}$-n értelmezett pozitívan keresztező szupermoduláris függény. A p-t fedő intervallumok minimális száma egyenlő a páronként független elemek p értékei összegének maximumával.*

Algoritmusunk primál-duál módszert használ. Kiindulunk egy tetszőleges fedésből, és megpróbálunk minden intervallumhoz egy tanúelemet keresni. Ha találunk olyan tanúkat, melyek független rendszert alkotnak, akkor készen vagyunk. Amennyiben nem ez a helyzet, a tanúkat kisebbekre próbáljuk cserélni egy bizonyos szabály alapján. Ha elakadunk, akkor a tanúk addigi sorozatának segítségével tudunk eggyel kisebb méretű fedést találni.

Amikor ezt a részbenrendezett halmazokra vonatkozó, általános algoritmust összefüggőség-növelésre alkalmazzuk, óvatosnak kell lennünk, mivel a halmazpárok száma exponenciálisan nagy lehet. Az algoritmus elemi lépéseit maximális folyam számítások és szélességi keresések segítségével tudjuk implementálni.

Irányítatlan pontösszefüggőség-növelés

Máig nyitott probléma, hogy az irányítatlan pontösszefüggőség-növelés polinomiális időben megoldható-e. A korábban ismert legjobb eredmény Jacksontól és Jordántól származik ([14], 2005): rögzített k-ra megadtak egy polinomiális algoritmust az optimális megoldás megkeresésére.

A harmadik részben min-max formulát és polinomiális algoritmust[2] adunk az eggyel való növelés speciális esetére, bebizonyítva ezzel Frank és Jordán 1994-ben megfogalmazott sejtését.

Egy $(k-1)$-pontösszefüggő $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban a csúcsok egy $X = (X_1, \ldots, X_t)$ részpartícióját **darabolás**nak nevezzük, ha $t \geq 2$, $|V - \bigcup X_i| = k - 1$ és $d(X_i, X_j) = 0$ minden $i \neq j$ esetén. Az X_i halmazokat **daraboknak** hívjuk. $t = 2$ esetén a darabolást **durvának**, $t \geq 3$ esetén **finomnak** nevezzük. Egy $uv \in \binom{V}{2}$ él **összeköti** az X darabolást, ha u és v különböző darabokba esnek. Két darabolás **független**, ha nincs mindkettőt fedő él $\binom{V}{2}$-ben.

Némi képzavarral élve, egy $\mathcal{B}$ halmazt **bokornak** nevezünk, ha páronként különböző durva darabolásokból áll úgy, hogy minden $\binom{V}{2}$-beli él legfeljebb kettőt köt össze közülük. **Cserje** alatt páronként független darabolások halmazát értjük (amelyek közt lehetnek durvák és finomak is). Egy $\mathcal{B}$ bokor esetén legyen $def(\mathcal{B}) = \left\lceil \frac{|\mathcal{B}|}{2} \right\rceil$, egy $\mathcal{S}$ cserjére pedig legyen $def(\mathcal{S}) = \sum_{K \in \mathcal{S}} (|K| - 1)$.

Egy **liget** néhány bokorból és egy cserjéből áll; a bokrok száma lehet akár nulla, a cserje pedig lehet az üres halmaz is. Megköveteljük továbbá, hogy a különböző bokrokba tartozó darabolások függetlenek legyenek egymástól és a cserjében levő darabolásoktól. Egy $\mathcal{B}_0$ cserjéből és $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_\ell$ bokrokból álló ligetre legyen $def(\Pi) = \sum_i def(\mathcal{B}_i)$. Egy $(k-1)$-pontösszefüggő $G = (V, E)$ gráfra jelölje $\tau(G)$ az olyan élek minimális számát, melyeket G-hez adva k-pontösszefüggő gráfot kapunk, $\nu(G)$ pedig legyen a Π ligeteken vett maximális $def(\Pi)$ érték.

6. Tétel (V. [V3]). *Ha $G = (V, E)$ egy $(k-1)$-pontösszefüggű gráf és $|V| \geq k + 1$, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.*

A bizonyítás és az algoritmus alapjául az irányított esetre vonatkozó második rész ötletei szolgálnak. Itt is értelmezni lehet a keresztezésmentes rendszer és a váz fogalmát, és a 4. Tétellel analóg állítás is igaz lesz. Vázak esetén Dilworth tétele helyett Fleiner tételét [6] alkalmazzuk, amely szimmetrikus részbenrendezett halmazok láncfedéseiről szól.

