Gráfok és rúdszerkezetek merevsége

Fekete Zsolt

Doktori értekezés

Témavezető: Jordán Tibor
Egyetemi docens, kandidátus

ELTE TTK Matematika doktori iskola

A doktori iskola vezetője: Laczkovich Miklós

Alkalmazott matematika doktori program

A program vezetője: Prékopa András

A doktori értekezés az Eötvös Loránd Tudományegyetem Operációkutatási Tanszékén és a Magyar Tudományos Akadémia Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoportjában (MTA-ELTE) készült.

Budapest, 2006. Május

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Jelen értekezés fő témája a merevség elméletének kombinatorikus vizsgálata. Az értekezés két részre tagolható. Az első részben azt vizsgáljuk, hogy az előállítási tételek mennyire kamatoztathatók a merevség témakörében. Előállítási tételnek nevezünk egy olyan gráfelméleti tételt, amely egy gráfosztályról állítja, hogy elemei valamilyen megadott módon felépíthetőek bizonyos elemi részekből egyszerű műveletekkel, és minden gráf, amely a megadott módon felépíthető, ebbe a gráfosztályba tartozik. Az előállítási tételek tisztán gráfelméleti állítások, melyek nagy segítséget jelenthetnek merevségi, azaz bizonyos tekintetben geometriai jellegű tételek igazolásánál. Az értekezés első nagy részében négy konkrét kérdés kapcsán vizsgáljuk meg az előállítási tételek alkalmazhatóságát.

Az első témakör egy geometriai kérdésből származik, síkgráfok pszeudo-háromszögeléseivel kapcsolatban merült fel a síkbarajzolható Laman-gráfok előállításának kérdése. Majd a merevség fogalmának egy kiterjesztésével foglalkozunk bizonyos felületeken értelmezett merevségi struktúrák esetében. Itt az úgynevezett $[k, l]$-gráfok előállítási tételei kerülnek alkalmazásra $k = 2$, $l = 0, 1, 2$ esetben. A harmadik téma generikusan merev gráfok kis koordinátákkal történő síkbaágyazásának kérdését vizsgálja. A negyedik probléma pedig annak a karakterizációja, hogy egy gráfnak mikor létezik olyan merev realizációja, ahol két kijelölt csúcs pozíciója azonos.

Az értekezés második részében merevséggel kapcsolatos kombinatorikus optimalizálási kérdéseket vizsgálunk. Először a már az első részben említett és használt $[k, l]$-gráfokra adunk a $0 \leq l \leq k$ esetben egy előállítási tételt, majd ezt a kérdést egy általánosabb keretbe helyezve vizsgáljuk. Alapvető kérdés, hogy hogyan tegyünk merevvé egy nem merev gráfot. Ha az a kérdés, hogy minimális számú él hozzáadásával hogyan tegyük merevvé, akkor azt könnyen megválaszolhatjuk, hiszen a merev gráfok egy matroid generátorai. Ha viszont fokelőírások adottak a csúcsokon, akkor a kérdés megválaszolása korántsem ilyen egyszerű. Az értekezés második részének következő témaköre az, hogy hogyan tegyünk merevvé egy gráfot minimális számú csúcs rögzítésével. Ennek kapcsán egy érdekes forrás-elhelyezési kérdést is megválaszolunk. Végül az értekezés utolsó kérdésköre az, hogy hogyan tegyünk globálisan merevvé egy gráfot minimális számú csúcs lerögzítésével.

Szeretném itt köszönetemet kifejezni Jordán Tibornak, témavezetőmnek, aki megismertette velem ezt a témakört. Sokat segített doktori tanulmányaim során, és együtt dolgoztunk több itt szereplő probléma felderítésén. Köszönöm Frank Andrásnak, hogy biztosította a kutatómunka körülményeit. Köszönöm még Szegő Lászlónak és Szabó Jácintnak az együttdolgozást, valamint még az EGRES kutatócsoport tagjainak, akik inspiráltak, segítettek

beszélgetéseikkel. Valamint köszönöm a Communication Networks Laboratory-nak (CNL)[1], hogy anyagi támogatásban részesítettek doktori kutatásaim során. Végül, de nem utolsósorban köszönöm feleségemnek, Fekete-Hegedűs Tímeának, hogy segített a dolgozat helyesírási és nyelvhelyességi hibáinak felderítésében és kijavításában, valamint hogy a munkához nyugodt otthoni körülményeket biztosított.

[1] Communication Networks Laboratory, Pázmány Péter sétány 1/A, Budapest, 1117

1. fejezet

Alapfogalmak, klasszikus eredmények

1.1. Jelölések

Gráf alatt egy $G = (V, E)$ párt értünk, ahol V a csúcsok halmaza, E az élek halmaza, és implicit adott egy illeszkedési reláció, amely megmondja, hogy melyik élnek mik a végpontjai. Irányítatlan esetben a végpontokat egy rendezetlen pár adja meg. Egy élnek tehát két végpontja van, ami egybe is eshet, ez esetben hurokélről beszélünk. Megengedünk párhuzamos éleket, azaz előfordulhat, hogy kettő vagy több él végpontjai ugyanaz a két csúcs, és megengedünk párhuzamos hurokéleket is. Az irányított gráf fogalma ugyanez, csak ott a végpontokat egy rendezett pár határozza meg, tehát megkülönböztetünk talppontot és fejpontot. Ha $u, v \in V$ és $e \in E$, akkor az $e = uv$ jelölés azt jelenti, hogy az e él végpontjai u és v (irányított esetben u-ból v-be mutat), de nem jelenti azt, hogy e az egyetlen ilyen él.

Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf. Ha $X \subseteq V$ és $F \subseteq E$, akkor $F(X)$ jelöli az X által feszített F-beli élek halmazát, azaz $F(X) := \{e \in F : e = uv \text{ valamely } u, v \in X \text{ esetén }\}$. $G[X]$ alatt az X által feszített részgráfot, azaz az $(X, E(X))$ gráfot értjük. Ha $F \subseteq E$, akkor $\gamma_F(X) := |F(X)|$ jelöli az X által feszített F-beli élek számát, $\gamma_G(X) := \gamma_E(X) = |E(X)|$ pedig az X által feszített G-beli élek száma, azaz $G[X]$ élszáma.

Egy $v \in V$ csúcs esetén $N_G(v)$ jelöli a v csúcs szomszédainak halmazát. Ha $v \in V$, akkor $\gamma_G(v) := \gamma_G(\{v\})$ a v-n levő hurkok száma. Ha $X, Y \subseteq V$, akkor $d_G(X, Y) := |\{e \in E : e = uv, \text{ ahol } u \in X - Y, v \in Y - X\}|$. Legyen $d_G(X) := d_G(X, V - X)$.

Egy csúcs fokát a $d_G(v) := d_G(\{v\}, V - \{v\}) + 2\gamma_G(v)$ képlet definiálja, azaz egy hurokél 2-vel járul hozzá a fokhoz. Ezzel a definícióval igaz marad a $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$ összefüggés hurokélekkel rendelkező gráfokra is. Ha v-re illeszkednek hurokélek, akkor $d_G(v) \neq d(\{v\})$.

Az $E' := E + uv$ jelölés azt jelenti, hogy E' egy olyan élhalmaz, amelyet E-ből úgy kapunk, hogy hozzáadunk egy uv élet, és hasonlóan $E' := E - uv$ azt jelenti, hogy E'-t úgy kapjuk E-ből, hogy kitörlünk egy uv élet, ha van ilyen E-ben, és egyébként $E' = E$.

$e_G(X)$ jelöli azon élek számát, amelyeknek legalább az egyik végpontjuk X-beli, azaz $e_G(X) := |E| - \gamma_G(V - X)$. $\mathcal{C}(G)$ jelöli a G komponenseinek halmazát. Ha $(A, B; E)$ egy páros gráf (ami azt jelenti, hogy $(A \cup B, E)$ egy gráf, és minden él egyik végpontja A-, a másik B-beli), akkor $X \subseteq A$ vagy $X \subseteq B$ esetén $\Gamma_G(X)$ jelöli az X szomszédainak halmazát.

A $\gamma_G(X), d_G(v), d_G(X, Y), e_G(X)$ és $N_G(v)$ jelölések indexéből elhagyjuk a G gráfot, ha az világos a kontextusból.

Egy $G = (V, E)$ gráf és $X \subseteq V$ esetén jelölje G/X azt a gráfot, amelyben azonosítjuk az X halmaz csúcsait egymással. Formálisan: G/X csúcshalmaza a $V - X$ csúcsaiból és egy új v_X csúcsból áll, azaz $V(G/X) = V - X + \{v_X\}$. Jelölje $\phi : V \to V - X + \{v_X\}$ azt a leképezést, amelyre $v \in V - X$ esetén $\phi(v) = v$, és $v \in X$ esetén $\phi(v) = v_X$. Az éleket értelemszerűen úgy definiáljuk, hogy ha $uv = e \in E$, akkor legyen $e' = \phi(u)\phi(v)$ a G/X egy éle (amely lehet hurok is). Tehát összehúzzuk X-et egy csúcsba, de nem töröljük a keletkező hurkokat. Azokban az esetekben, amikor töröljük a keletkező hurkokat, ezt külön jelezzük.

Az előállítási tételek műveletei használják az **élfelosztás** fogalmát. Ha $e = uv$ a $G = (V, E)$ gráf egy éle, akkor az e él felosztása egy új w csúccsal azt jelenti, hogy töröljük az e élet, és hozzáadunk a gráfhoz egy új w csúcsot és két új élet: egy uw és egy wv élet.

Az élfelosztással valamilyen értelemben ellentétes irányú művelet a **leemelés**. Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, és $s \in V$ egy csúcsa, amelyre illeszkednek az $e = vs$, $f = sw$ nem-hurok élek. Azt mondjuk, hogy a $G^{ef} = (V, E - e - f + vw)$ gráf a G-ből keletkezett az e, f élek s-nél történő leemelése által. A leemelés művelete formálisan ugyanígy definiálható irányított gráfban is.

Fogjuk használni a hipergráf fogalmát. Egy $\mathcal{H} = (V, E)$ pár hipergráf, ahol V a csúcshalmaz, E a hiperélek halmaza, és minden hiperél egy csúcshalmaznak felel meg, de megengedünk „párhuzamos éleket”, azaz lehetnek $e \neq f \in E$ hiperélek, melyek ugyanazon csúcsokat tartalmazzák. Legyen $\mathcal{H} = (V, E)$ egy hipergráf, ha $X \subseteq V$ és $F \subseteq E$, akkor $F(X)$ jelöli az X által feszített F-beli élek halmazát, azaz $F(X) := \{e \in F : e \subseteq X\}$, $\gamma_F(X) := |F(X)|$ jelöli az X által feszített F-beli élek számát, és $\gamma_{\mathcal{H}}(X) := \gamma_E(X) = |E(X)|$ az X által feszített összes $\mathcal{H}$-beli él száma. Ha $X, Y \subseteq V$, akkor $d_{\mathcal{H}}(X, Y) := |\{e \in E : e \cap (X - Y) \neq \emptyset \text{ és } e \cap (Y - X) \neq \emptyset\}|$. Legyen $d_{\mathcal{H}}(X) := d_{\mathcal{H}}(X, V - X)$.

Ha egy hipergráfban minden hiperél egy vagy két elemű, akkor azt a hipergráfot egy irányítatlan gráfnak tekinthetjük. Az egyelemű hiperéleket hurokéleknek, a kételeműeket pedig nem hurok gráf-élekenek tekintjük. Ezzel a konvencióval a hipergráf a gráf általánosítása, és az $\gamma_F(X), F(X), d_{\mathcal{H}}(X, Y)$ jelölések is a gráfos jelölések kiterjesztései.

Megjegyezzük, hogy gráfok esetén egy hurkot egy „egy élű körnek”, két párhuzamos élet pedig egy „kettő élű körnek” tekintünk. Például a „körmentes gráf” szókapcsolat automatikusan egyszerű gráfot is jelent.

Használni fogunk elemi lineáris algebrai gondolatokat. Egy M mátrix rangját $r(M)$-mel jelöljük.

1.2. Matroidosztályok

Fontos szerepet játszanak a merevség kombinatorikus vizsgálatánál bizonyos matroidok, matroidosztályok. Hivatkozás nélkül használni fogjuk a matroidelmélet alapfogalmait és alapvető állításait (lásd például [41, 39]).

A következőkben definiáljuk az általunk sokszor használt matroidosztályokat.

1.1. Definíció. *Ha adott egy $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf, k, l egészek, és $k \geq 1$, akkor definiáljuk az $\mathcal{I}_{k,l}$ halmazrendszert. Egy $F \subseteq E$ élhalmaz eleme $\mathcal{I}_{k,l}$-nek, ha $\gamma_F(X) \leq k|X| - l$ minden $X \subseteq V, |X| \geq \lceil \frac{l}{k} \rceil$ esetén, és minden F-beli hiperél legalább $\lceil \frac{l+1}{k} \rceil$ méretű.*

Az 1.2 Állítás szerint az $\mathcal{I}_{k,l}$ halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat. Ezt az $(S, \mathcal{I}_{k,l})$ matroidot $\mathcal{M}_{k,l}(\mathcal{H})$-val jelöljük, és a rangfüggvényét $r_{k,l}$-lel vagy r-rel, ha világos a szövegkörnyezetből.

Megjegyezzük, hogy meg lehet fogalmazni egy ekvivalens definíciót, melynek feltétele nem „minden csúcshalmazról”, hanem „minden élhalmazról” szól: egy $F \subseteq E$ élhalmaz eleme $\mathcal{I}_{k,l}$-nek, ha F tetszőleges nemüres F' része esetén az F' mérete legfeljebb $k|V(F')| - l$, ahol $V(F')$ az F' élek által fedett csúcsok halmaza. Ebben a megfogalmazásban nem kell külön kimondani a feltételt a hiperélek méretéről, hanem következik az egyelemű részekre vett feltételből.

Külön kiírjuk, hogy az $\mathcal{I}_{k,l}$ definíciója bizonyos speciális k, l párok esetén hogyan néz ki. Tehát amennyiben $0 \leq l \leq k$:

$$\mathcal{I}_{k,l} := \{F \subseteq E : \gamma_F(X) \leq k|X| - l \;\text{ minden } X \subseteq V, X \neq \emptyset\}.$$

Azaz a ritkasági feltétel a nem-üres halmazokra van kikötve, és lehetnek egyelemű hiperélek vagy gráf esetén hurok élek. Míg a $k + 1 \leq l \leq 2k - 1$ esetben:

$$\mathcal{I}_{k,l} := \{F \subseteq E : \gamma_F(X) \leq k|X| - l \;\; \forall X \subseteq V, |X| \geq 2 \text{ esetén, és } \forall e \in F : \; |e| \geq 2\}.$$

Itt csak a legalább kételemű halmazokra van feltétel, és nincsenek egyelemű hiperélek, azaz gráf esetén hurokélek.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy egy F élhalmaz függetlensége nem függ magától a $\mathcal{H}$ hipergráftól, hanem csak az F élhalmaztól. Tehát valójában úgy is tekinthetnénk az $\mathcal{M}_{k,l}(\mathcal{H})$ matroidra, mint amelynek az alaphalmaza nem is az E, hanem egy valamilyen értelemben teljes hipergráf a V csúcshalmazon, azaz egy olyan hipergráf, amelyben benne van az összes egyelemű, kételemű, háromelemű stb. hiperél, sőt esetleg mindegyik sok példányban benne lehet, akár végtelen sok példányban is.

Jelölje a K_V a V csúcshalmaz feletti teljes gráfot. Ez alatt legegyszerűbb a végtelen teljes gráfot érteni: azaz K_V egy olyan gráf, melynek bármely két csúcsa között végtelen sok él fut, és minden csúcsán végtelen sok hurok ül.

Végtelen alaphalmazú matroid alatt azt értjük, hogy adott a végtelen S alaphalmaz véges részhalmazainak egy leszálló $\mathcal{I}$ rendszere úgy, hogy tetszőleges véges $S' \subseteq S$ esetén $(S, \{F \in \mathcal{I} : F \subseteq S'\})$ matroid. Véges rangú egy ilyen matroid, ha létezik egy K szám úgy, hogy $\mathcal{I}$ elemei legfeljebb K elemű részhalmazok.

Ezen definíciók után tekinthetjük adott V esetén az $\mathcal{M}_{k,l}$-et a K_V élhalmazán egy végtelen matroidnak. Természetesen sosem lényeges az, hogy végtelen sok él van, csak az, hogy elég sok. Például rögzített k, l esetén minden csúcsra elegendő $k - l$ darab hurkot rakni, mert ha többet raknánk rá, akkor azokat generálja már $k - l$ darab, és ugyanígy bármely két csúcs közé elég $2k - l$ élet húzni. Sokszor viszont azért érdemes a végtelen teljes gráfra mint alaphalmazra gondolni, mert így tetszőleges V csúcshalmazú gráfra értelmesek az $\mathcal{M}_{k,l}$ matroidban felmerülő kérdések: független-e, mennyi a rangja, mit generál.

A következő állítás ismert (lásd [59]).

1.2. Állítás. *Adott egy $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf, k, l egészek, és $k \geq 1$. Ekkor:*

(i) Az $\mathcal{I}_{k,l}$ halmazrendszer egy matroid függetlenjeit határozza meg az E alaphalmazon.

(ii) Az $\mathcal{M}_{k,l}$ matroid rangfüggvénye a következő:

$$r(F) = \min_{\mathcal{X}} \sum_{X \in \mathcal{X}} (k|X| - l) + |F - F(\mathcal{X})| \quad (F \subseteq E), \tag{1.1}$$

ahol a minimumot az olyan $\mathcal{X}$ halmazrendszerek felett vesszük, melyek elemei V-nek legalább $\lceil \frac{l}{k} \rceil$ elemű részhalmazai, és $E(\mathcal{X}) := \cup_{X \in \mathcal{X}} E(X)$.

A következő összefüggéseket gyakran fogjuk használni – sokszor ezen lemmára való hivatkozás nélkül is. A bizonyítása egyszerű: 1. könnyen ellenőrizhető, ugyanis minden él hozzájárulása mindkét oldalhoz ugyanannyi, és 1.-ből azonnal következik 2.

1.3. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy hipergráf, és $X, Y \subseteq V$ két csúcshalmaz. Ekkor*

1. $\gamma(X) + \gamma(Y) + d(X, Y) = \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$,

2. $\gamma(X) + \gamma(Y) \leq \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$, és egyenlőség esetén $d(X, Y) = 0$.

Ezek segítségével lássuk be az 1.2. Állítást.

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy ha $F \subseteq E$, akkor egy tartalmazásra nézve maximális, F-ben tartalmazkodó, $\mathcal{I}_{k,l}$-beli halmaz mérete $\min_{\mathcal{X}\subseteq\mathcal{P}(V)} \sum_{X\in\mathcal{X}}(k|X|-l) + |F - E(\mathcal{X})|$. Ebből a tényből következik (i) és (ii) is.

Legyen tehát $F' \subseteq F$ egy tartalmazásra nézve maximális $\mathcal{I}_{k,l}$-beli halmaz. Az világos, hogy $|F'| \leq \min_{\mathcal{X}\subseteq\mathcal{P}(V)} \sum_{X\in\mathcal{X}}(k|X|-l) + |F - E(\mathcal{X})|$, ugyanis

$$|F'| \leq \min_{\mathcal{X}\subseteq\mathcal{P}(V)} \sum_{X\in\mathcal{X}} \gamma_{F'}(X) + |F' - F(\mathcal{X})| \leq \sum_{X\in\mathcal{X}}(k|X|-l) + |F - F(\mathcal{X})|.$$

Ebből azt is látjuk, hogy egyenlőség akkor áll fenn, ha $\mathcal{X}$ elemei F'-éldiszjunktak, $|F' - F(\mathcal{X})| = |F - F(\mathcal{X})|$, azaz $\mathcal{X}$ fedi $F - F'$-t, és $\mathcal{X}$ minden X eleme legalább $\lceil \frac{l}{k} \rceil$ elemű és $\gamma_{F'}(X) = k|X| - l$ teljesül rá. Mutatni fogunk tehát egy ilyen $\mathcal{X}$-et.

Nevezzünk F'-pontosnak egy X halmazt, ha legalább $\lceil \frac{l}{k} \rceil$ elemű és $\gamma_{F'}(X) = k|X| - l$. Tehát be kell látnunk, hogy $F - F'$ lefedhető éldiszjunkt F'-pontos halmazok egy családjával.

F' maximalitása azt jelenti, hogy minden $e \in F - F'$ esetén $F' + e \notin \mathcal{I}_{k,l}$, azaz minden $e \in F - F'$ esetén létezik egy $X \subseteq V$, melyre $\gamma_{F'}(X) = k|X| - l$ és $e \subseteq X$. Tehát F' maximalitása miatt minden $e \in F - F'$ él benne van F'-pontos halmazban. Tekintsük a tartalmazásra nézve maximális F'-pontos halmazokat, jelöljük ezek halmazát $\mathcal{X}$-szel. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{X}$ elemei éldiszjunktak, azaz nem létezik olyan $e \in E$, amely legalább két maximális pontos halmazban is benne van. Sőt bármely két $X \neq Y \in \mathcal{X}$ esetén $|X \cap Y| \leq \lceil \frac{l}{k} \rceil - 1$. Tegyük fel indirekt, hogy $|X \cap Y| \geq \lceil \frac{l}{k} \rceil$, de ekkor az $k|X| - l + k|Y| - l = \gamma_{F'}(X) + \gamma_{F'}(Y) \leq \gamma_{F'}(X \cap Y) + \gamma_{F'}(X \cup Y) \leq k|X \cap Y| - l + k|X \cap Y| - l = k|X| - l + k|Y| - l$ egyenlőség miatt $X \cup Y$ is pontos lenne, ami ellentmond X és Y maximalitásának. Tehát a maximális pontosak F-éldiszjunktak és lefedik $F - F'$-t. Tehát $\mathcal{X}$ esetén egyenlőség áll fenn. $\square$

Fontos tény, hogy a (ii)-beli rangfüggvényképletben a minimum felvétetik olyan halmazrendszeren, melyre $X \neq Y \in \mathcal{X}$ esetén $|X \cap Y| \leq \lceil \frac{l}{k} \rceil - 1$. Speciálisan: ha $l \leq 0$ akkor $\mathcal{X}$ legfeljebb egyelemű, ha $l \leq k$, akkor $\mathcal{X}$ részpartíció (sőt $k = l$-re lehet partíció, mert egyelemű X-re $k|X| - k = 0$), és $l \leq 2k - 1$ esetén $|X \cap Y| \leq 1$ feltehető. $l = k + 1$ esetén pedig feltehető, hogy $\mathcal{X}$ fedi F-et, mert a kimaradó éleket kétpontú halmazokként beválasztva nem kapunk rosszabb $\mathcal{X}$-et.

Egy $G = (V, E)$ gráfot illetve $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfot $[k, l]$**-ritkának** nevezünk, ha független $\mathcal{M}_{k,l}(G)$ illetve $\mathcal{M}_{k,l}(\mathcal{H})$-ban. Amennyiben V rögzített, egy E élhalmazt $[k, l]$-**ritkának** nevezünk, ha a (V, E) gráf $[k, l]$-ritka, azaz ha $\gamma_E(X) \leq k|X| - l$ teljesül minden $X \subseteq V, |X| \geq \lceil \frac{l}{k} \rceil$ esetén, és minden hiperél mérete legalább $\lceil \frac{l+1}{k} \rceil$.

Egy $G = (V, E)$ gráfot $[k, l]$**-gráf**nak nevezünk, ha $[k, l]$-ritka és $|E| = k|V| - l$. A $[k, l]$-gráfok valójában azok a legalább $\lceil \frac{l}{k} \rceil$ csúcsú gráfok, amelyek az $\mathcal{M}_{k,l}(K_V)$ matroid bázisai. Másszóval azon a gráfok, amelyek $[k, l]$-ritkák, de belőlük bármely új él behúzásával egy nem $[k, l]$-ritka gráfot kapunk.

Kiemeljük a most definiált matroid osztály néhány nagyon gyakran használt elemét. Amennyiben $k = l = 1$, és a $\mathcal{H}$ hipergráf egy gráf, az $\mathcal{M}_{1,1}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ gráf körmatroidja.

Emlékeztetünk rá, hogy egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráf esetén az E körmentes részhalmazai egy matroid függetlenjeit alkotják – ezt nevezzük **körmatroid**nak. Azaz a körmatroid bázisai pontosan a maximális körmentes élhalmazok, azaz a feszítőerdők (összefüggő G esetén a feszítő fák). Nem nehéz belátni, hogy pontosan akkor független egy F élhalmaz a körmatroidban, ha $[1, 1]$-ritka.

A bikör matroid definíciója a következő. A V-n egy F élhalmazt (hurkok és párhuzamos élek megengedettek) a **bikör matroid**ban függetlennek nevezünk, ha a (V, F) minden komponense legfeljebb egy kört tartalmaz. Belátható, hogy a bikör matroid függetlenjei az $[1, 0]$-ritka élhalmazok. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy F élhalmaz pontosan akkor bázisa a bikör matroidnak, ha (V, F) minden komponense pontosan egy kört tartalmaz. A bikör matroid definíciójánál lényeges, hogy egy hurkot „egy élű körnek”, két párhuzamos élet pedig „kettő élű körnek” tekintünk.

Az olyan gráfokat, amelyek egy fából kaphatóak egy új él behúzásával – azaz pontosan egy kört tartalmaznak – pszeudofának is nevezik. Nevezzük ennek nyomán pszeudoerdőnek az olyan gráfot, amelynek minden komponense pszeudofa. Ezzel a szóhasználattal: a bikör matroid bázisai a V-t feszítő pszeudoerdők.

Tetszőleges $\mathcal{H}$ hipergráf esetén, ha $k = 1, l = 0$, akkor az $\mathcal{M}_{1,0}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ hipergráf transzverzális matroidja. Ez azt jelenti, hogy egy F hiperélhalmaz pontosan akkor független, ha létezik egy olyan $f : F \to V$ injektív függvény, melyre $f(e) \in e$ minden $e \in F$ esetén. Érdemes a hipergráf természetes páros-gráf reprezentációján is meggondolni a definíció jelentését. Legyen tehát P az a páros gráf, amelynek a két osztálya V (a hipergráf csúcshalmaza) és E (a hipergráf élhalmaza), és egy v csúcs a P páros gráfban akkor van összekötve egy e hiperéllel, ha $v \in e$. Könnyen látható, hogy a definícióból következik, hogy egy F élhalmaz pontosan akkor független, ha bármely $F' \subseteq F$ esetén $|\Gamma_P(F')| \geq |F'|$, azaz a Hall-tétel szerint ez pont azt jelenti, hogy F bepárosítható V-be.

Láthatjuk, hogy egy G gráf esetén ez az átfogalmazás azt adja, hogy egy F élhalmaz pontosan akkor független az $\mathcal{M}_{1,0}(G)$ bikör matroidban, ha megirányítható úgy, hogy minden befok legfeljebb 1 legyen. Ennek bizonyítsásához persze nincs szükség a Hall-tételre.

Szükségünk lesz a hipergrafikus matroid fogalmára. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf kielégíti az **erős Hall-feltételt**, (vagy azt, hogy $\mathcal{H}$ egy **hipererdő**), ha $|\cup \mathcal{F}| \geq |\mathcal{F}| + 1$ teljesül minden $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ esetén. Loréa [28] igazolta, hogy egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf azon részhipergráfjai, amelyek kielégítik az erős Hall-feltételt, matroidot alkotnak az $\mathcal{E}$ alaphalmazon. Ezt a matroidot a $\mathcal{H}$ **hipergrafikus matroid**jának nevezzük, és $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$-val jelöljük. A $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf páros gráfjának nevezzük a $G_{\mathcal{H}} = (U, V; E)$ páros gráfot, ahol az U osztály megfelel az $\mathcal{E}$-nek, és minden $e \in U$ és $v \in V$ esetén $ev \in E$ akkor és csak akkor, ha $v \in e$. Tehát az erős Hall-feltétel teljesülése a $\mathcal{H}$ hipergráfra megfelel az erős Hall-feltételnek az U nem-üres részhalmazain való teljesülésének a $G_{\mathcal{H}}$ páros gráfban. Könnyen látható, hogy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ pontosan akkor független a hipergrafikus matroidban, ha $[1,1]$-ritka, azaz $\mathcal{M}_{1,1}(\mathcal{H})$ a hipergrafikus matroid.

Az $\mathcal{M}_{1,1}(\mathcal{H})$ tehát gráf esetén a grafikus matroidot, hipergráf esetén a hipergrafikus matroidot adja. Ez utóbbiakról lesz még szó a 9. fejezetben, ott láthatunk egy Lovásztól származó ekvivalens definíciót (a 9.10. Tétel).

Kiemeljük még az $\mathcal{M}_{k,k}(G)$ matroidot abban az esetben, ha G gráf. Ez Nash-Williams és Tutte feszítőfákkal való fedésre valamint feszítőfák pakolására vonatkozó tételeivel kapcsolatos.

1.4. Tétel (Nash-Williams). *Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor fedhető le k erdővel, ha $[k, k]$-ritka.*

Ha $G = (V, E)$ egy gráf és $\mathcal{F}$ a V csúcshalmaz egy partíciója, akkor $e(\mathcal{F})$ jelöli azon élek számát, amelyek végpontjai $\mathcal{F}$ különböző elemeiben vannak, azaz $e(\mathcal{F}) = |E| - \sum_{X \in \mathcal{F}} \gamma(X)$.

1.5. Tétel (Tutte). *Egy $G = (V, E)$ gráfban pontosan akkor van k éldiszjunkt feszítőfa, ha $e(\mathcal{F}) \geq k(|\mathcal{F}| - 1)$ minden $\mathcal{F}$ partíciójára a V-nek.*

Nash-Williams tételéből következik az alábbi.

1.6. Tétel. *Ha adott $G = (V, E)$ gráf, akkor $\mathcal{M}_{k,k}(G)$ a G gráf körmatroidjának a k-szorosa (az önmagával vett k-szoros összege).*

Tehát az 1.2. Állítás szerint az E rangja az $\mathcal{M}_{k,k}(G)$ matroidban:

$$r(E) = \min_{\mathcal{F} \text{ partíciója} V\text{-nek}} k(|V| - |\mathcal{F}|) + e(\mathcal{F}).$$

Végül említjük a központi jelentőségű $\mathcal{M}_{2,3}(G)$ matroidot, amely a G gráf merevségi matroidja. Erről részletesebben a következő pontban lesz szó, és az egész értekezés során fontos szerepe van.

Fontos tény, hogy ezek a matroidok lineárisak, azaz lineárisan reprezentálhatóak [30]. Általában nem ismert polinomiális algoritmus, amely tetszőleges $G = (V, E)$ gráfhoz megadná az $\mathcal{M}_{k,l}(G)$ matroid egy lineáris reprezentációját. Viszont gyakran nem nehéz adni egy úgynevezett változós mátrixos reprezentációt. Változós mátrixnak nevezünk egy olyan mátrixot, amelynek az elemei többváltozós racionális együtthatós polinomok (vagy általánosabban racionális törtfüggvények). Egy négyzetes változós mátrixot regulárisnak nevezünk, ha a determinánsa – mint többváltozós polinom – nem azonosan nulla. Egy változós mátrix rangjának a benne található legnagyobb reguláris négyzetes részmátrix méretét nevezzük. Egy ezzel ekvivalens definíció az, hogy egy változós mátrix rangja az összes lehetséges behelyettesítéssel kapott rang maximuma – akár az összes lehetséges valós számokkal való behelyettesítést, akár csak a racionális vagy egész számokkal való behelyettesítéseket tekintjük, ugyanazt az értéket kapjuk maximumnak.

Megjegyezzük, hogy mivel az általunk vizsgált változós mátrixokban racionális együtthatós polinomok szerepelnek, ezért a változókat tekinthetjük olyan valós számoknak, amelyek algebrailag függetlenek a racionális test felett. Érdemes a szemünk előtt tartani mindkét perspektívát (változók és algebrailag független számok), ugyanis különböző esetekben másmás szemszög hasznos. Például ha azt akarjuk látni, hogy a változós mátrixok rangjára, a sorok függetlenségére ugyanolyan tulajdonságok igazak, mint valós mátrixok esetén, akkor érdemes arra gondolni, hogy a változókat tekinthetjük algebrailag független valós számoknak. Viszont sokszor hasznos változóknak tekinteni az elemeket, például, ha igazolni akarjuk, hogy egy változós mátrix rangja nagy, elég mutatni egy behelyettesítést, melyre a rang nagy.

Könnyen igazolható, hogy egy gráf körmatroidját, $\mathcal{M}_{1,1}(G)$-t reprezentálja a gráf egy tetszőleges megirányításának irányított pont-él incidencia-mátrixa. A körmatroid lineáris reprezentációja tehát kiszámítható.

Leírjuk itt a legegyszerűbb nemtriviális változós mátrix esetét: a transzverzális matroidot reprezentáló mátrixot. Könnyebben elmondható ez, ha a hipergráf páros gráfos reprezentációján dolgozunk. Legyen tehát $G = (A, B; E)$ egy páros gráf. A transzverzális matroidunk alaphalmaza A, tehát A azon részhalmazai függetlenek, amelyek fedhetőek párosítással. Vezessünk be minden $uv = e \in E$ élre egy x_{uv} változót. Legyen M egy $|A| \times |B|$ méretű mátrix, melynek sorai az A elemeivel, oszlopai a B elemeivel vannak indexelve. Ha $u \in A$, $v \in B$ és $uv = e \in E$, akkor álljon az u-nak megfelelő sor és a v-nek megfelelő oszlop metszéspontjában x_{uv}, és a mátrix többi eleme legyen nulla. Nem nehéz belátni, hogy ekkor egy $X \subseteq A$ esetén az X-nek megfelelő sorok pontosan akkor függetlenek, ha X fedhető párosítással: ha ugyanis P egy olyan párosítás, amelynek A-beli végpontjainak halmaza X és B-beli végpontjainak halmaza $Y \subseteq B$, akkor az $X \times Y$ indexek által meghatározott négyzetes részmátrix reguláris, hiszen a determinánsának a kifejtésében a P párosításnak megfelelő kifejtési tag nem nulla (és nem is eshet ki). Fordítva, ha az X-nek megfelelő sorok függetlenek, akkor kell legyen egy megfelelő $X \times Y$ reguláris részmátrix, amelynek determinánsában egy nem-nulla kifejtési tag szükségszerűen egy X-et fedő párosítást határoz meg.

A hipergrafikus matroidok egy generikus reprezentációját láthatjuk majd a 9.4. szakaszban.

Érdemes még megemlítenünk az $\mathcal{M}_{k,k}(G)$ matroid egy lehetséges generikus reprezentációját. Ez az úgynevezett test-és-csukló struktúrák merevségénél játszik szerepet [48, 55]. Legyen G egy gráf, ahol feltesszük, hogy nincsnek hurokélek, de párhuzamos éleket megengedünk (a hurkok kizárása nem szükségszerű, csak egyszerűsíti a tárgyalást, de valójában a hurkok az $\mathcal{M}_{k,k}(G)$ matroidban is hurkok). Vegyünk fel minden $e \in E$ esetén egy x_e generikus k dimenziós vektort, azaz $x_e^1, \ldots, x_e^k$ változókat. Tekintsük azt az $|E| \times k|V|$ méretű M mátrixot, amelynek az $e = uv \in E$ élnek megfelelő sorának az u csúcshoz tartozó k darab pozícióban x_e áll, a v csúcshoz tartozó k darab pozícióban $-x_e$ áll, a többi helyen pedig nulla. Ezt a mátrixot nevezzük az absztrakt k-rúdszerkezet merevségi mátrixának. Zavaró lehet, hogy ebben a definícióban nem világos, hogy egy él két vége közül melyik csúcsnál vannak a pozitív és melyiknél a negatív előjelű változók, de a mi szempontunkból ez mindegy, mert egy vektorhalmaz függetlensége szempontjából nem játszik szerepet az, ha az egyik vektort kicseréljük az ellentettjére, ezért is voltunk bátrak az előbbi pongyola megfogalmazást használni. Amennyiben ez zavaró, gondoljunk arra, hogy rögzítünk egy $v_1, \ldots, v_n$ sorrendet a csúcsokon, és egy $e = v_i v_j \in E$, $i < j$ esetén a v_i-nél van x_e és a v_j-nél $-x_e$. Ekkor igazolható, hogy az M sorai az $\mathcal{M}_{k,k}(G)$ matroidot reprezentálják. Itt nem részletezzük a bizonyítást, csak megjegyezzük, hogy a Laplace-féle kifejtési tétel segítségével látható, hogy $X \times Y$ alakú négyzetes részmátrix pontosan akkor reguláris, ha X felbomlik k darab erdőre [58].

Az $\mathcal{M}_{2,3}(G)$ matroid generikus reprezentációját megismerjük a következő szakaszban, ahol kiderül, hogy ez a merevségi matroid, tehát ezt lineárisan reprezentálja a G gráf merevségi mátrixának nevezett változós mátrix.

A lineáris reprezentálhatóság a matroid párosítás feladatnál játszhat fontos szerepet. Lovász ugyanis belátta, hogy a lineáris matroid párosítás feladat polinomiálisan megoldható abban az esetben, ha adott a matroid egy lineáris reprezentációja.

Másrészt azért fontos a változós mátrixok fogalma, mert a merevség témakörének központi kérdése gyakran az, hogy egy adott változós mátrix által meghatározott lineáris matroidot kombinatorikusan karakterizáljunk.

A következő szakaszban bevezetjük a merevség fogalmát, és bemutatjuk a kétdimenziós esetben ismert kombinatorikus karakterizációját a merevségi matroidnak.

1.3. Gráfok és rúdszerkezetek merevsége

Egy (G, p) párt d-dimenziós **rúdszerkezet**nek nevezünk, ha $G = (V, E)$ egy gráf, és $p : V \to \mathbb{R}^d$ egy leképezés. A $v \in V$ csúcs p-nél vett képét $p(v)$ vagy p_v jelöli. A p leképezést a G gráf egy d dimenziós realizációjának vagy beágyazásának nevezzük. Nemdegenerált egy rúdszerkezet, ha p injektív, és degenerált, ha léteznek $u \neq v \in V$, melyekre $p(u) = p(v)$.

Egy $m : V \to \mathbb{R}^d$ leképezést a (G, p) rúdszerkezet **infinitezimális mozgás**ának nevezünk, ha

$$(p_v - p_u)^\mathsf{T}(m_v - m_u) = 0 \tag{1.2}$$

teljesül minden $e = uv \in E$ esetén.

Ez az egyenlőség intuitíve azt fejezi ki, hogy ha a rúdszerkezet csúcsait az m által meghatározott vektorok szerint mozgatnánk, akkor a rúdhosszok nem változnának, azaz m lehetne egy rúdhosszokat megtartó deformáció kezdővektora (és abban az esetben, ha a rúdszerkezet generikus, ez valóban igaz is).

Egy $m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ leképezést a d dimenziós euklideszi tér **infinitezimális izometriájának** nevezünk, ha tetszőleges $p, q \in \mathbb{R}^d$ esetén $(p - q)^\mathsf{T}(m(p) - m(q)) = 0$. Egy (G, p) rúdszerkezet **infinitezimális izometriájának** nevezzük az $m : V \to \mathbb{R}^d$ függvényt, ha $m \circ p^{-1}$ megszorítása a d dimenziós tér egy infinitezimális izometriájának, azaz ha létezik egy $m' : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ infinitezimális izometriája a térnek, melyre $m \circ p^{-1} = m'|_{p(V)}$ (degenerált p esetén megköveteljük, hogy $p(u) = p(v)$ esetén $m(u) = m(v)$ legyen). Egy (G, p) rúdszerkezetet **infinitezimálisan merev**nek nevezünk, ha minden infinitezimális mozgása infinitezimális izometria.

Amennyiben a csúcsok p által meghatározott pozíciói általános helyzetűek, úgy belátható, hogy $m : V \to \mathbb{R}^d$ pontosan akkor infinitezimális izometria, ha (1.2) teljesül minden $u, v \in V$-re. Azaz $m : V \to \mathbb{R}^d$ pontosan akkor infinitezimális izometria, ha (K_V, p)-nek infinitezimális mozgása. Belátható, hogy egy d dimenziós tér infinitezimális izometriái egy $\binom{d+1}{2}$ dimenziós alteret alkotnak, és ennek következményeként egy legalább d csúcsú általános helyzetű (G, p) rúdszerkezet infinitezimális izometriái is egy $\binom{d+1}{2}$ dimenziós alterét alkotják $\mathbb{R}^{d|V|}$-nek. Ha pedig $|V| < d$, akkor igazolható, hogy az infinitezimális izometriák dimenziója $|V|d - \binom{|V|}{2}$.

Az (1.2) egyenletek (adott p esetén) lineáris egyenletek m-ben. Azaz az infinitezimális mozgások egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza. Praktikus ezért egyfajta „mátrixos terminológiát” használni az infinitezimális merevség vizsgálatánál.

Definiáljuk tehát a (G, p) rúdszerkezet **merevségi mátrix**át: $M(G, p)$ egy $|E| \times d|V|$ méretű mátrix, ahol minden $e = uv \in E$ élhez tartozik egy sor, amelyben a v-hez tartozó d koordinátán $(p(v) - p(u))$ áll, az u-hoz tartozó d koordinátán $(p(u) - p(v))$ áll, és a többi elem nulla. A (G, p) rúdszerkezet merevségi matroidja az E alaphalmazon az $M(G, p)$ sorai által meghatározott lineáris matroid.

Definiáljuk a következő függvényt:

$$S(n, d) = \begin{cases} nd - \binom{d+1}{2} & \text{ha } n \geq d + 2, \\ \binom{n}{2} & \text{ha } n \leq d + 1. \end{cases}$$

Ezt a jelölést és az infinitezimális merevség definícióját használva a következő karakterizációt kaphatjuk egy (G, p) rúdszerkezet merevségére (ami már tetszőleges, tehát nem csak általános helyzetű p-re is igaz).

1.7. Állítás. *Egy n csúcsú (G, p) rúdszerkezet pontosan akkor infinitezimálisan merev d dimenzióban, ha $r(M(G, p)) = S(n, d)$.*

A dolgozat folyamán ezt az állítást gyakorlatilag mint az infinitezimális merevség definícióját használjuk majd.

Egy p realizációt **generikus**nak nevezünk, ha a $p(v)$, $v \in V$ vektorok koordinátáinak halmaza, azaz az $\{x : x$ a $p(v)$ vektor i-dik koordinátája valamely $v \in V, 1 \leq i \leq d$ esetén$\}$ halmaz algebrailag független a racionálisak felett.

Azt mondjuk, hogy egy gráf **generikusan infinitezimálisan merev** (ezentúl: merev), ha G valamely p realizációja esetén a (G, p) rúdszerkezet infinitezimálisan merev. Könnyen belátható, hogy ez ekvivalens azzal, hogy minden generikus p realizáció esetén a (G, p) rúdszerkezet infinitezimálisan merev. Általában igaz az, hogy ha p és p' generikusak, akkor (G, p)-nek és (G, p')-nek ugyanaz a **merevségi matroid**ja. Ezt jelöljük $\mathcal{R}_d(G)$-vel, és ebben a dolgozatban a $\mathcal{R}(G)$ alatt az $\mathcal{R}_2(G)$-t értjük.

Tehát adott dimenzióban minden gráfhoz tartozik egy – az élhalmazán definiált – matroid. Kérdés, hogy hogyan lehet kombinatorikusan karakterizálni ezt a matroidot. Egy matroid kombinatorikus karakterizációja alatt azt értjük, hogy kombinatorikusan karakterizáljuk a független halmazokat, a generátorokat, a bázisokat és a rangot. Célunk, hogy jó karakterizációt, azaz NP∩co-NP jellemzést adjunk ezekre a fogalmakra, ami a rang esetében egy minimax-formulát jelent. A karakterizáción túl érdekes számunkra polinomiális algoritmus létezése is. Megjegyezzük, hogy általában a függetlenek, generátorok, bázisok vagy a rang karakterizációja közül bármelyik ismerete megadja a többit is. A tapasztalat azt mutatja, hogy a függetlenséget illetve a bázisokat könnyebb először karakterizálni, és ezekből levezetni a rangot és a generátorok jellemzését.

Egy (G, p) rúdszerkezetet **független**nek nevezünk, ha a merevségi mátrixának a sorai függetlenek. Egy rúdszerkezetet **minimálisan infinitezimálisan merev**nek, más szóval **izosztatikus**nak nevezünk, ha élelhagyásra nézve minimálisan infinitezimálisan merev. Könnyen látható, hogy ez ekvivalens azzal, hogy független, de bármely élet hozzávéve már nem az, vagy azzal, hogy független és merev, azaz (K_V, p) merevségi matroidjában E egy bázis. Egy matroidban a bázisok a maximális függetlenek, a minimális generátorok és az egyszerre független és generáló halmazok.

