Valószínűségszámítási paradoxonok

Matematikai Intézet Nyílt nap, 2016. december 2.

Zempléni András

ELTE TTK Matematikai Intézet
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Érdemes-e pénzt párna alatt tartani?

- Pénzünket olyan részvénybe fektetjük, amelynek értéke egy év alatt 50%-os eséllyel 1,9-szeresére nő és ugyanolyan eséllyel a felére csökken.
- Várható éves hozam: 0,5*0,9+0,5*(-0,5)=0,2=20%
- Az évek során pénzünk várható értéke végtelenhez tart.

Érdemes-e pénzt párna alatt tartani? (folytatás)

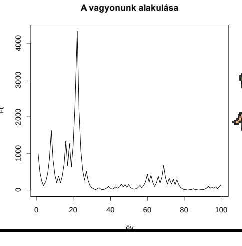
$$S_n = X_1 \cdot X_2 \dots X_n = e^{\ln(X_1)+\dots+\ln(X_n)} = \left(e^{\frac{\ln(X_1)+\dots+\ln(X_n)}{n}}\right)^n$$

$\frac{\ln(X_1)+\dots+\ln(X_n)}{n} \to$ -2,6%

Tehát

$S_n \to 0$

Egy példa-futás:



1000 szimuláció eredménye

- Kiinduló tőke: 1000 Ft
-

Min.	1. Kv.	Medián	Átlag	3. Kv.	Max.
0.000e+00	1.000e+00	4.000e+01	2.84e+07	8.44e+03	2.015e+10

- Az esetek több, mint 66%-ában kevesebb lesz a pénzünk 1000 Ft-nál

A pénz fele párna alatt

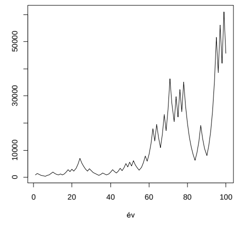
$$S_n = X_1 \cdot X_2 \dots X_n = e^{\ln(X_1)+\dots+\ln(X_n)} = \left(e^{\frac{\ln(X_1)+\dots+\ln(X_n)}{n}}\right)^n$$

- Az átlagos éves hozam 10%

  $\frac{\ln(X_1)+\dots+\ln(X_n)}{n} \to$ 4,2%

- Tehát $S_n \to \infty$

Eredmények



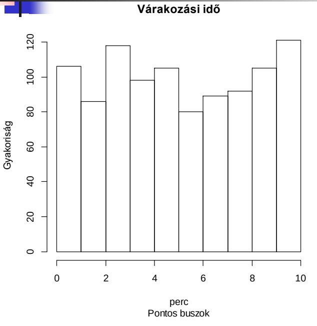
- 1000 szimuláció alapján:
- Min. 1.kvartilis Medián
  0 6327 45720
- Átlag 3.kvartilis Max.
  4692000 638700 4,66*10^8

Matematikai feladat az optimális részarány megtalálása

Buszparadoxon

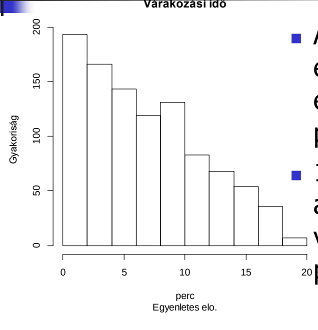
- Az autóbuszok átlagosan 10 percenként követik egymást. Egy buszmegállóba odamenve várhatóan hány percet kell várnunk a buszra?
- 5 percet, 10 percet, végtelen sokat?

Pontosan 10 percenként jönnek a buszok



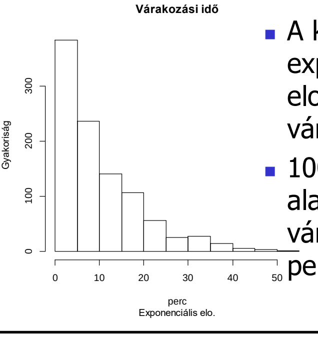
- 1000 szimuláció alapján az átlagos várakozási idő 5 perc

Átlagosan 10 percenként jönnek a buszok



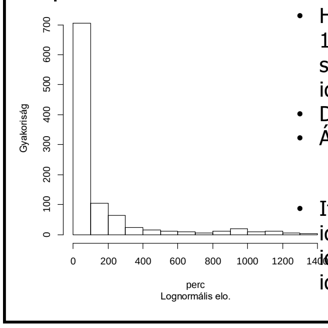
- A követési időköz egyenletes eloszlású a [0;20] perc intervallumon:
- 1000 szimuláció alapján az átlagos várakozási idő 6,7 perc

Átlagosan 10 percenként jönnek a buszok



- A követési időköz exponenciális eloszlású 10 perc várható értékkel:
- 1000 szimuláció alapján az átlagos várakozási idő 10 perc

Átlagosan 10 percenként jönnek a buszok



- Ha a követési idő lognormális, 10 perc várható értékkel, a szimulált átlagos várakozási idő 145 perc
- De akár végtelen is lehet!
- Általános képlet:

$$m = \frac{1}{2} d\left(1 + \frac{s}{d^2}\right)$$

- Itt m az átlagos várakozási időnk, d az átlagos követési időköz, s pedig a követési időköz varianciája

A szimuláció eszköze

- R programcsomag
- Nyílt forráskódú
- Szabadon letölthető
- cran.r-project.org
- Magyar nyelven is hozzáférhető sok segédanyag
- A szimulációnál használt program: http://zempleni.elte.hu/nyiltnap.txt