Konstruktív karakterizációk

A $\mathcal{P}$ gráftulajdonság konstruktív karakterizációja alatt a következő eljárást értjük. Adott néhány $\mathcal{P}$-t megőrző műveletünk, úgy, hogy $\mathcal{P}$ minden eleme előállítható ilyen lépések sorozatával, néhány egyszerű $\mathcal{P}$-beli gráf egyikéből indulva. A konstruktív karakterizációk gyakran hasznos eszköznek bizonyulnak a $\mathcal{P}$-beli gráfok további tulajdonságainak bizonyításához. Klasszikus példák a 2-él- illetve 2-pontösszefüggő gráfok konstruktív karakterizációi. Egy fontos eredmény a következő:

7. Tétel (Lovász, 1976 [16]). *Egy irányítatlan gráf akkor és csak akkor $2k$-élösszefüggő, ha egyetlen csúcsból kiindulva felépíthető az alábbi két művelet ismételt alkalmazásával:*

[2] A futási idő becslés $O(kn^7)$, vagyis k-ban és n-ben is polinomiális.

(i) hozzáadunk egy új élt (esetleg hurkot);

(ii) k meglévő élt felosztunk, és az osztópontokat egy új z ponttá egyesítjük.

Mader később hasonló karakterizációt adott $2k+1$ élösszefüggő gráfokra is [17]. A 7. Tétel segítségével könnyedén levezethetjük például Nash-Williams irányítási tételének gyenge változatát, miszerint egy irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik k-élösszefüggő irányítása, ha (irányítatlan értelemben) $2k$-élösszefüggő. Irányított esetben a következő, igen hasonló karakterizáció adható.

8. Tétel (Mader, 1982 [18]). *Egy irányított gráf akkor és csak akkor k-élösszefüggő, ha egyetlen csúcsból kiindulva felépíthető a 7. Tételben szereplő két művelet (irányított gráfokra értett) ismételt alkalmazásával.*

A (ii) műveletet a k él z-vel való **összecsípésének** hívjuk. Nulla él összecsípése alatt egy új (izolált) pont hozzáadását értjük. A bizonyítás kulcsfontosságú eszköze Mader irányított leemelési tétele [18]. Nash-Williams gyenge irányítási tétele segítségével a 7. Tétel egyszerűen levezethető a 8. Tételből.

A (k,ℓ)-élösszefüggőség a k-élösszefüggőség és a gyökeres k-élösszefüggőség természetes közös általánosítása. A $D=(V,A)$ irányított gráf (k,ℓ)**-élösszefüggő** valamely $0\le\ell\le k$ egészekre és $r_0\in V$ gyökérpontra, ha r_0-ból létezik k éldiszjunkt irányított út minden $v\neq r_0$ csúcsra, v-ből pedig létezik r_0-ba ℓ éldiszjunkt irányított út. A (k,k)-élösszefüggőség azonos a k-élösszefüggőséggel, a $(k,0)$-élösszefüggőség pedig a gyökeres k-élösszefüggőséget adja vissza. Egy irányítatlan gráf (k,ℓ)-partíció-összefüggő, ha a csúcsok minden $t\ge 2$ osztályú partíciójára legalább $k(t-1)+\ell$ él megy a különböző osztályok között. A két fogalmat az alábbi tétel kapcsolja össze:

9. Tétel (Frank, 1980 [7]). *A G irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik valamely $0\le\ell\le k$ esetén (k,ℓ)-élösszefüggő irányítása, ha a G gráf (k,ℓ)-partíció-összefüggő.*

Mader irányított leemelési tétele is kiterjeszthető (k,ℓ)-élösszefüggőségre:

10. Tétel (Frank, 1999 [9]). *Legyen $D=(U+z,A)$ egy U-ban (k,ℓ)-élösszefüggő irányított gráf ($r_0\in U$), és tegyük fel, hogy $\rho(z)=\delta(z)$. Ekkor létezik a z-re illeszkedő éleknek egy teljes leemelése úgy, hogy a kapott gráf (k,ℓ)-élösszefüggő.*

A hatodik rész fő eredménye a következő tétel, Frank 2003-ban megfogalmazott sejtése.