Egy gráfot (generikusan) **független**nek nevezünk, ha valamely realizációja független, ami ekvivalens azzal, hogy minden generikus realizációja független. Hasonlóan egy gráf (generikusan) **izosztatikus**, ha valamely realizációja izosztatikus, ami ekvivalens azzal, hogy minden generikus realizációja izosztatikus.

Megjegyezzük, hogy egy dimenzióban könnyen meghatározhatjuk a merevségi matroidot, ugyanis $\mathcal{R}_1(G)$ megegyezik a gráf körmatroidjával. A dolgozat további részében a kétdimenziós merevséggel foglalkozunk, ahol nem, ott külön említjük.

A definíciók egyszerű következménye az alábbi lemma:

1.8. Lemma. *Ha (G,p) egy független rúdszerkezet, akkor $\gamma(X) \leq 2|X| - 3$ minden $X \subseteq V, |X| \geq 2$ esetén.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $X \subseteq V, |X| \geq 2$ halmazt. Legyen $F \subseteq E$ az X által feszített élek halmaza, és legyen $H = (X,F)$, valamint $p' = p|_X$. Mivel a (G,p) rúdszerkezet független, ezért a (H,p') is független, mert annak merevségi mátrixa úgy kapható a (G,p) merevségi mátrixából, hogy néhány sorát elhagyjuk és utána töröljük néhány csupa-nulla oszlopát. Megfigyeltük már, hogy egy legalább kétcsúcsú rúdszerkezet infinitezimális izometriáinak dimenziója 3, tehát $r(M(H,p')) \leq 2|X| - 3$, másrészt a függetlenség miatt $r(M(H,p')) = |F| = \gamma(X)$. □

Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha (G,p) egy független rúdszerkezet, akkor a G gráf $[2,3]$-ritka, azaz $\mathcal{R}_2(G) \subseteq \mathcal{M}_{2,3}(G)$.

Laman tétele karakterizálja egy gráf kétdimenziós merevségi matroidját [27]. A bázisok, azaz az izosztatikus gráfok karakterizációja a következő:

1.9. Tétel. *[27] Egy legalább két csúcsú $G = (V,E)$ gráf pontosan akkor minimálisan merev, ha $|E| = 2|V| - 3$ és*

$$\gamma(X) \leq 2|X| - 3 \quad \textit{minden} \quad X \subseteq V \ |X| \geq 2 \ \textit{esetén}. \tag{1.3}$$

Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy $\mathcal{R}_2(G)$ és $\mathcal{M}_{2,3}(G)$ bázisai ugyanazok, tehát ebből következik, hogy $\mathcal{R}_2(G) = \mathcal{M}_{2,3}(G)$. Ennek nyomán **Laman-gráf**nak nevezzük a legalább két csúcsú izosztatikus gráfokat a síkon. Tehát egy $G = (V,E)$ gráf Laman-gráf, ha $[2,3]$-gráf. Azaz, ha $|V| \geq 2$, $|E| = 2|V| - 3$ és $\gamma(X) \leq 2|X| - 3$ teljesül minden $X \subseteq V, |X| \geq 2$ esetén.

Ha tudjuk, hogy $\mathcal{R}_2(G) = \mathcal{M}_{2,3}(G)$, akkor az 1.2. Lemma miatt ismerjük a rangfüggvényt, és ezáltal ismerjük a merevség karakterizációját. Ezeket Lovász és Yemini mondták ki az alábbi formában [33]. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{X}$ halmazrendszer a $G = (V,E)$ gráf **fedés**e, ha $\mathcal{X}$ elemei V-nek legalább kételemű részhalmazai úgy, hogy minden $e = uv \in E$ élhez létezik egy $X \in \mathcal{X}$, melyre $u, v \in X$.

1.10. Tétel (Lovász-Yemini). *Legyen $G = (V,E)$ egy gráf, $|V| \geq 2$. Egy $F \subseteq E$ élhalmaz rangja a kétdimenziós merevségi matroidban:*

$$\min \sum_{X \in \mathcal{X}} (2|X| - 3), \tag{1.4}$$

ahol a minimumot a G-t fedő $\mathcal{X}$ halmazrendszereken vesszük.

A merevség karakterizációja ezek alapján a következő:

1.11. Tétel (Lovász-Yemini). *Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor merev a síkban, ha*

$$\sum_{X \in \mathcal{X}} (2|X| - 3) \geq 2|V| - 3 \tag{1.5}$$

a G-nek minden $\mathcal{X}$ fedése esetén.

Sőt az utóbbi két tételben a minimumot olyan $\mathcal{X}$ halmazrendszerekre is vehetnénk, amelyeknek az elemei lefeljebb 1 csúcsban metszik egymást, speciálisan éldiszjunktak (lásd az 1.2. Állítás utáni megjegyzést).

A kétdimenziós merevségi matroid köreit röviden M-köröknek nevezzük, pontosabban egy $G = (V, E)$ gráfot **M-kör**nek nevezünk, ha feszíti V-t, és köre az $\mathcal{M}_{2,3}$-nak. A Laman-tétel segítségével könnyen ellenőrizhető, hogy G pontosan akkor M-kör, ha $|E| = 2|V| - 2$ és minden $X \subsetneq V, |X| \geq 2$ esetén $\gamma(X) \leq 2|X| - 3$.

Megjegyezzük, hogy az 1.9. Tétel egy hatékony algoritmushoz is vezet, amely a merevséget teszteli, és kiszámítja a G rangját. Lásd például [2]-t, ahol további referenciák is vannak.

A merevség nagy nyitott kérdése az $\mathcal{R}_3(G)$ karakterizációja, illetve polinomiális algoritmus keresése annak eldöntésére, hogy egy gráf merev-e 3 dimenzióban.

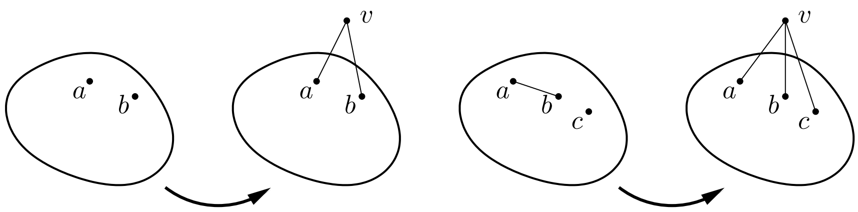
A kombinatorikus merevség elméletének további részleteihez ajánljuk a következőket [19, 41, 59, 58, 60, 25].

1.4. Előállítási tételek

Ebben a fejezetben áttekintünk egy módszert – az előállítási tételek használatát –, amely igen gyümölcsözőnek bizonyul a merevség kombinatorikus vizsgálatában, és ezen értekezés egyik célja ezen módszer vizsgálata.

Henneberg [22] adott egy konstruktív karakterizációt a generikusan merev gráfokra. Ez a konstrukció két műveletet használ. Először gráfra, majd rúdszerkezetre is definiáljuk a 0-kitejesztés illetve az 1-kiterjesztés műveletét és ezek inverzműveletét, a 2-fokú csúcs törlését illetve az 1-leemelést.

Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, akkor az $a \neq b \in V$ csúcsokon történő **0-kiterjesztés** alatt azt értjük, hogy felveszünk egy új v csúcsot, és behúzzuk az av, bv éleket. Ha adott egy (G, p) rúdszerkezet, akkor 0-kiterjesztés alatt azt értjük, hogy a gráfon végrehajtunk egy 0-kiterjesztést, és az új v csúcsnak meghatározzuk a pozícióját, azaz definiálunk egy $p(v)$



1.1. ábra. A 0-kiterjesztés és az 1-kiterjesztés

értéket, és a régi csúcsok p-értékét meghagyjuk. Az inverz operáció pedig értelemszerűen egy **2 fokú csúcs törlése**. Lásd 1.1. ábra.

Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, akkor az $ab \in E$ élen és a $c \in V - \{a, b\}$ csúcson történő **1-kiterjesztés** alatt azt értjük, hogy felveszünk egy új v csúcsot, behúzzuk az av, bv, cv éleket, és töröljük az ab élet (azaz a v csúccsal felosztjuk a régi ab élet, és a v-t összekötjük c-vel). Ha adott egy (G, p) rúdszerkezet, akkor 1-kiterjesztés alatt azt értjük, hogy a gráfon végrehajtunk egy 1-kiterjesztést, és az új v csúcsnak meghatározzuk a pozícióját, azaz definiálunk egy $p(v)$ értéket, és a régi csúcsok p-értékét meghagyjuk. Az inverz operáció pedig az **1-leemelés**, ami alatt azt értjük, hogy törlünk egy harmadfokú csúcsot, és két különböző, nem összekötött szomszédja közé behúzunk egy élet. Tehát egy adott 3-adfokú csúcsnál az 1-leemelés legfeljebb 3-féleképpen hajtható végre. Lásd 1.1. ábra.

Ezek után kimondhatjuk a Henneberg-féle előállítási tételt.

1.12. Tétel (Henneberg). *Egy gráfnak pontosan akkor van izosztatikus realizációja a síkban, ha előáll egy (nem-hurok) élből 0- és 1-kiterjesztések segítségével.*

1.13. Lemma. *[59, Lemma 2.1.3] Legyen (G, p) egy infinitezimálisan merev rúdszerkezet és $G' = (V + v, E + av + bv)$ a G egy 0-kiterjesztése. Ha a $p(v)$-t úgy választjuk, hogy $p(a), p(b), p(v)$ pontok nem kollineárisak, akkor (G', p) is infinitezimálisan merev.*

Bizonyítás. Jelölje (G', p) a (G, p)-ből egy 0-kiterjesztéssel kapott rúdszerkezetet. Látható, hogy az új M' merevségi mátrix $\begin{pmatrix} M & 0 \\ * & C \end{pmatrix}$ alakú, ahol M a régi merevségi mátrix, és C egy olyan 2×2-es mátrix, melynek két sorában a $p(v) - p(a), p(v) - p(b) \in \mathbb{R}^2$ vektorok vannak, melyek a feltevés szerint nem párhuzamosak. Ebből következik, hogy M' rangja kettővel nagyobb, mint M rangja. $\square$

1.14. Lemma. *[59, Theorem 2.2.2] Legyen (G, p) egy infinitezimálisan merev rúdszerkezet, $ab \in E(G)$, $c \in V(G) - \{a, b\}$, és $G' = (V + v, E + av + bv + cv - ab)$ a G egy 1-kiterjesztése, valamint tegyük fel, hogy a $p(a), p(b), p(c)$ pontok nem kollineárisak. Ha a $p(v)$-t a $p(a), p(b)$*

pontoktól különböző pontnak választjuk a $p(a), p(b)$ egyenesén, akkor (G', p) is infinitezimálisan merev.

Bizonyítás. Jelölje (G', p) a (G, p)-ből egy 0-kiterjesztéssel kapott rúdszerkezetet. Tekintsük először a $H = (V+v, E+bv+cb)$ gráfot. Az 1.13 Lemma szerint (H, p) merev. Most vegyük hozzá a gráfhoz az av élet. Meggondolható, hogy a merevségi mátrixnak az av, bv élekhez tartozó sorainak összege pont a mátrix ab éléhez tartozó sor, valamint hogy ezek egyike sem nulla. Ebből következik, hogy az ab él kihagyása és av hozzávétele nem változtat a merevségi mátrix rangján. Ebből következik, hogy M' rangja kettővel nagyobb, mint M rangja. □

Megjegyezzük, hogy az 1.13 és az 1.14. Lemmákban a $p(v)$ választható egy (G, p) által már esetlegesen fedett csúcsnak is.

1.15. Lemma. *Ha $G = (V, E)$ egy legalább három csúcsú $[2, 3]$-gráf, akkor van legalább három darab olyan csúcs, melyek foka 2 vagy 3.*

Bizonyítás. Egy $[2, 3]$-ritka gráfban minden v csúcs legalább másodfokú, ugyanis $d(v) = |E| - \gamma(V - v) \geq 2|V| - 3 - (2|V - v| - 3) = 2$ (itt használtuk, hogy $|V - v| \geq 2$). Tegyük fel indirekt, hogy két csúcs kivételével minden csúcs legalább negyedfokú. Ekkor $\sum_{v \in V} d(v) \geq 2 + 2 + 4(|V| - 2) = 4|V| - 4$, ami ellentmond $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 4|V| - 6$-nak. □

Fent definiáltuk az 1-kiterjesztés inverzműveletét, az 1-leemelést. Egy 1-leemelést **megengedett**nek nevezünk, ha a kapott gráf minimálisan merev lesz. Ezek után a Henneberg tétel másik irányát az 1.15. Lemma és következő 1.16. Lemma adja.

1.16. Lemma. *[25, 27, 53, 59] Legyen $G = (V, E)$ egy izosztatikus gráf és $v \in V$.*
(a) Ha $d(v) = 2$, akkor a $G - v$ gráf is izosztatikus.
(b) Ha $d(v) = 3$, akkor létezik v-nél egy megengedett 1-leemelés.

Az 1.12 és az 1.9. Tételek következménye az alábbi.

1.17. Tétel. *Egy gráf pontosan akkor $[2, 3]$-gráf, ha előáll egy (nem-hurok) élből 0- és 1-kiterjesztések segítségével.*

Azért jelentős számunkra ez a tétel, mert ez egy pusztán kombinatorikus állítás, tisztán kombinatorikus úton bizonyítható is. Ezt az 1.6. szakaszban részletesebben illusztráljuk.

1.5. További segédeszközök

A következő egyenlőség az 1.3. Lemma egyfajta három-halmazos alakja. Bizonyítása egyszerű.

1.18. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, és $X, Y, Z \subseteq V$ csúcshalmazok. Ekkor ha $|X \cap Y| = |X \cap Z| = |Y \cap Z| = 1$ és $X \cap Y \cap Z = \emptyset$, akkor $\gamma(X \cup Y \cup Z) - (2|X \cup Y \cup Z| - 3) \leq \gamma(X) - (2|X| - 3) + \gamma(Y) - (2|Y| - 3) + \gamma(Z) - (2|Z| - 3)$.*

Könnyen látható, hogy a Laman-gráfok egyszerűek, ugyanis $\gamma(\{u, v\}) \leq 2|\{u, v\}| - 3 = 1$. Ezt a tényt hivatkozás nélkül haszálni fogjuk.

1.19. Állítás. *Egy legalább 3 pontú Laman-gráf* 2*-pontösszefüggő.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy v egy elvágó csúcs. Ekkor legyen X, Y a $G - v$ két olyan nem-üres csúcshalmaza, melyek között nem fut él, ekkor $d_G(X + v, Y + v) = 0$, tehát az 1.3. Lemma 1. pontja szerint $2|V| - 3 = |E| = \gamma(X \cup Y + v) = \gamma(X + v) + \gamma(Y + v) \leq 2(|X| + 1) - 3 + 2(|Y| + 1) - 3 = 2(|X| + |Y| + 1) - 4 = 2|V| - 4$, ami ellentmondás. $\square$

Matroid párosítás feladatnak nevezzük a következőt: adott egy $\mathcal{M}$ matroid egy páros elemszámú S alaphalmazon, valamint adott az S elemeinek egy párbaállítása: $P = \{\{s_1, s_1'\}, \{s_2, s_2'\}, \ldots, \{s_m, s_m'\}\}$, és a feladat az, hogy találjunk egy maximális elemszámú párokból álló független részhalmazt, azaz egy maximális $P' \subseteq P$ párhalmazt, melyre $\cup P'$ az S-nek független részhalmaza az $\mathcal{M}$ matroid szerint.

Lovász belátta [32], hogy a matroid párosítási feladat polinomiálisan megoldható, ha a matroid lineáris, és ismert is egy lineáris reprezentációja.

Megjegyezzük, hogy ha csak orákulummal van megadva a matroid, és nem is feltétlenül lineáris, akkor bizonyíthatóan exponenciális időre van szükség a feladat megoldásához; abban az esetben, ha tudjuk, hogy lineáris a matroid, de nincs reprezentálva (csak mondjuk egy orákulummal van adva), akkor nyitott a matroid-párosítás feladat bonyolultsága.

A Schwartz-lemma biztosítja azt, hogy egy változós mátrix rangja randomizált algoritmussal hatékonyan számolható.

1.20. Lemma (Schwartz [43]). *Legyen $f(x_1, \ldots, x_k)$ egy nem azonosan nulla, d fokú többváltozós polinom (egy polinom foka a maximális fokú monomjának a foka, egy monom foka a kitevők összege). Legyenek $X_1, \ldots, X_k$ független egyenletes eloszlású valószínűségi változók az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmazon, ekkor*

$$\text{Prob}\left(f\left(X_1, \ldots, X_k\right) = 0\right) \leq \frac{d}{N}.$$

Illusztrációként gondoljuk meg, hogy hogyan használható a Schwartz-lemma a rang randomizált kiszámítására. A merevségi mátrix egy $|E| \times 2|V|$ méretű mátrix. Ennek van legfeljebb $2^{2|V|}2^{2|V|}$ darab négyzetes részmátrixa. Ezek determinánsai legfeljebb $2|V|$-ed fokú többváltozó polinomok. Legyenek a p_u vektorok koordinátái független egyenletes eloszlású valószínűségi változók az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmazon. Ekkor a Schwartz-lemma alapján annak a valószínűsége, hogy behelyettesítés után a nem azonosan nulla polinomok közül legalább az egyik nulla lesz, legfeljebb $\frac{2^{2|V|}2^{2|V|}2|V|}{N}$. Azaz ha $N > 4 \cdot 2^{2|V|}2^{2|V|}|V|$, akkor több mint $1/2$ valószínűséggel az összes nem azonosan nulla determináns a behelyettesítés után sem lesz nulla. Tehát ha ezek után Gauss-eliminációval kiszámítjuk a mátrix rangját, akkor az legalább $1/2$ valószínűséggel ugyanannyi, mint a generikus rang. Az N mérete pedig $\log_2 N = 4|V| + \log_2 4|V|$, azaz $|V|$-ben polinomiális.

A gondolatmenet valójában azt mutatja, hogy a merevségi matroidot lehet nemdeterminisztikusan reprezentálni.

1.6. Az értekezés felépítése

Ebben a szakaszban körüljárjuk a dolgozatban szereplő előállítási tételek bizonyításának és alkalmazásának módját Laman és Henneberg tételeinek bizonyításán keresztül.

Első megjegyzésünk arra vonatkozik, hogy az 1.12. Tétel, amely egy gráf merevsége és egy kombinatorikus előállítás közötti kapcsolatról szól, mégis alapvetően egy lineáris algebrai tétel. Önmagában ez a tétel nem ad jó karakterizációt arra, hogy melyek az izosztatikus gráfok. Ez a tétel NP-karakterizációt jelent, azaz ha egy gráf izosztatikus, akkor rá lehet ezt bizonyítani azzal, hogy megmutatjuk egy előállítását. Ez tehát egy kombinatorikus NP-karakterizáció, ezzel szemben a Schwartz-lemma – mint láttuk – egy nem kombinatorikus jellegű NP-karakterizációt ad.

Az 1.12. Tétel egyik irányát adják az 1.13 és az 1.14. Lemmák. Hiszen ezekből következik, hogy ha egy gráf előáll a műveletekkel egy élből, akkor izosztatikus. A másik irányt is hamarosan meggondoljuk.

A Henneberg-tétellel ellentétben az 1.17 Tétel egy kombinatorikus tétel. Ennek is az egyik iránya könnyebben adódik: nem nehéz látni, hogy egy $[2, 3]$-gráfra alkalmazott 0- illetve 1-kiterjesztések $[2, 3]$-gráfot eredményeznek. Általában ez lesz az előállítási tételek könnyű iránya ebben a dolgozatban is.

1.21. Tétel. *Ha $G = (V, E)$ egy $[2, 3]$-gráf, v egy harmadfokú csúcsa, melynek három szomszédja u_1, u_2, u_3, akkor valamely $1 \leq i < j \leq 3$ esetén $G - v + u_iu_j$ $[2, 3]$-gráf.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy valamely $1 \leq i < j \leq 3$ esetén $G - v + u_iu_j$ $[2, 3]$-ritka. Mivel $G - v$ $[2, 3]$-ritka, így $G - v + u_iu_j$ $[2, 3]$-ritkasága csak úgy sérülhet, ha létezik egy $X \subseteq V - v$

halmaz, melyre $|X| \geq 2$, $\gamma(X) = 2|X| - 3$ és u_i és u_j eleme X-nek. Azt mondjuk, hogy egy X halmaz pontos, ha $\gamma(X) = 2|X| - 3$. Indirekt tegyük fel, hogy az u_1u_2-höz létezik egy $X_{12} \subseteq V - v$ pontos halmaz, az u_1u_3-hoz létezik egy $X_{13} \subseteq V - v$ pontos halmaz, és az u_2u_3-hoz létezik egy $X_{23} \subseteq V - v$ pontos halmaz. Azt állítjuk, hogy ekkor $X_{12} \cup X_{13} \cup X_{23}$ is pontos. Ha az X, Y pontos halmazok metszete legalább két elemű, akkor az 1.3. Lemma 2. pontja miatt az uniójuk és metszetük is pontos, ugyanis $2|X| - 3 + 2|Y| - 3 = \gamma(X) + \gamma(Y) \leq \gamma(X \cap Y) + \gamma(X \cup Y) \leq 2|X \cap Y| - 3 + 2|X \cup Y| - 3 = 2|X| - 3 + 2|Y| - 3$.

Tegyük fel, hogy az X_{12}, X_{13}, X_{23} halmazok közül valamelyik kettő metszete legalább két elemű. Legyen mondjuk $|X_{12} \cap X_{13}| \geq 2$, ekkor $X_{12} \cup X_{13}$ pontos és legalább két csúcsban metszi X_{23}-at, tehát $X_{12} \cup X_{13} \cup X_{23}$ is pontos.

Ha az X_{12}, X_{13}, X_{23} halmazok közül bármely kettő metszete egy elemű, akkor az 1.18. Lemma miatt az uniójuk is pontos.

Ha viszont $X_{12} \cup X_{13} \cup X_{23}$ pontos, akkor a $Z = X_{12} \cup X_{13} \cup X_{23} + v$ halmazra $\gamma(Z) > 2|Z| - 3$, ez pedig ellentmond G $[2, 3]$-ritkaságának. □

Az 1.21. Tétel egy másik bizonyítása. Az $\mathcal{M}_{2,3}$ matroidban fogunk dolgozni, azt kell belátnunk, hogy valamely $1 \leq i < j \leq 3$ esetén $E - vu_1 - vu_2 - vu_3 + u_iu_j$ független. Indirekt tegyük fel, hogy teszőleges $1 \leq i < j \leq 3$ esetén nem független. Tudjuk, hogy E független, ezért $E - vu_1 - vu_2 - vu_3$ is az. Az indirekt feltevésünk tehát az, hogy az $E - vu_1 - vu_2 - vu_3$ független élhalmaz generálja az u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3 éleket. Ebből következik, hogy $E - vu_1$ is generálja az $u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3, vu_2, vu_3$ éleket (utóbbi kettő benne is van). Könnyen ellenőrizhető, hogy $u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3, vu_2, vu_3$ generálja vu_1-et, ugyanis $\{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3, vu_2, vu_3\}$ független, de $F = \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3, vu_1, vu_2, vu_3\}$ (azaz a K_4) nem független, hiszen nem $[2, 3]$-ritka: $\gamma_F(\{u_1, u_2, u_3, v\}) = 6 > 2 \cdot 4 - 3 = 5$. Ebből viszont következik, hogy $E - vu_1$ generálja vu_1-et, ez ellentmond E függetlenségének. □

Az alábbi állítás azonnali következménye a definíciónak.

1.22. Állítás. *Ha $G = (V, E)$ egy $[2, 3]$-gráf, és v egy másodfokú csúcsa, akkor $G - v$ is egy $[2, 3]$-gráf.*

Az 1.16 Lemma (b) pontját ugyanúgy lehet igazolni, mint ahogyan az 1.21. Tételt másodjára beláttuk. Ugyanis abban a bizonyításban nem használtunk mást, csak azt a tényt, hogy az éleken adott egy matroid, és olyan élet keresünk, hogy $G - v + u_iu_j$ független legyen, és a kulcs az volt, hogy a K_4 (élhalmaza) egy kör a merevségi matroidban. Ezek a gondolatok pedig most is alkalmazhatóak, hiszen a Laman-tétel ismerete nélkül is tudjuk, hogy az éleken van egy matroidunk (a merevségi mátrix sorai által meghatározott lineáris matroid), és azt is könnyű belátni, hogy K_4 kör. Nem-független volta az 1.8. Lemmából következik, mely szerint egy 4 csúcsú független nem feszíthet több, mint $2 \cdot 4 - 3 = 5$ élet. Az, hogy a K_4 mínusz egy él már független, következik abból, hogy megkapható egy élből két darab 0-kiterjesztéssel, és az 1.13. Lemmából.

Ezek után vázlatosan gondoljuk meg, hogy az 1.17. Tétel bizonyítása miből áll: 1. annak igazolása, hogy azon gráfok, amelyek előállnak a megfelelő műveletekkel, azok valóban ritka gráfok (ez most is, és általában is a definícióból adódik), 2. kisfokú csúcs létezésének igazolása (1.15. Lemma), 3. annak bizonyítása, hogy egy kisfokú csúcson végre tudjuk hajtani az inverzműveletet (1.21. Tétel és az 1.22. Állítás).

A merevség karakterizációját lényegében Laman tétele (az 1.9. Tétel) adja, hiszen Laman-tétele karakterizálja bázisokat, és a bázisok karakterizációjából azonnal adódik a függetlenek karakterizációja. Ebből pedig az 1.2. Állítás megadja magát a matroidot is (belőle azonnal következik a rang és a generátorok karakterizációja). Ennek igazolásásnak lépései: 1. könnyű irány, azaz belátjuk, hogy a függetlenek teljesítik a ritkasági feltételt (1.8. Lemma), 2. előállítási tétel, azaz belátjuk a ritkasági feltételt teljesítő gráfok konstruktív karakterizációját (1.17. Tétel), 3. annak igazolása, hogy azon gráfok, amelyek előállnak a megfelelő műveletekkel, valóban függetlenek (izosztatikusak), azaz belátjuk, hogy a műveletek megőrzik a függetlenséget (az 1.13 és az 1.14. Lemmák).

Az értekezés fejezetei nem épülnek egymásra, a bevezetés ismeretében egymástól függetlenül olvashatók.

A 2. fejezetben a síkbarajzolható Laman-gráfokra adunk egy előállítási tételt. Az előállítási tétel a csúcs-széthúzás műveletét használja, és az inverz művelet egy háromszöglap egy élének összehúzása. Azt itt is könnyű igazolni, hogy a művelet megőrzi a Laman-tulajdonságot, és háromszöglap létezése is következik az Euler-formulából. Az 1.17. Tétellel ellentétben itt nem igaz, hogy minden háromszöglapon végre lehet hajtani az inverz műveletet, tehát itt keresni kell egy *olyan háromszöglapot, amelyen végre lehet hajtani az inverz műveletet* (és az is jól jön, hogy az Euler-formula legalább két háromszögtartomány létezését garantálja). Magát az előállítási tételt itt az motiválta, hogy hasznos indukciós eszközt szolgáltat annak a geometriai jellegű állításnak a bizonyítására, hogy minden síkbarajzolható Laman-gráfnak létezik egy speciális síkbarajzolása. A 2. fejezet a Jordán Tiborral és Walter Whiteley-val közös [11] cikkre épül.

A 3. fejezetben egy merevségi fogalmat karakterizálunk, méghozzá bizonyos kétdimenziós felületeken definiált merevséget. Ezt a $[2, d]$-gráfokra ($0 \leq d \leq 2$) vonatkozó előállítási tétel segítségével tesszük meg. Magának az előállítási tételnek a bizonyítása azon alapul, hogy a $[k, l]$-gráfokra ($0 \leq d \leq 2$) ismert az a kombinatorikus karakterizáció, mely szerint egy gráf pontosan akkor $[2, d]$-gráf, ha az élhalmaza $2 - d$ darab feszítőfa és d darab feszítő pszeudoerdő uniója. Egy kisfokú csúcson pedig úgy hajtjuk majd végre az inverz-műveletet, hogy magukat a fákat és pszeudo-erdőket is megkonstruáljuk, garantálva a kapott gráf ritkaságát.

A merevség karakterizációjához részletesen kidolgozzuk az 1.13 és az 1.14. Lemmák megfelelőit. Megjegyezzük, hogy mivel az előállítási tétel sokfajta műveletet használ, így annak igazolása, hogy a műveletek megőrzik a merevséget, technikailag fáradságosnak bizonyul.

A 4. fejezetben azt a kérdést vizsgáljuk, hogy egy n csúcsú merev gráfot milyen kicsi rácsba lehet beágyazni merev módon. Belátjuk, hogy tetszőleges n csúcs merev gráf beágyazható egy $k \times k$ méretű rácsba, ahol $k = \lceil \sqrt{n-1} \rceil + 9$. Ehhez szintén egy előállítási tételt használunk. Pontosabban az 1.17 Tétel egy erősítését használjuk, azon belül is az 1.15. Állítást erősítjük, azaz keresünk egy speciális kisfokú csúcsot, és azon hajtjuk végre az megfelelő leemelést. Használjuk majd az 1.13 és az 1.14. Lemmákat is, de ügyesen kell elhelyezni az új csúcsokat, hiszen csak egy korlátozott méretű rács áll rendelkezésünkre. Vizsgáljuk azt, hogy milyen algoritmus adható egy ilyen realizáció megtalálására, valamint bizonyítunk egy alsó korlátot a minimálisan szükséges rács méretére. A fejezet eredményei a Jordán Tiborral közös [9] cikken alapulnak.

Az 5. fejezet célja, hogy karakterizáljuk, hogy egy gráfnak mikor van olyan merev realizációja a síkban, ahol két adott csúcs pozíciója azonos. Ehhez is előállítási tételt alkalmazunk. Ennek bizonyítása az 1.17. Tételre ismertetett második bizonyításnak felel meg. A bizonyítás lényeges pontja tehát, hogy definiálunk egy matroidot az élhalmazon, az 1.2. Állítással analóg módon belátjuk, hogy matroid, és meghatározzuk a rangfüggvényét. Valamint az előállítási tétel bizonyításához most is igazolni kell egy *megfelelő kisfokú* csúcs létezését, ami itt szintén egy leszámláláson múlik. Az érdekessége ennek az eredménynek, hogy miután karakterizáltuk a megfelelő merevségi matroid rangfüggvényét, könnyen levezethetjük a *két csúcs egybeesésekori generikus merevséget*, amire egy egyszerű karakterizáció adódik – egy nagyon logikusan adódó geometriai állítás, amelyhez mi egyfajta „kombinatorikus kerülőúton” jutunk majd el.

A 6. fejezetben a $[k,l]$-gráfokra ($0 \leq l \leq k$) adunk egy előállítási tételt (tehát bizonyos szempontból általánosítjuk a 3. fejezetbeli eredményt). Itt egy másik módszert alkalmazunk. Adunk egy újabb gráfelméleti karakterizációt a $[k,l]$-gráfokra: belátjuk, hogy egy gráf pontosan akkor $[k,l]$-gráf, ha létezik egy speciális irányítása. Majd Mader irányított leemelésekre vonatkozó tételének segítségével belátjuk, hogy egy kisfokú csúcson végre lehet hatjani valamely inverzműveletet úgy, hogy a kapott gráfnak is megkapjuk a $[k,l]$-gráfságát garantáló speciális irányítását. A fejezet alapja Szegő Lászlóval közös eredményünk [12].

A 7. fejezetben két kérdést vizsgálunk. 1. Adott egy $G=(V,E)$ $[k,l]$-ritka gráf, és a csúcshalmazon egy $m: V \to \mathbb{N}$ felső fokkorlátozás, döntsük el, hogy létezik-e F élhalmaz, melyre $G+F$ $[k,l]$-ritka, és $d_F(v) \leq m(v)$ minden $v \in V$ esetén. 2. Adott egy $G=(V,E)$ gráf, és a csúcs halmazon egy $m: V \to \mathbb{N}$ alsó fokkorlátozás, döntsük el, hogy létezik-e F élhalmaz, melyre $G+F$ $\mathcal{M}_{k,l}$-ben generátor, és $d_F(v) \geq m(v)$ minden $v \in V$ esetén. Az első kérdést megválaszoljuk $0 \leq l \leq \frac{3}{2}k$ esetén. Ezzel újra bebizonyítjuk (most már közvetlenül, a Mader-tételre vagy Whiteley karakterizációjára nem támaszkodva) a 6. fejezetben a $[k,l]$-gráfokra ($0 \leq l \leq k$) igazolt előállítási tételt. Valamint általánosítjuk Frank András és Szegő László [16] egy eredményét, amely bizonyos csúcsok leemelhetőséget karakterizálja $[k,l]$-gráfokban. A második kérdést a $0 \leq l \leq k$ estben válaszoljuk meg, általánosítva ezzel Frank András és Király Tamás [15] egy eredményét.

A 8. fejezetben vizsgáljuk azt a kérdést, hogy minimálisan hány csúcsát kell rögzíteni egy nem merev gráfnak ahhoz, hogy a kapott rúdszerkezet merev legyen a síkban. A másik vizsgált kérdés pedig az, hogy döntsük el, hogy minimálisan hány csúcsot kell összehúzni egy gráfban, hogy az összehúzott gráfban legyen két éldiszjunkt feszítőfa. Kiderül, hogy ez a két kérdés teljesen analóg módon megfogalmazható és vizsgálható. Belátjuk, hogy létezik polinomiális algoritmus az optimum meghatározására. Valamint adunk egy egyszerű bizonyítást arra, hogy a térbeli leszögezési probléma, illetve a három feszítőfára vonatkozó összehúzási probléma NP-nehéz. A fejezet a [7] cikkre épül.

A 9. fejezetben azt vizsgáljuk, hogy hogyan lehet kevés csúcs rögzítésével egy gráfot globálisan merevvé tenni. Ezen kérdés fő motivációja, hogy szoros kapcsolatban van szenzorhálózatok lokalizációs kérdéseivel. Megfogalmazzuk a feladat két relaxációját: 1. adjunk egy gráfhoz minimális klikket úgy, hogy a kapott gráf M-összefüggő legyen, 2. adjunk egy 2-összefüggő gráfhoz minimális klikket úgy, hogy a kapott gráf 3-összefüggő legyen. Az 1. feladatra adunk egy randomizált polinomiális algoritmust, míg a második optimumát meg tudjuk találni egy polinomiális algoritmussal. Ezek kombinációjával pedig az eredeti kérdésre egy randomizált 2-approximációs algoritmus adódik. Ez a fejezet Jordán Tiborral közös eredményeinken alapul [10].

2. fejezet

Síkbarajzolható Laman-gráfok előállítása

Ebben a fejezetben belátjuk, hogy minden síkbarajzolható Laman-gráf előállítható egy élből csúcs-széthúzások sorozatával. [20, 45] cikkekben szereplő eredmények szerint egy gráfnak pontosan akkor van konkáv pszeudo-háromszögelése, ha a gráf egy síkbarajzolható Laman-gráf. Ezen kapcsolat fényében előállítási tételünk hasznos eszköz lehet a pszeudo-háromszögelések vizsgálatában. A fő előnye ennek a műveletnek a Henneberg féle előállítással szemben, hogy geometriailag lokálisabb.

A síkbarajzolható Laman-gráfok duálisaira is adunk egy előállítást, valamint azon merev sík-gráfokra, amelyek pontosan egy generikus kört tartalmaznak (Laman-plusz-egy gráfok). A bemutatott konstrukció algoritmikusan is megtalálható $O(n^3)$ időben.

2.1. Pszeudo-háromszögelések és Laman-gráfok

Az utóbbi években a síkbarajzolható M-körök és izosztatikus gráfok karakterizációjának jelentős szerepe volt [3, 4, 25, 53]. A síkbarajzolható gráfokra speciális konstrukciók adódtak [4], másrészt kiderült, hogy erősen kapcsolódnak bizonyos geometriai kérdésekhez, mint például a pszeudo-háromszögeléshez [20, 38, 45, 46]. A pszeudo-háromszögelések pedig fontos szerepet játszanak a poligonok kiegyenesítésében [45].

Chavez, Moshe és Whiteley [4] megfigyelték, hogy minden 3-összefüggő síkgráf előáll K_4-ből csúcs-széthúzások segítségével olyan gráfok sorozatán keresztül, amelyek maguk is síkbarajzolható 3-összefüggő M-körök. Ez az eredmény a sík-dualitáson keresztül egyszerűen következik a 3-összefüggő M-körök előállítási tételéből [3]. Két irányba terjesztjük ki ezt az eredményt. Belátjuk, hogy minden síkbarajzolható Laman-gráf előáll K_2-ből csúcsszéthúzások sorozatával, és minden síkbarajzolható merev gráf, amely pontosan egy kört tartalmaz, előáll a K_4-ből csúcsszéthúzások sorozatával.

A fő előnye a csúcs-széthúzás műveletének más műveletekkel (például a Henneberg-műveletekkel) szemben az, hogy a csúcs-széthúzás geometriailag lokálisabb. Azaz ha egy síkgráfra végrehajtjuk ezt a műveletet, akkor az eredeti gráf csúcsainak pozícióit csak kicsit kell megváltoztatni, és könnyen megkaphatjuk az új gráf egy lehetséges síkbaágyazását. Ezt kihasználva ennek az előállítási tételnek a segítségével egy másik bizonyítás adható arra, hogy minden síkbarajzolható Laman-gráf realizálható, mint konkáv pszeudo-háromszögelés, és hogy minden síkgráf, amely pontosan egy M-kört tartalmaz, realizálható olyan pszeudo-háromszögelésként, amely csak egy nem-konkáv csúcsot tartalmaz.

Ebben a fejezetben egy gráf beágyazásásra azt mondjuk, hogy **nem-keresztező**, ha minden élet egyenes szakaszokkal realizálva síkgráfot kapunk. Egy beágyazás **konkáv** a $v \in V$ csúcsban, ha a v-ből kiinduló élek egy félsík belsejében helyezkednek el, azaz ha a v csúcsban van konkáv szög.

Pszeudo-háromszögnek olyan síkbeli (önmagát nem metsző) sokszöget értünk, amelynek pontosan 3 konvex csúcsa van. Egy síkbeli ponthalmaz **pszeudo-háromszögelés**e alatt egy gráf olyan egyenes szakaszokkal való síkbarajzolását értjük, ahol a csúcsok pozícióit az adott ponthalmaz határozza meg, és minden belső tartomány pszeudo-háromszög. Egy **pszeudo-háromszögelés konkáv**, ha a síkbarajzolásban a gráf minden pontja konkáv. Egy **pszeudo-háromszögelés majdnem-konkáv**, ha a síkbarajzolásban a gráf egy csúcsának kivételével minden csúcs konkáv.

A következő eredmény Streinu-tól származik, aki először alkalmazta a pszeudo-háromszögeléseket a poligonok kiegyenesítésére. Ennek nyomán kezdődött a pszeudo-háromszögelések kiterjedtebb vizsgálata.

2.1. Tétel. *[45] Legyen (G, p) egy rúdszerkezet. Ha (G, p) egy konkáv pszeudo-háromszögelés, akkor G egy síkbarajzolható Laman-gráf.*

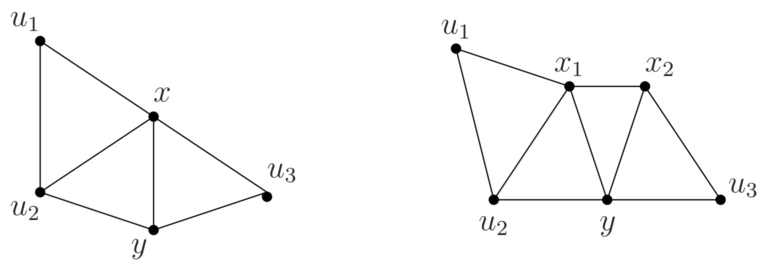
Felemerül a kérdés, hogy igaz-e ennek a megfordítása. [20]-ban belátták, hogy a válasz igenlő.

2.2. Tétel. *[20] Minden síkbarajzolható Laman-gráfnak létezik olyan síkbeli realizációja, amely konkáv pszeudo-háromszögelés.*

Ennek bizonyítása a Henneberg-előállításnak egy síkbeli változatán múlik, amely valójában azonnali következménye az 1.12. Tételnek.

A fejezet fő tétele egy a Henneberg-féle konstrukciótól eltérő előállítási tétel a síkbarajzolható Laman-gráfokra. Ez szintén alkalmas arra, hogy levezessük belőle a 2.2. Tételt, sőt lényegesen kevesebb fáradságot igényel, mert sok esetszétválasztás kerülhető így el.

A konstrukcióban alkalmazott művelet a **síkbeli pontszéthúzás** művelete. Ez a művelet kiválaszt egy x csúcsot, egy rá illeszkedő xy élet, és az x-ből induló, xy-tól különböző



2.1. ábra. A síkbeli csúcsszéthúzás művelete egy síkbarajzolható Laman-gráfra alkalmazva az xy élen az $E_1 = \{xu_1, xu_2\}, E_2 = \{xu_3\}$ partíciónak megfelelően.

éleket két halmazra, E_1, E_2-re bontja, mégpedig úgy, hogy ezek egymást követő éleket tartalmazzanak (a síkbarajzolás szerint a csúcs körül egy ciklikus sorrendet tekintve). Ezután az x csúcsot helyettesíti két új x_1, x_2 csúccsal, az E_1 éleit az x_1-hez csatlakoztatja, az E_2 éleit az x_2-höz csatlakoztatja, az xy élet helyettesíti az yx_1, yx_2 élekkel, és a gráfhoz hozzáadja az x_1x_2 élet (lásd a 2.1. ábrát). Könnyen látható, hogy a síkbeli csúcsszéthúzás egy síkbarajzolható Laman-gráfból szintén egy síkbarajzolható Laman-gráfot csinál. Megjegyezzük, hogy a hagyományos csúcsszéthúzás (lásd a [57, 59] cikkekben a merevség elméletén belüli alkalmazásait), ahol nincs megkötés az E_1, E_2-re, szintén megőrzi a Laman-tulajdonságot, de el tudja rontani a síkbarajzolhatóságot.

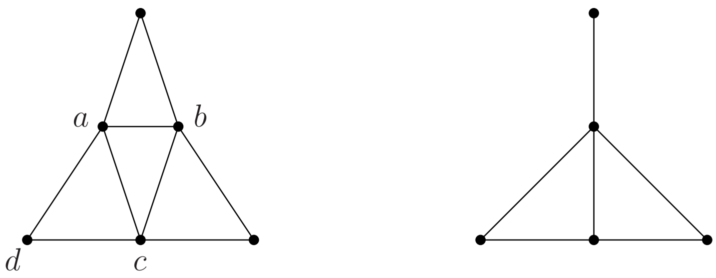
Belátjuk, hogy minden síkbarajzolható Laman-gráf előáll síkbeli csúcsszéthúzásokkal egy élből. Ehhez azt kell belátnunk, hogy minden legalább háromcsúcsú síkbarajzolható Laman-gráfon végrehajtható a síkbeli csúcsszéthúzás műveletének az inverze. Az inverzművelet egy háromszögtartomány egy élének az összehúzása.

Legyen $e = uv$ a G egy éle. Az e él **összehúzás**a a következő műveletet jelenti: azonosítjuk az u és v csúcsokat, majd a keletkezett hurkot töröljük, és töröljük az esetlegesen keletkezett többszörös éleket. A kapott gráfot G/e-vel jelöljük. Azt mondjuk, hogy az e él **összehúzható** egy G Laman-gráf esetén, ha G/e Laman-gráf. Megjegyezzük, hogy az $e = xy$ él összehúzásával eggyel csökken a csúcsok száma, és az élek száma $|N(x) \cap N(y)| + 1$-gyel csökken $|N(x) \cap N(y)|$ az e-re illeszkedő háromszögek száma. Tehát egy Laman-gráfban egy összehúzható élre pontosan egy háromszög illeszkedik.

Egy Laman-gráf nem feltétlenül tartalmaz háromszöget, például a $K_{3,3}$. A síkbarajzolható Laman-gráfok esetén viszont az Euler-formulát használva beláthatjuk a következőt.

2.3. Lemma. *Minden síkbarajzolt, legalább négy csúcsú $G = (V, E)$ Laman-gráf tartalmaz legalább két háromszögtartományt (melyeknek különböző a határuk).*

Könnyen látható, hogy az nem igaz, hogy egy síkbarajzolt Laman-gráf esetén egy háromszögtartományt határoló él mindig összehúzható, sőt elképzelhető, hogy van olyan háromszögtartomány, amelynek egyik határolóéle sem összehúzható. (A 2.2 és a 2.3. ábrán láthatunk példákat.) Ez az oka annak, hogy a csúcsszéthúzásos előállítási tétel bizonyítása bonyolultabb, mint a Henneberg-előállítás (1.12. Tétel) létezésének bizonyítása, ugyanis ott igaz, hogy minden másod- és harmadfokú csúcson végrehajtató egy inverzművelet.



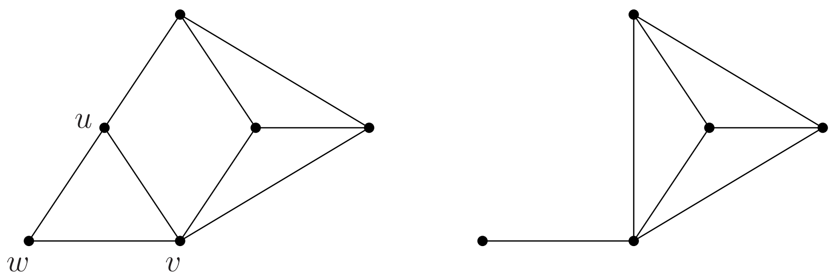
2.2. ábra. Egy G Laman-gráf és egy nem összehúzható ab éle az abc háromszögtartománynak. Az ab összehúzásával kapott gráf teljesíti (2.1)-et, de kevés él van összesen. Az abc háromszög egyik éle sem összehúzható, de az ad és cd élek összehúzhatóak.

A 2.2. szakaszban belátunk néhány alapvető állítást Laman-gráfokról. A 2.3. szakaszban már síkbarajzolt Laman-gráfokkal foglalkozunk, és belátjuk az előállítási tételt. A 2.4. szakasz a pszeudo-háromszögelésekkel kapcsolatos következményeket tárgyalja, a 2.5. szakaszban egy előállítási tételt bizonyítunk a síkdualitáson keresztül. Végül az algoritmikus kérdéseket a 2.6. szakasz tárgyalja.

2.2. Összehúzható élek Laman-gráfokban

Emlékeztetünk a Laman-gráf definíciójára: egy $G = (V, E)$ gráf Laman-gráf, ha $[2, 3]$-gráf, azaz ha $|V| \geq 2$, $|E| = 2|V| - 3$ és

$$\gamma(X) \leq 2|X| - 3 \tag{2.1}$$



2.3. ábra. Egy G Laman-gráf és egy nem összehúzható uv éle az uvw háromszögtartománynak. Az uv összehúzásával kapott gráf eleinek száma megfelelő, de valamely csúcshalmaz megsérti a (2.1) feltételt.

teljesül minden $X \subseteq V, |X| \geq 2$ esetén.

Legyen $G = (V, E)$ egy Laman-gráf. Azt mondjuk, hogy egy $X \subseteq V$ halmaz G-ben **kritikus**, ha $\gamma(X) = 2|X| - 3$, azaz az X a (2.1)-et egyenlőséggel teljesíti. Ekvivalensen mondva X kritikus, ha $G[X]$ Laman-gráf. Maga a V halmaz mindig kritikus, és minden $\{u, v\}$ halmaz is kritikus, ha $uv \in E$. A következő lemma az 1.3. Lemma egyszerű következménye.

2.4. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy Laman-gráf, legyenek az $X, Y \subseteq V$ halmazok G-ben kritikusak, és legyen $|X \cap Y| \geq 2$. Ekkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ szintén kritikusak, és $d(X, Y) = 0$ is teljesül.*

2.5. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy Laman-gráf, és $X \subseteq V$ egy kritikus halmaz. Legyen C a $G - X$ néhány komponensének uniója. Ekkor $X \cup C$ kritikus.*

Bizonyítás. Jelöljük a $G - X$ összefüggő komponenseit $C_1, C_2, ..., C_k$-val és legyen $X_i = X \cup C_i$, ahol $1 \leq i \leq k$. Tudjuk, hogy $X_i \cap X_j = X$ és $d(X_i, X_j) = 0$ teljesül minden $1 \leq i < j \leq k$ esetén, és hogy $\cup_{i=1}^k X_i = V$. Mivel G Laman-gráf, és X kritikus, a következő egyenlőség igaz: $2|V| - 3 = |E| = \gamma(X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_k) = \sum_1^k \gamma(X_i) - (k-1)\gamma(X) \leq \sum_1^k (2|X_i| - 3) - (k-1)(2|X| - 3) = 2\sum_1^k |X_i| + 2(k-1)|X| - 3k + 3(k-1) = 2|V| - 3$. Tehát mindenütt egyenlőség áll, és így mindegyik X_i kritikus.

A 2.4. Lemmából és $|X| \geq 2$-ből következik, hogy ha C az $G - X$ néhány komponensének az uniója, akkor $X \cup C$ kritikus. □

A következő lemma karakterizálja egy Laman-gráf összehúzható éleit.

2.6. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy Laman-gráf, és $e = uv \in E$ egy éle. Ekkor e pontosan akkor összehúzható, ha létezik egy egyértelmű uvw háromszög G-ben, amely tartalmazza e-t, és nem létezik olyan G-ben kritikus X halmaz, melyre $u, v \in X$, $w \notin X$ és $|X| \geq 4$ teljesül.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy e összehúzható. Ekkor G/e Laman, és mint korábban említettük, az e élt tartalmazza egy egyértelmű uvw háromszög. Indirekt tegyük fel, hogy X kritikus halmaz, melyre $u, v \in X$, $w \notin X$ és $|X| \geq 4$. Ekkor az e a $G[X]$ gráfnak is éle, de nem tartalmazza a $G[X]$ egyetlen háromszöge sem. Tehát az e $G[X]$-beli összehúzása eggyel csökkenti az élek számát. Ebből következik, hogy $G[X]/e$ csúcshalmaza megsérti a (2.1) feltételt a G/e gráfban. Ez ellentmondás.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy létezik egy egyértelmű uvw háromszög G-ben, amely tartalmazza e-t, és hogy nem létezik olyan G-ben kritikus X halmaz, melyre $u, v \in X$, $w \notin X$ és $|X| \geq 4$ teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy $G' = G/e$ nem Laman. Jelölje v' a G' azon csúcsát, amely az e összehúzásakor a két végpontjából keletkezett. Mivel G Laman, és az e él a G-nek pontosan egy háromszögében van benne, ezért $|E(G')| = 2|V(G')| - 3$. Tehát ha G' nem Laman, az azt jelenti, hogy létezik egy $Y \subsetneq V(G')$, amelyre $|Y| \geq 2$ és $\gamma_{G'}(Y) \geq 2|Y|-2$. Mivel G' egyszerű, és uv a G-nek egyetlen háromszögében van benne, ezért a $V(G')$ halmaz, annak minden kételemű részhalmaza, minden v'-t és w-t tartalmazó részhalmaz és minden v'-t nem tartalmazó részhalmaz kielégíti a (2.1) egyenlőtlenséget G-ben. Tehát szükségképpen $|Y| \geq 3$, $v' \in Y$ és $w \notin Y$. Ebből következik, hogy az $X := (Y - v') \cup \{u, v\}$ halmaz kritikus G-ben, és $u, v \in X$, $w \notin X$, $|X| \geq 4$ teljesül. Ez ellentmondás. Ezzel igazoltuk a lemmát. □

Tehát kétfajta részstruktúra bizonyíthatja egy olyan $e = uv$ él összehúzhatatlanságát, amely az uvw háromszög része: egy uvw' háromszög, melyre $w' \neq w$, vagy egy $X \subseteq V$ kritikus halmaz, melyre $u, v \in X$, $w \notin X$ és $|X| \geq 4$. Mivel egy háromszög csúcsai kritikus halmazt alkotnak, így ezeket egyszerre kezelhetjük. Azt mondjuk, hogy egy $X \subseteq V$ kritikus halmaz az $e = uv$ él (uvw háromszög szerinti) **blokkolója**, ha $u, v \in X$, $w \notin X$, és $|X| \geq 3$.

2.7. Lemma. *Legyen uvw egy háromszög a $G = (V, E)$ Laman-gráfban, és tegyük fel, hogy $e = uv$ nem összehúzható. Ekkor létezik egy egyértelmű maximális X blokkolója e-nek az uvw háromszög szerint. Továbbá $G - X$-nek pontosan egy összefüggőségi komponense van.*

Bizonyítás. A 2.6. Lemma szerint létezik az e élnek uvw szerinti blokkolója. A 2.4. Lemmából következik, hogy az e él uvw szerinti blokkoló halmazok uniója is az e él uvw szerinti blokkolója. Ezzel az állítás első felét beláttuk, a második a 2.5. Lemmából következik: Legyen tehát X az e él uvw szerinti egyértelmű maximális blokkolója, és legyen C a $G - X$ azon komponenseinek uniója, amelyek nem tartalmazzák w-t. Mivel $X \cup C$ kritikus és nem tartalmazza w-t, ezért $X \cup C$ is az e él uvw szerinti blokkolója. X maximalitásából pedig következik, hogy $C = \emptyset$, tehát $G - X$-nek valóban egyetlen komponense van. □

Mivel egy blokkoló X halmaz egyben kritikus halmaz is G-ben, így $G[X]$ egy Laman-gráf.

2.8. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy Laman-gráf, uvw egy háromszög, és legyen $f = uv$ egy nem összehúzható él. Legyen X az egyértelmű maximális blokkolója f-nek az uvw háromszög szerint. Ha $e \neq f$ egy összehúzható él $G[X]$-ben, akkor e összehúzható G-ben is.*

Bizonyítás. Legyen $e = rz$. Mivel e összehúzható $G[X]$-ben, így létezik egy egyértelmű rzy háromszög $G[X]$-ben, amely e-t tartalmazza. Indirekt tegyük fel, hogy e nem húzható össze G-ben. Ekkor a 2.6. Lemma szerint létezik egy $Z \subseteq V$ halmaz, amely blokkolja e-t rzy szerint, azaz Z kritikus, $r, z \in Z$, $y \notin Z$, és $|Z| \geq 3$. A 2.4. Lemmából következik, hogy $Z \cap X$ kritikus. Ha $|Z \cap X| \geq 3$, akkor $Z \cap X$ blokkolná e-t $G[X]$-ben, és ez ellentmondana e $G[X]$-beli összehúzhatóságának.

Tehát $Z \cap X = \{r, z\}$. Azt állítjuk, hogy $w \notin Z$. Tegyük fel indirekt, hogy $w \in Z$. Ekkor $w \in Z - X$. Mivel $e \neq f$ és $|Z \cap X| = 2$, ezért az u és v csúcsok legalább egyike nincs Z-ben. De ekkor $d(X, Z) \geq 1$, ami ellentmond a 2.4. Lemmának. Tehát valóban $w \notin Z$.

Nyilván $Z - X \neq \emptyset$. Mivel $Z \cup X$ a 2.4. Lemma szerint kritikus, így a $Z \cup X$ halmaz blokkolója f-nek G-ben az uvw háromszög szerint. Ez pedig ellentmond X maximalitásának. Ezzel a lemmát beláttuk. □

2.3. Síkbarajzolt Laman-gráfok

2.9. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy síkbarajzolt Laman-gráf, legyen uvw egy háromszög-tartomány és $f = uv$ egy nem összehúzható él. Legyen X az f él uvw szerinti maximális blokkolója. Ekkor egy kivételével a $G[X]$ minden tartománya a G-nek is tartománya.*

Bizonyítás. Tekintsük a $G[X]$ tartományait és a $G - X$-nek a 2.7. Lemma szerinti egyetlen összefüggőségi komponensét, C-t. A C nyilván teljes egészében a $G[X]$ valamely tartományában helyezkedik el. Tehát valóban $G[X]$ minden tartománya ezen egy kivételével a G-nek is tartománya. □

A fenti kivételes tartományát $G[X]$-nek (amelyik nem tartománya G-nek) **speciális tartomány**nak fogjuk nevezni. Mivel a speciális tartomány a belsejében tartalmazza a w csúcsot (hiszen a teljes $G - X$-et tartalmazza), és uvw a G-nek háromszögtartománya, ezért az uv él a speciális tartomány egyik határoló éle. Ha a $G[X]$ speciális tartománya egy uvq háromszög, akkor ennek a harmadik q csúcsát a $G[X]$ **speciális csúcs**ának nevezzük. Ha a $G[X]$ speciális tartománya nem háromszög, akkor azt mondjuk, hogy X egy **szép blokkoló** halmaz. Ha G egy síkbarajzolt Laman-gráf, akkor azt mondjuk, hogy egy e él **sík-összehúzható**, ha e összehúzható, és a 2.6. Lemma szerint egyértelműen létező e-t tartalmazó G-beli háromszög egy tartomány.

Ezek után készen állunk arra, hogy belássuk ezen fejezet fő eredményét, ami azt mondja ki, hogy minden síkbarajzolt Laman-gráfban létezik sík-összehúzható él. Valójában egy ennél valamivel erősebb állítást igazolunk, ami hasznos lesz a későbbiekben.

2.10. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy síkbarajzolt Laman-gráf, melyre $|V| \geq 4$. Ekkor*
(i) ha uvw egy háromszögtartomány, $f = uv$ nem összehúzható, és X az f uvw szerinti maximális blokkolója, akkor létezik egy él $G[X]$-ben, amely sík-összehúzható G-ben,
(ii) minden $r \in V$ esetén létezik legalább két sík-összehúzható él, amely nem illeszkedik r-re.

Bizonyítás. Az állítást a $|V|$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Könnyű ellenőrizni, hogy $|V| = 4$ esetén az állítás (az (i) és (ii) is) igaz, ekkor ugyanis csak egy ilyen G létezik, és annak lényegében egy síkbarajzolása van. Tegyük fel tehát, hogy $|V| \geq 5$, és az állítás (az (i) és (ii) is) igaz minden olyan gráfra, amelynek kevesebb, mint $|V|$ csúcsa van. Be fogjuk látni, hogy ekkor az állítás (az (i) és (ii) is) igaz G-re is.

Először (i)-et igazoljuk. Legyen uvw egy háromszögtartomány, melyre $f = uv$ nem összehúzható, legyen X az f-nek az uvw szerinti maximális blokkolója. Mivel X kritikus, így $G[X]$ egy Laman-gráf. A G síkbarajzolását megszorítva a $G[X]$-re továbbra is egy síkbarajzolást kapunk, tehát a $G[X]$ egy síkbarajzolt Laman-gráf. Mivel $w \notin X$, így $G[X]$-nek kevesebb, mint $|V|$ csúcsa van.

A $G[X]$ egy e élét **valódi**nak hívjuk, ha $e \neq f$, e sík-összehúzható $G[X]$-ben, és a $G[X]$-beli háromszögtartomány, amely tartalmazza e-t, G-nek is tartománya. A definícióból és a 2.8. Lemmából következik, hogy egy valódi e él sík-összehúzható G-ben is. Belátjuk, hogy $G[X]$-nek létezik valódi éle, és ezzel igazoljuk az (i) állítást.

Először tegyük fel, hogy $|X| = 3$. Ekkor $G[X]$ egy háromszög, és minden éle sík-összehúzható $G[X]$-ben. A 2.9. Lemma szerint a $G[X]$ két háromszögtartománya közül az egyik G-nek is tartománya. Tehát ezen háromszög azon két éle, amely különbözik f-től, valódi.

Most tegyük fel, hogy $|X| \geq 4$. Az indukciós feltevés szerint a (ii) állítás igaz $G[X]$-re az $r = u$ választással. Tehát létezik két sík-összehúzható éle a $G[X]$-nek, amelyek nem illeszkednek u-ra (speciálisan különböznek f-től), jelölje ezeket e', e''. Ha X egy szép blokkoló, akkor a $G[X]$-beli háromszögtartomány, amely tartalmazza e'-t (vagy akár e''-t), G-nek is háromszögtartománya a 2.9. Lemma szerint. Tehát az e' (és e'' is) valódi él.

Ha X nem egy szép blokkoló, akkor legyen a speciális háromszögtartománya az uvq. Az uvq háromszög tehát nem tartománya a G-nek, de a $G[X]$ minden más tartománya a G-nek is tartománya a 2.9. Lemma szerint. Mivel e' és e'' különböző élek, amelyek nem illeszkednek u-ra, ezért legalább az egyikük, mondjuk e', nem éle az uvq háromszögnek. Ezért az az egyértelmű $G[X]$-beli háromszögtartomány, amely e'-t tartalmazza, G-nek is tartománya. Tehát e' valódi. Ezzel (i)-et beláttuk.

A (ii) bizonyításához rögzítsünk egy $r \in V$ csúcsot. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset Létezik egy olyan uvw háromszögtartománya G-nek, amelyre $r \notin \{u, v, w\}$.

Ha legalább két éle az uvw háromszögnek sík-összehúzható, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor létezik kettő vagy három blokkoló halmaz az uvw háromszög éleihez.

Ha az uvw háromszög egyik éle sem összehúzható, akkor legyenek az X, Y, Z halmazok az vw, uw és uv élek maximális blokkolói (az uvw szerint) ebben a sorrendben. A 2.4. Lemmából következik, hogy $X \cap Y = \{w\}$, $X \cap Z = \{v\}$ és $Y \cap Z = \{u\}$ (mivel az X, Y, Z halmazok kritikusak, és $d(Y, Z), d(X, Y), d(X, Z) \geq 1$ is teljesül az uvw háromszög élei miatt). Feltevésünk szerint az r nem csúcsa az uvw háromszögnek. Tehát r az X, Y, Z halmazok közül legfeljebb az egyikben lehet benne. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $r \notin X \cup Y$. (i) szerint a $G[X], G[Y]$ gráfok mindegyike tartalmaz G-ben sík-összehúzható élet. Ezek az élek nem illeszkednek r-re. Tehát G-ben találtunk két sík-összehúzható élet.

Tegyük fel most, hogy az uvw háromszög élei közül egy összehúzható és kettő nem. Mondjuk uv összehúzható és vw, uw nem az. Ekkor legyen X és Y maximális blokkolója az vw és uw élekenek az uvw szerint. Mint fent, itt is teljesül, hogy $X \cap Y = \{w\}$ a 2.4. Lemma miatt. Mivel $r \neq w$, feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy $r \notin X$. Ekkor (i)-ből következik, hogy van egy f éle $G[X]$-nek, amely sík-összehúzható G-ben. Tehát ekkor is találtunk két sík-összehúzható élet (uv és f), amely nem illeszkedik r-re.

2. eset A G minden háromszögtartománya tartalmazza r-et.

Legyen ruv a G egy háromszögtartománya. Ekkor uv sík-összehúzható, különben (i)-ből következne, hogy létezik G-nek egy sík-összehúzható éle $G[X]$-ben (ahol X egy maximális blokkolója uv-nek az ruv szerint), speciálisan lenne egy háromszögtartománya G-nek, amelynek nem csúcsa r, ami ellentmondás. Mivel G-nek a 2.3. Lemma szerint legalább két háromszögtartománya is van, ezért létezik legalább 2 sík-összehúzható él G-ben, amely elkerüli r-et. Ezzel a tételt beláttuk. □

A 2.10. Tételből következik, hogy egy legalább négycsúcsú síkbarajzolt Laman-gráfnak van sík-összehúzható éle. Egy három csúcsú síkbarajzolt Laman-gráf háromszög, tehát minden éle sík-összehúzható. Megjegyezzük, hogy egy sík-összehúzható él összehúzása után kapott gráf síkbarajzolása megkapható egyszerű lokális módosításokkal.

Mivel egy háromszögtartomány egy élének összehúzása a síkbeli csúcs-széthúzás műveletének az inverze, ezért az eddigiekből azonnal következik az alábbi tétel.

2.11. Tétel. *Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolt Laman-gráf, ha megkapható egy élből síkbeli csúcs-széthúzások alkalmazásával.*

A 2.10. Tételből következik, hogy ha G egy legalább négy csúcsú síkbarajzolt Laman-gráf, akkor van benne olyan sík-összehúzható él is, amely elkerül egy adott háromszöget. Ezért a 2.11. Tételben az előállítás kiindulásának választhatunk egy tetszőleges háromszögtartományt.

Azt mondjuk, hogy $G = (V, E)$ egy **Laman-plusz-egy-gráf**, ha $G - e$ Laman valamely $e \in E$ esetén. Ez azzal ekvivalens, hogy pontosan egy M-kört tartalmaz. Speciálisan az M-körök maguk is Laman-plusz-egy-gráfok.

Az eddigiekhez hasonló technikákkal igazolhatjuk a következőt.

2.12. Tétel. *Egy gráf pontosan akkor síkbarajzolt Laman-plusz-egy-gráf, ha megkapható a K_4-ből síkbeli csúcs-széthúzásokkal.*

Megjegyzés: Természetes kérdés, hogy vajon egy 3-összefüggő síkbarajzolt Laman-gráfnak van-e olyan sík-összehúzható éle, amelynek összehúzása a 3-összefüggőséget is megőrzi (hívjuk az ilyet **erősen sík-összehúzhatónak**). A válasz az, hogy nem: legyen G egy 3-összefüggő síkbarajzolt Laman-gráf, és legyen G' az a gráf, melyet úgy kapunk G-ből, hogy G minden abc háromszögtartományában felveszünk három csúcsot, a', b', c'-t, és behúzzuk az aa', bb', cc' és az $a'b'$, $b'c'$, $c'a'$ éleket (nevezzük ezt a műveletet **háromszög-beszúrásnak**). Ekkor G' olyan 3-összefüggő síkbarajzolt Laman-gráf lesz, amelynek nincs erősen sík-összehúzható éle. Nyitott az a kérdés, hogy vajon lehet-e olyan lokális redukciós lépéseket definiálni, amelyek egy olyan előállításhoz vezetnek, ahol minden lépésben egy 3-összefüggő síkbarajzolt Laman-gráfunk van.

2.4. Alkalmazás

A 2.11 és a 2.12. Tételeket arra használhatjuk, hogy levezessünk belőle a pszeudo-háromszögelésekről bizonyos ismert eredményeket. Új bizonyítást adhatunk a 2.2. Tételre és a következő hasonló eredményre (amelyet szintén beláttak a [20]-ben): minden síkbarajzolt Laman-plusz-egy gráfnak van majdnem-konkáv pszeudo-háromszögeléses realizációja. A [20]-beli bizonyítások hasonlóak, de az ottani hosszas esetszétválasztás a csúcs-széthúzás műveletének alkalmazásával lerövidül, annak köszönhetően, hogy ez a művelet geometriailag lokálisabb.

A 2.11 és a 2.12. Tételekből a [20]-nek a síkbarajzolt Laman- illetve Laman-plusz-egy-gráfok úgynevezett **kombinatorikus pszeudo-háromszögelések**re vonatkozó eredményei is levezethetőek.

2.5. Sík-dualitás

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Azt mondjuk, hogy G **ko-Laman**, ha $|E| = 2|V| - 1$ és $\gamma(X) \leq 2|X| - 2$ teljesül minden $\emptyset \neq X \subsetneq V$ esetén. Megjegyezzük, hogy egy ko-Laman gráf tartalmazhat többszörös éleket. Jelölje $M(G)$ a G gráf körmatroidját és $M^*(G)$ a körmatroid duálisát.

2.13. Tétel. *Legyenek G és H olyan síkgráfok, melyekre $M(G) \cong M^*(H)$. Ekkor G pontosan akkor Laman-gráf, ha H ko-Laman-gráf.*

Bizonyítás. (Vázlat) A Nash-Williams tétel miatt G pontosan akkor Laman, ha $M(G/e)$ két bázis diszjunkt uniója minden $e \in E(G)$ esetén. Ezzel ekvivalens $M(G) \cong M^*(H)$ miatt az, hogy $M(H) - e$ két bázis diszjunkt uniója minden $e \in E(H)$ esetén, ami viszont ekvivalens azzal, hogy H ko-Laman. $\square$

Felidézzük, hogy a második Henneberg-művelet, az 1-kiterjesztés egy új csúcsot és három új élet vesz fel. Ha megengedjük, hogy a harmadik él a felosztott él valamely végpontjához illeszkedjék (azaz párhuzamos legyen az első két új él közül valamelyikkel), akkor **gyenge 1-kiterjesztés**ről beszélünk. A **síkbeli gyenge 1-kiterjesztés** a topologikus verziója ennek a műveletnek. Könnyen látható, hogy a síkbeli csúcsszéthúzás műveletének sík-duálisa a síkbeli gyenge 1-kiterjesztés művelete. Következésképpen a 2.11 és a 2.13. Tételekből a síkdualitást használva levezethető az alábbi.

2.14. Tétel. *A gráf pontosan akkor síkbarajzolt ko-Laman-gráf, ha megkapható egy hurokból síkbeli gyenge 1-kiterjesztések sorozatával.*

2.6. Algoritmus

Egy triviális algoritmus sík-összehúzható él keresésére megvizsgál minden élet ($2n - 3$ van), hogy összehúzásával Laman-gráf keletkezik-e. Egy gráfról eldönteni, hogy Laman-gráf $O(n^2)$ lépést vesz igénybe, tehát ezen egyszerű algoritmus futásideje $O(n^3)$.

Ebben a szakaszban leírjuk a fő ötletét annak az algoritmusnak, amely talál egy összehúzható élet egy n csúcsú síkbarajzolt Laman-gráfban $O(n^2)$ idő alatt. Ez használ egy szubrutint, amely teszteli, hogy egy adott $e = uv$ éle egy háromszöglapnak összehúzható-e (és talál egy maximális blokkolót, ha nem az). Ez a szubrutin az alábbi lemmán alapul. Egy gráf maximális merev részgráfjait **merevségi komponensek**nek nevezzük (lásd [19, 25]-ban a részleteket).

2.15. Lemma. *Legyen G egy síkbarajzolt Laman-gráf, és legyen az $e = uv$ él az uvw háromszöglap egy éle. Ekkor vagy e összehúzható, vagy a $G - w$ gráf e-t tartalmazó C merevségi komponense legalább három csúcsú. Ez utóbbi esetben a C csúcshalmaza egy maximális blokkolója az e élnek G-ben az uvw háromszög szerint.*

Léteznek $O(n^2)$ futásidejű algoritmusok egy gráf merevségi komponenseinek meghatározására, lásd például [2, 17, 21].

Az algoritmusunk először meghatározza V részhalmazainak egy csökkenő $X_0, X_1, ..., X_t$ sorozatát, melyre $V = X_0$, és az X_{i+1} a $G[X_i]$ (ahol $0 \leq i \leq t - 1$) gráf valamely háromszögének a blokkolója. Majd a $G[X_t]$ egy összehúzható élét visszaadja, amely G-ben is összehúzható. Először tekinti a G egy tetszőleges uvw háromszöglapját, és teszteli, hogy élei összehúzhatóak-e (és kiszámitja a maximális blokkolókat, ha nem). Ha valamelyik összehúzható, akkor készen vagyunk, ha nem, akkor vegyük a három blokkoló közül a legkisebb csúcsszámút, legyen ez B, és tartozzon ez mondjuk az $f = uv$ élhez. Legyen $X_1 := B$. Ezt folytatva keressünk egy valódi élet $G[X_1]$-ben. Ehhez vegyük a $G[X_1]$-nek egy háromszöglapját (amely különbözzön a $G[X_1]$ speciális tartományától abban az esetben, ha X_1 nem szép), és teszteljük ennek az f-től különböző éleit (és amelyek ezáltal nincsnek rajta a $G[X_1]$ speciális tartományán abban az esetben, ha X_1 nem szép), hogy összehúzhatóak-e $G[X_1]$-ben. Ha igen, akkor kész. Ha nem, akkor megint legyen B' a legkisebb csúcsszámú olyan maximális blokkolója az adott háromszögnek, amely nem tartalmazza az f élet (és amely nem tartalmaz élet a $G[X_1]$ speciális tartományából, ha X_1 nem szép blokkoló). Legyen $X_2 := B'$, és iteráljuk ezt az eljárást. A következő lemma – amelyet a 2.4. Lemma segítségével lehet bizonyítani – mutatja, hogy mindig lesz legalább két blokkoló, amelyek közül választhatunk.

2.16. Lemma. *(i) Legyen f egy él és uvw egy háromszögtartomány, amelynek az élei nem-összehúzhatóak (kivéve f-et, ha az f rajta van). Ekkor legalább két olyan maximális blokkolója van az uvw éleinek, amely nem tartalmazza az f élet.*
(ii) Legyen xyz és uvw két különböző háromszögtartomány. Tegyük fel, hogy az uvw élei nem összehúzhatóak. Ekkor az uvw éleinek legalább két maximális blokkolója nem tartalmaz élet az xyz háromszögből.

A 2.8, a 2.9 és a 2.16. Lemmákból következik, hogy az algoritmus egyszer majd talál egy valódi élet valamely $G[X_t]$ részgráfban, és ez az él síkösszehúzható lesz G-ben is. Az a tény, hogy az algoritmus mindig két maximális blokkolóból a kisebbet választja (és hogy a 2.4. Lemma miatt ezeknek pontosan egy közös pontjuk van), biztosítja azt, hogy az X_i mérete lényegében feleződik minden iterációban. Ebből könnyen látható, hogy a teljes futásidő $O(n^2)$.

2.17. Tétel. *Egy n csúcsú síkbarajzolt Laman-gráf egy sík-összehúzható éle megtalálható $O(n^2)$ időben.*

A 2.17. Tételből következik, hogy gráf egy csúcs-széthúzással történő felépítési sorozata megtalálható $O(n^3)$ időben.

3. fejezet

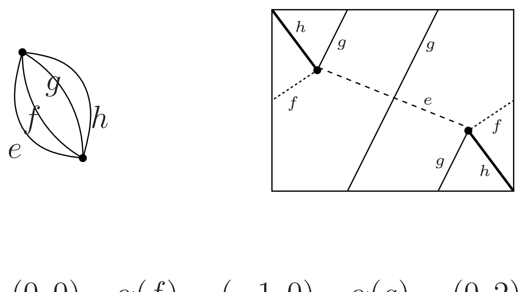
Merevség felületeken

Ebben a fejezetben a felületeken való merevség fogalmát és karakterizációját vizsgáljuk. Ezt fogalmat Whiteley [56] vezette be és vizsgálta néhány konkrét felület esetén (sík tórusz, kúp, szabályos tetraéder). Belátunk egy előállítási tételt a $[2, d]$-gráfokra, ahol $(d = 0, 1, 2)$. Ezt az előállítási tételt arra használjuk, hogy belássuk, hogy pontosan ezek a gráfok az izosztatikusak bizonyos 2-dimenziós felületeken. Ezzel igazoljuk néhány speciális esetét Whiteley egy sejtésének.

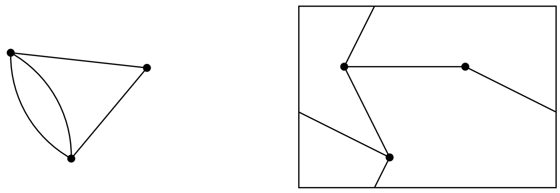
3.1. Korábbi eredmények és fogalmak

Whiteley bevezette a merevség fogalmát bizonyos felületeken [56]. Mi először megismételjük az általa adott merevség-definíciót a sík n-dimenziós tóruszra. Rúdszerkezetnek nevezünk a sík n-dimenziós tóruszon egy (G, α, x) hármast, ahol $G = (V, E)$ egy gráf, $x : V \to [0, 1)^n$ egy beágyazása a csúcsoknak az n-dimenziós tóruszba, és $\alpha : E \to \mathbb{Z}^n$ egy függvény. $\alpha(e)$ reprezentálja az $e \in E$ élhez használt rúdnak a „tekeredési típusát” a tóruszon, lásd a 3.1. ábrát.

Egy $m : V \to \mathbb{R}^n$ függvényt a (G, α, x) rúdszerkezet infinitezimális mozgásának nevezünk,



3.1. ábra. $\alpha(e) = (0, 0)$, $\alpha(f) = (-1, 0)$, $\alpha(g) = (0, 2)$, $\alpha(h) = (-1, 1)$



3.2. ábra. Egy gráf és egy lehetséges reprezentációja a tóruszon.

ha

$$(x_v - x_u + \alpha(e))^{\mathsf{T}}(m_u - m_v) = 0 \tag{3.1}$$

teljesül minden $e = uv \in E$ esetén. Informálisan ez azt jelenti, hogy az m által meghatározott irányokban infinitezimálisan mozgatva a rudak hossza nem változik. Egy $m : V \to \mathbb{R}^n$ függvényt infinitezimális izometriának nevezünk, ha

$$(x_v - x_u + z)^{\mathsf{T}}(m_u - m_v) = 0 \tag{3.2}$$

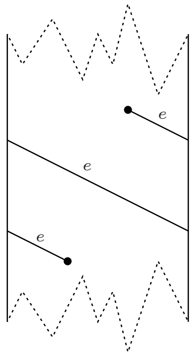
teljesül minden $u, v \in V$ és $z \in \mathbb{Z}^n$ esetén. Könnyen ellenőrizhető, hogy általános helyzetű csúcsok esetén az infinitezimális izometriák az eltolások, azaz a következő alakú m-ek: $m_v := m_0 \in \mathbb{R}^n$ minden $v \in V - re$. Azt mondjuk, hogy egy rúdszerkezet infinitezimálisan merev, ha minden infinitezimális mozgás izometria.

A (G, α, x) rúdszerkezet merevségi mátrixa egy $|E| \times n|V|$ méretű $M_{\alpha,x}$ mátrix, amelyben minden $e = uv \in E$ élhez tartozó sorban az u csúcshoz tartozó oszlopokban az $(x_u - x_v + \alpha(e))$ vektor, a v-hez tartozó oszlopokban az $(x_v - x_u - \alpha(e))$ koordinátái vannak, és a mátrix többi eleme 0. A infinitezimális mozgások altere megfelel az $M_{\alpha,x}$ mátrix magterének. Az infinitezimális izometriák alterének dimenziója n. Tehát egy (G, α, x) rúdszerkezet pontosan akkor infinitezimálisan merev, ha $r(M_{\alpha,x}) = n|V| - n$.

Azt mondjuk, hogy egy G gráf (generikusan infinitezimálisan) merev a tóruszon, ha létezik x és α úgy, hogy a (G, α, x) rúdszerkezet infinitezimálisan merev. (Vagy ekvivalensen: létezik α úgy, hogy (G, α, x) merev egy generikus x esetén.) A minimálisan merev gráfok karakterizációját Whiteley adta meg [56].

3.1. Tétel. *Egy $G = (V, E)$ gráf esetén a következők ekvivalensek:*
(i) G minimálisan merev az n-dimenziós tóruszon,
(ii) az E élhalmaz n éldiszjunkt feszítőfa uniója,
(iii) $|E| = n|V| - n$, és $\gamma(X) \leq n|X| - n$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ esetén.

Hasonlóan definiálhatjuk a fenti merevségi fogalmakat (rúdszerkezet, infinitezimális mozgás, izometria, egy rúdszerkezet illetve gráf merevsége) a hengeren is.



3.3. ábra. $\alpha(e) = (-2, 0)$

A 2-dimenziós hengeren rúdszerkezetnek nevezzük a (G, α, x) hármast, ha $G = (V, E)$ egy gráf, $x : V \to [0, 1) \times \mathbb{R}$ függvény és $\alpha : E \to \mathbb{Z} \times \{0\}$ függvény. $\alpha(e)$ reprezentálja, hogy az $e \in E$ élhez tartozó rúd hányszor és milyen irányban tekeredik a hengeren, lásd a 3.3. ábrát.

Egy $m : V \to \mathbb{R}^2$ függvény infinitezimális mozgása a (G, α, x) rúdszerkezetnek, ha

$$(x_v - x_u + \alpha(e))^{\mathsf{T}}(m_u - m_v) = 0 \tag{3.3}$$

teljesül minden $e = uv \in E$ esetén. Egy infinitezimális izometria pedig egy $m : V \to \mathbb{R}^2$ függvény, amelyre

$$(x_v - x_u + z)^{\mathsf{T}}(m_u - m_v) = 0 \tag{3.4}$$

teljesül minden $u, v \in V$ és $z \in \mathbb{Z} \times \{0\}$ esetén. Könnyen ellenőrizhető, hogy az infinitezimális izometriák itt is az eltolások, azaz az olyan m-ek, amelyekre $m_v := m_0 \in \mathbb{R}^2$ minden $v \in V$-re. Egy (G, α, x) rúdszerkezetet merevnek nevezünk, ha minden infinitezimális mozgása izometria. Azt mondjuk, hogy G (generikusan infinitezimálisan) merev, ha létezik x és α úgy, hogy (G, α, x) infinitezimálisan merev. (Vagy ekvivalensen: létezik α úgy, hogy (G, α, x) merev egy generikus x esetén.) A hengeren is definiálhatnánk egy rúdszerkezet merevségi mátrixát, és itt is megadhatnánk a rúdszerkezet merevségének karakterizációját a merevségi mátrix rangjának segítségével.

A hengeren egy gráf merevségének karakterizációja a következő [56].

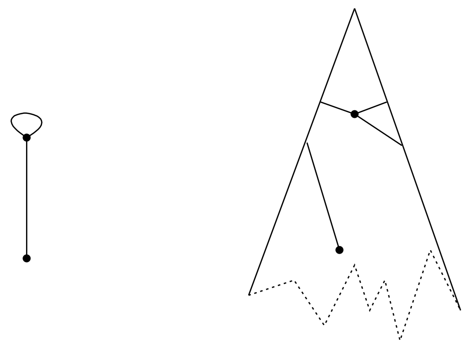
3.2. Tétel. *Egy $G = (V, E)$ gráf esetén az alábbiak ekvivalensek:*

(i) G minimálisan merev a 2-dimenziós hengeren,

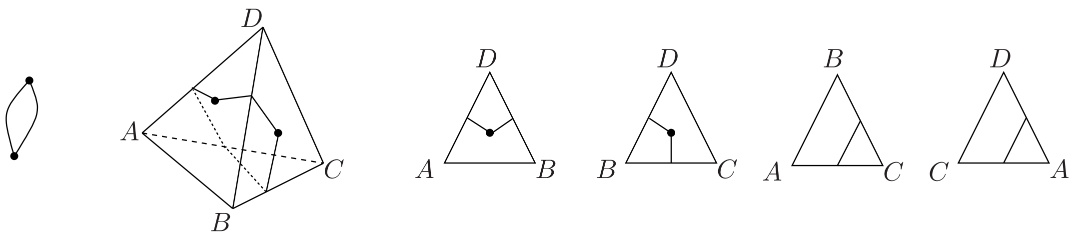
(ii) az E élhalmaz 2 éldiszjunkt feszítőfa uniója,

(iii) $|E| = 2|V| - 2$, és $\gamma(X) \leq 2|X| - 2$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ esetén.

Whiteley megadta a kúpon illetve a szabályos tetraéderen való merevség karakterizációját is [56].



3.4. ábra. Egy él, egy hurokél és egy lehetséges reprezentációjuk a kúpon.



3.5. ábra. Két párhuzamos rúd és egy lehetséges reprezentációjuk a szabályos tetraéderen.

3.3. Tétel. *Egy $G = (V, E)$ gráf esetén a következők ekvivalensek:*

(i) G minimálisan merev a 2-dimenziós kúpon,

(ii) $|E| = 2|V| - 1$, és $\gamma(X) \leq 2|X| - 1$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ esetén.

3.4. Tétel. *Egy $G = (V, E)$ gráf esetén a következők ekvivalensek:*

(i) G minimálisan merev a szabályos tetraéderen,

(ii) $|E| = 2|V|$, és $\gamma(X) \leq 2|X|$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ esetén.

Whiteley az alábbi sejtést fogalmazta meg a fenti eredmények általánosításaként.

3.5. Sejtés. *Minden n dimenzióba beágyazott 2-dimenziós felület esetén ha a globális szabadsági fok d ($0 \leq d \leq 2$), akkor egy $G = (V, E)$ hurokmentes gráf esetén a következők ekvivalensek:*

(i) Egy generikus rúdszerkezet a felületen izosztatikus,

(ii) $|E| = 2|V| - d$, és $\gamma(X) \leq 2|X| - d$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ esetén.

3.6. Sejtés. *Egy n dimenziós felület esetén, amelynek a szabadsági foka $\mathbb{R}^m$-ben d ($d \leq n$), és ha $G = (V, E)$ egy hurokmentes gráf, akkor a következők ekvivalensek:*

(i) Egy generikus rúdszerkezet izosztatikus a felületen,

(ii) $|E| = n|V| - d$, és $\gamma(X) \leq n|X| - d$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ esetén.

Ebben a fejezetben hasonló utat követünk, mint ahogyan a Laman-tételt láttuk be előállítási tétel segítségével. Adunk egy előállítási tételt a 3.5. Sejtésben szereplő gráfosztályra. Majd megvizsgáljuk, hogy ennek segítségével a 3.5. Sejtésnek mely speciális esetei igazolhatóak. Kiderül, hogy a 3.2, 3.3, 3.4. Tételek általánosíthatóak a 2 dimenziós felületek egy bővebb osztályára.

A következő szakaszban definiáljuk, hogy pontosan milyen merevségi fogalmat használunk majd. Valójában az olyan felületeken való merevséget definiáljuk, amelyeket szimplexek összeragaszásával kaphatunk.

A 3.3. szakaszban belátjuk az említett előállítási tételt, majd a 3.4. szakaszban alkalmazzuk azt bizonyos felületeken való izosztatikus gráfok karakterizációjára.

3.2. Definíciók és egyszerű megfigyelések

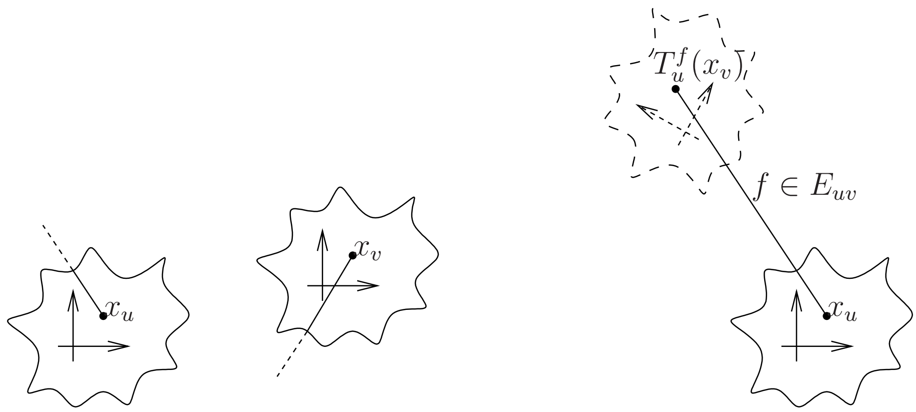
Ebben a fejezetben a „gráf" irányítatlan gráfot jelent, amelyben megengedünk párhuzamos éleket és hurkokat.

Tegyük fel, hogy adott egy véges V alaphalmaz. Gyakran használjuk majd a következő jelölést: $\mathbb{R}^{n|V|}$ fogja jelölni a $V \to \mathbb{R}^n$ függvények vektorterét. Ha $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$, akkor $m \in \mathbb{R}^{n|V|}$ azt jelenti, hogy $m = (m_{v_1}, \ldots, m_{v_k})$, ahol $m_{v_i} \in \mathbb{R}^n$. Egy $\emptyset \neq X \subseteq V$ esetén legyen $\mathbb{R}^{n|V|}(X) := \{f \in \mathbb{R}^{n|V|} : f_x = 0\ \forall x \in V - X\}$, amely egy $n|X|$ dimenziós altere $\mathbb{R}^{n|V|}$-nek, és egy $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{n|V|}$ esetén jelölje $\mathcal{A}(X)$ az $\mathcal{A}$ merőleges vetületét $\mathbb{R}^{n|V|}(X)$-re, azaz $\mathcal{A}(X) := \{f \in \mathbb{R}^{n|V|}(X) : \exists e \in \mathcal{A}, e|_X = f|_X\}$. Hasonlóan, ha $m \in \mathbb{R}^{n|V|}$, akkor $m(X) \in \mathbb{R}^{n|V|}$ jelöli az m merőleges vetületét $\mathbb{R}^{n|V|}(X)$-re.

Ha azt mondjuk, hogy M egy $k \times n|V|$ méretű mátrix, akkor az azt fogja jelenteni, hogy M-nek k sora van, amelyek $\mathbb{R}^{n|V|}$-beli vektorok. Ha $v \in V$, akkor $M(v)$ jelöli azt a $k \times |V|$-es részmátrixát M-nek, amely az M-nek a v csúcshoz tartozó k oszlopából áll. Azaz $M(v)$-nek k darab $R(v)$ alakú sora van, ahol R az M sora.

Ha V egy alaphalmaz, akkor $\mathcal{E}$-t egy n **dimenziós rúd-rendszer**nek nevezzük (vagy röviden n-**rúd-rendszer**nek) V-n, ha $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_{uv} : u, v \in V\}$, ahol $\mathcal{E}_{uv} = \mathcal{E}_{vu}$ egy megszámlálható halmaza (minden u, v esetén) u és v közötti **rudak**nak (megengedjük az $u = v$-t is, az úgynevezett hurok-rudakat), ami a következőt jelenti: ha $u \neq v$, akkor az $\mathcal{E}_{uv}$ minden f eleméhez adott T_v^f és T_u^f, két egybevágósága $\mathbb{R}^n$-nek úgy, hogy T_u^f a T_v^f inverze. (A T_u^f kongruencia jelentése az, hogy ha a v csúcs pozíciója x_v a v saját koordinátarendszerében, és az u pozíciója x_u az u koordinátarendszerében, akkor az u a v csúcsot a $T_u^f(x_v)$ pozícióban látja az u koordinátarendszerében, ha u az f rúd irányában néz v felé. Lásd a 3.6. ábrát.) Ha $u = v$, akkor az $\mathcal{E}_{uu}$ minden f eleméhez adott egy T_u^f kongruenciája az $\mathbb{R}^n$-nek.