11. Tétel (Kovács, V. [V2]). *A $D=(V,A)$ irányított gráf pontosan akkor (k,ℓ)-élösszefüggő az $r_0\in V$ gyökérpontra nézve ($0\le\ell\le k-1$), ha az r_0 pontból kiindulva felépíthető az alábbi két művelet segítségével:*

(i) hozzáadunk egy új élt;

(ii) valamely $\ell \le i \le k-1$ esetén i meglévő élt felosztunk és az osztópontokat összecsípjük egy új z ponttá; ezután hozzáadunk $k-i$ új élt, melyeknek kezdőpontja egy korábbi pont, végpontja pedig z.

A 9. Tétel segítségével ebből könnyen levezethető az irányítatlan karakterizáció.

12. Tétel. *A $G = (V, E)$ irányítatlan gráf pontosan akkor (k, ℓ)-partíció-összefüggő ($0 \le \ell \le k-1$), ha egyetlen pontból kiindulva felépíthető a 11. Tételben szereplő két művelet irányítatlan változatának ismételt alkalmazásával.*

Az $\ell = 0$ eset mellett ismert volt korábbról az $\ell = 1$ (Frank és Szegő [13]), valamint az $\ell = k-1$ eset (Frank és Király [12]). Tételünk bizonyításához ez utóbbi szolgáltatja a kiindulópontot, azonban az általános eset jelentősen bonyolultabb. Egyebek mellett használunk egy új, absztrakt leemelési eredményt is.

Lokális élösszefüggőség-növelés

Élösszefüggőség esetén a **lokális élösszefüggőség-növelés** sokkal általánosabb problémáját is meg lehet oldani. Ez azt jelenti, hogy minden $u, v \in V$ pontpárra külön-külön megadhatunk egy $r(u, v) = r(v, u)$ összefüggőség-igényt. A $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot r-élösszefüggőnek hívjuk, ha $\lambda(u, v) \ge r(u, v)$ minden $u, v \in V$ pontpárra teljesül. Legyen $R(X) := \max\{r(u, v) : u \in X, v \notin X\}$ ha $\emptyset \ne X \subsetneq V$ és $R(\emptyset) = R(V) = 0$. Legyen továbbá $p(X) := (R(X) - d_G(X))^+$. Egy $C \subseteq V$ halmaz **marginális**, ha $R(C) \le 1$ és $d_F(C) = 0$.

13. Tétel (Frank, 1992 [8]). *Legyen adott egy $G = (V, E)$ irányítatalan gráf és egy r összefüggőség-igény úgy, hogy a gráf nem tartalmaz marginális halmazt.*[3] *Azon élek minimális száma, melyeket G-hez véve r-élösszefüggő gráfot kapunk, megegyezik $\lceil \frac{1}{2} p(\mathcal{X}) \rceil$ értékének maximumával a csúcsok $\mathcal{X}$ részpartícióira nézve.*

A tétel nemtriviális iránya Mader irányítatlan leemelési tételének [17] segítségével bizonyítható. Egy hasonló eredmény Benczúr és Frank 1999-es tétele [3] szimmetrikus pozitívan keresztező szupermoduláris függvények fedéséről.

A 13. Tétel és a Benczúr-Frank tétel is viszonylag egyszerűen levezethető a fokszámelőírt változatából. Egy $m : V \to \mathbb{Z}_+$ vektort **fokszámelőírásnak** nevezünk, ha $m(V)$ páros; F egy m**-előírt élhalmaz**, ha minden $v \in V$ csúcsban $d_F(v) = m(v)$ teljesül. A dolgozatban új bizonyításokat adunk e két tétel fokszámelőírt változataira, a szokásos leemelési módszer helyett az élátbillentés technikáját véve alapul. Az $xy, uv \in F$ élek **átbillentésén** azt értjük, hogy F-et kicseréljük az $F' = F - \{xy, uv\} + \{xv, uy\}$ élhalmazra. A bizonyításokat egységes keretben mondjuk el; a két bizonyítás jelentős része közös, és csak annyit használ, hogy az

[3] Az eredeti tétel némileg általánosabb, és csak az ún. marginális komponenseket tiltja.

igényfüggvény szimmetrikus pozitívan ferdén szupermoduláris, azaz minden $X \subseteq V$ ponthalmazra $p(X) = p(V - X)$, és amennyiben $p(X), p(Y) > 0$, a következő két egyenlőtlenség közül legalább az egyik fennáll.