Egy V-n adott $\mathcal{E}$ rúd-rendszernek az $X \subseteq V$ részhalmazra való megszorítása alatt az



3.6. ábra.

$\{\mathcal{E}_{uv} : u, v \in X\}$ rúd-rendszert értjük (ugyanazokkal a kongruenciákkal), ezt $\mathcal{E}|_X$ jelöli. A következő jelölést fogjuk még használni: $T_v^f(x) = A_v^f x + b_v^f$, ahol A_v^f egy $n \times n$-es ortogonális mátrix (illetve az általa meghatározott transzformáció), és $b_v^f \in \mathbb{R}^n$.

Ha adott $\mathcal{E}$, egy n-rúdrendszer a V alaphalmazon, akkor jelölje $H \subseteq \mathbb{R}$ azon egész számok halmazát, amelyek előfordulnak valamely A_v^f mátrix vagy b_v^f vektor elemeként valamely $f \in \mathcal{E}_{uv}$ és $u, v \in V$ esetén. H egy megszámlálható halmaza valós számoknak. Ha $x_1, \ldots, x_k$ valós számok, akkor azt mondjuk, hogy **generikusak** ($\mathcal{E}$-hez képest), ha algebrailag függetlenek az $\mathbb{F} := \mathbb{Q}(H)$ test felett. A generikus elemekre gyakran mint változókra fogunk tekinteni. Gyakran használjuk majd a következő állítást: ha $v_1, \ldots, v_l$ az $(\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_k))^n$ vektorai, akkor ezek pontosan akkor lineárisan függetlenek generikus x_i-k esetén, ha léteznek egyáltalán olyan x_i értékek, amelyek esetén lineárisan függetlenek.

Tegyük fel, hogy adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy $\mathcal{E}$ n-rúd-rendszer V-n. Egy $\alpha : E \to \cup \mathcal{E}_{uv}$ függvényt a G **él-függvényének** (**él-realizációjának**) nevezünk, ha $\alpha(e) \in \mathcal{E}_{uv}$ teljesül minden $e = uv \in E$ esetén. (Használni fogjuk esetenként az $\alpha(uv) = e$ pongyola jelölést, amely azt jelenti majd, hogy $\exists f \in E : f = uv$ és $\alpha(f) = e$.)

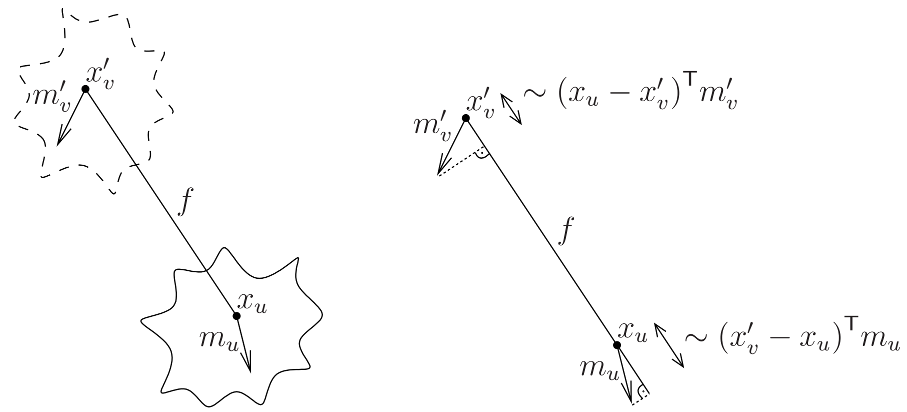
Ha adott a V-n egy $\mathcal{E}$ rúd-rendszer, akkor egy $\mathcal{E}$ feletti n-dimenziós rúd-és-csukló rúdszerkezetnek egy (G, α, x) hármast nevezünk, ahol $G = (V, E)$ egy gráf, $x : V \to \mathbb{R}^n$ a **csúcsok pozícióinak egy realizációja**, és α a G egy él-realizációja.

A (G, α, x) ($\mathcal{E}$ feletti) rúdszerkezet **infinitezimális mozgásának** nevezzük az $m : V \to \mathbb{R}^n$ függvényt, ha

$$\left(x_v - T_v^{\alpha(e)}(x_u)\right)^{\mathsf{T}} m_u + \left(x_u - T_u^{\alpha(e)}(x_v)\right)^{\mathsf{T}} m_v = 0 \tag{3.5}$$

teljesül minden $e = uv \in E$ esetén.

Ha az u csúcs az x_u pozícióban van, és u a v csúcsot az x'_v pozícióban látja, m_u a mozgás u-beli sebességvektora, és u a v-beli sebességvektort m'_v-nek látja, akkor azt, hogy a rúd hossza



3.7. ábra.

infinitezimálisan nem változik, a következő egyenlet fejezi ki: $(x_u - x'_v)^\mathsf{T}(m_u - m'_v) = 0$. De $x'_v = T(x_v) = Ax_v - b$ és $m'_v = T(m_v) - T(0) = Am_v$. Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy $(x_u - x'_v)^\mathsf{T}(m_u - m'_v) = (x_u - T(x_v))^\mathsf{T} m_u - (x_u - Ax_v - b)^\mathsf{T} Am_v = (x_u - T(x_v))^\mathsf{T} m_u - (A^\mathsf{T} x_u - A^\mathsf{T} Ax_v - A^\mathsf{T} b)m_v = (x_u - T(x_v))^\mathsf{T} m_u - (A^{-1}x_u - A^{-1}b - x_v)m_v = (x_u - T(x_v))^\mathsf{T} m_u + (x_v - T^{-1}(x_v)m_v)$. Lásd a 3.7. ábrát.

Egy $m : V \to \mathbb{R}^2$ függvényt **infinitezimális izometriának** nevezünk, ha

$$(x_v - T^e_v(x_u))^\mathsf{T} m_u + (x_u - T^e_u(x_v))^\mathsf{T} m_v = 0 \tag{3.6}$$

teljesül minden $u, v \in V$ és $e \in \mathcal{E}_{uv}$ esetén.

Egy (G, α, x) rúdszerkezetet **infinitezimálisan merevnek** nevezünk, ha minden infinitezimális mozgása infinitezimális izometria. Az világos, hogy az infinitezimális izometriák mindig infinitezimális mozgások is. Ha adott G, akkor egy α él-realizációját merevnek nevezzük, ha (G, α, x) infinitezimálisan merev generikus x esetén.

Azt mondjuk, hogy egy G gráf **(generikusan infinitezimálisan) merev** (az $\mathcal{E}$ felett), ha létezik x és α úgy, hogy a (G, α, x) merev. Vagy ezzel ekvivalensen: ha létezik merev él-realizációja.

Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{E}$ n-rúd-rendszer V-n. Minden $f \in \mathcal{E}_{uv}$-hez (ahol $u, v \in V$) definiálunk egy $R_f \in \mathbb{R}^{n|V|}$ vektort a következő módon. Rögzítsünk le egy $x \in \mathbb{R}^{n|V|}$-et. Ha $u \neq v$, akkor legyen

$$R_f(z) := \begin{cases} x_u - T^f_u(x_v) & \text{ha } z = u, \\ x_v - T^f_v(x_u) & \text{ha } z = v, \\ 0 & \text{ha } z \in V - \{u, v\}. \end{cases}$$

Ha $u = v$, akkor legyen

$$R_f(z) := \begin{cases} 2x_u - \big(T_u^f(x_u) + (T_u^f)^{-1}(x_u)\big) & \text{ha } z = u, \\ 0 & \text{ha } z \in V - \{u\}. \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy az $f_1, \dots f_k \in \mathcal{E}_{uv}$ rudak **függetlenek**, ha az $R_{f_1}, \dots, R_{f_k}$ vektorok lineárisan függetlenek. Ha $\emptyset \neq X \subseteq V$, akkor legyen $\mathcal{R}_X := \langle R_e : e \in \mathcal{E}_{uv}$, ahol $u, v \in X\rangle$. Legyen $\mathcal{R} := \mathcal{R}_V$ és

$$d := n|V| - \dim \mathcal{R}.$$

Általában csak $\mathcal{R}_{uv}$-t írunk $\mathcal{R}_{\{u,v\}}$ helyett, és $\mathcal{R}_{uu}$-t vagy $\mathcal{R}_u$-t írunk $\mathcal{R}_{\{u\}}$ helyett.

Jelölje $\mathcal{M}$ az $\mathcal{R}$ altér $\mathbb{R}^{n|V|}$-beli merőleges kiegészítőjét, és jelölje $\mathcal{M}_X \subseteq \mathbb{R}^{n|V|}$ az $\mathcal{R}_X$ altér $\mathbb{R}^{n|V|}(X)$-beli merőleges kiegészítőjét. A definíciók alapján könnyen láthatjuk, hogy az $\mathcal{M}$ elemei az infinitezimális izometriák. $\mathcal{M}_X$ elemeit az X **izometriáinak** nevezzük.

Tegyük fel, hogy adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy $\mathcal{E}$ n-rúd-rendszer V-n. A (G, α, x) **rúdszerkezet merevségi mátrixának** azt az $M_{\alpha,x}$ $|E| \times n|V|$-es mátrixot nevezzük, amelynek sorai az $\{R_{\alpha(e)} : e \in E\}$ vektorok. Az α **él-realizáció merevségi mátrixának** az $M_\alpha := M_{\alpha,x}$ mátrixot nevezzük, ahol $x \in R^{n|V|}$ a csúcsok generikus realizációja.

Legyen $\mathcal{N}_\alpha := \ker M_\alpha$, azaz $\mathcal{N}_\alpha$ az $\langle R_{\alpha(e)} : e \in E\rangle$ altér merőleges kiegészítője $\mathbb{R}^{n|V|}$-ben. Definíció szerint az $\mathcal{N}_\alpha$ elemei a (G, α, x) rúdszerkezet infinitezimális mozgásai.

Egy (G, α, x) rúdszerkezetet (az $\mathcal{E}$ felett) merevnek nevezünk, ha minden infinitezimális mozgása infinitezimális izometria, azaz $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{M}$. Ez azzal ekvivalens, hogy $\dim \mathcal{N}_\alpha = \dim \mathcal{M}$ (hiszen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}_\alpha$). Tehát (G, α, x) pontosan akkor merev, ha $r(M_{\alpha,x}) = n|V| - d$. Azt mondjuk, hogy egy α él-realizáció (illetve egy (G, α, x) rúdszerkezet) **független** az $\mathcal{E}$ felett, ha az M_α (illetve $M_{\alpha,x}$) sorai függetlenek. Azt mondjuk, hogy egy él-realizáció (illetve egy rúdszerkezet) **izosztatikus** ($\mathcal{E}$ felett), ha független és merev. A továbbiakban a merev, független és izosztatikus szavak infinitezimálisan merevet, függetlent és izosztatikusat jelentenek.

Könnyen belátható, hogy $G = (V, E)$ pontosan akkor merev, ha létezik egy $G' = (V, E')$ izosztatikus feszítő-részgráfja. Ez azt jelenti, hogy az izosztatikus gráfok pontosan a minimális merev gráfok. Megjegyezzük, hogy ha $G = (V, E)$ izosztatikus, akkor $|E| = r(\mathcal{M}_\alpha)$ teljesül az $\mathcal{M}_\alpha$ sorainak függetlensége miatt, és $r(\mathcal{M}_\alpha) = n|V| - d$ a merevség miatt, tehát $|E| = n|V| - d$ teljesül.

Megjegyezzük, hogy könnyen belátható, hogy ha $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ rúd-rendszerek, és $\mathcal{R}_{uv} = \mathcal{R}'_{uv}$ minden $u, v \in V$ esetén, akkor $G = (V, E)$ pontosan akkor merev $\mathcal{E}$ felett, ha G merev $\mathcal{E}'$ felett.

Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{E}$ rúd-rendszer **teljesen d-reguláris** n-rúd-rendszer V-n ha:

1. $d = n|V| - \dim \mathcal{R}$ ($\Longleftrightarrow \dim \mathcal{M} = d$),

2. $\dim \mathcal{R}_{uv} = 2n - d$ ($\iff \dim \mathcal{M}_{uv} = d$) minden $u \neq v \in V$ esetén,

3. $\dim \mathcal{R}_{uu} = n - d$ ($\iff \dim \mathcal{M}_{u} = d$) minden $u \in V$ esetén.

Látni fogjuk (3.11. Lemma), hogy $n = 2$ esetben ezekből a feltételekből következik, hogy $\dim \mathcal{M}_X = d$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ esetén. Most mutatunk néhány példát rúd-rendszerekre. Ehhez legyen $v_1, \ldots, v_{|V|}$ a V egy felsorolása.

- Ha $\mathcal{E}_{uv}$ ($u \neq v$ esetén) egyetlen f-et tartalmaz, amelyre T_v^f az $\mathbb{R}^n$ identitása, és $\mathcal{E}_{uu} = \emptyset$, akkor visszakapjuk az $\mathbb{R}^n$-beli szokásos rúd-és-csukló rúdszerkezetek merevségének fogalmát.

- n dimenziós sík tórusz: ha $i < j$, akkor legyen $\mathcal{E}_{v_iv_j} := \mathbb{Z}^n$ és $T_{v_i}^f(x) := x + f$ ($x \in \mathbb{R}^n$) minden $f \in \mathcal{E}_{v_iv_j} = \mathbb{Z}^n$-re. Ez egy teljesen n-reguláris n-rúd-rendszer.

- 2 dimenziós henger: ha $i < j$, akkor legyen $\mathcal{E}_{v_iv_j} := \mathbb{Z}$ és $T_{v_i}^f(x) := x + fe_1$ ($x \in \mathbb{R}^2$) minden $f \in \mathcal{E}_{v_iv_j} = \mathbb{Z}$ esetén, ahol $e_1 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$. Ez egy teljesen 2-reguláris 2-rúd-rendszer.

- 2 dimenziós kúp $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ szöggel: ha $i < j$, akkor legyen $\mathcal{E}_{v_iv_j} := \{a, b, c\}$, és $T_{v_i}^a$ az identitás, $T_{v_i}^b$ az $\mathbb{R}^2$-nek a φ szöggel történő origó körüli elforgatása és $T_{v_i}^c = (T_{v_j}^b)^{-1}$. Ez egy teljesen 1-reguláris 2-rúd-rendszer.

- Möbius-szalag: legyen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a következő függvény: $T(x_1, x_2) := (x_1, -x_2)$. Ha $i < j$, akkor legyen $\mathcal{E}_{v_iv_j} := \mathbb{Z}$ és $T_{v_i}^f(x) := x + fe_1$ ($x \in \mathbb{R}^2$), ha $f \in \mathcal{E}_{v_iv_j}$ páros, és $T_{v_i}^f(x) := T(x) + fe_1$ ($x \in \mathbb{R}^2$), ha $f \in \mathcal{E}_{v_iv_j}$ páratlan (ahol $e_1 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$). Ez egy teljesen 1-reguláris 2-rúd-rendszer.

Egy $G = (V, E)$ gráfot **$[n, d]$-ritka gráf**nak vagy röviden **$[n, d]$-gráf**nak nevezünk, ha

$$|E| = n|V| - d, \text{ és } \gamma(X) \leq n|X| - d \text{ teljesül minden } \emptyset \neq X \subseteq V \text{ esetén.} \tag{3.7}$$

A következőt sejtjük.

3.7. Sejtés. *Ha $G = (V, E)$ egy hurokmentes gráf, $\mathcal{E}$ egy teljesen d-reguláris n-rúd-rendszer V-n, és $0 \leq d \leq n$, akkor G pontosan akkor izosztatikus $\mathcal{E}$ felett, ha G egy $[n, d]$-gráf.*

Mint említettük, Whiteley [56] bebizonyította, hogy a 3.7. Sejtés igaz az n dimenziós sík tórusz, a henger, a kúp és a szabályos tetraéder esetén (itt nem írjuk le pontosan, hogy mi is a szabályos tetraéder rúd-rendszere, csak megemlítjük, hogy az egy teljesen 0-reguláris 2-rúd-rendszer).

A következőt fogjuk belátni. Ez a tétel egy közös általánosítása a 3.2, 3.3 és a 3.4. Tételeknek, de gyengébb mint a 3.5 vagy 3.6. Sejtés.

3.8. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $\mathcal{E}$ egy teljesen d-reguláris 2-rúdrendszer, ahol $0 \leq d \leq 2$, és T_u^f irányítástartó egybevágóság minden $f \in \mathcal{E}_{uv}$ $(u, v \in V)$ esetén (azaz A_u^f egy forgatás). Ekkor G pontosan akkor izosztatikus $\mathcal{E}$ felett, ha G egy $[2, d]$-gráf.*

Az a feltétel, hogy „T_u^f irányítástartó”, egy technikai feltevés (és a 3.23. Lemmához kell). Megjegyezzük, hogy lényegében azt mondja ki ez a feltevés, hogy a felület irányítható.

A 3.8. Tétel könnyű irányát a 3.12. Lemma jelenti. A másik irány bizonyításához a következő fogalmat vezetjük be. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf és az $\mathcal{E}$ n-rúd-rendszer V-n, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{E}$ **d-reguláris n-rúd-rendszer V-n** (a G gráfra nézve), ha a következők teljesülnek:

1. $d = n|V| - \dim \mathcal{R}$,
2. $\dim \mathcal{R}_{uv} = 2n - d$ minden $u \neq v \in V$ esetén,
3. $\gamma_G(u) \leq \dim \mathcal{R}_{uu} \leq n - d$ minden $u \in V$-re,
4. T_u^f irányítástartó egybevágóság $f \in \mathcal{E}_{uv}$ $(u, v \in V)$ esetén.

A következő tétel adja a 3.8. Tétel nehezebb irányát, sőt ez valamelyest erősebb annál (ezért könnyebb ezt indukcióval belátni).

3.9. Tétel. *Legyen $0 \leq d \leq 2$. Ha $G = (V, E)$ egy $[2, d]$-gráf, akkor G izosztatikus minden d-reguláris 2-rúd-rendszer felett.*

Gyakran használjuk majd azt a tényt, hogy az $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a, b, c, mint az $\mathbb{R}^n$ pontjai, kollineárisak.

3.10. Állítás. *Ha $\mathcal{E}$ egy 2-rúd-rendszer V-n, $f_1, f_2 \in \mathcal{E}_{uv}$, $u \neq v \in V$, és $x \in \mathbb{R}^{2|V|}$ generikus, akkor a következők ekvivalensek:*

1. *R_{f_1}, R_{f_2} független vektorok,*
2. *$R_{f_1}(u), R_{f_2}(u)$ független vektorok,*
3. *$T_u^{f_1} \neq T_u^{f_2}$.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan 2-ből következik 1, és 1-ből következik 3. Tehát elég belátni, hogy 3-ból következik 2. Azt kell bizonyítanunk, hogy ha $T_u^{f_1} \neq T_u^{f_2}$, akkor a $x_u - T_u^{f_1}(x_v), x_u - T_u^{f_2}(x_v)$ vektorok függetlenek. Ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy az $x_u, T_u^{f_1}(x_v), T_u^{f_2}(x_v)$ pontok nem kollineárisak. Tudjuk, hogy a $T_u^{f_1}, T_u^{f_2}$ kongruenciák nem azonosak, tehát létezik egy $x_v \in \mathbb{R}^2$, melyre $T_u^{f_1}(x_v) \neq T_u^{f_2}(x_v)$. Ehhez az x_v választáshoz válasszunk egy x_u pontot úgy, hogy ne legyen rajta az $T_u^{f_1}(x_v), T_u^{f_2}(x_v)$ egyenesén. Az iménti x_v, x_u érték bizonyítja, hogy $x_u, T_u^{f_1}(x_v), T_u^{f_2}(x_v)$ vektorok nem kollineárisak az x_v, x_u generikus választása esetén sem. □

3.11. Lemma. *Legyen $\mathcal{E}$ egy olyan 2-rúd-rendszer, amelyre* $\dim \mathcal{R}_{uv} = 4 - d$ *minden* $u \neq v \in V$ *esetén (ahol* $d := 2|V| - \dim \mathcal{R}$ *és* $0 \leq d \leq 2$*). Legyen az* $x \in \mathbb{R}^{2|V|}$ *beágyazás generikus. Ekkor a következők teljesülnek.*

1. *Minden* $u \in V$ *esetén az* $\mathcal{M} \to \mathcal{M}(u)$ *merőleges vetítés injektív. Tehát az* $\mathcal{M} \to \mathcal{M}(X)$ *is injektív minden* $\emptyset \neq X \subseteq V$ *esetén.*
2. *Ha* $X \subseteq V$, $|X| \geq 2$, *akkor* $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}(X)$ *és* $\dim \mathcal{M}(X) = \dim \mathcal{M}_X = d$.
3. $\dim \mathcal{R}_u \leq 2 - d$ *minden* $u \in V$*-re.*
4. *Ha* $X \subseteq V$, $|X| \geq 2$ *és* $m \in \mathcal{M}_X$, *akkor létezik egy egyértelmű* $m' \in \mathcal{M}$, *amelyre* $m = m'(X)$.
5. *Ha* $X \subseteq V$, $|X| \geq 2$ *és* $\mathcal{E}$ *egy (teljesen) d-reguláris 2-rúd-rendszer V-n, akkor* $\mathcal{E}|_X$ *egy (teljesen) d-reguláris 2-rúd-rendszer X-en (a* $G[X]$ *gráfra nézve).*

Bizonyítás. 1. Elég belátni, hogy ha $m \neq 0$, akkor $m(u) \neq 0$ minden $m \in \mathcal{M}$ esetén. Belátjuk, hogy ha $u \neq v \in V$, akkor $m(v) \neq 0$-ból következik $m(u) \neq 0$. Legyenek $R_{f_1}, R_{f_2} \in \mathcal{R}_{uv}$ független vektorok. Legyen M az ezekből, mint sorvektorokból álló mátrix. Ekkor $Mm = 0$ teljesül. Így $Mm = M(u)m(u) + M(v)m(v) = 0$. Az előző állításból tudjuk, hogy $M(v)$ invertálható, tehát $m(v) \neq 0$-ból valóban következik, hogy $m(u) \neq 0$.

2. $\mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{M}_X$ világos. $\dim \mathcal{M}(X) = d$ az 1-ből következik. Az $|X|$-re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy $\dim \mathcal{M}_X \leq d$. Ha $|X| = 2$, akkor $\dim \mathcal{R}_{uv} = 4 - d$ miatt igaz. Legyen $|X| \geq 3$ és $u, v \in X$. Az indukciós feltevés miatt $\dim \mathcal{M}_{X-v} \leq d$, azaz $\dim \mathcal{R}_{X-v} \geq 2(|X| - 1) - d$. Ha $e, f \in \mathcal{R}_{uv}$ független rudak, akkor a 3.10. Állítás szerint $R_e(v), R_f(v)$ független vektorok, tehát R_e, R_f függetlenek $\mathcal{R}_{X-v}$-től. $\mathcal{R}_{X-v} \cup \mathcal{R}_{uv} \subseteq \mathcal{R}_X$, amiből következik, hogy $\dim \mathcal{R}_X \geq 2(|X| - 1) - d + 2 = 2|X| - d$, tehát $\dim \mathcal{M}_X \leq d$.

3. $\mathcal{M}(u) \subseteq \mathcal{M}_u$ világos. $\dim \mathcal{M}(u) = d$ az 1 következménye. Tehát $\dim \mathcal{M}_u \geq d$.

4. és 5. a 2. közvetlen következménye. □

3.12. Lemma. *Legyen $\mathcal{E}$ egy 2-rúd-rendszer, amelyre* $\dim \mathcal{R}_{uv} = 4 - d$ *teljesül minden* $u \neq v \in V$ *esetén (ahol* $d := 2|V| - \dim \mathcal{R}$ *és* $0 \leq d \leq 2$*). Ha a* $G = (V, E)$ *gráf izosztatikus az* $\mathcal{E}$ *felett, akkor G egy* $[2, d]$*-gráf.*

Bizonyítás. $|E| = 2|V| - d$ triviális. Ha $X \subseteq V, |X| \geq 2$, akkor $G[X]$ független az $\mathcal{E}|_X$ felett, tehát $\gamma(X) \leq 2|X| - d$. Ha $X = \{v\}, v \in V$, akkor $\gamma(X) = \gamma(v) \leq \dim \mathcal{R}_v \leq 2 - d$ a 3.11. Lemma szerint. □

Megemlítjük, hogy a 3.10. Állításban az 1 és 2 ekvivalenciája igaz $n = 3$-ra is, tehát a 3.11 és a 3.12. Lemmák 3 dimenziós analogonjai igazak. Ezek a kérdések nyitottak $n \geq 4$ esetén.

3.3. Az $[n,d]$-gráfok előállítási tétele

Ebben a szakaszban azt az előállítási tételt látjuk be, amelynek segítségével a 3.9. Tételt igazoljuk majd. Most tehát tisztán kombinatorikus eredmények következnek.

Használni fogjuk a körmatroid és a bikör matroid fogalmát (a definíciókat lásd az 1.2. szakaszban). A rövidség kedvéért jelölje a körmatroid bázisainak halmazát $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0(V)$. $F \in \mathcal{B}_0$ pontosan akkor, ha F a V egy feszítőfája. A bikör matroid bázisainak halmazát pedig jelölje $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1(V)$ ($F \in \mathcal{B}_1$ pontosan akkor, ha (V,F) minden komponense pontosan egy kört tartalmaz). Megjegyezzük, hogy egy hurkot egy élű körnek, és két párhuzamos élet pedig kettő élű körnek tekintünk.

Whiteley [56] figyelte meg, hogy a matroid partíciós tételből következik az alábbi.

3.13. Tétel. *Ha $G = (V,E)$ egy gráf és $0 \le d \le n$, G pontosan akkor $[n,d]$-gráf, ha E a körmatroid d darab bázisának és a bikör matroid $(n-d)$ darab bázisának diszjunkt uniója.*

A következő műveleteket fogjuk használni ezen gráfok egy Henneberg-előállításához.

Ha adott egy G gráf, és $k_1 + k_2 \le n$ $(n, k_1, k_2 \ge 0)$, akkor jelölje $K(n, k_1, k_2)$ a következő műveletet: kiválasztjuk a G-nek k_1 élét, felosztjuk ezeket az éleket egy-egy csúccsal, majd azonosítjuk ezeket a csúcsokat, rakunk rá k_2 darab hurkot, és összekötjük $n - k_1 - k_2$ darab éllel régi csúcsokkal. (Ezzel a művelettel az élek száma n-nel nő, és egy $(n + k_1 + k_2)$ fokú csúcs keletkezik.)

Azt a gráfot, amelynek egy csúcsa van és rajta d darab hurok, P_d-vel jelöljük. Az $[n,d]$-gráfokra a következő előállítási tételt látjuk majd be a 6. fejezetben .

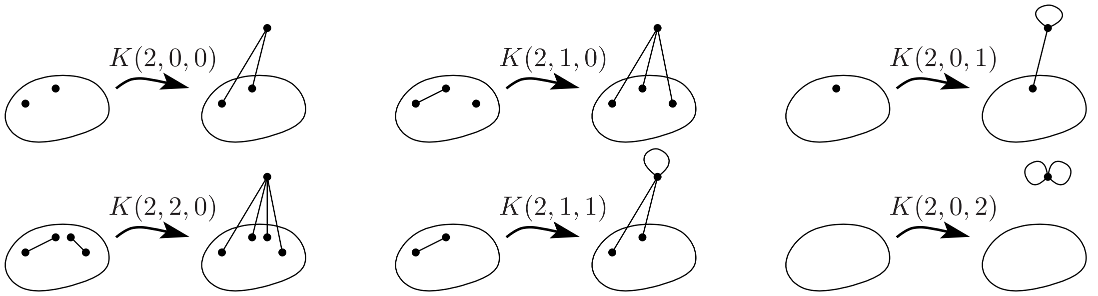
3.14. Tétel. *Legyen $G = (V,E)$ egy gráf és $1 \le d \le n$. G pontosan akkor $[n,d]$-gráf, ha G előáll a P_{n-d}-ből a $K(n, k_1, k_2)$ műveletekkel, ahol $k_1 + k_2 \le n-1, k_2 \le n-d$.*

Legyen $G = (V,E)$ egy gráf. G pontosan akkor $[n,0]$-gráf, ha G előáll a P_n-ből a $K(n, k_1, k_2)$ műveletekkel, ahol $k_1 + k_2 \le n, k_2 \le n$.

A $d = n$ eset jól ismert, először Nash-Williams [37] bizonyította be, majd Tay [50] alkalmazta a rúd-és-test szerkezetek merevségének karakterizációjára, és hasonló – de bonyolultabb – előállítási tételeket alkalmazott [51, 49] egyéb struktúrák esetében. Frank és Szegő [16] bebizonyított egy hasonló előállítási tételt, amely az 1.12. Tétel direkt általánosítása.

Ebben a fejezetben ezt a tételt $n = 2$-re és $d = 0,1,2$ esetén használjuk majd. Ezekre az értékekre a 3.14. Tétel a következőképpen specializálódik.

3.15. Tétel. *1. Egy gráf pontosan akkor $[2,2]$-gráf, ha előáll P_0-ból a $K(2,0,0)$, $K(2,1,0)$ műveletekkel.*



3.8. ábra. A $[2, d]$-gráfokat előállító műveletek.

2. *Egy gráf pontosan akkor* $[2,1]$*-gráf, ha előáll* P_1*-ből a* $K(2,0,0), K(2,1,0), K(2,0,1)$ *műveletekkel.*

3. *Egy gráf pontosan akkor* $[2,0]$*-gráf, ha előáll* P_2*-ből a* $K(2,0,0)$, $K(2,1,0)$, $K(2,0,1)$, $K(2,2,0)$, $K(2,1,1)$, $K(2,0,2)$ *műveletekkel.*

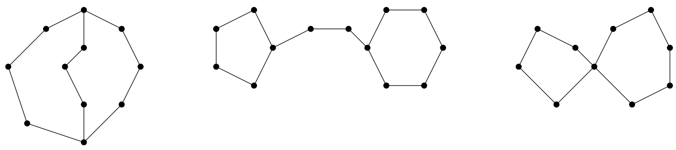
Adunk egy bizonyítást a 3.15. Tételre, ami illusztrálja, hogyan használható a 3.13. Tétel előállítási tétel bizonyítására. A következő lemmára lesz szükségünk.

3.16. Lemma. *1. Ha* $F \in \mathcal{B}_1$*, a* $v \in V$ *csúcsra illeszkedik egy* $e \in F$ *él, a* v*-re illeszkedik egy* $f \notin F$ *él, és* e *benne van az* F *egy körében, akkor* $F - e + f \in \mathcal{B}_1$*.*

2. *Ha* $F \in \mathcal{B}_1$*, és az* $f \notin F$ *él illeszkedik a* $v \in V$ *csúcsra, akkor létezik egy olyan* v*-re illeszkedő* $e \in F$ *él, amelyre* $F - e + f \in \mathcal{B}_1$*.*

3. *Ha* $F_1, F_2 \in \mathcal{B}_1$*, az* $f \in F_1 - F_2$ *él benne van* F_1 *egy körében, és* f *illeszkedik a* $v \in V$ *csúcsra, akkor létezik egy olyan* v*-re illeszkedő* $e \in F_2 - F_1$ *él, amelyre* $F_1 - f + e, F_2 - e + f \in \mathcal{B}_1$*.*

Bizonyítás. Az 1 és 2 bizonyítása egyszerű, és következik belőlük 3. □
A 3.15. Tétel bizonyítása. Azt az irányt, hogy ha egy gráf előáll a megadott műveletekkel, akkor $[n, d]$-gráf, könnyű belátni definíció szerint. A másik irány igazolásához elég azt belátnunk, hogy ha $G = (V, E)$ egy $[2, d]$-gráf és $|V| \geq 2$, akkor G előáll egy G' $[2, d]$-gráfból valamely $K(2, k_1, k_2)$ művelettel, azaz hogy létezik egy csúcs, ahol az inverzoperáció végrehajtható úgy, hogy a kapott gráf $[2, d]$-gráf. Tudjuk, hogy $|E| = 2|V| - d$. Ha $d = 1$ vagy $d = 2$, akkor létezik egy v csúcs, melyre $d(v) \leq 3$. Ha $d = 0$, akkor létezik egy v csúcs, melyre $d(v) \leq 4$. Válasszunk egy ilyen csúcsot. Tudjuk a 3.13. Tételből, hogy az E felbomlik F_1, F_2 élhalmazok diszjunkt uniójára úgy, hogy ha $d = 2$, akkor $F_1, F_2 \in \mathcal{B}_0$, ha $d = 1$, akkor $F_1 \in \mathcal{B}_0, F_2 \in \mathcal{B}_1$, és ha $d = 0$, akkor $F_1, F_2 \in \mathcal{B}_1$.



3.9. ábra. A bikör matroid körei.

Azt állítjuk, hogy létezik az E-nek olyan F_1, F_2-re való felbontása is, melyre $1 \leq d_{F_j}(v) \leq 2$ teljesül $j = 1, 2$ esetén. Ha $d(v) \leq 3$, akkor ez igaz minden felbontásra (mert $1 \leq d_{F_j}(v)$ mindig igaz). Ha $d(v) = 4$ és $d = 0$, akkor tegyük fel, hogy $d_{F_1}(v) = 1$ és $d_{F_2}(v) = 3$. Legyen e a v-re illeszkedő egyetlen F_1-beli él. Az $F_2 + e$-ben létezik egy egyértelmű C matroid-kör (a bikör matroidban).

Könnyen ellenőrizhető, hogy C vagy három belsőleg pontdiszjunkt út két csúcs között, vagy C két pontdiszjunkt körből és egy őket összekötő útból áll, vagy C két olyan körből áll, melyeknek pontosan egy közös csúcsa van (lásd a 3.9. ábrát).

1. eset: $d_C(v) \leq 3$. Ekkor $d_{F_2+e}(v) = 4$-ből következik, hogy létezik egy v-re illeszkedő $F_2 \setminus C$-beli f él. A bázis-kicserélési axióma miatt létezik egy $g \in F_1$ él, amelyre $F_1 - g + f$ és $F_2 - f + g$ $\mathcal{B}_1$-beli. Ekkor $g \neq e$, mert $F_2 - f + e$ tartalmazza C-t, és ezért $F_2 - f + e$ nem független. Tehát $d_{F_1-g+f}(v) = 2$ és $d_{F_2-f+g}(v) = 2$.

2. eset: $d_C(v) = 4$. Ez azt jelenti, hogy C két darab,s egy közös csúccsal rendelkező körből áll, ahol a közös csúcs a v. Ebben az esetben az F_2-nek pontosan egy köre megy át v-n, jelölje C_0 ezt a kört. Legyen w a v-nek egy olyan szomszédja, melyre $f = vw$ benne van a C_0 körben. Legyen $e = uv \in F_1$. Ekkor $u \neq w$ teljesül, mert $u = w$-ből következne, hogy $C = C_0 \cup \{e\}$, ami ellentmondana $d_C(v) = 4$-nek. A 3.16. Lemma harmadik állítását alkalmazva a w csúcsnál kapjuk, hogy létezik egy $g \in F_1$ él, amely illeszkedik w-re és $F_2 - f + g, F_1 - g + f \in \mathcal{B}_1$. De $w \neq u$-ból következik, hogy $g \neq e$. Tehát $d_{F_1-g+f}(v) = 2$ és $d_{F_2-f+g}(v) = 2$.

Mindkét esetben beláttuk, hogy az E-nek létezik egy partíciója az F_1 és F_2 élhalmazokra úgy, hogy $1 \leq d_{F_j}(v) \leq 2$ teljesül $j = 1, 2$ esetén. Ha $d_{F_j}(v) = 1$, akkor legyen $F'_j := F_j - vu$, ahol $uv \in E$. Ha v-re illeszkedik egy hurok F_j-ben, akkor legyen $F'_j := F_j - vv$. Ha $d_{F_j}(v) = 2$, és v-n nincs hurok F_j-ben, akkor ha uv, wv a két F_j-beli V-re illeszkedő él, akkor legyen $F'_j := F_j - uv - wv + uw$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $F_j \in \mathcal{B}_\gamma(V)$, akkor a fent definiált F'_j-re $F'_j \in \mathcal{B}_\gamma(V - v)$. Ezek alapján pedig látható, hogy G egy $K(2, k_1, k_2)$ művelettel kapható $G' = (V - v, F'_1 \cup F'_2)$-ből, amely a 3.13. Tétel alapján egy $[2, d]$-gráf, ahol $k_1 + k_2 \leq 1, k_2 \leq 2 - d$, ha $d = 1, 2$ illetve $k_1 + k_2 \leq 2, k_2 \leq 2$, ha $d = 0$. $\square$

Az $n = 2, d = 0$ esetben szükségünk van egy valamivel erősebb tételre ahhoz, hogy belássuk a merevségi eredményünket, mert ebben az esetben azok a csúcsok, amelyeken dupla-hurok (két hurok él) van, bajokat okoznak.

3.17. Tétel. *Ha $G = (V, E)$ egy összefüggő $[2, 0]$-gráf, és $|V| \geq 3$, akkor létezik egy $G' = (V', E')$ gráf és egy $v \in V$, melyre $V' = V - \{v\}$, és*

1. *$\{v \in V' : \gamma_G(v) = 2\} = \{v' \in V' : \gamma_{G'}(v') = 2\}$,*
2. *a G gráf előáll a G'-ből a $K(2,0,0)$, $K(2,1,0)$, $K(2,0,1)$, $K(2,2,0)$ és $K(2,1,1)$ műveletek valamelyikével,*
3. *ha G a $K(2,1,1)$ művelettel keletkezik a G'-ből, akkor a két nem-hurok él, amely v-re illeszkedik, nem párhuzamos,*
4. *ha G a $K(2,2,0)$ művelettel keletkezik a G'-ből, akkor a két G'-beli választott él nem két hurok él.*

Bizonyítás. Ha létezik egy 2 fokú v csúcs G-ben, akkor a G gráf a $G - v$-ből kapható a $K(2,0,0)$ művelettel, és az 1. állítás nyilvánvaló.

Tegyük fel tehát, hogy minden fok legalább 3. Ezután tegyük fel először, hogy létezik egy $v \in V$, melyre $d(v) = 3$. Ha létezik olyan harmadfokú v, amelyre $\gamma(v) = 1$, akkor G a $G - v$-ből kapható $K(2,0,1)$-gyel. Feltehetjük, hogy ebben az esetben $\gamma(v) = 0$ teljesül minden harmadfokú v-re. Az állítjuk, hogy ekkor vagy létezik egy olyan v, amelynek legalább két szomszédja van, vagy egy olyan v, amelynek csak egy u szomszédja van, amelyre $\gamma(u) = 0$. Tegyük fel indirekt, hogy minden harmadfokú v csúcsnak csak egy v' szomszédja van és $\gamma(v') \geq 1$. Jelölje $v_1, \ldots, v_k$ a harmadfokú csúcsokat, és legyen v_i' a v_i egyetlen szomszédja. $\gamma(\{v_i, v_i'\}) \leq 4$-ből következik, hogy $\gamma(v_i') = 1$ minden i-re. Világos, hogy $v_i \neq v_j'$, mert $\gamma(v_i) = 0$ és $\gamma(v_j') = 1$. Valamint $v_i' \neq v_j'$, ha $i \neq j$, mert $v_i' = v_j'$-ből következne, hogy $\gamma(\{v_i, v_j, v_i'\}) = 7$, ami ellentmond (3.7)-nek. Tehát $v_1, \ldots, v_k, v_1', \ldots, v_k'$ különböző csúcsok. Legyen $V_0 := \{v_1, \ldots, v_k\}$ és $V_0' := \{v_1', \ldots, v_k'\}$. Tekintsük a következő egyenlőtlenségeket.

$$4|V| = 2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_0} \deg(v) + \sum_{v \in V_0'} \deg(v) + \sum_{v \in V - V_0 - V_0'} \deg(v) \geq$$
$$\geq 3k + 5k + 4(|V| - 2k) = 4|V|$$

Tehát egyenlőség van mindenütt, ezért $\deg(v_i') = 5$. Ebből következik, hogy $\{v_i, v_i'\}$ egy összefüggőségi komponense a G gráfnak. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy G egy összefüggő, legalább 3 csúcsú gráf.

Válasszunk egy olyan v harmadfokú csúcsot, amelynek vagy legalább két szomszédja van, vagy ha csak egy u szomszédja van, akkor $\gamma(u) = 0$. Tudjuk, hogy E partícionálható

$F_1, F_2 \in \mathcal{B}_1$ halmazokra. Tegyük fel, hogy $d_{F_1}(v) = 2, d_{F_2}(v) = 1$, és jelölje az F_1-beli v-re illeszkedő két élet $f_1 = vu, f_2 = vw$, és jelölje az F_2 v-re illeszkedő élét $e = vz$. Ha $u \neq w$ vagy $u = w = z$, akkor $G' := G - v + uw$ kielégíti a követelményeket. Ha $u = w \neq z$, akkor a 3.16. Lemma miatt $F_1 - f_1 + e, F_2 - e + f_1 \in \mathcal{B}_1$, tehát $G' := G - v + uz$ kielégíti a követelményeket.

Ha nem létezik G-ben harmadfokú csúcs, akkor minden csúcs foka 4. Ha minden csúcson van hurok, akkor a hurkok törlése után egy összefüggő, legalább 3 csúcsú 2-reguláris gráfot kapunk, ami csak egy legalább 3 csúcsú kör lehet. Ebben az esetben ha v egy teszőleges csúcs, és u, w a szomszédjai, akkor $G' := G - v + uw$ kielégíti a követelményeket.

Tehát feltehetjük, hogy minden csúcs foka 4, és létezik egy v csúcs, amelyre $\gamma(v) = 0$. A v csúcsnak van legalább két szomszédja, mert ha u lenne a v egyetlen szomszédja, akkor $d(u, v) = 4$ és $d(u) = d(v) = 4$ miatt $\{u, v\}$ egy összefüggőségi komponense lenne G-nek, ami nem lehet. Legyenek a v-re illeszkedő élek $e = uv, f = wv, g = zv, h = tv$. Amint a 3.15. Tétel bizonyításában történt, partícionálhatjuk most is az E-t az F_1, F_2-re úgy, hogy $F_1, F_2 \in \mathcal{B}_1$ és $d_{F_i}(v) = 2$.

Ha u, w, t, z csúcsok 4 különböző csúcs, akkor legyen mondjuk $e, f \in F_1$ és $g, h \in F_2$. Ekkor $G - v + vw + zt$ kielégíti a követelményeket.

Ha $|\{u, w, t, z\}| = 3$, akkor legyen mondjuk $u = w$ és u, t, z 3 különböző csúcs. A 3.16. Lemma miatt feltehetjük, hogy $e, g \in F_1$ és $f, h \in F_2$, tehát $G' := G - v + ut + uz$ kielégíti a követelményeket.

Ha $|\{u, w, t, z\}| = 2$, akkor két eset van. Az első esetben mondjuk $u = w \neq z = t$, akkor a 3.16. Lemma szerint feltehető, hogy $e, g \in F_1$ és $f, h \in F_2$, ekkor $G' := G - v + uz + uz$ kielégíti a követelményeket. A második esetben mondjuk $u = w = z \neq t$. Ekkor $\gamma(u) = 0$, mert $d(u) = 4$. Ekkor $G' := G - v + uu + ut$ kielégíti a követelményeket. $\square$

3.4. Az izosztatikus gráfok karakterizációja

Ebben a szakaszban belátjuk a 3.9. Tételt. Használni fogjuk a 3.15 és a 3.17. Tételeket. A 3.26. Lemma azt mondja majd ki, hogy a tétel igaz kicsi gráfokra. Be kell látnunk, hogy a $K(2, 0, 0)$, $K(2, 1, 0)$, $K(2, 0, 1)$, $K(2, 2, 0)$, $K(2, 1, 1)$ műveletek „megőrzik a merevséget”, és a $d = 2$ esetben meg kell figyelnünk, hogy izosztatikus gráfok diszjunkt uniója is izosztatikus. Ez a tartalma a 3.22, 3.25, 3.27, 3.29, 3.31 és a 3.32. Lemmáknak.

Ha $a \neq b \in \mathbb{R}^2$, akkor az a és b pontokon keresztül menő egyenest jelölje $\mathsf{line}(a, b)$. Ha M egy $k \times 2|V|$ méretű mátrix, és $R \in \mathbb{R}^{2|V|}$, akkor $M \cup R$ jelölje azt a $(k + 1) \times 2|V|$ méretű mátrixot amelyet úgy kapunk M-ből, hogy hozzáadjuk R-et, mint sort. Analóg módon, ha M egy $k \times 2|V|$ méretű mátrix, és $R \in \mathbb{R}^{2|V|}$ az M egyik sora, akkor $M \setminus R$ jelöli azt a

$(k-1)\times 2|V|$ méretű mátrixot, amelyet az M-ből az R sor törlésével kapunk. Legyen $u\in V$ és $V'=V-\{u\}$. Ha M egy $k\times 2|V'|$ méretű mátrix, akkor $[M,0]$-val jelöljük azt a $k\times 2|V|$ méretű mátrixot, amelyet M-ből kapunk két – az u-hoz tartozó – nulla-oszlop hozzáadásával.

Használni fogjuk a következő egyszerű tényeket. Ha T egy egybevágóság, akkor $T(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda T(x)+(1-\lambda)T(y)$. Valamint ha $T(x)=Ax+b$, akkor $T(x)-T(y)=A(x-y)$.

Legyen $\mathcal{E}$ egy d-reguláris 2-rúd-rendszer és $x: V\to\mathbb{R}^2$ egy csúcs-realizáció. Legyenek $u,v,w\in V$ különböző csúcsok és legyen $e\in\mathcal{E}_{uv}, f\in\mathcal{E}_{uw}$. Definiáljuk a következő $R_{ef}\in\mathbb{R}^{2|V|}$ vektort:

$$R_{ef}(z):=\begin{cases} x_v-T^e_vT^f_u(x_w) & \text{ha } z=v,\\ x_w-T^f_wT^e_u(x_v) & \text{ha } z=w,\\ 0 & \text{ha } z\in V-\{v,w\}.\end{cases}$$

Ha $u\neq v=w$, akkor legyen

$$R_{ef}(z):=\begin{cases} 2x_v-\big(T^e_vT^f_u(x_v)+T^f_vT^e_u(x_v)\big) & \text{ha } z=v,\\ 0 & \text{ha } z\in V-\{v\}.\end{cases}$$

3.18. Lemma. *Legyen $\mathcal{E}$ egy d-reguláris 2-rúd-rendszer V-n és $x: V\to\mathbb{R}^2$ egy csúcs-realizáció. Legyenek $u,v,w\in V$ különböző csúcsok, és legyen $e\in\mathcal{E}_{uv}, f\in\mathcal{E}_{uw}$.*

1. *Ha $x_u=\lambda T^e_u(x_v)+(1-\lambda)T^f_u(x_w)$, akkor $R_e(u)=(1-\lambda)\big(T^f_u(x_w)-T^e_u(x_v)\big)$, és $R_f(u)=\lambda\big(T^e_u(x_v)-T^f_u(x_w)\big)$.*

2. *Ha $\lambda\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ és $x_u=\lambda T^e_u(x_v)+(1-\lambda)T^f_u(x_w)$, akkor $R_{ef}=\frac{1}{1-\lambda}R_e+\frac{1}{\lambda}R_f$.*

3. *Ha $e\in\mathcal{E}_{uv}$, $f_1,\dots,f_k\in\mathcal{E}_{uw}$, valamint az $R_{f_1},\dots,R_{f_k}$ vektorok függetlenek, akkor az $R_{ef_1},\dots,R_{ef_k}$ vektorok függetlenek generikus x esetén.*

4. *$R_{ef}\in\mathcal{R}_{vw}$ $(\subseteq\mathcal{R})$*

Bizonyítás. 1: $R_e(u)=x_u-T^e_v(x_v)=\lambda T^e_u(x_v)+(1-\lambda)T^f_u(x_w)-T^e_u(x_v)=(1-\lambda)T^f_u(x_w)-(1-\lambda)T^e_u(x_v)$. $R_f(u)=x_u-T^f_w(x_w)=\lambda T^e_u(x_v)+(1-\lambda)T^f_u(x_w)-T^f_u(x_w)=\lambda T^e_u(x_v)-\lambda T^f_u(x_w)$.

2: $\frac{1}{1-\lambda}R_e(v)+\frac{1}{\lambda}R_f(v)=\frac{1}{1-\lambda}(x_v-T^e_v(x_u))=\frac{1}{1-\lambda}(x_v-T^e_v(\lambda T^e_u(x_v)+(1-\lambda)T^f_u(x_w)))=\frac{1}{1-\lambda}(x_v-\lambda T^e_v(T^e_u(x_v))-(1-\lambda)T^e_v(T^f_u(x_w)))=\frac{1}{1-\lambda}(x_v-\lambda x_v-(1-\lambda)T^e_vT^f_u(x_w))$. $\frac{1}{1-\lambda}R_e(w)+\frac{1}{\lambda}R_f(w)=\frac{1}{\lambda}(x_w-T^f_w(x_u))=\frac{1}{\lambda}(x_w-T^f_w(\lambda T^e_u(x_v)+(1-\lambda)T^f_u(x_w)))=\frac{1}{\lambda}(x_w-\lambda T^f_w(T^e_u(x_v))-(1-\lambda)T^f_w(T^f_u(x_w)))=\frac{1}{\lambda}(x_w-\lambda T^f_wT^e_u(x_v)-(1-\lambda)x_w)$. $\frac{1}{1-\lambda}R_e(z)+\frac{1}{\lambda}R_f(z)=0$ világos, ha $z\in V-\{v,w,u\}$. 1-ből pedig következik $\frac{1}{1-\lambda}R_e(u)+\frac{1}{\lambda}R_f(u)=0$.

3: Indirekt tegyük fel, hogy az $R_{ef_1},\dots,R_{ef_k}$ vektorok nem lineárisan függetlenek generikus x esetén. Ez azt jelenti, hogy az $(x_v-T^e_vT^{f_i}_u(x_w), x_w-T^{f_i}_wT^e_u(x_v))\in\mathbb{R}^4$ $(i=1,\dots,k)$

vektorok összefüggőek generikus x_v, x_w esetén. Ebből következik, hogy ezek a vektorok összefüggőek minden x_v, x_w választás esetén. Az $x_v = T_v^e(y)$ helyettesítés után azt kapjuk, hogy a $(T_v^e(y) - T_v^e T_u^{f_i}(x_w), x_w - T_w^{f_i}(y))$ $(i = 1, \ldots, k)$ vektorok összefüggőek minden x_w és y választás esetén. Ha $T_v^e(x) = Ax + b$, ahol A egy ortogonális transzformáció, akkor ezt behelyettesítve kapjuk, hogy $(T_v^e(y) - T_v^e T_u^{f_i}(x_w), x_w - T_w^{f_i}(y)) = (A(y - T_u^{f_i}(x_w)), x_w - T_w^{f_i}(y))$. Alkalmazva a $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris transzformációt kapjuk, hogy az $(y - T_u^{f_i}(x_w), x_w - T_w^{f_i}(y))$ $(i = 1, \ldots, k)$ vektorok összefüggőek az x_w, y minden választása esetén, de ez azt jelenti, hogy az $R_{f_1}, \ldots, R_{f_k}$ összefüggőek generikus x esetén. Ez ellentmondás.

4. Legyen $m'_1, \ldots, m'_d$ az $\mathcal{M}_{vw}$ altér egy bázisa. A 3.11. Lemma szerint léteznek m_1, $\ldots$,$m_d \in \mathcal{M}$ vektorok, amelyekre $m'_i = m_i(\{v, w\})$. Világos, hogy $m_1, \ldots, m_d$ egy bázisa $\mathcal{M}$-nek. Tudjuk, hogy m_i merőleges az R_e, R_f-re generikus $x \in \mathbb{R}^{2|V|}$ esetén, tehát merőleges rájuk minden x esetén. Válasszuk x_u-t a következőképpen: $x_u := \lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda) T_u^f(x_w)$, ahol x_v, x_w és λ generikusak. Ezekkel a választásokkal még mindig tudjuk, hogy m_i merőleges R_e, R_f-re, és ezért R_{ef}-re is (itt 2-t használtuk). De $m_i(\{v, w\}) = m'_i$, tehát m'_i merőleges R_{ef}-re generikus x_v és x_w esetén, ezért $R_{ef} \in \mathcal{R}_{vw}$. $\square$

3.19. Lemma. *Legyen $\mathcal{E}$ egy d-reguláris 2-rúd-rendszer V-n és $x : V \to \mathbb{R}^2$ egy csúcs-realizáció. Legyen $u \neq v \in V$ és $e, f \in \mathcal{E}_{uv}$.*

1. *Ha $x_u = \lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda) T_u^f(x_v)$, akkor $R_e(u) = (1 - \lambda)\left(T_u^f(x_v) - T_u^e(x_v)\right)$ és $R_f(u) = \lambda\left(T_u^e(x_v) - T_u^f(x_v)\right)$.*

2. *Ha $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, és $x_u = \lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda) T_u^f(x_v)$, akkor $R_{ef} = \frac{1}{1-\lambda} R_e + \frac{1}{\lambda} R_f$.*

3. *Ha $e, f, g \in \mathcal{E}_{uv}$, és az R_e, R_f, R_g vektorok függetlenek, akkor generikus x esetén az R_{ef}, R_{eg} vektorok legalább egyike nem nulla.*

4. *$R_{ef} \in \mathcal{R}$ (ha $|V| \geq 3$)*

Bizonyítás. 1: $R_e(u) = x_u - T_v^e(x_v) = \lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda) T_u^f(x_w) - T_v^e(x_v) = (1 - \lambda) T_u^f(x_w) - (1 - \lambda) T_u^e(x_v)$. $R_f(u) = x_u - T_v^f(x_v) = \lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda) T_u^f(x_w) - T_v^f(x_v) = \lambda T_u^e(x_v) - \lambda T_u^f(x_v)$.

2: $\frac{1}{1-\lambda} R_e(v) = \frac{1}{1-\lambda}(x_v - T_v^e(x_u)) = \frac{1}{1-\lambda}(x_v - T_v^e(\lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda) T_u^f(x_v))) = \frac{1}{1-\lambda}(x_v - \lambda T_v^e(T_u^e(x_v)) - (1 - \lambda) T_v^e(T_u^f(x_v))) = \frac{1}{1-\lambda}(x_v - \lambda x_v - (1 - \lambda) T_v^e T_u^f(x_v)) = x_v - T_v^e T_u^f(x_v)$. $\frac{1}{\lambda} R_f(v) = \frac{1}{\lambda}(x_v - T_v^f(x_u)) = \frac{1}{\lambda}(x_v - T_v^f(\lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda) T_u^f(x_v))) = \frac{1}{\lambda}(x_v - \lambda T_v^f(T_u^e(x_v)) - (1 - \lambda) T_v^f(T_u^f(x_v))) = \frac{1}{\lambda}(x_v - \lambda T_v^f T_u^e(x_v) - (1 - \lambda) x_v) = x_v - T_v^f T_u^e(x_v)$. Ebből következik, hogy $\frac{1}{1-\lambda} R_e(v) + \frac{1}{\lambda} R_f(v) = 2x_v - (T_v^e T_u^f(x_v) + T_v^f T_u^e(x_v))$. $\frac{1}{1-\lambda} R_e(z) + \frac{1}{\lambda} R_f(z) = 0$ világos, ha $z \in V - \{v, u\}$. 1-ből pedig következik $\frac{1}{1-\lambda} R_e(u) + \frac{1}{\lambda} R_f(u) = 0$.

3: Belátjuk, hogy ha $R_{ef} = R_{eg} = 0$, akkor az R_e, R_f, R_g vektorok összefüggőek generikus x esetén. $R_{ef} = 0$ azt jelenti, hogy $2I = T_v^e T_u^f + T_v^f T_u^e$. Legyen $T := T_v^e T_u^f$. Tudjuk, hogy

$2I = T + T^{-1}$, ahol $T(x) = Ax + b$ egy egybevágósága $\mathbb{R}^2$-nek. Ekkor $2I = A + A^{-1}$, ahol A ortogonális. Azt állítjuk, hogy ebből következik, hogy $A = I$. Válasszunk egy $x \in \mathbb{R}^2$ vektort, melyre $\|x\| = 1$, erre $2 = \|2x\| = \|Ax + A^{-1}x\| \leq \|Ax\| + \|A^{-1}x\| = 1 + 1 = 2$. Mivel a háromszög-egyenlőtlenségben egyenlőség áll, így Ax és $A^{-1}x$ párhuzamos egységvektorok. De $Ax + A^{-1}x = 2x \neq 0$. Ebből következik, hogy $Ax = A^{-1}x$ teszőleges $x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1$ esetén, tehát $A = A^{-1}$. Ezért $2I = A + A^{-1} = 2A$-ból következik, hogy $A = I$.

Azt kaptuk, hogy $A^e_v A^f_u = I$, ami azt jelenti, hogy $A^e_v = A^f_v$. Hasonlóan $R_{eg} = 0$-ból következik $A^e_v = A^g_v$. Tehát $A^e_v = A^f_v = A^g_v$. Ha $y \in \mathbb{R}^2$, akkor definiáljuk az $m^y \in \mathbb{R}^{2|V|}$-t a következőképpen: $m^y(u) := y$ és $m^y(v) := (A^e_v)^{-1}y$. Könnyen ellenőrizhető, hogy m^y merőleges R_e, R_f, R_g-re minden $y \in \mathbb{R}^2$ esetén. Ebből következik, hogy az $\langle R_e, R_f, R_g\rangle$-nek az $\mathbb{R}^{2|V|}(\{u, v\})$-beli ortogonális kiegészítője legalább két dimenziós, tehát R_e, R_f, R_g összefüggő, mert $\dim\left(\mathbb{R}^{2|V|}(\{u, v\})\right) = 4$.

4. Legyen $w \in V - \{v, u\}$, és legyen $m'_1, \ldots, m'_d$ egy bázisa az $\mathcal{M}_{vw}$-nek. A 3.11. Lemma miatt léteznek $m_1, \ldots, m_d \in \mathcal{M}$ vektorok, melyekre $m'_i = m_i(\{v, w\})$. Világos, hogy $m_1, \ldots, m_d$ az $\mathcal{M}$ egy bázisát alkotják. Tudjuk, hogy m_i merőleges R_e, R_f-re generikus $x \in \mathbb{R}^{2|V|}$ esetén, tehát merőleges minden x esetén. Válasszuk x_u-t a következő módon: $x_u := \lambda T^e_u(x_v) + (1-\lambda)T^f_u(x_v)$, ahol x_v és λ generikusak. Ezzel a választással is tudjuk, hogy m_i merőleges R_e, R_f-re, és ezért R_{ef}-re is (itt 2-t használtuk). De $m_i(\{v, w\}) = m'_i$, és így m'_i merőleges R_{ef}-re generikus x_v és x_w esetén, tehát $R_{ef} \in \mathcal{R}_{vw} \subseteq \mathcal{R}$. $\square$

Láthatjuk, hogy a 3.19. Lemma harmadik állítása gyengébb, mint a 3.18. lemmabeli analóg állítás. Ez az oka annak, hogy szükségünk van a 3.17. Tételre, az erősebb előállítási tételre a $d = 0$ esetben. A következő két egyszerű lineáris algebrai tényt fogjuk még használni.

3.20. Állítás. *Ha a $v_0, v_1, \ldots, v_k$ vektorok lineárisan függetlenek, és $v_0 \in \langle u_1, \ldots, u_l\rangle$, akkor létezik $i \in \{1, \ldots, l\}$, amelyre az $u_i, v_1, \ldots, v_k$ vektorok függetlenek.*

3.21. Lemma. *Legyen $V' = V - \{u\}$. Legyen M egy $k \times 2|V|'$ méretű mátrix, amelynek a sorai függetlenek, és $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{2|V|}$ az M olyan sorai, amelyekre $R_1(u), R_2(u)$ függetlenek. Ekkor az $M' := [M, 0] \cup R_1 \cup R_2$ mátrix sorai is függetlenek.*

Bizonyítás. Az M' mátrix a következő alakú: $\begin{pmatrix} M & 0 \\ A & C \end{pmatrix}$, ahol C egy olyan 2×2-es mátrix, amelynek a sorai $R_1(u), R_2(u)$, tehát $r(C) = 2$. Ezért az $r(M') \geq r(M) + r(C) = k + 2$ egyenlőtlenségből következik az állítás. $\square$

3.22. Lemma. *Legyenek $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ $[2, d]$-gráfok ($0 \leq d \leq 2$) úgy, hogy $V' = V - \{u\}$ és $E = E' + uv + uw$. Ha G' izosztatikus minden d-reguláris 2-rúd-rendszer felett, akkor G is izosztatikus minden d-reguláris 2-rúd-rendszer felett. (Lásd a 3.10. ábrát.)*

3.10. ábra. $K(2,0,0)$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{E}$ d-reguláris 2-rúd-rendszer V-n, és legyen $\mathcal{E}' := \mathcal{E}|_{V'}$. A 3.11. Lemma szerint $\mathcal{E}'$ d-reguláris 2-rúd-rendszer V'-n, tehát létezik G'-nek egy α' él-realizációja, amelyre az $M_{\alpha'}$ merevségi mátrix sorai függetlenek generikus $x \in \mathbb{R}^{2|V'|}$ esetén.

Legyen $e \in \mathcal{E}_{uv}$, és legyenek $f_1, f_2 \in \mathcal{E}_{uw}$ független rudak. Ekkor a 3.10. Lemma szerint $R_{f_1}(u), R_{f_2}(u)$ függetlenek, tehát $R_e(u), R_{f_i}(u)$ függetlenek (az $R_e(u) \neq 0$ világos) valamely $i \in \{1,2\}$ esetén (a 3.20. Állítás szerint).

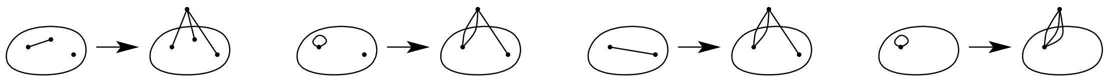
Ebből következik, hogy az $M := [M_{\alpha'}, 0] \cup R_e \cup R_{f_i}$ sorai függetlenek a 3.21. Lemma miatt. De $M = M_\alpha$, ahol $\alpha|_{E'} := \alpha'$, és $\alpha(uv) = e$, $\alpha(uw) = f_i$. Tehát G izosztatikus. $\square$

3.23. Állítás. *Legyen $\mathcal{E}$ egy d-reguláris 2-rúd-rendszer V-n és $u \in V$. Ha $R_e, R_f, R_g \in \mathcal{R}_{uv}$ függetlenek, akkor a $T_v^e(x_u), T_v^f(x_u), T_v^g(x_u) \in \mathbb{R}^2$ pontok nem kollineárisak generikus x_u esetén.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $T_v^e(x_u), T_v^f(x_u), T_v^g(x_u)$ kollineárisak. Legyen $T_v^e(x) = A^e x + b_e, T_v^f(x) = A^f x + b_f$ és $T_v^g(x) = A^g x + b_g$. Ekkor tehát az $A^e x + b_e, A^f x + b_f, A^g x + b_g$ pontok kollineárisak minden x esetén. Legyen $K \in \mathbb{R} - \{0\}$ és $y \in R^2, \|y\| = 1$, ekkor az $x = Ky$ helyettesítés után azt kapjuk, hogy $A^e y + \frac{b_e}{K}, A^f y + \frac{b_f}{K}, A^g y + \frac{b_g}{K}$ kollineárisak. Ha $K \to +\infty$, akkor kapjuk, hogy $A^e y, A^f y, A^g y$ kollineáris minden $y \in \mathbb{R}^2$ esetén. De $A^e y, A^f y, A^g y$ az $\mathbb{R}^2$ egységkörén vannak, azaz $A^e y, A^f y, A^g y \in \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| = 1\}$. Ekkor $|\{A^e y, A^f y, A^g y\}| \leq 2$ minden y-ra, tehát valamelyik két transzformáció az A^e, A^f, A^g közül végtelen sok ponton megegyezik, és így azonos is. Tegyük fel mondjuk, hogy $A^e = A^f$. Ebben az esetben $T_v^e \neq T_v^f$-ből következik, hogy $b_e \neq b_f$. Az $A^e x + b_e, A^e x + b_f, A^g x + b_g$ kollinearitásából következik, hogy $0, b_f - b_e, (A^g - A^e)x + b_g - b_e$ kollineáris. Ez azt jelenti, hogy az $A^g - A^e = A^e(A^g(A^e)^{-1} - I)$ transzformáció nem invertálható, tehát az $A^g(A^e)^{-1}$-nek az 1 sajátértéke. $A^g(A^e)^{-1}$ forgatás, tehát $A^g(A^e)^{-1} = I$. $A^e = A^f = A^g$-ből pedig következik (ugyanúgy, mint a 3.19. Lemma harmadik állításának bizonyításában), hogy R_e, R_f, R_g összefüggőek. $\square$

3.24. Állítás. *Legyen $\mathcal{E}$ egy d-reguláris 2-rúd-rendszer V-n és $x : V \to \mathbb{R}^2$ egy csúcs-realizáció. Legyenek $u, v_1, v_2, v_3 \in V$ olyanok, hogy $u \notin \{v_1, v_2, v_3\}$, $f_i \in \mathcal{E}_{uv_i}$, és tegyük fel, hogy „párhuzamos élekhez független f_i-k tartoznak”, azaz*

$$\{f_i : i \in I\} \text{ független, ha } |\{v_i : i \in I\}| = 1 \text{ minden } \emptyset \neq I \subseteq \{1,2,3\} \text{ esetén.}$$



3.11. ábra. $K(2,1,0)$

Ekkor $T_u^{f_1}(x_{v_1}), T_u^{f_2}(x_{v_2}), T_u^{f_3}(x_{v_3})$ nem kollineárisak generikus $x_{v_1}, x_{v_2}, x_{v_3}$-k esetén.

Bizonyítás. Ha $v_1 = v_2 = v_3$, akkor az állítás pont a 3.23. Lemma állítása. Tegyük fel most, hogy $v_1 \notin \{v_2, v_3\}$. Ha $v_2 = v_3$, akkor f_2, f_3 függetlenek, ezért $T_2^{f_2} \neq T_3^{f_3}$, tehát $T_2^{f_2}(x_{v_2}) \neq T_3^{f_3}(x_{v_3})$. Ha $v_2 \neq v_3$, akkor $T_2^{f_2}(x_{v_2}) \neq T_3^{f_3}(x_{v_3})$ triviálisan következik az x_{v_2}, x_{v_3} generikusságából. Tehát mindkét esetben választhatunk egy olyan x_{v_1}-et, amelyre $T_1^{f_1}(x_{v_1}) \notin \mathsf{line}(T_2^{f_2}(x_{v_2}), T_3^{f_3}(x_{v_3}))$. Tehát a $T_1^{f_1}(x_{v_1})$, $T_2^{f_2}(x_{v_2})$, $T_3^{f_3}(x_{v_3})$ csúcsok nem kollineárisak generikus $x_{v_1}, x_{v_2}, x_{v_3}$ esetén. $\square$

3.25. Lemma. *Legyenek $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ $[2, d]$-gráfok $(0 \leq d \leq 2)$, amelyekre $V' = V - \{u\}$, $E = E' - vw + uv + uw + uz$ és $\{v \in V' : \gamma_G(v) = 2\} = \{v \in V' : \gamma_{G'}(v) = 2\}$. Ha G' izosztatikus minden d-reguláris 2-rúd-rendszer felett, akkor G is izosztatikus minden d-reguláris 2-rúd-rendszer felett. (Lásd a 3.11. ábrát.)*

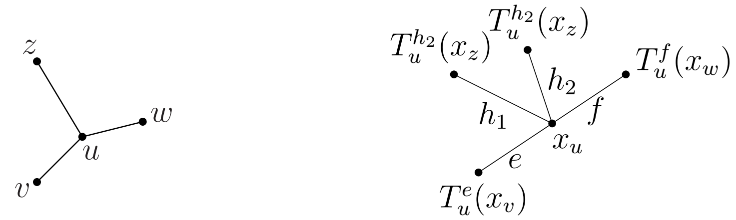
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{E}$ d-reguláris 2-rúd-rendszer V-n. Ha $v \neq w$, akkor legyen $\mathcal{E}' := \mathcal{E}|_{V'}$. Ha $v = w$, akkor $\gamma_{G'}(v) = 1$. Ebben az esetben definiáljuk az $\mathcal{E}'$-t a következő módon. A 3.19. Lemma szerint létezik $e, f \in \mathcal{E}_{uv}$ úgy, hogy $R_{ef} \neq 0$. Legyen $\mathcal{E}'_{vv} := \{\kappa\}$, ahol $T_v^{\kappa} := T_v^e T_u^f$. Ezzel a választással $R_\kappa = R_{ef}$ (a 3.19. Lemma szerint). Legyen $\mathcal{E}'_{ab} := \mathcal{E}_{ab}$ minden $\{a, b\} \neq \{v\}$, $a, b \in V'$ esetén.

Az $\mathcal{E}'$ egy d-reguláris 2-rúd-rendszer G'-re, tehát létezik a G'-nek egy α' él-realizációja, amelyre az $M_{\alpha'}$ merevségi mátrix sorai lineárisan függetlenek. Legyen a egy vw élhez rendelt rúd, azaz $\alpha'(vw) = a \in \mathcal{E}_{vw}$.

Ha $v \neq w$, akkor legyen $e \in \mathcal{E}_{uv}$, valamint legyenek $f_1, \ldots, f_{4-d} \in \mathcal{E}_{uw}$ olyanok, hogy $R_{f_1}, \ldots, R_{f_{4-d}}$ egy bázisa $\mathcal{R}_{uw}$-nek. Ebben az esetben $R_{ef_1}, \ldots, R_{ef_{4-d}}$ egy bázisa $\mathcal{R}_{vw}$-nek a 3.18. Lemma miatt. Ezek a vektorok generálják az $R_a \in \mathcal{R}_{vw}$ vektort, tehát a 3.20. Állítás miatt létezik $1 \leq i \leq 4 - d$, melyre az $M_1 := M_{\alpha'} \cup R_{ef_i}|_{V'} \setminus R_a$ sorai függetlenek. Legyen $f := f_i$.

Tehát a $v = w$ és a $v \neq w$ esetben is: $\exists\ e \in \mathcal{E}_{uv}, f \in \mathcal{E}_{uw}$, és létezik egy α' él-realizáció és egy a rúd úgy, hogy $\alpha'(vw) = a$, és az $M_1 := M_{\alpha'} \cup R_{ef}|_{V'} \setminus R_a$ mátrix sorai függetlenek (a $v = w$ esetben $a = \kappa$ és $M_1 = M$).

Legyen $x \in \mathbb{R}^{2|V'|}$ egy generikus csúcs-realizáció, és legyen $x_u = x_u(\lambda) := \lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda) T_u^f(x_w)$, ahol λ generikus (ezen választás mellett x_u már nem generikus).



3.12. ábra.

Legyenek $h_1, h_2 \in \mathcal{E}_{uz}$ olyanok, hogy R_{h_1}, R_{h_2} függetlenek. Azt állítjuk, hogy $R_{h_1}(u)$, $R_{h_2}(u) \in \mathbb{R}^2$ függetlenek a fenti x_u választás mellett. Belátjuk, hogy az $x_u(\lambda) - T_u^{h_1}(x_z)$, $x_u(\lambda) - T_u^{h_2}(x_z)$ vektorok függetlenek a λ valamely választása mellett. Elég azt igazolni, hogy a $T_u^e(x_v), T_u^f(x_w), T_u^{h_1}(x_z), T_u^{h_2}(x_z)$ pontok nem kollineárisak. (Lásd a 3.12. ábrát.)

Ha $|\{v, w, z\}| \geq 2$, akkor ez következik a generikusságból és a következő tényekből (lásd a 3.24. Állítást): ha $v = w$, akkor $T_u^e \neq T_u^f$, ha $v = z$, akkor $T_u^e \neq T_u^{h_i}$ valamely i-re, és ha $w = z$, akkor $T_u^f \neq T_u^{h_i}$ valamely i-re.

Ha $v = w = z$, akkor válasszuk a h_1, h_2 rudakat úgy, hogy R_e, R_{h_1}, R_{h_2} függetlenek legyenek, és ebben az esetben a 3.23. Állítás miatt a fenti pontok nem kollineárisak.

Abból, hogy az $R_{h_1}(u), R_{h_2}(u)$ függetlenek, következik, hogy az $R_f(u)$, $R_{h_i}(u)$ függetlenek valamely $i = 1, 2$ esetén. Legyen $h := h_i$.

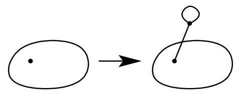
Ekkor az $M_2 := [M_1, 0] \cup R_f \cup R_h$ mátrix sorai függetlenek a 3.21. Lemma miatt. Az $R_{ef} = \frac{1}{1-\lambda} R_e + \frac{1}{\lambda} R_f$ egyenlőség (amely a 3.18 vagy 3.19. Lemma miatt igaz) mutatja, hogy az $M_3 := M_2 \cup R_e \setminus R_{ef}$ mátrix sorai is függetlenek. De $M_3 = M_\alpha$ az x_u egy speciális választása mellett, ahol $\alpha|_{E'-vw} := \alpha'$ és $\alpha(uv) := e$, $\alpha(uw) := f$, $\alpha(uz) := h$, tehát G izosztatikus. $\square$

3.26. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy $[n, d]$-gráf, $0 \leq d \leq n$ és $|V| \leq 2$. Ekkor G izosztatikus minden d-reguláris n-rúd-rendszer felett.*

Bizonyítás. Ha $V = \{u\}$, akkor válasszunk az u-n levő hurkoknak független realizációkat. Ez megtehető, mivel $\dim \mathcal{E}_{uu} \geq \gamma(u)$.

Ha $V = \{u, v\}$, ahol $u \neq v$, akkor válasszunk az u-n levő hurkoknak független realizációkat, majd a v-n levő hurkoknak válasszunk független realizációkat. Ezek a rudak együttesen is függetlenek, mivel az u hurok-rúdjainak vektorainak tartója diszjunkt a v-n levő hurokrudak vektorainak tartójától. Ezek után válasszunk $(2n - d) - \gamma(u) - \gamma(v)$ darab vektort az $\mathcal{E}_{uv}$-ből úgy, hogy a $2n - d$ vektor együtt is független legyen. Ez azért tehető meg, mert $\dim \mathcal{R}_{uv} = 2n - d$. Ezzel az eljárással egy izosztatikus realizációt kaptunk. $\square$

A 3.9. Tétel bizonyítása a $d = 2$ esetben. A bizonyítás a $|V|$-re vonatkozó teljes indukcióval történik. Ha $|V| \leq 2$, akkor G izosztatikus a 3.26. Lemma szerint. Ha $|V| \geq 3$, akkor a 3.15. Tétel szerint G előáll egy G' $[2, 2]$-gráfból a $K(2, 0, 0)$ vagy a $K(2, 1, 0)$ művelet



3.13. ábra. $K(2,0,1)$

segítségével. Az indukciós feltevés szerint G' izosztatikus minden 2-reguláris 2-rúd-rendszer felett, és a 3.22 és 3.25. Lemmákból következik, hogy G is izosztatikus minden 2-reguláris 2-rúd-rendszer felett. $\square$

3.27. Lemma. *Legyenek $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ $[2, d]$-gráfok $(0 \leq d \leq 1)$ úgy, hogy $V' = V - \{u\}$ és $E = E' + uv + uu$. Ha G' izosztatikus minden d-reguláris 2-rúd-rendszer felett, akkor G is izosztatikus minden d-reguláris 2-rúd-rendszer felett. (Lásd a 3.13. ábrát.)*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{E}$ d-reguláris 2-rúd-rendszer V-n. $\mathcal{E}|_{V'}$ egy d-reguláris 2-rúd-rendszer G'-höz, tehát a G'-nek létezik egy α' él-realizációja, amelyre az $M_{\alpha'}$ merevségi mátrix sorai függetlenek. Legyen $\alpha|_{E'} := \alpha'$, és legyen $\alpha(uu)$ egy tesztőleges nem nulla f eleme $\mathcal{E}_{uu}$-nak, és legyen $\alpha(uv)$ egy olyan g eleme $\mathcal{E}_{uv}$-nek, amelyre $R_f(u), R_g(u)$ függetlenek (ilyen g létezik a 3.10. Lemma miatt). Ezzel a választással az $M_\alpha = [M_{\alpha'}, 0] \cup R_f \cup R_g$ merevségi mátrix sorai függetlenek lesznek a 3.21. Lemma miatt, tehát G izosztatikus az $\mathcal{E}$ felett. $\square$

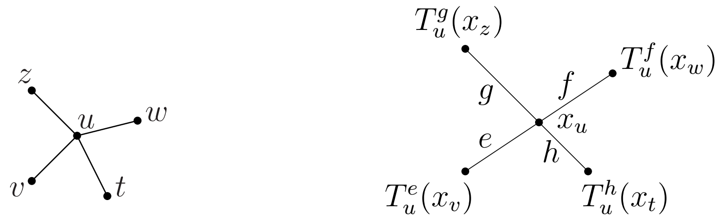
A 3.9. Tétel bizonyítása a $d = 1$ esetben. A bizonyítás a $|V|$-re vonatkozó teljes indukcióval történik. Ha $|V| \leq 2$, akkor G izosztatikus a 3.26. Lemma szerint. Ha $|V| \geq 3$, akkor a 3.15. Tétel szerint G előáll egy G' $[2, 1]$-gráfból a $K(2, 0, 0)$, a $K(2, 1, 0)$ vagy a $K(2, 0, 1)$ művelet segítségével. Az indukciós feltevés szerint G' izosztatikus minden 1-reguláris 2-rúd-rendszer felett, és a 3.22, 3.25 és 3.27. Lemmákból következik, hogy G is izosztatikus minden 1-reguláris 2-rúd-rendszer felett. $\square$

A $[2, 0]$ esetben több műveletre van szükségünk a $[2, 0]$-gráfok előállításához, és több technikai nehézséggel kell szembenéznünk.

3.28. Lemma. *Legyenek $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ $[2, 0]$-gráfok, amelyekre $V' = V - \{u\}$ és $E = E' - vw - zt + uv + uw + uz + ut$. Legyen $\mathcal{E}$ egy 0-reguláris 2-rúd-rendszer G-hez, és legyen α' egy izosztatikus él-realizációja G'-nek az $\mathcal{E}|_{V'}$ 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett. Legyen $e \in \mathcal{E}_{uv}, f \in \mathcal{E}_{uw}, g \in \mathcal{E}_{uz}$ és $h \in \mathcal{E}_{ut}$ úgy, hogy az alábbiak teljesülnek.*

1. *Léteznek a, b rudak, amelyekre $\alpha'(vw) = a$, $\alpha'(zt) = b$, és az $M_1 := M_{\alpha'} \cup R_{ef}|_{V'} \cup R_{gh}|_{V'} \setminus R_a \setminus R_b$ mátrix sorai függetlenek.*

2. *A $(T_u^e(x_v) - T_u^f(x_w)), (T_u^g(x_z) - T_u^h(x_t))$ vektorok lineárisan függetlenek generikus $x \in \mathbb{R}^{2|V|}$ esetén.*



3.14. ábra.

3. Ha $F \subseteq \{e, f, g, h\}$ párhuzamos rudakat tartalmaz u és u' között, ahol $u' \in \{v, w, z, t\}$ (azaz $F \subseteq \mathcal{E}_{uu'}$), akkor F független.

Ekkor a G gráf izosztatikus $\mathcal{E}$ felett.

Bizonyítás. Definiálunk egy α él-realizációt: legyen $\alpha|_{E'-vw-zt} := \alpha'|_{E'-vw-zt}$, és legyen $\alpha(uv) := e$, $\alpha(uw) := f$, $\alpha(uz) := g$ és $\alpha(ut) := h$. Belátjuk, hogy az α él-realizáció izosztatikus.

Legyen az $x \in \mathbb{R}^{2|V'|}$ csúcs-realizáció generikus. Válasszunk olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$-et, amelyek kielégítik a következő egyenlőséget:

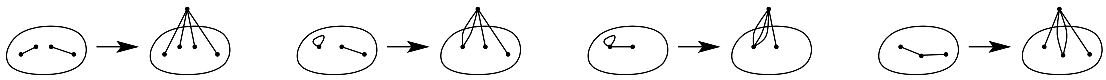
$$\lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda) T_u^f(x_w) = \mu T_u^g(x_z) + (1 - \mu) T_u^h(x_t).$$

Ilyen λ, μ azért létezik, mert a $(T_u^e(x_v) - T_u^f(x_w))$, $(T_u^g(x_z) - T_u^h(x_t))$ vektorok függetlenek. Legyen $x_u := \lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda) T_u^f(x_w)$. x_u tehát a $\mathsf{line}(T_u^e(x_v), T_u^f(x_w))$ és a $\mathsf{line}(T_u^g(x_z), T_u^h(x_t))$ egyenesek metszéspontja. Ezzel a választással a λ, μ és az x_u nem lesznek generikusak.

Azt állítjuk, hogy az $R_e(u) = x_u - T_u^e(x_v)$ és $R_g(u) = x_u - T_u^g(x_z)$ vektorok lineárisan függetlenek, ami azt jelenti, hogy $x_u, T_u^e(x_v), T_u^g(x_z)$ nem kollineáris, és azt állítjuk, hogy $\lambda, \mu \notin \{0, 1\}$. Ezek következnek azokból, hogy a $T_u^e(x_v), T_u^g(x_z), T_u^h(x_t)$ pontok nem kollineárisak, a $T_u^e(x_v), T_u^g(x_z), T_u^f(x_w)$ pontok nem kollineárisak, a $T_u^h(x_t), T_u^f(x_w), T_u^e(x_v)$ pontok nem kollineárisak, és a $T_u^h(x_t)$, $T_u^f(x_w)$, $T_u^g(x_z)$ pontok nem kollineárisak. (Lásd a 3.14. ábrát.) Ezek pedig a 3.24. Állítás és a 3-as feltétel miatt igazak.

A 3.21. Lemmából tudjuk, hogy az $M_2 := [M_1, 0] \cup R_e \cup R_g$ sorai függetlenek. Az $R_{ef} = \frac{1}{1-\lambda} R_e + \frac{1}{\lambda} R_f$ és az $R_{gh} = \frac{1}{1-\mu} R_g + \frac{1}{\mu} R_h$ egyenlőtlenségekből (amelyek a 3.18 és a 3.19. Lemma miatt igazak) következik, hogy az $M_3 := M_2 \cup R_f \cup R_h \setminus R_{ef} \setminus R_{gh}$ mátrix sorai függetlenek. De $M_3 = M_\alpha$ az x_u egy speciális választása mellett. $\square$

3.29. Lemma. *Legyenek $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ $[2, 0]$-gráfok, amelyekre $V' = V - \{u\}$, $E = E' - vw - zt + uv + uw + uz + ut$, $\{v \in V' : \gamma_G(v) = 2\} = \{v \in V' : \gamma_{G'}(v) = 2\}$ teljesül és $z \notin \{v, w, t\}$. Ha G' izosztatikus minden 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett, akkor G is izosztatikus minden 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett. (Lásd a 3.15. ábrát.)*



3.15. ábra. $K(2,2,0)$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{E}$ 0-reguláris 2-rúd-rendszer G-hez. Ha $v \neq w$, akkor legyen $\mathcal{E}' := \mathcal{E}|_{V'}$.

Ha $v = w$, akkor $\gamma_{G'}(v) = 1$. Definiáljuk az $\mathcal{E}'$-t a következőképpen. A 3.19. Lemma szerint léteznek $e, f \in \mathcal{E}_{uv}$, amelyekre $R_{ef} \neq 0$. Legyen $\mathcal{E}'_{vv} := \{\kappa\}$, ahol $T_v^\kappa := T_v^e T_u^f$. Ezzel a választással $R_\kappa = R_{ef}$ (a 3.19. Lemma szerint). Legyen $\mathcal{E}'_{ab} := \mathcal{E}_{ab}$ minden $\{a,b\} \neq \{v\},\ a,b \in V'$ esetén.

Az $\mathcal{E}'$ egy 0-reguláris 2-rúd-rendszer G'-höz, tehát létezik G'-nek egy olyan α' él-realizációja, melyre az $M_{\alpha'}$ merevségi mátrix sorai függetlenek. Válasszunk a, b rudakat úgy, hogy $\alpha(vw) = a$ és $\alpha(zt) = b$.

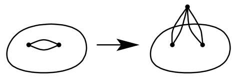
Ha $v \neq w$, akkor legyen $e \in \mathcal{E}_{uv}$, és legyenek $f_1, \ldots, f_4 \in \mathcal{E}_{uw}$ olyanok, hogy $R_{f_1}, \ldots, R_{f_4}$ az $\mathcal{R}_{uw}$ egy bázisát alkotják. Ekkor $R_{ef_1}, \ldots, R_{ef_4}$ is az $\mathcal{R}_{uw}$ bázisa a 3.18. Lemma szerint. Ezek a vektorok tehát generálják $R_a \in \mathcal{R}_{vw}$-t, tehát a 3.20. Állítás miatt létezik $1 \leq i \leq 4$, melyre az $M_1 := M_{\alpha'} \cup R_{ef_i}|_{V'} \setminus R_a$ sorai függetlenek. Legyen $f := f_i$.

Hasonlóan legyen $h \in \mathcal{E}_{ut}$ olyan, hogy R_h független $\{R_e, R_f\}$-től. Legyenek $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{E}_{uz}$ független rudak. Mint fent, most is létezik $1 \leq i \leq 4$, amelyre az $M_2 := M_1 \cup R_{g_i h}|_{V'} \setminus R_b$ sorai függetlenek. Legyen $g := g_i$.

Az e, f, g, h rudak nyilván teljesítik a 3.28. Lemma első és harmadik feltételét. Azt állítjuk, hogy a $(T_u^e(x_v) - T_u^f(x_w)), (T_u^g(x_z) - T_u^h(x_t))$ vektorok függetlenek. Miután lerögzítettük az x_v, x_w, x_t értékeket úgy, hogy az első vektor nem nulla (ez megtehető, mert ha $v = w$, akkor e, f független), akkor választhatunk egy olyan x_z értéket, hogy a második vektor ne legyen párhuzamos az elsővel (a T_u^g az $\mathbb{R}^2$ egy bijekciója). Ha tehát x generikus, akkor a $(T_u^e(x_v) - T_u^f(x_w)), (T_u^g(x_z) - T_u^h(x_t))$ vektorok függetlenek. □

3.30. Állítás. *Legyen $\mathcal{E}$ egy d-reguláris 2-rúd-rendszer V-n, $0 \leq d \leq 2$, $x \in \mathbb{R}^{2|V|}$ egy generikus csúcs-realizáció és legyen u, v, w három különböző csúcs. Ha $e, h \in \mathcal{E}_{uv}$, $f, g \in \mathcal{E}_{uw}$, és a $\big(T_u^e(x_v) - T_u^f(x_w)\big)$, $\big(T_u^g(x_w) - T_u^h(x_v)\big)$ vektorok lineárisan összefüggőek, akkor $R_{ef} = R_{gh}$.*

Bizonyítás. Legyen $x := T_u^e(x_v)$, $y := T_u^f(x_w)$, és legyen $T_1 := T_u^h(T_u^e)^{-1}$ és $T_2 := T_u^g(T_u^f)^{-1}$. Tudjuk, hogy az $x - y, T_1(x) - T_2(y)$ vektorok összefüggőek minden $x, y \in \mathbb{R}^2$ esetén. Azaz $x - y, A_1 x - A_2 y + b_1 - b_2$ összefüggőek (ahol $T_i(z) = A_i z + b_i$). Ha $K \in \mathbb{R} - \{0\}$, akkor az $x = Kx', y = Ky'$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy az $x' - y', A_1 x' - A_2 y' + \frac{b_1 - b_2}{K}$ vektorok



3.16. ábra. $K(2,2,0)$

összefüggőek. Ha $K \to +\infty$, akkor azt kapjuk, hogy az $x-y, A_1x - A_2y$ összefüggő minden $x, y \in \mathbb{R}^2$ esetén (a determináns egy folytonos függvény). Speciálisan az x, A_1x összefüggőek, de ez azt jelenti, hogy $A_1 = \lambda_1 I$, ahol λ_1 +1 vagy -1. Hasonlóan $A_2 = \lambda_2 I$, ahol $|\lambda_2| = 1$.

Tehát $x-y, \lambda_1 x - \lambda_2 y$ összefüggőek minden $x, y \in \mathbb{R}^2$ esetén, tehát $x-y, (\lambda_1 - \lambda_2)y$ összefüggőek minden $x, y \in \mathbb{R}^2$ esetén. Ebből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2$. Az $x-y, A_1x - A_2y + b_1 - b_2$ összefüggősége tehát azt jelenti, hogy $x-y, \lambda_1(x-y) + b_1 - b_2$ összefüggőek minden $x, y \in \mathbb{R}^2$-re, tehát $b_1 = b_2$. Tehát $T_1(x) = T_2(x) = \lambda_1 x + b_1$. Ez azt jelenti, hogy $(T_u^g)^{-1}(T_u^h) = (T_u^f)^{-1}(T_u^e)$, ezért $R_{ef} = R_{gh}$. $\square$

3.31. Lemma. *Legyenek $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ $[2,0]$-gráfok, amelyekre $V' = V - \{u\}$, $E = E' - vw - vw + uv + uv + uw + uw$ és $v \neq w$. Ha G' izosztatikus minden 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett, akkor G is izosztatikus minden 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett. (Lásd a 3.16. ábrát.)*

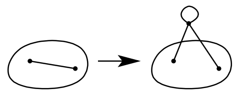
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{E}$ 0-reguláris 2-rúd-rendszer G-hez. Ekkor létezik a G'-nek egy α' él-realizációja, amelyre az $M_{\alpha'}$ merevségi mátrix sorai függetlenek az $\mathcal{E}|_{V'}$ 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett.