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cup Y) + p(X \cap Y) \tag{1a}$$

$$p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X). \tag{1b}$$

Az értekezés ötödik részének fő kérdése a **partíciókorlátos lokális élösszefüggőség-növelés**. Az r összefüggőség-igény mellett adott a csúcsoknak egy $\mathcal{Q} = (Q_1, \ldots, Q_t)$ partíciója is. Egy élt $\mathcal{Q}$-megengedettnek hívunk, ha végpontjai $\mathcal{Q}$ különböző osztályaiba esnek. Célunk $\mathcal{Q}$-megengedett élek egy minimális méretű F halmazának megkeresése, amelyet G-hez véve r-élösszefüggő gráfot kapunk. Globális összefüggőség-igény (azaz $r \equiv k \geq 2$) esetén a problémát Bang-Jensen, Gabow, Jordán, és Szigeti oldották meg 1999-ben [1].

A növelő élhalmaz méretére az első természetes alsó korlát az, amelyikkel a 13. Tételben találkoztunk, azaz $\alpha(G) = \max \left\lceil \frac{1}{2} p(\mathcal{X}) \right\rceil$, a maximumot a csúcsok $\mathcal{X}$ részpartícióira véve. $\mathcal{X}$ egy h-részpartíció valamely h-ra $(1 \leq h \leq t)$, ha $\mathcal{X}$ a Q_h egy részpartíciója. Legyen $\beta_h(G) = \max p(\mathcal{X})$, ahol $\mathcal{X}$ egy h-részpartíció. Legyen $\Psi_{\mathcal{Q}}(G)$ az $\alpha(G)$ és $\beta_h(G)$ értékek maximuma $h = 1, \ldots, t$-re. Bang-Jensen és szerzőtársai azt mutatták meg, hogy globális összefüggőség-igény esetén az optimum vagy $\Psi_{\mathcal{Q}}(G)$, vagy $\Psi_{\mathcal{Q}}(G) + 1$, attól függően, hogy bizonyos speciális konfigurációk előfordulnak-e a gráfban. A partíciókorlátos lokális összefüggőség-növelési problémára először egy approximációs eredményt adunk.

14. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, $\mathcal{Q}$ a csúcsok egy partíciója, r pedig az összefüggőség-igény úgy, hogy a gráf ne tartalmazzon marginális halmazt. Ekkor azon $\mathcal{Q}$-megengedett élek minimális száma, melyeket G-hez véve r-élösszefüggő gráfot kapunk, legfeljebb $\Psi_{\mathcal{Q}}(G) + r_{\max}$.*

Itt $r_{\max}$ az r függvény maximális értékét jelöli. Az eredmény egy gyengébb változatát Lau és Yung is bebizonyította 2009-ben [15] (két partíció-osztályra és $2r_{\max}$-szal).

Az alábbiakban megfogalmazunk egy sejtést $t = 2$ esetén az optimum értékére. Ehhez a következő bonyolult struktúrát szükséges definiálnunk. Egy $\mathcal{H} = \{X^*, Y^*, C_1, C_2, \ldots, C_\ell\}$ partícióját a csúcsoknak **hidrának** nevezzük X^* és Y^* **fejekkel** és C_i **csápokkal**, ha minden $1 \leq i < j \leq \ell$ esetén $d_G(C_i, C_j) = 0$ teljesül, valamint tetszőleges diszjunkt $\emptyset \neq I, J \subseteq \{1, \ldots, \ell\}$ indexhalmazokra (1a) egyenlőséggel áll fenn az $X^* \cup (\bigcup_{i \in I} C_i)$ és $X^* \cup (\bigcup_{j \in J} C_j)$, valamint az $Y^* \cup (\bigcup_{i \in I} C_i)$ és $Y^* \cup (\bigcup_{j \in J} C_j)$ halmazokra.

Legyen $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2\}$ a partíciós feltétel. Egy rögzített $h \in \{1, 2\}$ értékre legyen $\mathcal{Z}$ egy olyan h-részpartíció, amelyik a $\{C_1, \ldots, C_\ell\}$ részpartíció finomítása. A C_i csápot h-**mérgezőnek** nevezzük, ha

$$p(C_i \cup X^*) - p(X^*) + \sum (p(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subseteq C_i)$$

páratlan. Jelölje χ'_h a h-mérgező csápok számát, és legyen

$$\tau'_h(G, r, \mathcal{Z}, \mathcal{H}) = \frac{1}{2} \left(\chi'_h + p(X^*) + p(Y^*) + p(\mathcal{Z}) \right).$$

Jelölje $\tau'(G, r, \mathcal{Q})$ a $\tau'_h(G, r, \mathcal{Z}, \mathcal{H})$ mennyiség maximumát h, $\mathcal{H}$ és $\mathcal{Z}$ összes, a fenti feltételeket kielégítő választására.