Legyen a, b két független rúd, amely két vw-élhez van hozzárendelve, azaz $\alpha(vw) = a$ és $\alpha(vw) = b$. Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^{2|V'|}$ az $M_{\alpha'}$ többi $2|V'| - 2$ sora által generált altér. Belátjuk, hogy létezik $e, h \in \mathcal{E}_{uv}$ és $f, g \in \mathcal{E}_{uw}$ úgy, hogy e, h függetlenek, f, g függetlenek, és az $M_1 := M_{\alpha'} \cup R_{ef}|_{V'} \cup R_{gh}|_{V'} \setminus R_a \setminus R_b$ mátrix sorai is függetlenek, azaz $S + R_{ef} + R_{gh}$ generálja $\mathbb{R}^{2|V'|}$-t.

Legyenek $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{E}_{uv}$ független rudak, valamint legyen $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{E}_{uw}$ is négy független rúd.

Ekkor a 3.18. Lemma szerint az $R_{e_1f_1}, R_{e_1f_2}, R_{e_1f_3}, R_{e_1f_4} \in \mathcal{R}_{vw}$ négy független vektor. Tehát $\mathcal{R}_{vw} = \langle R_{e_1f_1}, R_{e_1f_2}, R_{e_1f_3}, R_{e_1f_4} \rangle$, ezért $\langle S + \{R_{e_1f_1}, R_{e_1f_2}, R_{e_1f_3}, R_{e_1f_4}\} \rangle = \mathbb{R}^{2|V'|}$, de $\dim S = 2|V'| - 2$-ből következik, hogy $\exists i \neq j \in \{1,2,3,4\}$ úgy, hogy $\langle S + \{R_{e_1f_i}, R_{e_1f_j}\} \rangle = \mathbb{R}^{2|V'|}$. Legyen mondjuk $i = 1, j = 2$.

Legyen $A := \{R_{e_2f_3}, R_{e_2f_4}, R_{e_3f_3}, R_{e_3f_4}, R_{e_4f_3}, R_{e_4f_4}\}$. Ha $\exists i, j : R_{e_if_j} \in A - \langle S + R_{e_1f_1} \rangle$, akkor $e = e_1, f = f_1, g = f_j, h = e_i$ egy megfelelő választás, és ekkor készen vagyunk. Tehát feltehetjük, hogy $A \subseteq \langle S + R_{e_1f_1} \rangle$. Hasonlóan feltehetjük, hogy $A \subseteq \langle S + R_{e_1f_2} \rangle$, tehát $A \subseteq \langle S + R_{e_1f_1} \rangle \cap \langle S + R_{e_1f_2} \rangle = S$.



3.17. ábra. $K(2,1,1)$

Legyen $i \in \{2,3,4\}$ tetszőleges. Ekkor $R_{e_if_3}, R_{e_if_4} \in S$-ből következik, hogy $\langle S + \{R_{e_if_1}, R_{e_if_2}\}\rangle = \mathbb{R}^{2|V'|}$ (mert $\langle S + \{R_{e_if_1}, R_{e_if_2}, R_{e_if_3}, R_{e_if_4}\}\rangle = \mathbb{R}^{2|V'|}$ és $\dim S = 2|V'| - 2$). Ez azt jelenti, hogy

$$R_{e_if_1} \notin S \text{ és } R_{e_if_2} \notin \langle S + R_{e_if_1}\rangle \; i = 2,3,4 \text{ esetén.} \tag{3.8}$$

Ha $R_{e_if_1} \notin \langle S + R_{e_1f_2}\rangle$, akkor $e = e_i, f = f_1, g = f_2, h = e_1$ megfelelő választás. Ha $R_{e_if_1} \in \langle S + R_{e_1f_2}\rangle$, akkor $R_{e_if_1} \notin S$-ből következik, hogy $\langle S + R_{e_if_1}\rangle = \langle S + R_{e_1f_2}\rangle$ ($i = 2,3,4$-re), tehát $\langle S + R_{e_2f_1}\rangle = \langle S + R_{e_3f_1}\rangle$, és (3.8) szerint $R_{e_3f_2} \notin \langle S + R_{e_3f_1}\rangle$, tehát $R_{e_3f_2} \notin \langle S + R_{e_2f_1}\rangle$. Ezért $e = e_2, f = f_1, g = f_2, h = e_3$ megfelelő választás.

Ez az e, f, g, h nyilvánvalóan kielégíti az első és a harmadik feltételét a 3.28. Lemmának ($z = w$ és $t = v$ választással), és ebben az esetben ezekből következik a $(T_u^e(x_v) - T_u^f(x_w)), (T_u^g(x_z) - T_u^h(x_t))$ vektorok függetlensége a 3.30. Állítás miatt (mert $R_{ef} = R_{gh}$ ellentmondana az első feltételnek). □

3.32. Lemma. *Legyenek $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ $[2, 0]$-gráfok, amelyekre $V' = V - \{u\}$ és $E = E' - vw + uv + uw + uu$ és $v \neq w$. Ha G' izosztatikus minden 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett, akkor G is izosztatikus minden 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett. (Lásd a 3.17. ábrát.)*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{E}$ 0-reguláris 2-rúd-rendszer G-hez. Ekkor létezik G'-nek egy α' él-realizációja, amelyre az $M_{\alpha'}$ merevségi mátrix sorai függetlenek a $\mathcal{E}|_{V'}$ 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett. Válasszunk egy a rudat úgy, hogy $\alpha(vw) = a$. Legyen $e \in \mathcal{E}_{uv}$, és legyenek $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{E}_{uw}$ független rudak. Most $R_{ef_1}, R_{ef_2}, R_{ef_3}, R_{ef_4} \in \mathcal{R}_{vw}$ négy független vektor a 3.18. Lemma szerint. Ezek a vektorok generálják az $R_a \in \mathcal{R}_{vw}$ vektort, tehát a 3.20. Állítás miatt létezik $1 \leq i \leq 4$, amelyre az $M_1 := M_{\alpha'} \cup R_{ef_i}|_{V'} \setminus R_a$ mátrix sorai függetlenek. Legyen $f := f_i$.

Legyen az $x \in \mathbb{R}^{2|V'|}$ csúcs-realizáció generikus. Legyen $x_u = x_u(\lambda) := \lambda T_u^e(x_v) + (1 - \lambda)T_u^f(x_w)$, ahol λ generikus (ezzel a választássa x_u nem generikus). Legyen $h \in \mathcal{E}_{uu}$ olyan, hogy $R_h \neq 0$. Azt állítjuk, hogy $R_e(u), R_h(u)$ függetlenek.

Azt kell belátnunk, hogy az $x_u - T_u^e(x_v)$, $2x_u - (T_u^h(x_u) + (T_u^h)^{-1}(x_u))$ vektorok függetlenek. Legyen $A := \frac{1}{2}(T_u^h + (T_u^h)^{-1})$ (A egy affin transzformáció, amely nem feltétlenül egybevágóság). Most azt kell belátnunk, hogy $x_u - T_u^e(x_v)$ és $x_u - A(x_u)$ lineárisan függetlenek valamely λ esetén. Indirekt tegyük fel, hogy minden λ esetén összefüggőek, ami azzal ekvivalens, hogy az $x_u, T_u^e(x_v), A(x_u)$ pontok minden λ esetén kollineárisak.

Ez azt jelenti, hogy $A(x_u) \in \mathsf{line}(T_u^e(x_v), x_u) = \mathsf{line}(T_u^e(x_v), T_u^f(x_w))$ minden $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén. Tehát $A\left(\mathsf{line}(T_u^e(x_v), T_u^f(x_w))\right) \subseteq \mathsf{line}(T_u^e(x_v), T_u^f(x_w))$ generikus x_v, x_w-re, azaz minden x_v, x_w esetén is. Ebből következik, hogy $A(l) \subseteq l$ az $\mathbb{R}^2$ minden l egyenese esetén, tehát $A = I$ (mert ha $u \in \mathbb{R}^2$ és $\{u\} = l_1 \cap l_2$, ahol l_1, l_2 egyenesek, akkor $A(u) \in l_1 \cap l_2 = \{u\}$). De $A = I$ ellentmond $R_h \neq 0$-nak.

Az $M_2 := [M_1, 0] \cup R_e \cup R_h$ sorai függetlenek a 3.21. Lemma miatt. Az $R_{ef} = \frac{1}{1-\lambda} R_e + \frac{1}{\lambda} R_f$ egyenlőség miatt (amely a 3.18. Lemma miatt igaz) az $M_3 := M_2 \cup R_f \setminus R_{ef}$ sorai függetlenek. De $M_3 = M_\alpha$ az x_u speciális választása mellett, ahol $\alpha|_{E'-vw} := \alpha'$ és $\alpha(uv) := e$, $\alpha(uw) := f$, $\alpha(uu) := h$. $\square$

A 3.9. Tétel bizonyítása a $d = 0$ esetben. A bizonyítás a $|V|$-re vonatkozó indukcióval történik. Ha $|V| \leq 2$, akkor G izosztatikus a 3.26. Lemma szerint. Tegyük fel, hogy $|V| \geq 3$. Ha G nem összefüggő, akkor legyen $X \subseteq V$ egy összefüggőségi komponense G-nek. Ha adott egy $\mathcal{E}$ 0-reguláris 2-rúd-rendszer G-hez, akkor az indukciós feltevés szerint létezik $G[X]$-nek egy α' izosztatikus él-realizációja $\mathcal{E}|_X$ felett, és létezik a $G[V-X]$-nek egy α'' izosztatikus él-realizációja $\mathcal{E}|_{V-X}$ felett. Ekkor az $\alpha' \cup \alpha''$ él-realizációja G-nek izosztatikus $\mathcal{E}$ felett, mert a merevségi mátrix $M_{\alpha' \cup \alpha''} = \begin{pmatrix} M_{\alpha'} & 0 \\ 0 & M_{\alpha''} \end{pmatrix}$, ahol $M_{\alpha'}, M_{\alpha''}$ a $G[X], G[V-X]$ merevségi mátrixai, amelyek invertálható négyzetes mátrixok.

Ha G összefüggő, akkor G előáll egy G' $[2,0]$-gráfból a 3.15. Tétel szerinti műveletekkel. Az indukciós feltevés szerint tudjuk, hogy G' izosztatikus minden 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett, és a 3.22, 3.25, 3.27, 3.29, 3.31 és 3.32. Lemmákból következik, hogy G is izosztatikus minden 0-reguláris 2-rúd-rendszer felett. $\square$

4. fejezet

Beágyazás kis rácsba

4.1. A Schwartz-lemma és a mozgatási-lemma

Ebben a fejezetben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy generikusan merev gráfoknak találjunk olyan merev realizációját (sőt nem-degenerált realizációt), amely kis koordinátákat használ, azaz a $p(v)$, $v \in V(G)$ vektorok koordinátái 1 és k közötti egészek legyenek, ahol k legyen minél kisebb.

Ilyen realizáció létezése következik a Schwartz-lemmából [43]. Ennek használatával egy olyan esetlegesen degenerált realizáció létezése biztosított, ahol $k = O(dn)$. Ebből azonnal következik, hogy egy gráf merevségének kérdése NP-beli probléma, valamint egy hatékony randomizált algoritmust is kapunk a merevség tesztelésére tetszőleges d dimenzióban. Ez az eredmény szintén megkapható a hamarosan következő „mozgatási lemmából”, amely a Schwartz-lemma egy determinisztikus változatának is tekinthető a merevségi mátrix részdeterminánsaiból származó polinomok esetére. Ezt a lemmát használjuk majd a fejezet fő eredményének a bizonyítására. Belátjuk, hogy $d = 2$ esetén egy $k = O(n^{\frac{1}{2}})$ méretű rács elegendő még akkor is, ha a csúcsok pozícióitól elvárjuk, hogy páronként különbözőek legyenek. Igazoljuk továbbá, hogy egy ilyen realizációt megtalálhatunk $O(n^3)$ időben.

Legyen (G, p) egy d dimenziós rúdszerkezet. Tegyük fel, hogy készítünk egy másik (G, p') rúdszerkezetet úgy, hogy az u csúcs pozíciójának l-edik koordinátáját valamely z valós számmal helyettesítjük, és minden mást változatlanul hagyunk. Ekkor azt mondjuk, hogy a (G, p') a (G, p)-ből keletkezett **az u csúcsnak az l tengelyen a z-be történő mozgatásával**.

4.1. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, és (G, p) egy d dimenziós infinitezimálisan merev realizációja. Legyen $v \in V$ egy kijelölt csúcs, l egy egész, melyre $1 \leq l \leq d$, és legyenek $z_1, z_2, ..., z_r$ különböző valós számok, ahol $r \geq d_G(v) + 1$. Ekkor létezik egy m egész, melyre $1 \leq m \leq r$, és a (G, p)-ből az u csúcsnak az l tengelyen a z_m-be történő mozgatásával kapott rúdszerkezet infinitezimálisan merev.*

Bizonyítás. Mivel (G,p) infinitezimálisan merev, így $r(R(G,p)) = S(n,d)$. Tehát $R(G,p)$-nek van egy T nem-szinguláris $S(n,d)$ méretű négyzetes részmátrixa. Az $R(G,p)$ definíciójából következik, hogy a $p(v)^l$ (a $p(v)$ l-edik koordinátája) a T-nek legfeljebb $d_G(v)$ sorában szerepel. Tehát ha a $p(v)^l$-et mindenütt egy x változóval helyettesítjük, akkor a T determinánsa egy x-ben legfeljebb $d_G(v)$-ed fokú polinom lesz, jelöljük ezt $T(x)$-szel. Mivel $T(p(v)^l) \neq 0$ és $r \geq d_G(v)+1$, létezik egy m egész, amelyre $1 \leq m \leq r$ és $T(z_m) \neq 0$. Tehát a merevségi mátrix rangja nem változik, ha a v-t az l tengely mentén z_m-be mozgatjuk. □

Jelölje $\mathbb{Z}_k^d \subset \mathbb{R}^d$ a következő rácspontok halmazát: $\{(x^1, x^2, ..., x^d) : x^i \in \mathbb{Z}, 1 \leq x^i \leq k$ minden $1 \leq i \leq d$ esetén$\}$. Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}^d$ pontot **fedi** a (H,q) rúdszerkezet, ha létezik olyan $v \in V(H)$, melyre $q(v) = x$. Ha ilyen nincs, akkor azt mondjuk, hogy x **fedetlen**. Ha adott egy (G,p) infinitezimálisan merev rúdszerkezet, akkor a 4.1. Lemma szerint bármely $v \in V$ csúcsát mozgathatjuk az l tengely mentén valamely 1 és $2|V(G)|-1$ közötti (G,p) által fedetlen pontba úgy, hogy a rúdszerkezet infinitezimálisan merev maradjon. Ezek alapján:

4.2. Következmény. *Legyen $G = (V,E)$ egy merev gráf $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor létezik egy infinitezimálisan merev nem-degenerált (G,p) rúdszerkezet, melyre $p(v) \in \mathbb{Z}^d_{2|V|-1}$ minden $v \in V$ esetén.*

4.2. A leemelés műveletének erősítése

A fejezet hátralevő részében tegyük fel, hogy $d = 2$. A Henneberg-műveleteket fogjuk alkalmazni. Azonban nekünk nem lesz jó tetszőleges harmadfokú csúcs, hanem egy olyan kell, amelynek van kisfokú szomszédja.

Jelölje $\delta(G)$ a minimális fokszámot a G gráfban. Az 1.15. Lemma szerint egy $G=(V,E)$ minimálisan merev gráfra, ha $|V| \geq 3$, akkor $\delta(G) \in \{2,3\}$.

4.3. Lemma. *Legyen $G = (V,E)$ egy minimálisan merev gráf, melyre $\delta(G) = 3$. Ekkor létezik egy $uv \in E$ éle, melyre $d(v) = 3$ és $d(u) \leq 8$.*

Bizonyítás. Legyen $A = \{w \in V : d(w) = 3\}$ és $B = V - A$. Mivel $\delta(G) = 3$, így $A \neq \emptyset$. Ha létezik él az A valamely két csúcsa között, akkor készen vagyunk. Tehát feltehetjük, hogy $\gamma(A) = 0$. Mivel G minimálisan merev, $\gamma(A) = 0$, és minden A-beli csúcs foka 3, ezért $|E| = 2|V| - 3 = 2|A| + 2|B| - 3$ és $d(A) = 3|A|$. Tehát $\gamma(B) = |E| - d(A) = 2|B| - |A| - 3$.

Legyen $D = \{x \in B : d_{G[B]}(x) \leq 3\}$. Nyilván minden $x \in D$ csúcsból megy legalább egy él A-ba. A

$$4|B-D| \leq \sum_{x \in B-D} d_{G[B]}(x) \leq 2\gamma(B) = 4|B-D| + 4|D| - 2|A| - 6 \tag{4.1}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy $|D| \geq |A|/2+1$. $d(A) = 3|A|$ miatt létezik egy $u \in D$ csúcs, amelyből legfeljebb 5 él megy A-ba. Mivel $d_{G[B]}(u) \leq 3$, ezért $d_G(u) \leq 8$. Tehát minden uv él, amelyre $v \in A$, kielégíti a lemma követelményeit. $\square$

4.3. Merev realizációk kis rácsban

4.4. Tétel. *Legyen a $G = (V, E)$ egy n csúcsú merev gráf. Ekkor létezik egy infinitezimálisan merev nem-degenerált (G, p) rúdszerkezet, amelyre $p(v) \in \mathbb{Z}_k^2$ minden $v \in V$ esetén, ahol $k = \lceil\sqrt{n-1}\rceil + 9$.*

Bizonyítás. A bizonyítás n-re vonatkozó teljes indukcióval történik. $n = 2$ esetén nyilvánvalóan igaz, tehát feltehetjük, hogy $n \geq 3$, és hogy minden legfeljebb $n-1$ csúcs merev gráfnak létezik megfelelő realizációja. Azt is feltehetjük, hogy G minimálisan merev, és így $\delta(G) \in \{2, 3\}$.

Tegyük fel először, hogy $\delta(G) = 2$, ekkor legyen a $v \in V$ a G gráf egy másodfokú csúcsa. Az 1.16. Lemma szerint a $H = G - v$ gráf minimálisan merev. Az indukciós feltevés szerint tehát van egy infinitezimálisan merev nem-degenerált (H, q), amelyre $q(z) \in \mathbb{Z}_k^2$ minden $z \in V(H)$ esetén. Legyen $N_G(v) = \{u, w\} \subseteq V(H)$, és legyen $L \subset \mathbb{R}^2$ a $q(u), q(w)$ pontokon átmenő egyenes. Azt állítjuk, hogy létezik egy $(x, y) \in \mathbb{Z}_k^2$ pont, amely nincs rajta L-len, és nem fedi (H, q). Ehhez figyeljük meg, hogy legfeljebb k rácspont van L-en és legfeljebb $|V(H)| - 2 = n-3$ nem L-beli pontot fed a (H, q). A

$$\begin{aligned} |\mathbb{Z}_k^2| &= k^2 \geq (\sqrt{n-1}+9)^2 = n-1+18\sqrt{n-1}+81 \\ &= n+18\sqrt{n-1}+80 > \sqrt{n-1}+10+n-3 \geq k+n-3 \end{aligned} \tag{4.2}$$

egyenlőtlenség miatt tehát valóban létezik ilyen pont. Legyen $p(v) = (x, y)$, és $p(z) = q(z)$ minden $z \in V - v$ esetén. Az 1.13. Lemma és az (x, y) választása miatt a (G, p) egy megfelelő infinitezimálisan merev rúdszerkezet.

Most tegyük fel, hogy $\delta(G) = 3$. A 4.3. Lemma szerint létezik egy uv él, amelyre $d_G(v) = 3$ és $d_G(u) \leq 8$. Legyen $N_G(v) = \{u, w, t\}$. Az 1.16. Lemma szerint be lehet húzni a G gráfba egy olyan e élet az $N_G(v)$ két különböző csúcsa közé, hogy a $H = G - v + e$ gráf minimálisan merev legyen. Az indukciós feltevés szerint tehát van egy infinitezimálisan merev nem-degenerált (H, q), amelyre $q(z) \in \mathbb{Z}_k^2$ minden $z \in V(H)$ esetén.

4.5. Állítás. *Létezik egy infinitezimálisan merev (H, q') rúdszerkezet, amelyre $q'(z) \in \mathbb{Z}_k^2$ minden $z \in V(H)$ esetén úgy, hogy $q'(u), q'(w), q'(t)$ nem kollineárisak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $q(u), q(w), q(t)$ kollineárisak. Szimmetriai okok miatt feltehetjük, hogy a $q(u), q(w), q(t)$ pontokra illeszkedő egyenes nem függőleges. Tegyük fel indirekt, hogy azon $\mathbb{Z}_k^2$-beli oszlopok száma, amelyekből legalább $k-9$ rácspontot fed (H, q), legalább $k-8$. Ekkor

$$\begin{aligned} n-1 &= |V(H)| \geq (k-8)(k-9) \\ &> (k-9)^2 \geq (\sqrt{n-1}+9-9)^2 = n-1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ez pedig ellentmondás. Tehát van legalább 9 oszlop, amelyben legalább 10 (H, q) által fedetlen pont van. Ez a tény, a 4.1. Lemma, valamint az, hogy $d_H(u) \leq d_G(u) \leq 8$, mutatja, hogy mozgathatjuk u-t vízszintesen egy olyan (x, y) pontba, amely a $\mathbb{Z}_k^2$ rács egy olyan C oszlopára illeszkedik, amelyben van legalább 10 (H, q) által fedetlen pont, és a kapott rúdszerkezet még mindig infinitezimálisan merev. Megjegyezzük, hogy u-nak ez az ideiglenes pozíciója esetleg lehet (H, q) által fedett pont.

Mivel a C oszlopban van legalább 10 fedetlen rácspont, így van legalább 9 olyan fedetlen rácspont, $(x, y_1), (x, y_2), \ldots, (x, y_9)$, amelyre $q(t), q(w), (x, y_i)$ nem kollineáris minden $1 \leq i \leq 9$ esetén. Újból alkalmazva a 4.1. Lemmát azt kapjuk, hogy mozgathatjuk az u csúcsot függőlegesen egy $q'(u) = (x, y_i)$ $(1 \leq i \leq 9)$ pozícióba úgy, hogy a kapott (H, q') rúdszerkezet (ahol tehát $q'(z) = q(z)$ minden $z \in V(H) - u$ esetén) infinitezimálisan merev marad, és $q'(u), q'(w), q'(t)$ nem kollineáris. □

A 4.5. Állítás miatt feltehetjük, hogy $q(u), q(w), q(t)$ nem kollineárisak. Tegyük még fel, hogy $e = uw$, azaz a v-nél történő leemelés az uw élet adja a gráfhoz (többször már nem fogjuk használni, hogy $d_G(u)$ kicsi). Először készítsünk egy infinitezimálisan merev (G, p') rúdszerkezetet (H, q)-ból egy 1-kiterjesztés alkalmazásával úgy, hogy a $p'(v)$ pozíció a $q(u), q(w)$-re illeszkedő egyenes és a rács egy oszlopának a metszéspontja legyen (megint feltehetjük szimmetriai okok miatt, hogy a $q(u), q(w)$-re illeszkedő egyenes nem függőleges). Ezt megtehetjük az 1.14. Lemma miatt, mivel a $q(u), q(w), q(t)$ nem kollineáris és $k \geq 3$. A v csúcs most meghatározott ideiglenes pozíciója nem feltétlenül rácspont és nem feltétlenül (H, q) által fedetlen.

Azt állítjuk, hogy a $\mathbb{Z}_k^2$ rács azon sorainak száma, amelyek legalább 4 (G, p') által fedetlen rácspontot tartalmaznak, legalább 4. Indirekt tegyük fel, hogy legalább $k-3$ sor tartalmaz legalább $k-3$ (G, p') által fedett rácspontot. Ekkor

$$\begin{aligned} n &= |V(G)| \geq (k-3)^2 \geq (\sqrt{n-1}+9-3)^2 \\ &= (\sqrt{n-1}+6)^2 = n-1+12\sqrt{n-1}+36 > n, \end{aligned} \tag{4.4}$$

és ez ellentmondás. Tehát a 4.1. Lemmát a harmadfokú v csúcsra alkalmazva azt kapjuk, hogy mozgathatjuk függőlegesen a v csúcsot úgy, hogy egy olyan sorba kerüljön, ahol van legalább 4 fedetlen rácspont, és a rúdszerkezet infinitezimálisan merev maradjon. Ez is még ideiglenes pozíció, és esetleg (H, q) által fedett. Végül mivel $d_G(v) = 3$, a 4.1. Lemma szerint mozgathatjuk vízszintesen a v-t úgy, hogy egy fedetlen pontba kerüljön, és a rúdszerkezet infinitezimálisan merev maradjon. Ezzel elértük, hogy a kapott (G, p) infinitezimálisan merev rúdszerkezet minden csúcsának pozíciója különböző rácspontja $\mathbb{Z}_k^2$-nak. Ezzel a tételt beláttuk. □

4.4. Algoritmus

A 4.4. Tétel bizonyítása algoritmikus. Ha adott egy n csúcsú G' merev gráf, akkor annak egy G minimálisan merev feszítőrészgráfja és annak egy Henneberg-előállítása megtalálható $O(n^3)$ időben (lásd például [2]-t és a benne található hivatkozásokat). Ezt használva a G egy infinitezimálisan merev realizációját megkaphatjuk a kiterjesztés műveletekkel és a mozgatásokkal, amelyeket a 4.4. Tétel bizonyítása során végeztünk. Belátható, hogy az ehhez használt aritmetikai műveletek száma szintén $O(n^3)$.

Első ránézésre $O(n^4)$ az, ami nyilvánvaló, mert amikor egyesével vesszük hozzá a csúcsokat, akkor minden új csúcs elhelyezésénél konstans sok Gauss-eliminációval ellenőrizzük, hogy az adott pozícióban független-e a rúdszerkezet, tehát $O(n)$-szer végrehajtunk egy $O(n^3)$ futásidejű Gauss-eliminációt. Valójában azonban nem kell mindig újraszámolni a Gauss-eliminációkat, hiszen nagyon hasonló mátrixokra kell végrehajtani, és ezt könnyen kihasználhatjuk.

Lényegében azt állítjuk, hogy ha egy mátrixon végrehajtottuk a Gauss-eliminációt, ezután ha ennek a mátrixnak egy sorát megváltoztatjuk, vagy egy új sort hozzáveszünk, akkor ennek a Gauss-elimináltja $O(n^2)$ időben számolható. Ez a tartalma a következő bekezdéseknek.

4.6. Állítás. *1. Tegyük fel, hogy A invertálható $n \times n$-es mátrix, és $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektorok. Ekkor $A + uv^\mathsf{T}$ pontosan akkor invertálható, ha $(1 + v^\mathsf{T} A^{-1} u) \neq 0$, és ez esetben az inverze:*

$$(A + uv^\mathsf{T})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^\mathsf{T} A^{-1}}{1 + v^\mathsf{T} A^{-1} u}$$

2. Tegyük fel, hogy A invertálható $n \times n$-es mátrix, $b, c \in \mathbb{R}^n$ vektorok, és $d \in \mathbb{R}$ egy szám, ekkor a $\begin{pmatrix} A & b \\ c^\mathsf{T} & d \end{pmatrix}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha $c^\mathsf{T} A^{-1} b - d \neq 0$, és ekkor az inverze:

$$\begin{pmatrix} A^{-1} - \frac{A^{-1} b c^\mathsf{T} A^{-1}}{c^\mathsf{T} A^{-1} b - d} & \frac{A^{-1} b}{c^\mathsf{T} A^{-1} b - d} \\ \frac{c^\mathsf{T} A^{-1}}{c^\mathsf{T} A^{-1} b - d} & \frac{-1}{c^\mathsf{T} A^{-1} b - d} \end{pmatrix}$$

Bizonyítás. (1) Ha $(1 + v^\mathsf{T} A^{-1} u) = 0$, akkor egyrészt $u \neq 0$, tehát $A^{-1}u \neq 0$, és könnyen ellenőrizhető, hogy $A^{-1}u$ benne van $(A + uv^\mathsf{T})$ magterében, tehát ekkor nem invertálható. Ha $(1 + v^\mathsf{T} A^{-1} u) \neq 0$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott mátrix tényleg inverze $(A + uv^\mathsf{T})$-nak.

(2) $c^\mathsf{T} A^{-1} b - d = 0$, akkor $\begin{pmatrix} A^{-1}b \\ -1 \end{pmatrix}$ egy olyan nemnulla vektor, amely benne van $\begin{pmatrix} A & b \\ c^\mathsf{T} & d \end{pmatrix}$ magterében. Ha $c^\mathsf{T} A^{-1} b - d \neq 0$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott mátrix valóban az inverz. $\square$

A 4.6. Állításból következik, hogy ha ismert A^{-1}, u, v, akkor $(A + uv^\mathsf{T})^{-1}$ kiszámolható $O(n^2)$ aritmetikai művelettel, hiszen az $A^{-1}u, v^\mathsf{T} A^{-1}$ vektorok $O(n^2)$ művelettel számolhatóak, és ezekből az $1 + v^\mathsf{T} A^{-1} u$ érték $O(n)$ időben, valamint az $A^{-1}uv^\mathsf{T} A^{-1}$ mátrix $O(n^2)$ művelettel kapható, tehát a végeredmény összesen is $O(n^2)$ művelet. Hasonlóan látható, hogy A^{-1}, b, c, d ismeretében az $\begin{pmatrix} A & b \\ c^\mathsf{T} & d \end{pmatrix}$ mátrix inverze $O(n^2)$ időben számolható. Az $(A + uv^\mathsf{T})$ inverzének kiszámítását $(A + e_n v^\mathsf{T})$-re fogjuk csak használni, ahol e_n az n-edik egységvektor. Azaz az A utolsó sorának megváltoztatásával az inverz $O(n^2)$ művelettel újraszámolható.

Ennek következménye az is, hogy ha A invertálható, $O(n^2)$ művelettel meg tudjuk találni az első $n-1$ sorának egy $(n-1) \times (n-1)$-es invertálható részmátrixát és annak az inverzét. Ugyanis ha az A utolsó sorát kicseréljük ${e_i}^\mathsf{T}$-ra, akkor valamely $i = 1, \ldots, n$ esetén a kapott mátrix invertálható kell, hogy legyen, mert nem generálhatja ki az első $n-1$ sor az összes egységvektort. Jelölje a^T az A utolsó sorát, ekkor az, hogy $A + e_n(e_i - a)^\mathsf{T}$ invertálható-e, azon múlik, hogy $(1 + (e_i - a)^\mathsf{T} A^{-1} e_n) = 0$ teljesül-e. Egy megfelelő i-t tehát találhatunk $O(n^2)$ művelettel, kiszámoljuk az $A^{-1}e_n$ vektort ($O(n^2)$ művelet), majd ezzel kell csak egyenként összeszorozni az $e_i - a$ vektorokat, ami egyesével $O(n)$ művelet, tehát $O(n^2)$ művelettel tényleg találhatunk egy jó i-t. Ekkor azt állítjuk, hogy az első $n-1$ sornak az az $(n-1) \times (n-1)$-es részmátrixa invertálható, amelyet úgy kapunk, hogy kihagyjuk az i-edik oszlopot, sőt az inverz az éppen ugyanazon helyen levő $(n-1) \times (n-1)$-es részmátrixa az $A + e_n(e_i - a)^\mathsf{T}$ inverzének. Ez abból látható, hogy ha $M \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ és $v \in \mathbb{R}^{n-1}$, akkor egy $\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alakú mátrix inverze $\begin{pmatrix} M^{-1} & -M^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ez például a 4.6. Állítás következménye).

4.7. Állítás. *Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sorvektorok, ahol $k \leq n$. Legyen A a belőlük alkotott $k \times n$-es mátrix. Tegyük fel, hogy B az A-nak egy $k \times k$-as invertálható részmátrixa.*

1. *Tegyük fel, hogy $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$, és legyen az A' a $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ vektorokból, mint sorokból alkotott mátrix. Ekkor a B és B^{-1} ismeretében $O(n^2)$ időben eldönthető, hogy*

v_{k+1} függ-e lineárisan $v_1, v_2, \ldots, v_k$-tól, és ha nem, akkor kiszámolható az A' mátrixnak is egy invertálható $(k+1) \times (k+1)$-es részmátrixa.

2. *Tegyük fel, hogy $v'_k \in \mathbb{R}^n$, és legyen az A' a $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v'_k$ vektorokból, mint sorokból alkotott mátrix. Ekkor a B és B^{-1} ismeretében $O(n^2)$ időben eldönthető, hogy v'_k függ-e lineárisan $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$-től, és ha nem, akkor kiszámolható az A' mátrixnak egy invertálható $k \times k$-as részmátrixa.*

Bizonyítás. (1) Jelölje az A mátrix oszlopait $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^k$, és a v_{k+1} vektor koordinátái legyenek $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$. Jelölje $I \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$ azt a k elemű indexhalmazt, amely a B részmátrix oszlopainak az indexét adja meg, valamint jelölje $z \in \mathbb{R}^k$ azt a sorvektort, amelynek koordinátái $w_j : j \in I$, azaz z az A'-ben a B alatti sor megfelelő része. Amit keresünk, az egy $i \in \{1, 2, \ldots n\} \setminus I$ index, amelyre $\begin{pmatrix} B & a_i \\ z^\mathsf{T} & w_i \end{pmatrix}$ invertálható. A 4.6. Állítás (2)-es része szerint ez azt jelenti, hogy $zBa_i - w_i \neq 0$. zB-t $O(nk)$ művelettel kiszámoljuk, majd egy adott i-re $O(k)$ művelettel eldöntjük, hogy $zBa_i - w_i \neq 0$ teljesül-e, összesen ez $O(k)$ művelet. Ha találtunk egy megfelelő i-t, akkor a 4.6. Lemma szerint $O(k^2)$ művelettel meghatározható az inverz is.

(2) Hagyjuk ki az A utolsó sorát, és határozzuk meg a B-nek az első $k-1$ sorának egy olyan $(k-1) \times (k-1)$-es részmátrixát, amely invertálható. Mint meggondoltuk, ez $O(k^2)$ művelettel megtehető. Ezek után jelen állítás (1)-es pontját alkalmazhatjuk. □

Tehát egy merev gráf infinitezimálisan merev realizációja a $\mathbb{Z}_k^2$ rácson megtalálható $O(n^3)$ időben (amennyiben a futási időbe egy aritmetikai művelet egyet számít bele), ahol $k = \lceil \sqrt{n-1} \rceil + 9$.

4.5. További kérdések

Mivel mi nem-degenerált rúdszerkezeteket tekintettünk, így a k-ra kapott korlát lényegében a lehető legjobb. Kérdés, hogy esetleg lehetséges-e megadni egy $n+c$ pontú S részhalmazát az $\mathbb{R}^2$-nek valamely c konstansra úgy, hogy minden n csúcsú merev gráfnak legyen nem-degenerált infinitezimálisan merev realizációja S-en.

Ha megengedünk degenerált rúdszerkezeteket is, akkor az alábbi alsó korlátunk van. Legyen H egy minimálisan merev gráf egy legalább $k \geq 2$ elemű K csúcshalmazon, és legyen G az a gráf, amelyet úgy kapunk H-ból, hogy felveszünk $\binom{k}{2}$ új csúcsot úgy, hogy minden K-beli csúcspárhoz felveszünk egyet-egyet, és mindegyiket összekötjük a hozzá tartozó csúcspár mindkét elemével. Ekkor G-nek $n = \binom{k+1}{2}$ csúcsa lesz, és tetszőleges infinitezimális realizáció mellett a K csúcsok pozíciói különbözőek kell, hogy legyenek. Tehát ebből adódik egy $\Omega(n^{\frac{1}{4}})$-es alsó korlát a szükséges rácsméretre.

Érdekes tény, hogy az egydimenziós esetben minden merev gráfnak (ami itt összefüggőt jelent) van infinitezimálisan merev (és ha a gráf legalább három csúcsú, akkor degenerált) realizációja egy kétcsúcsú rácson. Ez azon múlik, hogy az egy dimenzióban minimálisan merev gráfok, a fák, és a fák páros gráfok. Könnyen bizonyítható, hogy ha egy fának, mint páros gráfnak, a két osztályát az egyenes egy-egy pontjára képezve a fa egy infinitezimálisan merev realizációját kapjuk.

Ez motiválja azt a kérdést, hogy talán nem is a csúcsok számával, hanem esetleg a gráf kromatikus számával korlátozhatnánk a szükséges különböző pozíciók számát. Ez azonban nem igaz, amit szintén a fenti példa segítségével láthatunk. Tekintsük ehhez az előbb definiált G gráf egy teszőleges minimálisan merev feszítő G' részgráfját. Az nyilvánvaló, hogy G' merev realizációjához is legalább annyi különböző pozícióra van szükségünk, mint G realizációjához, azaz kell legalább $\sqrt{n}$ pozíció. Viszont egy Laman-gráf mindig kiszínezhető 4 színnel, amit a Henneberg-féle előállításából (1.12. Tétel) könnyen láthatunk, ugyanis minden új csúcsot felvételekor legfeljebb három régivel kötünk össze, tehát az előállítás során minden csúcsnak tudunk megfelelő színt választani. Tehát G' egy olyan n csúcsú 4-színezhető gráf, amely merev realizációjához szükségünk van legalább $\sqrt{n}$ pozícióra.

5. fejezet

Merev realizáció 2 azonos pozícióval

Azt vizsgáljuk ebben a fejezetben, hogy mikor létezik egy gráfnak olyan infinitezimálisan merev realizációja a síkban, ahol két kijelölt csúcs egybeesik. Ezt a kérdést Jordán Tibornak és Bill Jacksonnak a [26]-beli eredménye motiválta, ahol karakterizálták, hogy mikor lehet úgy merev módon realizálni egy gráfot, hogy adott három csúcsa egy egyenesre essék.

5.1. Definíciók

A célunk az, hogy a függetlenség fogalmát, az izosztatikus gráfokat, a rangot illetve a merev gráfokat karakterizáljuk két adott csúcs pozíciójának egybeesése esetén. Azaz szeretnénk a Laman-tétel és a Lovász-Yemini-tétel megfelelőit megtalálni arra az esetre, ha meg van követelve két adott csúcs egybeesése. Röviden szólva az itt keletkező matroidot akarjuk karakterizálni. Ezt egy Henneberg-típusú előállítási tétel segítségével tesszük. Az izosztatikus gráfokra adunk egy előállítási tételt, amiből következni fog az izosztatikus gráfok karakterizációja is.

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $u \neq v \in V$ két kijelölt csúcs. Egy $x : V \to \mathbb{R}^2$ realizációt $u = v$**-generikus**nak nevezünk, ha $x_u = x_v$, és az $\{x_z : z \in V - u\}$ koordinátáinak halmaza generikus. Jelölje $M_{u=v}$ egy $u = v$-generikus realizáció merevségi mátrixát, és jelölje az $\mathcal{M}_{u=v}$ az $M_{u=v}$ mátrix sorai által definiált matroidot, azaz egy $u = v$-generikus realizáció merevségi matroidját. Nyilván ugyanazt a matroidot kapjuk, bármelyik $u = v$-generikus realizációt választjuk is. Azt mondjuk, hogy egy gráf $u = v$**-merev**, ha a rangja $\mathcal{M}_{u=v}$-ben $2|V| - 3$, azaz ha egy $u = v$-generikus realizációja infinitezimálisan merev. Könnyen látható, hogy egy gráf pontosan akkor $u = v$-merev, ha létezik olyan infinitezimálisan merev x realizációja, amelyre $x_u = x_v$. Azt mondjuk, hogy egy $F \subseteq E$ élhalmaz $u = v$**-független**, ha F független $\mathcal{M}_{u=v}$-ben. Egy G gráfot $u = v$**-izosztatikus**nak nevezünk, ha $u = v$-merev, és (az élhalmaza) $u = v$-független. Célunk a most bevezetett fogalmak, azaz az $\mathcal{M}_{u=v}$

matroid (a függetlenek, bázisok, generátorok és a rang) kombinatorikus karakterizációja.

5.2. Szükséges feltétel

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $u \neq v \in V$ két kijelölt csúcs. Legyen $V' := V - \{u, v\} + \{z_{uv}\}$, ahol a z_{uv} jelöljön egy a többitől különböző, új elemet. A $G/\{u, v\}$ jelölje az összehúzott gráfot a hurkok és többszörös élek törlése után, és tekintsük ennek a gráfnak a csúcshalmazát V'-nek, ahol az $\{u, v\}$ halmaznak a z_{uv} csúcs feleljen meg.

Egy tetszőleges $x : V' \to \mathbb{R}^2$ vektor esetén jelölje $\overline{x} : V \to \mathbb{R}^2$ a következő vektort: $\overline{x}_w := x_w$, ha $w \in V - \{u, v\}$, $\overline{x}_u := x_{z_{uv}}$ és $\overline{x}_v := x_{z_{uv}}$. A definíciók alapján könnyen belátható az alábbi lemma.

5.1. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $u \neq v \in V$, és legyen $x : V' \to \mathbb{R}^2$ generikus. Ha $m : V' \to \mathbb{R}^2$ egy infinitezimális izometriája $(G/\{u, v\}, x)$-nek, akkor $\overline{m}$ egy infinitezimális izometriája $(G, \overline{x})$-nek.*

Ennek segítségével levezetjük az $u = v$-függetlenség egy szükséges feltételét.

5.2. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $u \neq v \in V$, és legyen x egy $u = v$-generikus realizációja. Ha $F \subseteq E$ $u = v$-független, akkor $uv \notin E$, és $\gamma(X) \leq 2|X| - 3$ teljesül minden $X \subseteq V, |X| \geq 2$ esetén, valamint $|\cup_{X \in \mathcal{X}} F(X)| \leq \sum_{X \in \mathcal{X}} (2|X| - 3) - 2(|\mathcal{X}| - 1)$ teljesül, ha $\mathcal{X}$ minden X elemére $\{u, v\} \subsetneq X \subseteq V$.*

Bizonyítás. Az $\gamma(X) \leq 2|X| - 3$ egyenlőtlenségnek nyilván teljesülnie kell minden $X \subseteq V, |X| \geq 2$ esetén (ugyanúgy, mint a hagyományos esetben). Az is nyilvánvaló, hogy $uv \notin E$, mert $uv \in E$ esetén ez az él egy azonosan nulla sort jelentene a merevségi mátrixban. Legyen $\mathcal{X}$ olyan halmazrendszer, amelynek minden X elemére $\{u, v\} \subsetneq X \subseteq V$. Ekkor legyen $G_1 := (\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X, \bigcup_{X \in \mathcal{X}} F(X))$. A G_1 gráf merevségi matroidbeli rangjára: $r(G_1/\{u, v\}) \leq \sum_{X \in \mathcal{X}} (2(|X| - 1) - 3)$, tehát $G_1/\{u, v\}$-nek van legalább $2(|\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X| - 1) - \sum_{X \in \mathcal{X}} (2|X| - 5)$ lineárisan független infinitezimális izometriája. Ezek pedig az 5.1. Lemma szerint kiterjednek a G_1 lineárisan független $u = v$-izometriáivá. Tehát $r_{u=v}(G_1) \leq 2|\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X| - \left(2(|\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X| - 1) - \sum_{X \in \mathcal{X}} (2|X| - 5)\right) = \sum_{X \in \mathcal{X}} (2|X| - 3) - 2k + 2$. A feltétel szerint G_1 független, tehát $r_{u=v}(G_1) = |\cup_{X \in \mathcal{X}} F(X)|$. $\square$

Bevezetünk két műveletet az $u = v$-izosztatikus gráfok előállításához. Ezek a szokásos Henneberg-műveletek módosításai. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. A 0-uv-kiterjesztés művelete felvesz egy új csúcsot, összeköti az $a, b \in V$ csúcsokkal úgy, hogy $a \neq b$ és $\{a, b\} \neq \{u, v\}$. Az 1-uv-kiterjesztés művelete kiválaszt három különböző $a, b, c \in V$ csúcsot, amelyekre

$ab \in E$ és $|\{a,b,c\} \cap \{u,v\}| \leq 1$, törli az ab élet, felvesz egy új csúcsot, és összeköti az a,b,c csúcsokkal.

Használni fogjuk a hagyományos Henneberg-műveletekről szóló lemmákat: az 1.13 és az 1.14. Lemma. Megjegyezzük, hogy az 1.13 és az 1.14. Lemmákban a $p(v)$ pont választható egy már a (G,p) által esetlegesen fedett pontnak. Az 1.13 és az 1.14. Lemmák azonnali következménye a következő.

5.3. Lemma. *Ha G' a $G=(V,E)$-ből kapható egy 0-uv-kiterjesztés vagy egy 1-uv-kiterjesztés segítségével, és G $u=v$-független, akkor G' is $u=v$-független.*

5.3. A matroid definíciója és a leemelési tétel

Definiáljuk halmazrendszereknek két családját: legyen $\mathcal{F}_1 := \{\{X\} : X \subseteq V, |X| \geq 2\}$, valamint legyen $\mathcal{F}_2 := \{H : |X| \geq 3,\ u,v \in X \subseteq V$ minden $X \in H$ esetén, és $|H| \geq 2\}$. Ezek uniója legyen $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Ha $H \in \mathcal{F}$, akkor legyen:

$$val(H) := \begin{cases} 2|X|-3 & \text{ha } H=\{X\} \in \mathcal{F}_1, \\ \sum_{X\in H}(2|X|-3)-2(|H|-1) & \text{ha } H \in \mathcal{F}_2. \end{cases}$$

Ha $H \in \mathcal{F}$, akkor legyen $E(H) := \cup_{X\in E} E(X)$, valamint legyen $\gamma_F(H) := |F(H)|$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ egy fedése az F élhalmaznak a V csúcshalmazon, ha $F \subseteq \cup_{H\in\mathcal{H}} E(H)$. Egy fedés értéke a következő:

$$val(\mathcal{H}) := \sum_{H\in\mathcal{H}} val(H).$$

Definiálunk egy matroidot. Legyen $G=(V,E)$ egy gráf és $u \neq v \in V$. Jelölje $\mathcal{I}$ azon $F \subseteq E-uv$ élhalmazokból álló halmazrendszert, amelyre $\gamma_F(H) \leq val(H)$ teljesül minden $H \in \mathcal{F}$ esetén.

Tehát az uv él definíció szerint hurok lesz, hiszen úgy definiáltuk a függetleneket, hogy azok mind részei $E-uv$-nek. Ezt úgy is meg lehetett volna oldani, hogy az $\{u,v\} \in \mathcal{F}_1$ halmazon a val értéket nullának definiáljuk, és akkor nem kell az $F \subseteq E-uv$ megszorítás, hanem egyszerűen $F \subseteq E$-t írhatunk.

5.4. Tétel. *Az $\mathcal{I}$ halmazrendszer egy matroid függetlenjeit határozza meg az E alaphalmazon. Egy $F \subseteq E$ élhalmaz rangja a következő:*

$$\min_{\mathcal{H}} val(\mathcal{H}), \tag{5.1}$$

ahol a minimumot az $F-uv$ fedései felett vesszük.

Bizonyítás. Legyen $F \subseteq E - uv$ tetszőleges, és F' legyen egy tartalmazásra nézve maximális olyan élhalmaz, amely benne van $\mathcal{I}$-ben és részhalmaza F-nek. Belátjuk, hogy $|F'| = \min_{\mathcal{H}} val(\mathcal{H})$, ahol $\mathcal{H}$ az $F - uv = F$ fedésein fut, és ez igazolja a tételt. $|F'| \leq \min_{\mathcal{H}} val(\mathcal{H})$ teljesül minden $\mathcal{H}$ fedésére F-nek. Tehát elég belátni, hogy létezik egy olyan $\mathcal{H}$ fedése F-nek, amelyre $|F'| = val(\mathcal{H})$. Minden $e = xy \in F$ esetén létezik egy $H \in \mathcal{F}$ úgy, hogy H fedi e-t és $\gamma_{F'}(H) = val(H)$. Ugyanis ha $e \in F - F'$, akkor $F' + e \notin \mathcal{I}$-ből következik, ha pedig $e \in F'$, akkor $H := \{x, y\}$ egy ilyen halmaz. Minden $e \in F$-hez válasszunk egy olyan H-t, amelyre H fedi e-t, $\gamma_{F'}(H) = val(H)$, és ezek közül is olyat, melyre az alábbi vektor lexikografikusan maximális: $(|\cup H|, -|H|)$. Jelölje $\mathcal{H}$ ezen halmazok halmazrendszerét. Azt állítjuk, hogy ezek a pontos halmazok F-éldiszjunktak.

Indirekt tegyük fel, hogy $F(H_1) \cap F(H_2) \neq \emptyset$. Három eset van.

(1) $H_1 \in \mathcal{F}_1$, $H_2 \in \mathcal{F}_1$. Legyen $H_1 = \{X_1\}$ és $H_2 = \{X_2\}$. Ekkor $val(H_1) + val(H_2) = \gamma_{F'}(X_1) + \gamma_{F'}(X_2) \leq \gamma_{F'}(X_1 \cap X_2) + \gamma_{F'}(X_1 \cup X_2) \leq val(\{X_1 \cap X_2\}) + val(\{X_1 \cup X_2\}) = val(H_1) + val(H_2)$, tehát mindenütt egyenlőség áll, és így $\{X_1 \cup X_2\}$ ellentmond a H_1 vagy H_2 maximalitásának.

(2) $H_1 \in \mathcal{F}_1$, $H_2 \in \mathcal{F}_2$. Legyen $H_1 = \{X\}$, és legyen $Y \in H_2$ egy olyan halmaz, amelyre $|X \cap Y| \geq 2$. Legyen $H_3 := H_2 - \{Y\} + \{X \cup Y\}$. Ekkor $val(H_1) + val(H_2) = \gamma_{F'}(H_1) + \gamma_{F'}(H_2) \leq \gamma_{F'}(X \cap Y) + \gamma_{F'}(H_3) \leq val(\{X \cap Y\}) + val(H_3) = val(H_1) + val(H_2)$, tehát mindenütt egyenlőség áll, és így H_3 ellentmond H_1 vagy H_2 maximalitásának.

(3) $H_1 \in \mathcal{F}_2$, $H_2 \in \mathcal{F}_2$. Tudjuk tehát, hogy $E(H_1) \cap E(H_2) \neq \emptyset$, ekkor létezik $A \in H_1, B \in H_2$, melyekre $|A \cap B| \geq 3$. Legyen $H := H_1 \cup H_2$. Alkalmazzuk a következő kikeresztezési eljárást H-ra: ha $X, Y \in H$ olyan, hogy $|X \cap Y| \geq 3$, $X - Y \neq \emptyset$ és $Y - X \neq \emptyset$ akkor cseréljük ki X, Y-t $X \cup Y, X \cap Y$-ra. Ezen eljárás során a $\sum_{X \in H} |X|^2$ mennyiség szigorúan nő, másrészt ez a mennyiség nyilvánvalóan legfeljebb $|H||V|^2$ lehet, következésképpen az eljárás véges. Az eljárás során megengedjük, hogy a halmazrendszerünkbe egy halmaz többszörösen is belekerüljön. Ezt figyelembevéve az eljárás során a halmazrendszer elemszáma valamint a V csúcsainak H-ra vett fedési száma nem változik

A kikeresztezési eljárás végén kapunk egy olyan H' halmazrendszert, amelyre az $\mathcal{L} := \{X - \{u, v\} : H \in H'\}$ lamináris, $val(H') = val(H)$, és $E(H) \subseteq E(H')$. Legyen $H_3 := \{X \in H' : X - \{u, v\}$ tartalmazásra maximális $\mathcal{L}$-ben$\}$, és legyen $H_4 := H' - H_3$. H_4 nem üres, mert létezik egy $e \in F$ él, amelyet H legalább kétszeresen fed, és ez az él H'-ben is legalább kétszeresen fedve van. Ekkor $val(H_3) + val(H_4) = val(H') - 2 = val(H) - 2 = val(H_1) + val(H_2)$. Ezért $val(H_1) + val(H_2) = \gamma_{F'}(H_1) + \gamma_{F'}(H_2) \leq \gamma_{F'}(H_1 \cap H_2) + \gamma_{F'}(H_1 \cup H_2) \leq val(H_3) + val(H_4) = val(H_1) + val(H_2)$.

Figyeljük meg, hogy a kikeresztezés folyamán megmarad az, hogy minden pontot ugyanannyiszor fed az aktuális halmazrendszer, valamint fennmarad az a tulajdonság is, hogy minden eredeti halmaz része az aktuális halmazrendszer valamelyik elemének. Emiatt persze minden eredeti halmaz része a H_3 valamelyik elemének.

Ha $|\cup H_3|$ nagyobb, mint $|\cup H_1|$ vagy $|\cup H_2|$, akkor ez ellentmondana a H_1 vagy H_2 maximalitásának. Ha viszont $|\cup H_3|$ nem nagyobb ezeknél, az csak úgy lehet, hogy $\cup H_3 = \cup H_1 = \cup H_2$, mert $(\cup H_1) \cup (\cup H_2) \subseteq \cup H_3$. De $\cup H_3 = \cup H_1 = \cup H_2$-ből következik, hogy mivel H_1 és H_2 minden eleme is része H_3 valamely elemének, és H_1, H_2-nek van legalább három csúcsban metsző eleme, így $|H_3|$ kisebb, mint $|H_1|$ és $|H_2|$ (itt használjuk az $\{X - \{u,v\} : X \in H_3\}$ halmazrendszer laminaritását), ami ellentmond ezek minimalitásának.

Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{H}$ elemei F-éldiszjunktak. Ekkor pedig $|F'| = \sum_{H \in \mathcal{H}} \gamma_{F'}(H) = \sum_{H \in \mathcal{H}} val(H)$. $\square$

Jelölje $\mathcal{M}'_{u=v}$ azt a matroidot, melynek független halmazai az $\mathcal{I}$ elemi. Azt fogjuk belátni, hogy $\mathcal{M}_{u=v} = \mathcal{M}'_{u=v}$. A következő lemma az $\mathcal{I}$ definíciója alapján könnyen ellenőrizhető.

5.5. Lemma. *Ha G' a $G = (V,E)$-ből kapható egy 0-uv-kiterjesztés vagy egy 1-uv-kiterjesztés segítségével, és G független $\mathcal{M}'_{u=v}$-ben, akkor G' is független $\mathcal{M}'_{u=v}$-ben.*

5.6. Lemma. *Legyen $G = (V,E)$ egy gráf és $u \neq v \in V$. Ha minden csúcs foka legalább 3 és $|E| = 2|V| - 3$, akkor létezik egy $z \in V - \{u,v\}$ csúcs, amelyre $d(z) = 3$ és $|N(z) \cap \{u,v\}| \leq 1$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy minden harmadfokú csúcs benne van az $(N(v) \cap N(u)) \cup \{u,v\}$ halmazban. Legyen $m := |\{t \in N(u) \cap N(v) : d(t) = 3\}|$. Három esetet különböztetünk meg.

(1) $d(u) = d(v) = 3$. Ebben az esetben $4|V| - 6 = \sum_{t \in V} d(t) \geq 6 + 3m + 4(|V| - m - 2)$, ebből következik, hogy $m \geq 4$, ami ellentmond annak, hogy $|N(v)| = 3$.

(2) $d(u) \geq 4$, $d(v) \geq 4$. Ebben az esetben m a G-beli harmadfokú csúcsok száma, tehát $m \geq 6$, mivel $3m + 4(|V| - m) \leq \sum d(t) = 4|V| - 6$. Ekkor $4|V| - 6 = \sum_{t \in V} d(t) \geq d(u) + d(v) + 3m + 4(|V| - m - 2)$, ebből következik, hogy $2 \geq (d(u) - m) + (d(v) - m) + m \geq m$, ami ellentmond $m \geq 6$-nak.

(3) $d(u) = 3$, $d(v) \geq 4$. $4|V| - 6 = \sum_{t \in V} d(t) \geq d(u) + 3 + 3m + 4(|V| - m - 2)$, ebből következik, hogy $-1 \geq d(u) - m \geq 0$, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyezzük, hogy az 5.5. Lemmából könnyen következik, hogy ha adott egy V és benne u és v, akkor a K_4 négycsúcsú teljes gráf, amelynek tehát a ponthalmaza a V része, egy kör az $\mathcal{M}'_{u=v}$ matroidban, feltéve, ha $\{u,v\}$ nincs teljesen benne a K_4 csúcshalmazában.

5.7. Lemma. *Legyen $G = (V,E)$ egy gráf és $u \neq v \in V$. Legyen G független az $\mathcal{M}'_{u=v}$ matroidban. Ha $z \in V - \{u,v\}$ olyan, hogy $d(z) = 3$, $N(z) = \{t_1, t_2, t_3\}$ és $|N(z) \cap \{u,v\}| \leq 1$, akkor létezik $1 \leq i < j \leq 3$ úgy, hogy $G - z + t_i t_j$ független $\mathcal{M}'_{u=v}$-ben.*

Bizonyítás. Jelölje E' a $G - z$ élhalmazát. Indirekt tegyük fel, hogy $E' + t_i t_j$ nem független egyik $1 \leq i < j \leq 3$ esetén sem. Tehát $t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3 \in span(E')$. Ekkor $zt_1 \in span(E' + t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 + zt_2 + zt_3) = span(E' + zt_2 + zt_3)$, mert $\{t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3, zt_1, zt_2, zt_3\}$ egy K_4, és minden $K_4 = (V', E')$ egy kör az $\mathcal{M}(uv)$ matroidban, ha $|V(K_4) \cap \{u, v\}| \leq 1$. De $zt_1 \in span(E' + zt_2 + zt_3)$ ellentmond az E élhalmaz függetlenségének. □

5.4. A karakterizáció

5.8. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $u \neq v \in V$. Ekkor G pontosan akkor $u = v$-izosztatikus, ha $|E| = 2|V| - 3$, és E független az $\mathcal{M}'_{u=v}$ matroidban.*

Bizonyítás. Az világos az 5.2. Lemma alapján, hogy ha G $u = v$-izosztatikus, akkor $|E| = 2|V| - 3$, és E független az $\mathcal{M}'_{u=v}$ matroidban. A másik irány bizonyítása a csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval történik. Könnyen látszik, hogy az állítás igaz, ha $|V| \leq 3$. Valójában ha $|V| \leq 3$, akkor nem létezik $u = v$-izosztatikus gráf V-n, és nincs olyan független halmaz $\mathcal{M}'_{u=v}$-ben, amelyre $|E| = 2|V| - 3$. Tegyük fel tehát, hogy a $G = (V, E)$ gráfra $|V| \geq 4$, $|E| = 2|V| - 3$, és E független az $\mathcal{M}'_{u=v}$ matroidban, valamint tegyük fel, hogy az állítás igaz a $|V|$-nél kevesebb csúcsszámú gráfokra.

Először tegyük fel, hogy G-nek van egy w másodfokú csúcsa. Legyen a és b a w két szomszédja (világos, hogy $a \neq b$, mert a $\gamma(X) \leq 2|X| - 3$ feltételből is következik, hogy a gráf egyszerű). Azt állítjuk, hogy $\{a, b\} \neq \{u, v\}$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem igaz. Legyen $H := \{\{u, v, w\}, V - \{w\}\}$. Ekkor $2|V| - 3 = |E| = \gamma_E(H) \leq val(H) = 2 \cdot 3 - 3 + 2(|V| - 1) - 3 - 2 = 2|V| - 4$. Ez ellentmondás.

Ha $w \in \{u, v\}$, akkor $G - w$ egy izosztatikus gráf (a hagyományos értelemben), tehát G $u = v$-izosztatikus. Ha $w \in V - \{u, v\}$, akkor $G_1 := G - w$ független $\mathcal{M}'_{u=v}$-ben, és $|E_1| = 2|V_1| - 3$. Az indukciós feltevés szerint G_1 $u = v$-izosztatikus. Tehát G is $u = v$-izosztatikus.

Ha minden csúcs legalább harmadfokú, akkor az 5.6. Lemma szerint létezik egy $z \in V - \{u, v\}$ csúcs, amelyre $d(z) = 3$ és $|N(z) \cap \{u, v\}| \leq 1$. Az 5.7. Lemma szerint, ha $N(z) = \{t_1, t_2, t_3\}$, akkor léteznek $1 \leq i < j \leq 3$ úgy, hogy $G_1 := G - z + t_i t_j$ független az $\mathcal{M}'_{u=v}$-ben. Az indukciós feltevés szerint ekkor G_1 $u = v$-izosztatikus. Ezért G is $u = v$-izosztatikus. □

5.9. Következmény. $\mathcal{M}_{u=v} = \mathcal{M}'_{u=v}$.

Bizonyítás. Ha $|V| \geq 4$, akkor az 5.8. Tételből következik, hogy a két matroid bázisai megegyeznek. Ha $|V| \leq 3$, akkor pedig könnyen ellenőrizhetjük az állítást. □

Ezzel sikerült kombinatorikusan karakterizálni az $\mathcal{M}_{u=v}$ matroidot. Tehát a Laman-tétel analogonja itt azt mondja ki, hogy két csúcs pozícióinak egybeesése esetén az $\mathcal{M}'_{u=v}$ matroid definíciójában szereplő ritkasági feltétel karakterizálja a függetleneket.

A Lovász-Yemini megfelelője itt az 5.4. Tétel rangformulája. A matroid generátorainak, azaz a merev gráfoknak a karakterizációja is adódik ebből, de érdemes megemlíteni az $u = v$-merevség alábbi jellemzését.

5.10. Következmény. *G pontosan akkor $u = v$-merev, ha $G - uv$ és $G/\{u, v\}$ merevek.*

Bizonyítás. Az 5.1. Lemma mutatja, hogy ha G $u = v$-merev, akkor $G - uv$ és $G/\{u, v\}$ tényleg merevek. Tegyük fel most, hogy $G - uv$ és $G/\{u, v\}$ merevek. Belátjuk, hogy G ekkor $u = v$-merev. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy fedése $E - uv$-nek, amelyre $val(\mathcal{H}) \leq 2|V| - 4$. Ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_1$ lenne, akkor $G - uv$ nem lenne merev . Ha $\mathcal{H} \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$, akkor „húzzuk össze" $\mathcal{H}$-ban $\{u, v\}$-t, legyen $\mathcal{H}' := \cup\mathcal{H}/\{u, v\}$, ami azt jelenti, hogy $\mathcal{H}'$ elemei az $X/\{u, v\}$ alakú halmazok, ahol X valamely $\mathcal{H}$-beli H halmazrendszer egy eleme. Ekkor $\sum_{X \in \mathcal{H}'} 2|X| - 3 \leq val(\mathcal{H}) - 2 \leq 2|V| - 4 - 2 \leq 2(|V| - 1) - 4$. Tehát $G/\{u, v\}$ nem merev. Ez ellentmondás. □

Ezt nem csak a szépsége miatt érdemes említeni, hanem azért is, mert mutatja, hogy hogyan lehet algoritmikusan eldönteni G $u = v$-merevségét. Hasonlóan lehet – a következő állításnak köszönhetően – az $u = v$-rangot is algoritmikusan tesztelni.

5.11. Állítás.

$$r_{u=v}(G) = \min\left(r(G), r(G/\{u, v\}) + 2\right)$$

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy $r_{u=v}(G) \leq \min\left(r(G), r(G/\{u, v\}) + 2\right)$. Az világos, hogy $r_{u=v}(G) \leq r(G)$. Az 5.1. Lemma miatt G infinitezimális mozgásainak dimenziója (egy $u = v$-generikus realizáció esetén) legalább $G/\{u, v\}$ mozgásainak dimenziója, azaz $2|V| - r_{u=v}(G) \geq 2(|V| - 1) - r(G/\{u, v\})$. Ebből következik $r_{u=v}(G) \leq r(G/\{u, v\}) + 2$ is.

A másik irány igazolásához tekintsünk egy $\mathcal{H}$-t, amelyen az 5.4. Tételben a minimum felvétetik. Ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_1$, akkor $\mathcal{H}$ megfelel G egy hagyományos értelemben vett fedésének, tehát ebben az esetben $\min\left(r(G), r(G/\{u, v\}) + 2\right) \leq r(G) \leq val(\mathcal{H}) = r_{u=v}(G)$ miatt készen vagyunk.

Ha $\mathcal{H}$-nak van $\mathcal{F}_2$-beli eleme, akkor legyen $\mathcal{H}' := \mathcal{H}/\{u, v\}$ (ugyanúgy, mint az 5.10. Következmény bizonyításában). Ellenőrizhető, hogy $\sum_{X \in \mathcal{H}'} 2|X| - 3 \leq val(\mathcal{H}) - 2 = r_{u=v}(G) - 2$, ebből következik, hogy $\min\left(r(G), r(G/\{u, v\}) + 2\right) \leq r(G/\{u, v\}) + 2 \leq r_{u=v}(G)$. Tehát ekkor is készen vagyunk. □

Látjuk, hogy ennek segítségével a függetlenség is algoritmikusan eldönthető. Tehát miután sikerült jó karakterizációt adnunk az $\mathcal{M}_{u=v}$ matroid függetlenjeire, bázisaira, generátoraira és a rangjára, igazoltuk, hogy ezek a fogalmak polinomiális algoritmussal tesztelhetőek.

Azt állítottuk a fejezet elején, hogy egy előállítási tétel segítségével bizonyítjuk az itteni eredményeket, és ennek ellenére a fejezetben nem hangzott el előállítási tétel. Ezt a hiányt most pótoljuk, ugyanis az eredmények hátterében valóban egy előállítási tétel van, amelyet expliciten nem mondtunk ki, de valójában az 5.5, 5.6 és 5.7. Lemmák és az 5.8. Tétel bizonyítása tartalmazza ezt az előállítási tételt. Tehát az alábbi (önmagában azonban kevéssé érdekes) előállítási tételt láthatjuk be ezek alapján.

5.12. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ gráf két különböző csúcsa u és v. Ekkor G-re pontosan akkor teljesül, hogy $|E| = 2|V| - 3$, és E független az $\mathcal{M}'_{u=v}$ matroidban, ha G előáll néhány (esetleg nulla) 0-uv-kiterjesztés és 1-uv-kiterjesztés alkalmazásával egy olyan G' Laman-gráfból, melynek u és v is csúcsa, legalább egyikük másodfokú G'-ben, és uv nem éle G'-nek.*

További kérdés lehet az, hogy nem csak két kijelölt csúcsot azonosítunk, hanem adott a $G = (V, E)$ gráf egy $X \subseteq V$ csúcshalmaza, és olyan merev realizációt keresünk, melyre az X csúcsainak pozíciója ugyanaz. Még általánosabban vizsgálhatjuk azt is, hogy ha adott a V alaphalmaz egy $\mathcal{P}$ részpartíciója, akkor kérdés, hogy létezik-e olyan $p : V \to \mathbb{R}^2$ merev realizáció, melyre a $\mathcal{P}$ minden osztálya egy-egy pozícióra képződik le, azaz ha $u, v \in X$ valamely $X \in \mathcal{P}$ esetén, akkor $p(u) = p(v)$.

6. fejezet

A $[k, l]$-gráfok konstruktív karakterizációja

A felületeken való merevség vizsgálatánál előkerült a $[k, l]$-gráfok konstruktív karakterizációja a $0 \leq l \leq k$ esetben, amelyet ott a $k = 2$ speciális esetben bizonyítottunk és alkalmaztunk, és ígéretet tettünk arra, hogy tetszőleges $0 \leq l \leq k$ esetén bizonyításra kerül egy analóg tétel. Ennek ebben a fejezetben érkezett el az ideje. Bizonyos ritkasági gráfosztályokra vonatkozó ismert előállítási tételek áttekintése után bebizonyítjuk a Henneberg-típusú konstruktív karakterizációt a $[k, l]$-ritka gráfokra a $0 \leq l \leq k$ esetben.

6.1. Korábbi eredmények

A $[k, k]$-gráfokra az alábbi ismert előállítási tétel vonatkozik. Ezt lényegében Nash-Williams [37] bizonyította be először és használta Tutte fák pakolására vonatkozó tételének (1.5. Tétel) bizonyítására, de ebben a cikkben nem kerül külön kimondásra ez a tétel, hanem egy bizonyítás belsejében foglal helyet. Tay [50] explicit megfogalmazza ezt a tételt, melynek bizonyítását az eredeti Nash-Williams cikkből átveszi, és az előállítási tételt használja is a többdimenziós test-és-rúd struktúrák merevségének karakterizációjára.

6.1. Tétel. *Egy irányítatlan gráf pontosan akkor $[k, k]$-gráf, ha G felépíthető egy csúcsból a következő műveletekkel:*

1. *egy új z csúcs és k rá illeszkedő él hozzáadása,*
2. *i darab ($1 \leq i \leq k - 1$) él összecsípése egy új z csúcsba és $k - i$ új él behúzása z-ből már létező csúcsokba.*

Frank András és Szegő László a k-fa-összefüggőség fogalmának a következő módosított változatát vizsgálták és adtak rá előállítási tételt. Egy hurokmentes (legalább két csúcsú) G gráfot **majdnem k-fa-összefüggő**nek nevezünk, ha G nem k-fa-összefüggő, de bármely új él hozzáadása után k-fa-összefüggő lesz. Könnyen belátható, hogy egy gráf pontosan akkor majdnem k-fa-összefüggő, ha $[k, k+1]$-gráf.

Jelölje K_2^{k-1} azt a kétpontú gráfot, amely $k-1$ párhuzamos élet tartalmaz. A Frank András és Szegő László által adott karakterizáció $k = 2$-re visszaadja az 1.17. Tételt.

6.2. Tétel (Frank és Szegő). *Egy irányítatlan $G = (V, E)$ pontosan akkor $[k, k+1]$-gráf, ha G előáll K_2^{k-1}-ből a következő műveletek alkalmazásával:*

1. *vegyünk fel egy z új csúcsot, és k darab z-ből induló élet úgy, hogy ne keletkezzen k-szoros él a kapott gráfban,*

2. *válasszunk ki egy i $(1 \leq i \leq k-1)$ elemű F élhalmazt, csípjük össze egy új z csúcsba, és vegyünk fel $k-i$ darab z-ből induló új élet úgy, hogy ne keletkezzen k-szoros él a kapott gráfban.*

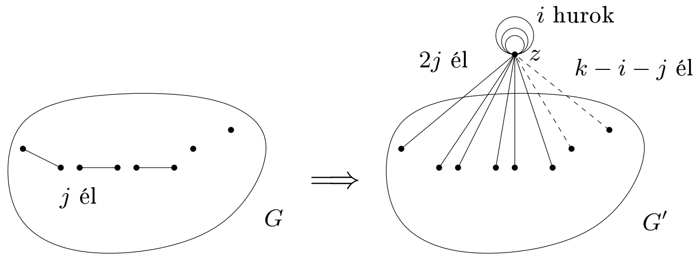
[51]-ban Tay bizonyos szerkezetek merevségének karakterizációjához belátta, hogy egy $[k, k+1]$-gráfban egy legfeljebb $2k-1$ fokú csúcsot vagy le lehet emelni, vagy más módon lehet egy redukciós lépést végrehajtani ennél a csúcsnál úgy, hogy a kapott gráf $[k, k+1]$-gráf legyen. A 6.2. Tétel azt mondja, hogy mindig létezik egy olyan csúcs, amelyről le lehet emelni. Az nem igaz, hogy minden kisfokú csúcsról le lehet emelni.

Az előállítási tétel bizonyításához használni fogjuk – és ezért idézzük – a $[k, l]$-gráfokra, vonatkozó Whiteley-tól [56] származó karakterizációt.

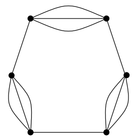
6.3. Tétel (Whiteley). *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $0 \leq l \leq k$. G pontosan akkor $[k, l]$-gráf, ha E a körmatroid l darab bázisának és a bikör matroid $(k-l)$ darab bázisának diszjunkt uniója.*

A $[k, l]$-ritka gráfokra $(0 \leq l \leq k)$ vonatkozó Henneberg-típusú előállítási tételben a következő műveleteket fogjuk használni.

6.4. Definíció. *Legyen $0 \leq i + j \leq k,\ i, j, k \geq 0$. Jelölje $K(k, i, j)$ a következő műveletet. Válasszunk ki j élet, osszuk fel mindegyiket egy-egy új csúccsal, majd azonosítsuk ezeket a csúcsokat, jelöljük ezt z-vel. Rakjunk i hurkot a z csúcsra, és húzzunk be $k-i-j$ új élet z, amelynek egyik vége z, és a másik egy régi csúcs. Ezen művelet után kapott gráfnak k-val több éle van, és az egyetlen új z csúcs $(k+i+j)$-ed fokú lesz. (Lásd a 6.1. ábrát.)*



6.1. ábra. A G'-t a G-ből kaptuk a $K(k,i,j)$ művelettel.



6.2. ábra. Egy hurokmentes $[2,0]$-gráf, amely nem áll elő hurokmentes $[2,0]$-gráfok sorozatán keresztül.

Jelöljük P_i-vel az egy csúcsú, i darab hurokélet tartalmazó gráfot. A fejezet fő tétele a következő.

6.5. Tétel. *Legyen $G=(V,E)$ egy gráf és $1 \le l \le k$. Ekkor G pontosan akkor $[k,l]$-gráf, ha G megkapható P_{k-l}-ből azon $K(k,i,j)$ műveletekkel, amelyekre $i+j \le k-1,\ i,j \ge 0,\ i \le k-l$.*

Legyen $G=(V,E)$ egy gráf és $l=0$. Ekkor G pontosan akkor $[k,0]$-gráf, ha G megkapható P_k-ból azon $K(k,i,j)$ műveletekkel, amelyekre $0 \le i+j \le k,\ i,j \ge 0,\ i \le k$.

Vegyük észre, hogy a $K(k,i,j)$, $i+j=k$ műveletekre szükség van az $l=0$ esetben, de a többi esetben az előállítás működik nélkülük is. Megjegyezzük, hogy a hurokmentes $[k,l]$-gráfok nem feltétlenül állíthatók elő hurokmentes $[k,l]$-gráfok sorozatán keresztül. (Egy ellenpéldát mutat a 6.2. ábra.)

A 6.5. Tételt Szegő Lászlóval közösen láttuk be [12]. Most egy egyszerűbb bizonyítást mutatunk, amely Mader irányított leemelési tételét (6.10. Tétel) és Whiteley karakterizációját (6.3. Tétel) használja. A [12]-ben adott közvetlen bizonyítás jelen dolgozatban a 7. fejezetben jelenik meg egy valamelyest általánosabb formában (7.4. Tétel).

6.2. Az előállítási tétel bizonyítása

A 6.5. Tétel könnyű iránya a következő, ez a definíciók egyszerű következménye.

6.6. Lemma. *Legyen $0 \leq l \leq k$. Ha a G gráf a P_{k-l}-ből előáll a $K(k,i,j)$ műveletekkel, ahol $0 \leq i+j \leq k,\ i,j \geq 0,\ i \leq k-l$, akkor G egy $[k,l]$-gráf.*

Használni fogjuk az alábbi egyszerű állítást, amely a $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 2(k|V| - l)$ egyenlőségből és a $d(v) = |E| - \gamma(V-v) + \gamma(v) \geq k|V| - l - (k|V-v| - l) = k$ egyenlőtlenségből következik.

6.7. Állítás. *Legyen $G = (V,E)$ egy $[k,l]$-gráf.*

1. *Ha $1 \leq l \leq k$ és $|V| \geq 2$, akkor $\exists v \in V$ úgy, hogy $k \leq d(v) \leq 2k-1$.*

2. *Ha $l = 0, k \geq 0$ és $|V| \geq 2$, akkor $\exists v \in V$ úgy, hogy $k \leq d(v) \leq 2k$.*

Legyen $e = vs, f = sw \in E, v \neq s, w \neq s$. Az e és f élpár **leemelés**e alatt a következőt értjük: töröljük az e és f éleket, és hozzáadunk a gráfhoz egy új $g = vw$ élet, azaz az e, f élek leemelése által kapott gráf a következő: $G^{ef} = (V, E - e - f + g)$. Azt mondjuk, hogy az új g él egy **leemelt él**. Használni fogjuk a leemelés műveletét irányított gráfra is, ott a definíció formálisan ugyanígy néz ki.

A következő tétel mutatja a 6.5. Tétel „nehezebb irányát”.

6.8. Tétel. *Legyen $0 \leq l \leq k$. Legyen $G = (V+s, E)$ egy $[k,l]$-gráf és $d(s) = k+i+j, \gamma(s) = i$, ahol $0 \leq i+j \leq k,\ i,j \geq 0,\ i \leq k-l$. Ekkor le lehet emelni j darab s-re illeszkedő élpárt úgy, hogy az s törlése után keletkező gráf $[k,l]$-gráf legyen.*

A 6.5. Tétel bizonyítása. A 6.6. Lemma mutatja, hogy ha egy gráf előáll a műveletekkel, akkor $[k,l]$-gráf. A másik irány bizonyítása a csúcsszámra vonatkozó teljes indukcióval történik. Először is figyeljük meg, hogy az egyetlen egycsúcsú $[k,l]$-gráf a P_{k-l}. Legyen G egy tetszőleges, legalább kétcsúcsú $[k,l]$-gráf, és tegyük fel, hogy az ennél kevesebb csúcsú gráfokra igaz az állítás. A 6.7. Lemma szerint létezik egy legfeljebb $2k-1$ fokú s csúcs, ha $l > 0$, és egy legfeljebb $2k$ fokú csúcs, ha $l = 0$. Legyen $i := \gamma(s)$, és legyen $j := d(s) - k - i$. A $d(s) = d(s, V-s) + 2\gamma(s) = |E| - \gamma(s) - \gamma(V-s) + 2\gamma(s) \geq k|V| - l - k(|V|-1) + l + \gamma(s) = k + \gamma(s)$ egyenlőtlenség alapján láthatjuk, hogy $j \geq 0$.

Tehát ezekkel az i, j paraméterekkel a 6.8. Tétel azt mondja ki, hogy a G gráf megkapható egy G' $[k,l]$-gráfból valamely megengedett $K(k,i,j)$ művelettel. Az indukciós feltevés szerint tudjuk, hogy G' előáll P_{k-l}-ből megengedett műveletekkel, tehát ezek szerint G is előáll. $\square$

Megadjuk a 6.8. Tétel egy lehetséges bizonyítását, amely Mader irányított leemelési tételén alapul. Ez a bizonyítás valójában a Frank András [14] által a $[k,k]$-gráfok előállítási tételére adott egy bizonyításának az adaptációja a $[k,l]$ esetre ($0 \leq l \leq k$). Ehhez először belátjuk a $[k,l]$-gráfok egy irányításokkal kapcsolatos jellemzését.

6.9. Tétel. *Legyen $0 \leq l \leq k$. Egy gráf pontosan akkor $[k, l]$-gráf, ha valamely v csúcsához létezik olyan irányítása, hogy minden $u \in V - v$ csúcs befoka k, v befoka $k - l$, és v-ből minden más csúcs elérhető l éldiszjunkt úton. Sőt, ekkor minden v csúcshoz van ilyen irányítás.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy $v \in V$ csúcshoz megfelelő irányítás, először belátjuk, hogy ekkor tetszőleges másik csúcshoz is van irányítás. Legyen tehát v' egy tetszőleges v-től különböző csúcs. Válasszunk ki v-ből v'-be menő l darab éldiszjunkt utat, és fordítsuk meg ezek irányítását. Ekkor könnyen látható, hogy ez egy v'-nek megfelelő irányítás.

Tegyük fel, hogy v-hez létezik egy jó irányítás, ekkor a gráf élszáma $|E| = \sum_{u \in V} \varrho(u) = k|V| - l$. Tekintsünk egy tetszőleges $\emptyset \neq X \subseteq V$ halmazt, belátjuk, hogy $\gamma(X) \leq k|X| - l$. Feltehetjük, hogy $v \in X$, mert tetszőleges v-hez tudunk megfelelő irányítást találni a már említett átirányítási gondolat miatt. Ekkor $\gamma(X) \leq \sum_{u \in X} \varrho(u) = k|X| - l$. Tehát a gráf $[k, l]$-gráf.

Ha pedig egy gráf $[k, l]$-gráf, akkor a 6.3. Tétel szerinti létező l darab feszítőfát és $k - l$ darab feszítő pszeudo-erdőt irányítsuk meg a következőképpen: az l-feszítőfát irányítsuk egy-egy v-gyökerű feszítőfenyővé, a $k - l$ feszítő pszeudo-erdőt pedig olyan gráfokká, amelyeknek minden befokuk 1. Ez egy megfelelő irányítást ad. □

Használni fogjuk Mader irányított leemelési tételét.

6.10. Tétel (Mader). [34] *$G = (V + s, E)$ irányított gráf, amelyben $\delta(s) = \varrho(s)$. Tegyük fel, hogy*

$$\lambda(x, y; G) \geq l \quad \forall x, y \in V, \tag{6.1}$$

ahol $l \geq 1$ egész. Ekkor minden $e = st$ élhez létezik olyan $f = us$ él, amelyre

$$\lambda(x, y; G^{ef}) \geq l \quad \forall x, y \in V.$$

A 6.8. Tétel bizonyítása. Legyen t egy tetszőleges, s-től különböző csúcs. Irányítsuk meg a gráfot a 6.9. Tétel szerint úgy, hogy minden t-től különböző csúcs befoka k, t befoka l legyen, és t-ből minden más csúcsba menjen l éldiszjunkt irányított út.

Vegyünk fel most új éleket: minden $u \in V - s - t$ csúcsból t-be l darab párhuzamos élet. Nevezzük ezeket az éleket segédéleknek. Ekkor teljesül, hogy $\lambda(x, y; G) \geq l \;\; \forall x, y \in V - s$. Az s befoka k és kifoka $i + j$ (hiszen irányítatlanul a foka $k + i + j$ volt), és ebből j darab nem-hurok él lép ki s-ből (mert $\gamma(s) = i$).

Tehát a 6.10. Tételt j-szer alkalmazva kapjuk, hogy leemelhetünk j darab élpárt úgy, hogy a kapott gráf $V - s$-en belül irányítottan l élösszefüggő marad. (Az, hogy Mader tételében hurokmentes irányított gráfokról van szó, ne zavarjon, az élösszefüggőség tekintetében a hurkoknak nincs jelentősége, tehát alkalmazzuk a tételt a hurkok elhagyása után, majd visszarakjuk a hurkokat.) Ha az s törlése után kapott gráfból kitöröljük a segédéleket, akkor is igaz marad, hogy t-ből minden más csúcs elérhető l éldiszjunkt úton (mert csak t-be lépő éleket töröltünk). Ekkor s törlése után a maradék befokok nem változnak (mert s-ből már nem vezet él máshová, hiszen azokat mind leemeltük), tehát a 6.9. Tétel szerint egy $[k, l]$-gráfot kaptunk. $\square$

7. fejezet

Fokelőírásos növelés

7.1. Két kérdés matroidokon

Az élösszefüggőség-növelés feladata az, hogy adjunk egy gráfhoz minimális számú élet úgy, hogy a kapott gráf k-élösszefüggő legyen. Megfogalmazunk most két kombinatorikus optimalizálási feladatot, amelyek ennek egyfajta matroidos megfelelői azzal az eltéréssel, hogy itt olyan optimális növelési feladatokkal foglalkozunk, ahol a növelő élhalmazra fokelőírások is vonatkoznak. A fokelőírások nélküli probléma matroid esetén triviálisnak bizonyul, ellentétben az élösszefüggőség-növelés feladatával, ahol a fokelőírt kérdés megválaszolása könnyebb, mint fokelőírások nélkül. Tehát fokelőírt módon akarunk éleket hozzáadni a gráfhoz úgy, hogy valamilyen értelemben megengedett gráfot kapjunk. Adott V csúcshalmaz esetén ki kell jelölnünk, hogy mely gráfokat tekintjük megengedettnek. Ha minimális számú éllel akarjuk megengedetté tenni, akkor természetes követelmény, hogy a megengedett struktúrák felszálló rendszert alkossanak. Természetes lehetőség tehát egy matroid generátorait tekinteni megengedettnek.

Tegyük fel, hogy adott a V csúcshalmazú K_V végtelen teljes gráf élhalmazán egy $\mathcal{M}$ (véges rangú) matroid. A feladat a következő:

> Adott $m : V \to \mathbb{N}$ alsó fokkorlát a csúcsokon, és j egy egész. Létezik-e egy j elemű F élhalmaz úgy, hogy F „teljes rangú” és F kielégíti a fokkorlátokat?

Feltehetjük úgy is a kérdést, hogy mekkora a minimális j, hogy legyen ilyen F. Vizsgálhatjuk a kérdés azon változatát is, hogy m nem fokkorlát, hanem pontos fokelőírás. Világos, hogy fokelőírások nélkül a feladat triviális, hiszen a válasz csak attól függ, hogy j kisebb-e, mint a rang. Viszont látni fogjuk, hogy fokelőírásokkal nem-triviális feladathoz jutunk. Itt tehát, az élösszefüggőség növelésének feladatával ellentétben, a fokelőírt probléma nehezebb.

Ebben a matroidos fogalomrendszerben természetes megkérdezni azt a másik irányú kérdést is, hogy adjunk minél több élet egy független élhalmazhoz, hogy a kapott élhalmaz még mindig független legyen.

> Adott $m : V \to \mathbb{N}$ felső fokkorlát minden csúcson, és egy j egész szám. Létezik-e egy j elemű független F élhalmaz úgy, hogy F kielégíti a fokkorlátokat?

Úgy is fel lehet tenni a kérdést, hogy mekkora a maximális j, hogy legyen ilyen F. Valamint vizsgálhatjuk azt a változatát a kérdésnek, hogy m nem fokkorlát, hanem pontos fokelőírás. Itt megint láthatjuk, hogy fokkorlátok nélkül egyszerű a válasz.

Az említett általános kérdéseket a következő speciális esetekben vizsgáljuk: tegyük fel, hogy adott a V csúcshalmazon egy $G = (V, E)$ gráf, ekkor az $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{k,l}/E$ választás esetén a fent bevezetett kérdéseink a következőkre specializálódnak. (Itt $\mathcal{M}_{k,l}/E$ az $\mathcal{M}_{k,l}$-ből az E összehúzásával kapott matroidot jelöli.)

> **1. Feladat:** Adott egy E $\mathcal{M}_{k,l}$-független élhalmaz, egy $m : V \to \mathbb{N}$ felső fokkorlát minden csúcson és egy j egész szám. Létezik-e egy j elemű F élhalmaz úgy, hogy $E + F$ is független, és F kielégíti a fokkorlátokat?
>
> **2. Feladat:** Adott egy E élhalmaz, egy $m : V \to \mathbb{N}$ alsó fokkorlát a csúcsokon és egy j egész. Létezik-e egy j elemű F élhalmaz úgy, hogy $E + F$ rangja (az $\mathcal{M}_{k,l}$ matroidban) $k|V| - l$ (azaz $E + F$ „teljes rangú”), és F kielégíti a fokkorlátokat?

Az utóbbi feladat motivációjául szolgál az, hogy általánosabb a $[k, l]$-gráfokra bizonyított leemelési eredménynél. Az előző fejezetben bizonyított előállítási tétel (6.5. Tétel) – mint sok társa – egy leemelési eredményen (6.8. Tétel) alapul. Az egy csúcsról való teljes leemelés pedig tekinthető úgy, hogy töröljük az adott csúcsra illeszkedő éleket, és a kapott gráfhoz akarunk éleket hozzáadni úgy, hogy minden csúcsra adott számú él illeszkedjen, és a kapott gráf $[k, l]$-ritka legyen.

Megjegyezzük, hogy ha a matroidunk a merevségi matroid, akkor az imént megfogalmazott 2. Feladat az, hogy tegyünk merevvé egy gráfot élek hozzáadásával úgy, hogy minden csúcson van egy fokelőírásunk, esetleg fokkorlátozásunk. Ha a matroidot az $\mathcal{M}_{k,k}$-nak választjuk, akkor a következő kérdést kapjuk: adjunk éleket úgy egy gráfhoz, hogy kielégítsünk bizonyos fokelőírásokat, és a kapott gráfban legyen k-élidegen feszítőfa.

Természetesen mindkét feladat esetén vizsgálhatjuk a pontos fokelőírások, alsó fokkorlátok és felső fokkorlátok kérdését is. Megjegyezzük, hogy az 1. Feladat esetében a „felső fokkorlát” általánosabb a „pontos fokelőírásnál”, hiszen ha $2j = m(V)$, akkor a felső fokkorlát valójában pontos fokelőírás. Hasonlóan a 2. Feladat esetében az „alsó fokkorlát” általánosabb a „pontos fokelőírásnál”. Ezen feladat esetében viszont az is igaz, hogy a „felső fokkorlát"-os feladatnál általánosabb a pontos fokelőírás. Hiszen ha $E+F$ kielégíti a felső fokkorlátokat, akkor létezik F', melyre $E+F'$ is teljes rangú, és vagy kielégíti az m-et, mint pontos fokelőírást (ha $m(V)$ páros), vagy egy ponton tér el 1-gyel (ha $m(V)$ páratlan), ezért ha meg tudnánk oldani a „pontos" fokelőírásos feladatot, akkor a felső fokkorlátosat is meg tudnánk oldani.