15. Sejtés. *Legyen adott a $G = (V, E)$ gráf, az r összefüggőség-igény és a csúcsok egy $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2\}$ partíciója; tegyük fel, hogy a gráfban nincs marginális halmaz. Ekkor az olyan $\mathcal{Q}$-megengedett élek minimális száma, melyeket G-hez véve r-élösszefüggő gráfot kapunk, megegyezik a $\Psi_{\mathcal{Q}}(G)$ és $\tau'(G, r, \mathcal{Q})$ mennyiségek maximumával.*

A sejtést fokszámelőírt változatban is megfogalmazzuk, amelyből ez következne. A fokszámelőírt sejtésre részleges bizonyítást adunk az élátbillentési módszerrel.

Az értekezés alapjául szolgáló közlemények

[V1] A. Frank and L. A. Végh. An algorithm to increase the node-connectivity of a digraph by one. *Discrete Optimization*, 5:677–684, 2008.

[V2] E. R. Kovács and L. A. Végh. The constructive characterization of (k, ℓ)-edge-connected digraphs. *Combinatorica*. (accepted); available as EGRES Tech. Report TR-2008-14 at `http://www.cs.elte.hu/egres`.

[V3] L. A. Végh. Augmenting undirected node-connectivity by one. Technical Report TR-2009-10, Egerváry Research Group, Budapest, 2009. `http://www.cs.elte.hu/egres`.

[V4] L. A. Végh and A. A. Benczúr. Primal-dual approach for directed vertex connectivity augmentation and generalizations. *ACM Transactions on Algorithms*, 4(2), 2008.

Hivatkozások

[1] J. Bang-Jensen, H. N. Gabow, T. Jordán, and Z. Szigeti. Edge-connectivity augmentation with partition constraints. *SIAM J. Discrete Math.*, 12(2):160–207, 1999.

[2] A. A. Benczúr. Pushdown-reduce: an algorithm for connectivity augmentation and poset covering problems. *Discrete Appl. Math.*, 129(2-3):233–262, 2003.

[3] A. A. Benczúr and A. Frank. Covering symmetric supermodular functions by graphs. *Mathematical Programming*, 84(3):483–503, 1999.

[4] A. Bernáth and T. Király. A new approach to splitting-off. In *Proceedings of the 13th IPCO*, volume 5035 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 401–415. Springer, 2008.

[5] S. Enni. A 1-(S, T)-edge-connectivity augmentation algorithm. *Mathematical Programming*, 84, 1999.

[6] T. Fleiner. Covering a symmetric poset by symmetric chains. *Combinatorica*, 17(3):339–344, 1997.

[7] A. Frank. On the orientation of graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B.*, 28(3):251–261, 1980.

[8] A. Frank. Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements. *SIAM J. Discrete Math.*, 5(1):25–53, 1992.

[9] A. Frank. Connectivity augmentation problems in network design. In J. Birge and K. Murty, editors, *Mathematical Programming: State of the Art*, pages 34–63. The University of Michigan, 1999.

[10] A. Frank and T. Jordán. Minimal edge-coverings of pairs of sets. *J. Comb. Theory Ser. B*, 65(1):73–110, 1995.

[11] A. Frank and T. Jordán. Directed vertex-connectivity augmentation. *Math. Prog.*, 84:537–553, 1999.

[12] A. Frank and Z. Király. Graph orientations with edge-connection and parity constraints. *Combinatorica*, 22(1):47–70, 2002.

[13] A. Frank and L. Szegő. Constructive characterizations for packing and covering with trees. *Discrete Appl. Math.*, 131(2):347–371, 2003.

[14] B. Jackson and T. Jordán. Independence free graphs and vertex connectivity augmentation. *J. Comb. Theory Ser. B*, 94(1):31–77, 2005.

[15] L. C. Lau and C. K. Yung. Efficient edge splitting and constrained edge splitting. manuscript, 2009.

[16] L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises.* Akadémiai Kiadó - North Holland, Budapest, 1979.

[17] W. Mader. A reduction method for edge-connectivity in graphs. *Annals of discrete Math*, 3:145–164, 1978.

[18] W. Mader. Konstruktion aller n-fach kantenzusammenhängenden digraphen. *Europ. J. Combinatorics*, 3:63–67, 1982.

[19] T. Watanabe and A. Nakamura. Edge-connectivity augmentation problems. *J. Comput. Syst. Sci.*, 35(1):96–144, 1987.