Felsorolásszerűen megemlítjük most azon ismert eredményeket, amelyek beleillenek az imént felvázolt modellünkbe. Frank András és Király Tamás [15] oldotta meg az 1. kérdést fokelőírásokkal a $k=l$ esetben:

7.1. Tétel. *Legyen $G=(V,E)$ egy gráf, $m:V\to\mathbb{Z}_+$ fokelőírás, $k\geq 1$, és E független $\mathcal{M}_{k,k}$-ban. Pontosan akkor létezik egy F élhalmaz V-n, amely kielégíti a fokelőírásokat, és $E+F$ független $\mathcal{M}_{k,k}$-ban, ha*

$$m(X)-\frac{m(V)}{2}\leq k(|X|-1)-\gamma_E(X)\quad \forall\, \emptyset\neq X\subseteq V.$$

Szintén Frank Andrástól és Király Tamástól [15] származik a 2. kérdés megválaszolása $k=l$ és pontos fokelőírások esetén:

7.2. Tétel ([15]). *Legyen $G=(V,E)$ egy gráf, $m:V\to\mathbb{Z}_+$ fokelőírás és $k\geq 1$. Pontosan akkor létezik egy F élhalmaz V-n, amely kielégíti a fokelőírásokat és $E+F$ teljes rangú $\mathcal{M}_{k,k}$-ban, ha minden $\mathcal{F}=\{X_1,\dots,X_t\}$ partíció esetén:*

$$\frac{m(V)}{2}\geq (t-1)k-e(\mathcal{F}),$$
$$\min_i m(V-X_i)\geq (t-1)k-e(\mathcal{F}).$$

[15]-ben megjegyzik azt, hogy ennek egyszerű következménye, hogy egy $m_1,\dots m_n$ foksorozat pontosan akkor realizálható olyan gráffal, amelyben van k éldiszjunkt feszítőfa, ha $\sum_i m_i$ páros, és $m_i\geq k$ minden i esetén. Ez Edmonds egy eredménye [5] (ami tehát pont a 2. Feladat az $E=\emptyset$ esetben).

Frank András és Szegő László [16] a 6.2. Tételre adott bizonyításhoz karakterizálták a teljesen leemelhető csúcsokat a $[k,k+1]$-gráfokban. Később Szegő László [47] ezt az eredményt kiterjesztette $[k,l]$-gráfokra $k+1\leq l\leq \frac{3}{2}k$ esetén. (Ez speciális esete az 1. Feladatnak felső fokkorlátokkal.) Az alábbi eredményt igazolta. Nevezzünk egy $\mathcal{P}$ halmazrendszert t-virágnak, ha elemei legalább kételemű halmazok úgy, hogy $X\cap Y=\{t\}$ minden $X,Y\in\mathcal{P}$, $X\neq Y$ esetén.

7.3. Tétel ([47], 3.5 Tétel). *Legyen $G = (V, E)$ egy $[k, l]$-gráf, és $s \in V$ csúcsa, melyre $d(s) \leq 2k-1$ $k \geq 2$, $k+1 \leq l \leq \frac{3}{2}k$. Ekkor s pontosan akkor emelhető le teljesen, ha minden $\mathcal{P}$ t-virág esetén*

$$j \leq \sum_{X \in \mathcal{P}} (k|X| - l - \gamma(X)) + d(s, V - \cup\mathcal{P}) + k - d(s, t).$$

Hasonlóképpen speciális esete az 1. Feladatnak az előző fejezetben a $[k, l]$-gráfokra igazolt (6.8. Tétel) leemelési eredmény a $0 \leq l \leq k$ esetben.

Megjegyezzük, hogy a feladatok absztrakt matroidos alakja tartalmaz NP-nehéz problémákat. Például, ha adott egy G gráf, akkor definiáljuk az $\mathcal{M}_G$-t a következőképpen: az $E(G)$-ben nem szereplő élek legyenek mind hurkok, és az $E(G)$ éleire megszorítva legyen $\mathcal{M}_G$ a G körmatroidja. Ekkor tekintsük bármelyik feladatot pontos fokelőírással és $j = |V(G)|-1$-gyel úgy, hogy a pontos fokelőírás mindenütt 2, kivéve az u, v csúcsokon 1. Ekkor egy F élhalmaz pontosan akkor megengedett, ha G-beli Hamilton-út u, v között. Ez tehát azt jelenti, hogy az absztrakt feladatokkal nem érdemes teljes általanosságban foglalkozni, de érdekes mégis a kérdés, hogy mely matroidosztályokon megoldhatóak.

A következő két szakaszban megoldjuk a felvetett feladatok egy részét abban az értelmeben, hogy NP$\cap$co-NP karakterizációt adunk rájuk. Bár megjegyezzük, hogy a közölt bizonyítások lényegében algoritmikusak vagy azzá tehetők.

7.2. A $0 \leq l \leq k$ eset

Ebben a szakaszban megválaszoljuk az 1. és a 2. kérdést $0 \leq l \leq k$ esetén. Használni fogjuk a $b_E(X) := k|X| - l - \gamma_E(X)$ jelölést, ahol $X \subseteq V$.

7.4. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ gráf, $m : V \to \mathbb{Z}_+$ felső fokkorlátok, $0 \leq l \leq k$, és E független az $\mathcal{M}_{k,l}$-ben. Ekkor pontosan akkor létezik egy j elemű F élhalmaz V-n, amelyre $E + F$ független $\mathcal{M}_{k,l}$-ben, és $d_F(v) \leq m(v)$ minden $v \in V$ esetén, ha teljesülnek az alábbiak:*

$$2j \leq m(V), \tag{7.1}$$

$$j \leq b_E(X) + m(V - X) \text{ minden } \emptyset \neq X \subseteq V \text{esetén.} \tag{7.2}$$

Bizonyítás. (7.1) nyilván szükséges. A (7.2) szükségességéhez legyen $\emptyset \neq X \subseteq V$, ekkor ha F teljesíti a feltételeket, akkor $\gamma_F(X) \leq k|X| - l - \gamma_E(X) = b_E(X)$, és $e_F(V - X) = \sum_{v \in V-X} d_F(v) - \gamma_F(V - X) \leq \sum_{v \in V-X} d_F(v) \leq \sum_{v \in V-X} m(v) = m(V - X)$. Tehát $j = |F| = \gamma_F(X) + e_F(V - X) \leq b_E(X) + m(V - X)$.

Azt mondjuk, hogy j **élesen** teljesíti valamelyik feltételt, ha $j + 1$ nem teljesíti az illető feltételt. A tétel bizonyításának másik irányához elég azt belátni, hogy a maximális j, melyre létezik megfelelő F, „élesen” teljesíti valamelyik feltételt, azaz vagy $m(V)-1 \leq 2j$, vagy (7.2) egyenlőséggel teljesül valamely X-re. Legyen tehát j maximális, és F egy j elemű megfelelő halmaz. Nevezzünk egy $\emptyset \neq X \subseteq V$ halmazt **pontos halmaz**nak, ha $\gamma_{E+F}(X) = k|X| - l$. $\gamma_{E+F}(X) \leq k|X| - l$ mindig teljesül, ezért ha pontos halmazok metszik egymást, akkor metszetük és uniójuk is pontos. Nevezzünk egy v pontot telítettnek, ha $d_F(v) = m(v)$. Egy pont hiánya az $m(v) - d_F(v) \geq 0$ mennyiség.

Ha $m(V)-1 \leq 2j$ teljesül, akkor készen vagyunk. Tegyük tehát fel, hogy $2j \leq m(V)-2$. Ez azt jelenti, hogy vagy van legalább két telítetlen pont, vagy van olyan pont, amelynek a hiánya legalább kettő.

Ha $u \neq v \in V$ telítetlen, akkor a maximalitás miatt létezik egy pontos halmaz, amely mindkettőjüket tartalmazza. Valamint ha egy pont hiánya legalább kettő, akkor létezik pontos halmaz, amely tartalmazza azt a pontot.

Ezekből és abból a tényből, hogy metsző pontosak uniója is pontos, következik, hogy létezik egy olyan pontos halmaz, amely az összes telítetlen pontot tartalmazza. Ezért létezik egy egyértelmű ilyen maximális pontos halmaz, jelöljük X-szel.

7.5. Állítás. *Nem létezik $V - X$-ben F-beli él (azaz $\gamma_F(V - X) = 0$).*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $e = uv \in F$ és $u, v \in V - X$. Legyen $a, b \in V$ két telítetlen pont X-ben, vagy ha ilyen nincs, akkor $a = b \in X$ egy legalább kettő hiányú pont. Ekkor könnyű leellenőrizni, hogy $F - e + ua + vb$ egy megfelelő élhalmaz lenne (a fokkorlátokat nyilván kielégíti, és $E + F'$ is független az X maximalitása miatt), ami ellentmondana $j = |F|$ maximalitásának. □

Ekkor viszont $e_F(V - X) = m(V - X)$ (az előző állítás miatt és amiatt, hogy minden $V - X$-beli pont telített). $\gamma_{E+F}(X) = k|X| - l$ az X pontossága miatt van. Ezek pedig pont azt jelentik, hogy (7.2)-ben egyenlőség teljesül az X halmazzal. □

Könnyen meggondolható, hogy ez a tétel általánosítja a 7.1 és a 6.5. Tételeket.

A 7.1. Tétel azonnal következik a $j = \frac{m(V)}{2}$-ből és a (7.2) feltétel átrendezéséből. A 6.8. Tétel esetén pedig a $j \leq (k|X| - l - \gamma_E(X)) + m(V - X)$ feltétel teljesülése következik abból, hogy $m(V) = k + j$, és a G gráf $[k, l]$-ritka.

Ezek után pedig megoldjuk a 2. Feladatot $0 \leq l \leq k$-ra. Ehhez először felidézzük annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy E élhalmaz teljes rangú $\mathcal{M}_{k,l}$-ben $0 \leq l \leq k$ esetén.

7.6. Állítás. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $0 \leq l \leq k$. Ekkor $r(E) = k|V| - l$ pontosan akkor teljesül, ha*

$$e(\mathcal{F}) \geq (t-1)l + k(|V| - \cup\mathcal{F})$$

teljesül a V minden $\mathcal{F} = \{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciója esetén, ahol $e(\mathcal{F})$ a G azon éleinek számát jelöli, melyek nem egy $X_i \in \mathcal{F}$ halmazon belül futnak, azaz $e(\mathcal{F}) = |E| - \sum_i \gamma(X_i)$.

Bizonyítás. Az 1.2. Állítás feltételében $l \leq k$ esetén feltehető, hogy $\mathcal{X}$ részpartíció, ugyanis két metsző halmazt az uniójukra cserélve a jobboldal értékét nem növeljük. Részpartíció esetén a feltétel a következő formát kapja:

$$\sum_{X \in \mathcal{X}} (k|X| - l) + |E - E(\mathcal{X})| \geq k|V| - l.$$

Ez pedig éppen a jelen állításban szereplő feltétel, hiszen $|E - E(\mathcal{X})| = e(\mathcal{X})$. □

Ezek után kimondjuk a 2. Feladat megoldását $0 \leq l \leq k$-ra és alsó fokkorlátok esetén. Az következő tétel tehát általánosítása a 7.2. Tételnek.

7.7. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ gráf, $m : V \to \mathbb{Z}_+$ alsó fokkorlát és $0 \leq l \leq k$. Pontosan akkor létezik egy F élhalmaz V-n, amelyre $E + F$ teljes rangú $\mathcal{M}_{k,l}$-ben, és $d_F(v) \geq m(v)$ minden $v \in V$ esetén, ha V minden $\mathcal{F} = \{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciója esetén:*

$$2j \geq m(V), \tag{7.3}$$

$$j \geq (t-1)l + k(|V| - \cup\mathcal{F}) - e(\mathcal{F}), \tag{7.4}$$

$$2j \geq (t-1)l + k(|V| - \cup\mathcal{F}) - e(\mathcal{F}) + \max_i m(X_i). \tag{7.5}$$

A szükségesség meggondolható a következőképpen. A (7.3) feltétel nyilvánvalóan szükséges. A (7.4) feltétel is szükséges, mert ha van egy hiányos részpartíció, akkor a fokkorlátoktól eltekintve is legalább annyi él kell, mint a részpartíció hiánya. A (7.5) szükségességének igazolásához legyen $\mathcal{F}$ egy részpartíciója V-nek és $X \in \mathcal{F}$. Ekkor:

1. $e_F(\mathcal{F}) \geq (t-1)l + k(|V| - \cup\mathcal{F}) - e(\mathcal{F})$,
2. $\gamma_F(X) + j \geq m(X)$, mert $m(X) \leq \sum_{v \in X} d_F(v) = e_F(X) + \gamma_F(X) \leq j + \gamma_F(X)$.

Ezekből pedig: $2j = |F| + j \geq e_F(\mathcal{F}) + \gamma_F(X) + j \geq (t-1)l + k(|V| - \cup\mathcal{F}) - e(\mathcal{F}) + m(X)$.

Használni fogjuk azt a tényt, hogy a 2. Feladatnál feltehő, hogy E független (mert ha E' egy bázisa E-nek, akkor $r(E + F) = r(E' + F)$ minden F-re). Ezért elég belátnunk az alsó-fokkorlátos feladatra a következő tételt, ugyanis könnyen ellenőrizhető, hogy független esetben a (7.4), (7.5) feltételek a (7.7), (7.8) feltételekké egyszerűsödnek ki.

7.8. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ gráf, $m : V \to \mathbb{Z}_+$ alsó fokkorlátok, $0 \leq l \leq k$, és E független az $\mathcal{M}_{k,l}$-ben. Pontosan akkor létezik egy F élhalmaz V-n, amelyre $E + F$ teljes rangú $\mathcal{M}_{k,l}$-ben, és $d_F(v) \leq m(v)$ minden $v \in V$ esetén, ha:*

$$2j \geq m(V), \tag{7.6}$$

$$j \geq b(V), \tag{7.7}$$

$$2j - m(X) \geq b(V) - b(X) \quad \emptyset \neq X \subseteq V \text{ esetén.} \tag{7.8}$$

A (7.6) és (7.7) szükségessége világos. (7.8) pedig (7.5) specializációja arra az esetre, ha a részpartíció egy darab X halmazból áll, ekkor ugyanis $2j \geq (1-1)k + k(|V| - \cup\mathcal{F}) - e(\mathcal{F}) + \max m(X_i) \geq k(|V-X|) - e(\mathcal{F}) + m(X) = k|V-X| - e(V-X) + m(X) = b(V) - b(X) + m(X)$.

A pontos fokelőírásra a tétel a következőképpen specializálódik.

7.9. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ gráf, $m : V \to \mathbb{Z}_+$ fokelőírások, $0 \leq l \leq k$, és E független az $\mathcal{M}_{k,l}$-ben. Pontosan akkor létezik egy F élhalmaz V-n, amelyre $E+F$ teljes rangú $\mathcal{M}_{k,l}$-ben, és $d_F(v) = m(v)$ minden $v \in V$ esetén, ha:*

$$2j = m(V), \tag{7.9}$$

$$j \geq b(V), \tag{7.10}$$

$$m(V - X) + b(X) \geq b(V) \quad \emptyset \neq X \subseteq V \text{ esetén.} \tag{7.11}$$

A 7.8. Tétel levezetése a 7.9-ből. Egy $\emptyset \neq X \subseteq V$ halmazt pontosnak nevezünk, ha $2j - m(X) = b(V) - b(X)$. Az m-et megpróbáljuk emelni addig, amíg $2j = m(V)$ lesz. Tegyük fel, hogy $m(V) < 2j$. Kell tehát egy darab csúcs, amelyen az m-et megemelve igazak maradnak a feltételek. Az egyetlen baj, ha a kiszemelt pont benne van egy pontos halmazban. Legyen X pontos, ekkor $2j - m(X) = b(V) - b(X)$, ahonnan $2j - m(X) \leq b(V)$, tehát $m(X) \geq 2j - b(V) \geq j > \frac{m(V)}{2}$. Emiatt nem létezik két diszjunkt pontos halmaz, ezért létezik egy egyértelmű maximális pontos. $m(V) < 2j$ miatt ez nem lehet az egész V, tehát választhatunk rajta kívül egy pontot. $\square$

Azt láttuk, hogy a felső fokkorlátos esetnél általánosabb a pontos fokelőírt eset, ezért a felső fokkorlátos feladattal külön nem foglalkozunk. A fenti levezetés után már csak az maradt hátra, hogy a pontosan fokelőírt esetre belássuk a 7.9. Tételt.

A 7.9. Tétel bizonyítása a 7.4-ből. Ha $b(V) = j$, akkor szó szerint visszakaptuk a 7.4. Tételt. Ha $j = k|V| - l - r(E)$ és E független, akkor az 1. és a 2. Feladat megegyezik, mert ekkor mindkét esetben bázissá kell kiegészíteni E-t.

Tegyük fel, hogy $j > b(V)$. Ekkor próbáljuk meg csökkenteni j-t 1-gyel és m-et két ponton 1-1-gyel vagy egy ponton 2-vel úgy, hogy igaz maradjon a feltétel. Nevezzünk egy $\emptyset \neq X \subseteq V$ halmazt **pontos halmaz**nak, ha $m(V - X) + b(X) = b(V)$, és **1-pontos**nak, ha $m(V - X) + b(X) = b(V) + 1$. Ha a csökkentést az u, v pontokon végezzük, akkor a következőkre kell figyelni: u, v-nek benne kell lennie az összes pontos halmazban, másrészt minden 1-pontos halmaznak tartalmaznia kell legalább az egyiküket.

Legyen X pontos, ekkor $b(X) + m(V - X) = b(V)$, ahonnan $m(V - X) \leq b(V) < j = \frac{m(V)}{2}$, azaz $m(X) > \frac{m(V)}{2}$. Tehát bármely két pontos metszi egymást, ezért van egy egyértelmű minimális pontos P.

A fentiekhez hasonlóan, ha X 1-pontos, akkor $m(X) \geq \frac{m(V)}{2}$. Ebből következik, hogy minden 1-pontos X metszi P-t. Ha a metszetük nem P, akkor P minimalitása miatt pontos nem lehet, tehát 1-pontos kell, hogy legyen, mert $2b(V)+1 = b(X)+m(V-X)+b(P)+m(V-P) \geq b(X\cap P)+m(V-X\cap P)+b(X\cup P)+m(V-X\cup P) \geq 2b(V)$. Ahhoz tehát, hogy $\{u,v\}$ lefogja az összes 1-pontos halmazt, elegendő, ha lefogja az összes P által tartalmazott 1-pontosat.

1. eset: bármely két P-beli 1-pontos halmaz metszi egymást. Ekkor létezik egy egyértelmű minimális P-beli 1-pontos, ekkor persze a keresett élet úgy választjuk, hogy az egyik vége legyen a minimális pontosban, a másik pedig P-ben bárhol.

2. eset: X, Y két diszjunkt P-beli 1-pontos. Ekkor a fentiek miatt $m(X) = m(Y) = \frac{m(V)}{2}$. Legyen X, Y tartalmazásra nézve minimális. Ekkor minden Z 1-pontos halmaz $m(Z) \geq \frac{m(V)}{2} > 0$ miatt kénytelen belemetszeni X-be vagy Y-ba, de akkor a minimalitás miatt tartalmazza is azt. Tehát egy olyan él, amelynek az egyik vége X-beli, a másik pedig Y-beli, jó is lesz. □

7.3. A $k+1 \leq l \leq \frac{3}{2}k$ eset

Ebben a szakaszben az 1. Feladat megoldását adjuk meg a felső fokkorlátos változatra.

7.10. Tétel. *Legyen $G=(V,E)$ gráf, $m : V \to \mathbb{Z}_+$ felső fokkorlát, $k+1 \leq l \leq \frac{3}{2}k$, $k \geq 2$, és E független $\mathcal{M}_{k,l}$-ben. Ekkor pontosan akkor létezik egy j elemű F élhalmaz V-n, amelyre $E+F$ független $\mathcal{M}_{k,l}$-ben, és $d_F(v) \leq m(v)$ minden $v \in V$ esetén, ha teljesülnek az alábbiak:*

$$2j \leq m(V), \tag{7.12}$$

$$j \leq b_E(X) + m(V-X) \text{ minden } X \subseteq V,\ |X| \geq 2 \text{ esetén}, \tag{7.13}$$

$$j \leq m(V-x) \text{ minden } x \in V \text{ esetén}, \tag{7.14}$$

$$2j \leq \sum_{X\in\mathcal{P}} b(X) + m(V-\cup\mathcal{P}) + m(V-t), \tag{7.15}$$

ahol ez utóbbi feltételt az olyan $\mathcal{P}$ halmazcsaládokra követeljük meg, melyekre van olyan $t \in V$, hogy $X \cap Y = \{t\}$ $\forall X \neq Y \in \mathcal{P}$. (Az ilyeneket nevezzük a rövidség kedvéért t-virágoknak.)

Megjegyezzük, hogy ebből a tételből következik a 6.2. Tétel. A (7.12), (7.13) feltételek szükségességét már az előbb meggondoltuk. A (7.14) szükséges, mert $j = |F| \leq \sum_{v\in V-x} d_F(v) \leq m(V-x)$.

A (7.15) szükségessége a következőkön alapul. Legyen F egy fokkorlátokat kielégítő élhalmaz, amelyre $E+F$ független. Ekkor:

1. $d_F(t, V-\cup\mathcal{P}) \leq \sum_{v\in V-\cup\mathcal{P}} d_F(v) \leq m(V-\cup\mathcal{P})$,

2. $d_F(t, \cup\mathcal{P}) \leq \sum_{X\in\mathcal{P}} \gamma_F(X) \leq \sum_{X\in\mathcal{P}} b(X)$,

3. $\gamma_F(V-t)+j = \sum_{v\in V-t} d_F(v) \leq m(V-t)$ (azt használtuk, hogy $\sum_{v\in V-t} d_F(v) = 2\gamma_F(V-t)+d_F(V-t) = e_F(V-t)+\gamma_F(V-t) = |F|+\gamma_F(V-t) = j+\gamma_F(V-t)$).

Ezeket összeadva $2j = |F|+j \leq \sum_{X\in\mathcal{P}} b(X)+m(V-\cup\mathcal{P})+m(V-t)$.

F-pontosnak vagy röviden pontosnak nevezünk egy legalább kételemű $X\subseteq V$ halmazt, ha $b_{E+F}(X)=0$. Nevezzünk i-pontosnak egy $X\subseteq V, |X|\geq 2$ halmazt, ha $b_{E+F}(X)=i$. Használjuk majd a következő összefüggéseket:

7.11. Állítás. *Legyen $X, Y \subseteq V$.*

1. *Ha $|X\cap Y|\geq 2$, akkor $b(X)+b(Y) = b(X\cap Y)+b(X\cup Y)+d(X,Y)$. Ezért, ha pontosak legalább két elemű halmazban metszik egymást, akkor az uniójuk is pontos, és $d(X,Y)=0$. Más szavakkal: ha pontos halmazokra $d(X,Y)\neq 0$, akkor a metszetük legfeljebb egy elemű.*

2. *Ha $|X\cap Y|=1$, akkor $b(X)+b(Y) = b(X\cup Y)+k-l+d(X,Y)$.*

3. *Ha $X_1, X_2, X_3 \subseteq V$, $|X_1\cap X_2| = |X_1\cap X_3| = |X_2\cap X_3| = 1$ és $X_1\cap X_2\cap X_3=\emptyset$, akkor $b(X_1\cup X_2\cup X_3)\leq b(X_1)+b(X_2)+b(X_3)-3k+2l \leq b(X_1)+b(X_2)+b(X_3)$, és egyenlőség csak akkor állhat, ha $\gamma(X_1\cup X_2\cup X_3) = \gamma(X_1)+\gamma(X_2)+\gamma(X_3)$.*

Bizonyítás. 1. Következik a $\gamma(X)+\gamma(Y) = \gamma(X\cap Y)+\gamma(X\cup Y)+d(X,Y)$ egyenlőségből.

2. $b(X)+b(Y) = k|X|-l-\gamma(X)-k|Y|-l-\gamma(Y) = k(|X|+|Y|-1)+k-2l-(\gamma(X)+\gamma(Y)) = k|X\cup Y|+k-2l-(\gamma(X\cap Y)-d(X,Y)) = b(X\cup Y)+k-l+d(X,Y)$.

3. $b(\cup_{i=1}^3 X_i) = k|\cup_{i=1}^3 X_i| - l - \gamma(\cup_{i=1}^3 X_i) \leq k(\sum_{i=1}^3 |X_i|-3) - l - \sum_{i=1}^3 \gamma(X_i) = \sum_{i=3}^3 (k|X_i|-l-\gamma(X_i)) - 3k+2l = \sum_{i=3}^3 b(X_i)-3k+2l$. □

A rövidség kedvéért azt mondjuk, hogy egy e él v-diszjunkt (ahol v egy csúcs), ha az e egyik végpontja sem v. Azt mondjuk hogy egy e él X-diszjunkt (ahol X egy csúcshalmaz), ha e egyik végpontja sem X-beli. Valamint azt mondjuk, hogy e egy F-él (ahol F egy élhalmaz), ha $e\in F$.

A 7.10. Tétel bizonyítása. A feltételek szükségességét láttuk. Belátjuk, hogy elégségesek is. Ehhez azt elég belátni, hogy ha F egy maximális jó halmaz, akkor valamelyik feltételt élesen teljesíti (ami alatt azt értjük, hogy $j+1$ már nem teljesíti azt a feltételt).

Tegyük fel, hogy a (7.12), (7.13) és (7.14) feltételek egyike sem teljesül élesen. Ekkor be kell látnunk, hogy van olyan t-virág, amelyre (7.15) éles.

Megjegyezzük, hogy egy $\mathcal{P}$ t-virág akkor teljesíti egyenlőséggel (7.15)-öt, ha: 1. minden $e=uv\in F$ él esetén, ha $u\in V-\cup\mathcal{P}$, akkor $v=t$, 2. $P\in\mathcal{P}$-ben nincs t-diszjunkt F-él, és $\mathcal{P}$ elemei pontosak, 3. minden $x\in V-t$ csúcs telített.

Amennyiben 1. és 2. teljesül, és $V-t$-ben legfeljebb egy $s \in \cup\mathcal{P}$ csúcs kivételével minden csúcs telített, valamint s hiánya 1, akkor $\mathcal{P}$-re (7.15) éles.

A (7.12) „nem-élessége” azt jelenti, hogy vagy van legalább 2 darab hiányos pont, vagy van egy darab legalább kettő hiányú pont. A (7.13) „nem-élessége” azt jelenti, hogy tetszőleges X pontos halmazhoz, amely minden telített pontot tartalmaz, létezik X-diszjunkt F-él. A (7.14) „nem-élességéből” következik, hogy ha t kivételével minden pont telített, akkor van t-diszjunkt F-él.

A bizonyítás során gyakran használjuk majd azt a gondolatot, hogy megadunk egy $F' := F - e_1 - \cdots - e_i + f_1 + \cdots + f_j$ élhalmazt, és belátjuk róla, hogy F' is megengedett, azaz hogy $E + F'$ kielégíti a fokelőírásokat – ez mindig könnyen látszik majd –, és $E + F'$ is $[k, l]$-ritka. Ez utóbbit pedig úgy ellenőrizzük le, hogy sorravesszük $\{1, \dots j\}$ összes nemüres I részhalmazát, és megvizsgáljuk, hogy lehetséges-e, hogy $F'' = F - e_1 - \cdots - e_i + \cup_{\nu \in I} f_\nu$ nem $[k, l]$-ritka, de bármely szűkebb I választása esetén $[k, l]$-ritka. Azaz azt vizsgáljuk, hogy mi lehet egy tartalmazásra nézve minimális I, melyre az F'' élhalmaz nem $[k, l]$-ritka. Egy I csak úgy lehet ilyen, ha van egy olyan X halmaz, melyre $\gamma_{F''}(X) = k|X| - l + 1$, és tartalmazza az $\{f_\nu : \nu \in I\}$ éleket, valamint tartalmaz mondjuk μ darabot az $e_1, \dots, e_i$ élekből úgy, hogy $\mu < |I|$, és X az $E+F$-re nézve $(|I| - \mu - 1)$-pontos (ez általában a konkrét esetekben pontos halmazt illetve néhányszor 1-pontosat jelent majd). Tehát ahhoz, hogy belássuk, hogy F' megengedett, azt kell végigellenőrizni, hogy tetszőleges I esetén nem létezik az $\{f_\nu : \nu \in I\}$ éleket tartalmazó, az $e_1, \dots, e_i$ élekből μ darabot tartalmazó $(|I| - \mu - 1)$-pontos halmaz. Az ilyen X halmazt az $\{f_\nu : \nu \in I\}$ élekhez tartozó akadálynak nevezzük.

Legyen H a telítetlen pontok halmaza.

7.12. Állítás. *Ha $|H| \geq 2$, akkor létezik egy egyértelmű maximális pontos P_{max}, amely tartalmazza H-t.*

Bizonyítás. F maximalitása miatt bármely két különböző $u, v \in H$-hoz létezik egy u, v-t tartalmazó X pontos halmaz, különben $F + uv$ ellentmondana F maximalitásának. Mivel a legalább két pontban metsző pontosak uniója is pontos, ezért bármely két különböző $u, v \in H$-hoz van egy u, v-t tartalmazó egyértelmű maximális X_{uv} pontos halmaz. Ha $|H| = 2$, akkor az állítást ezzel beláttuk.

Ha $|H| \geq 3$, akkor elég belátni a következőt: ha u, v, w három H-beli csúcs, akkor $X_{uv} = X_{vw}$. Indirekt tegyük fel, hogy $X_{uv} \neq X_{vw}$. Ebből következik, hogy nem létezik u, v, w-t tartalmazó pontos halmaz, hiszen az ellentmondana X_{uv} maximalitásának. Ebből viszont következik, hogy $|X_{uv} \cap X_{vw}| = 1$, $|X_{uv} \cap X_{uw}| = 1$ és $|X_{vw} \cap X_{uw}| = 1$. Mivel $X_{uv} \cap X_{vw} \cap X_{uw} = \emptyset$, így a 7.11. Állítás 3. pontja szerint $X_{uv} \cup X_{vw} \cup X_{uw}$ pontos, ami ellentmond az X_{uv} maximalitásának. □

Mostantól legyen F olyan maximális elemszámú megengedett élhalmaz, amelyre $|H|$ maximális, és ha $|H| = 2$, akkor ezen belül olyan, melyre P_{max} maximális.

Mint említettük a (7.13) nem-élességéből következik az alábbi.

7.13. Állítás. *Ha $|H| \geq 2$, akkor létezik P_{max}-diszjunkt F-beli él.*

7.14. Állítás. *Ha $|H| \geq 2$, akkor $|H| = 2$, valamint valamelyik H-beli hiánya 1.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van legalább három hiányos csúcs: a_1, a_2, a_3. A P_{max} ezeket mind tartalmazza. Tudjuk, hogy létezik egy cd F-él P_{max}-on kívül. Ekkor $F - cd + a_i c$ megengedett élhalmaz kell, hogy legyen $i = 1$ vagy $i = 2$-re. Tegyük fel, hogy nem az, ez azt jelenti, hogy létezik egy a_1, c-t tartalmazó X pontos halmaz, és létezik egy a_2, c-t tartalmazó Y pontos halmaz, ekkor viszont X, Y, P_{max} ellentmond a 7.11. Állítás 3. pontjának. Legyen mondjuk $F' = F - cd + a_1 c$ egy megengedett élhalmaz, ez F-fel megegyező méretű, viszont azt állítjuk, hogy az F'-höz, tartozó hiányosakat tartalmazó maximális pontos halmaz nagyobb P_{max}-nál, ami pedig ellentmondás. Az F'-höz tartozó, a hiányosakat tartalmazó maximális P'_{max} pontos nyilván tartalmazza az a_2, a_3 és d csúcsokat, és az is világos, hogy P_{max} pontos marad $E + F'$-re is, ekkor viszont $P_{max} \cap P'_{max}$ legalább két elemű (a_2, a_3 benne van), tehát az uniójuk is $E + F'$-pontos, ami viszont P'_{max} maximalitása miatt azt jelenti, hogy P'_{max} tartalmazza P_{max}-ot, és a d csúcs miatt szigorúan bővebb nála. Ezzel beláttuk, hogy $|H| = 2$.

Legyen H két eleme a_1, a_2. Tegyük fel most indirekt, hogy mindkét H-beli hiánya legalább kettő. Ekkor ugyanúgy, mint fent, láthatjuk, hogy $F - cd + a_i c$ megengedett élhalmaz kell, hogy legyen $i = 1$ vagy $i = 2$-re. Mondjuk azt, hogy $F' = F - cd + a_1 c$ megengedett. Viszont F'-re most hiányos csúcs marad a_1 is, tehát a_1, a_2, d hiányos csúcsok lesznek, és hasonlóan, mint fent, beláthatjuk, hogy az F'-höz tartozó, a hiányosakat tartalmazó maximális P'_{max} pontos nyilván tartalmazza az a_1, a_2 és d csúcsokat, és szigorúan bővebb P_{max}-nál, ellentmondásban F választásával. □

A továbbiakban azt mondjuk, hogy a cd él **v-kritikus**, ha léteznek U_c^{cd}, U_d^{cd} pontos halmazok, melyekre $v, c \in U_c^{cd}$, $d \notin U_c^{cd}$, $v, d \in U_d^{cd}$, $c \notin U_d^{cd}$. Megjegyezzük, hogy ezekből $U_c^{cd} \cap U_d^{cd} = \{v\}$ már következik a 7.11. Állítás 1. pontja miatt. Hasznos lesz a következő lemma.

7.15. Lemma. *Legyenek P_1, P_2 pontos halmazok, melyekre $P_1 \cap P_2 = \{t\}$, $a \in P_1 - t$, $b \in P_2 - t$, és ab él. Ekkor nem létezik olyan Q pontos, amely metszi $(P_1 - t)$-t és $(P_2 - t)$-t is, és nem tartalmazza ab-t.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy van ilyen Q. Tegyük fel, hogy mondjuk $a \notin Q$.

Azt állítjuk, hogy $|P_1 \cap Q| = 1$. Indirekt tegyük fel, hogy $|P_1 \cap Q| \geq 2$, ekkor $P_1 \cup Q$ pontos (7.11. Állítás, 1. pont). Ha $b \in Q$, akkor ab a $P_1 - Q, Q - P_1$ között futna, ami ellentmondás

(7.11. Állítás, 1. pont). Ha $b \notin Q$, akkor az ab él a $(P_2 - (P_1 \cup Q)), ((P_1 \cup Q) - P_2)$ között futna, de $(P_1 \cup Q) \cap P_2$ legalább két elemű (t benne van, és $Q \cap P_2 - t$ a része), ez pedig ellentmondana a 7.11. Állítás 1. pontjának.

Ugyanígy kapjuk, hogy $|P_2 \cap Q| = 1$. A P_1, P_2, Q halmazok metszete üres, mert $|P_1 \cap Q| = 1$ és $(P_1 - t) \cap Q = \emptyset$ miatt $t \notin Q$ és $P_1 \cap P_2 = \{t\}$. Uniójukban viszont az ab miatt több él feszül, ez pedig ellentmond a 7.11. Állítás 3. pontjának. □

Tudjuk, hogy H egy vagy két elemű. A továbbiakban ezt a két esetet külön kezeljük.

1. eset $|H| = 1$. Legyen $H = \{t\}$. Ekkor t hiánya legalább kettő, valamint létezik t-diszjunkt F-él.

7.16. Állítás. *Ha cd egy t-diszjunkt F-él, akkor cd t-kritikus.*

Bizonyítás. Ha nem létezne t-t és c-t tartalmazó és d-t nem tartalmazó pontos, akkor $F' := F - cd + tc$ egy F-fel megegyező méretű megengedett halmaz lenne, de $|H|$ nőne. A c és d szerepét felcserélve kapjuk, hogy léteznie kell t-t és d-t tartalmazó és c-t nem tartalmazó pontos halmaznak is. □

Ha c egy olyan csúcs, amelyre illeszkedik t-diszjunkt F-él, akkor legyen P_c az egyértelmű minimális t, c-t tartalmazó pontos. Ha cd egy t-diszjunkt F-él, akkor P_c nem tartalmazza d-t az előző állítás miatt, ugyanis P_c a minimalitása miatt része U_c^{cd}-nek.

7.17. Állítás. *Legyen c olyan él, amelyre illeszkedik t-diszjunkt F-él, ekkor P_c nem tartalmaz t-diszjunkt F-élet.*

Bizonyítás. Tegyül fel indirekt, hogy ef egy P_c-beli t-diszjunkt F-él. A 7.16. Állítás és P_c minimalitása miatt P_c-ben nincs c-re illeszkedő t-diszjunkt F-él. Ezért $d \notin P_c$ és $e, f \neq c$. Ekkor azt állítjuk, hogy $F' := F - cd - ef + tc + de$ egy F-fel megegyező méretű megengedett halmaz. Megengedett, mert egy tc-hez tartozó akadály csak egy tc-t tartalmazó és ef-et nem tartalmazó pontos halmaz lehetne, de a P_c minimalitása miatt ef benne van minden tc-pontosban. A de akadálya egy de-t tartalmazó valamint c-t és f-et nem tartalmazó X pontos halmaz lenne, de ilyen nincs a 7.15. Lemma miatt (a $P_1 = P_c$, $P_2 = U_d^{cd}$, $Q = X$ és $ab = cd$ választással). A $\{tc, de\}$-nek nincs akadálya, mert ha tc, de benne van egy halmazban, akkor ef, cd is benne van. Tehát F' egy olyan megengedett élhalmaz, melyre $|H|$ nagyobb. □

Ha c egy olyan csúcs, amelyre illeszkedik t-diszjunkt F-él, akkor legyen P'_c olyan c, t-t tartalmazó pontos, amely nem tartalmaz t-diszjunkt élet (ilyen van, mint láttuk, mert a P_c ilyen), és ezek között egy tartalmazásra nézve maximális.

7.18. Állítás. *A P'_c-k a t-ben metszik egymást (ahol c egy olyan csúcs, amelyre illeszkedik t-diszjunkt F-él).*

Bizonyítás. Legyenek c_1, c_2 olyan csúcsok, melyekre illeszkednek t-diszjunkt F-élek, és $P'_{c_1} \neq P'_{c_2}$. Ha $|P'_{c_1} \cap P'_{c_2}| \geq 2$ lenne, akkor P'_{c_i} pontossága miatt $d(P'_{c_1}, P'_{c_2}) = 0$ teljesülne, és így $P'_{c_1} \cup P'_{c_2}$ nem tartalmazna t-diszjunkt F-élet, és ez ellentmondana maximalitásuknak. □

Ezzel beláttuk, hogy a P'_c-k éles t-virágot alkotnak. Az 1. esetben kész a bizonyítás. Mint majd látni fogjuk, ugyanezt a három állítást bizonyítjuk majd be a 2.esetben is, csak ott az első kettő nehezebb lesz, mert külön kell választani bizonyos eseteket attól függően, hogy élek és pontok miképpen helyezkednek el P_{max}-hoz képest.

2. eset $|H| = 2$. Legyen $H = \{s, t\}$.

Legyen tehát P_{max} az s-et és t-t tartalmazó egyértelmű maximális pontos (7.12. Állítás). P_{max} maximalitásából következik az alábbi két egyszerű megfigyelés.

7.19. Állítás. *1. Ha X egy pontos halmaz, amely nem részhalmaza P_{max}-nak, akkor $P_{max} \cap X$ legfeljebb egy elemű.*

2. Ha X, Y olyan pontos halmazok, hogy az X, Y, P_{max} halmazok közül bármely kettő metszi egymást, és X nem része P_{max}-nak, akkor $X \cap Y \cap P_{max}$ egy elemű.

Bizonyítás. Az 1. következik a 7.11. Állítás 1. pontjából és P_{max} maximalitásából. A 2. bizonyítása: látjuk, hogy a hármas metszet nem lehet legalább két elemű, akkor ugyanis $X \cup Y \cup P_{max}$ egy P_{max}-nál bővebb pontos halmaz lenne. Tehát $X \cap Y \cap P_{max}$ üres. Az 1. pont miatt $X \cap P_{max}$ és $Y \cap P_{max}$ egy eleműek. Az $X \cap Y$ is egy elemű kell, hogy legyen, különben $X \cup Y$ egy P_{max}-ot két elemben metsző pontos lenne, ellentmondásban az 1. ponttal. Tehát az X, Y, P_{max} halmazok a 7.11. Állítás 3. pontjának megfelelő konfigurációban vannak, tehát uniójuk pontos, ami ellentmond P_{max} maximalitásának. □

7.20. Állítás. *Ha cd egy P_{max}-on kívüli F-él, akkor cd v-kritikus, ahol a v vagy s, vagy t.*

Bizonyítás. A cd helyett megpróbáljuk cs, dt-t vagy ds, ct-t berakni F-be, és látni fogjuk, hogy csak cd s- vagy t-kritikussága lehet az akadály. F maximalitása miatt $F - cd + cs + dt$ nem lehet megengedett, tehát vagy létezik egy s, c-t tartalmazó, d-t nem tartalmazó X pontos halmaz, vagy létezik egy d, t-t tartalmazó és c-t nem tartalmazó Y pontos halmaz. A $\{cs, dt\}$ élek akadálya egy s, t, d, c-t tartalmazó pontos Z halmaz lehetne, de ilyen nincs a 7.19. Állítás 1. pontja miatt.

Tegyük fel mondjuk, hogy van egy fenti X akadály. Ekkor viszont tekintsük a $F - cd + ds + ct$ élhalmazt. F maximalitása miatt ez nem megengedett, mivel a $\{ct, ds\}$ párnak az akadálya egy P_{max}-ot legalább két csúcsban metsző pontos lenne, ezért akadály csak egy s, d-t tartalmazó és c-t nem tartalmazó X' pontos halmaz vagy egy c, t-t tartalmazó, d-t nem tartalmazó Y' pontos halmaz lehet. Ez utóbbi valójában nem fordulhat elő, mert P_{max}, X, Y' ellentmond a 7.19. Állítás 2. pontjának.

Ez viszont azt jelenti, hogy X, X' mutatja, hogy cd s-kritikus. □

7.21. Állítás. *Ha cd egy P_{max}-on kívüli F-él, akkor az s és t közül pontosan az egyikre kritikus.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy a cd él s- és t-kritikus is, ekkor viszont létezik egy s-et és c-t tartalmazó X pontos halmaz, és létezik egy Y pontos halmaz, amely tartalmazza t-t és c-t. Viszont az X, Y, P_{max} hármas ellentmond a 7.19. Állítás 2. pontjának. □

7.22. Állítás. *Ha cd egy P_{max}-on kívüli t-kritikus F-él, akkor $h(s) = 1$, ha pedig s-kritikus, akkor $h(t) = 1$.*

Bizonyítás. Nyilván szimmetrikus, tehát tegyük fel, hogy cd t-kritikus. (A 7.14. Lemma miatt vagy $h(s) = 1$, vagy $h(t) = 1$.) Tegyük fel tehát indirekt, hogy $h(s) \geq 2$. Ekkor $F' := F - cd + cs$ egy F-fel megegyező méretű megengedett élhalmaz, de $|H|$ nagyobb. □

Ebből következik, hogy ha $h(s) + h(t) \geq 3$, akkor minden P_{max}-on kívüli él ugyanarra a csúcsra kritikus. Nekünk szükségünk van az alábbi általánosabb állításra.

7.23. Állítás. *Ha cd és ef különböző P_{max}-on kívüli F-élek, akkor ugyanarra a csúcsra kritikusak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a cd él t-kritikus, az ef él pedig s-kritikus.

1. eset: cd és ef párhuzamosak. Ez éppen a 7.21. Állítás.

2. eset: $d = e, c \neq f$. Indirekt tegyük fel, hogy cd s-kritikus, és ef t-kritikus. Ekkor a cd él kritikussága miatt létezik egy X pontos halmaz, amely tartalmazza s, d-t, és a df él kritikussága miatt létezik egy Y pontos halmaz, amely tartalmazza t, e-t. Az X, Y, P_{max} halmazok viszont ellentmondanak a 7.19. Állítás 2. pontjának.

3. eset: c, d, e, f különböző pontok. Indirekt tegyük fel, hogy cd s-kritikus, és ef t-kritikus. Először lássuk be, hogy a ce, de, cf, df párok közül valamelyik párra igaz, hogy nem létezik olyan pontos halmaz, amely azt tartalmazza, de nem tartalmazza a cd és az ef élek egyikét sem teljes egészében. Indirekt tegyük fel, hogy bármely ilyen xy párra van egy Q_{xy} pontos. Lássuk be az alábbi állításokat, amelyek arról szólnak, hogy a Q_{xy} halmazok hogyan helyezkednek el a $P_{max}, U_c^{cd}, U_d^{cd}, U_e^{ef}, U_f^{ef}$ halmazokhoz képest.

1. $Q_{xy} \cap P_{max} = \emptyset$,
2. $Q_{xy} \cap U_x^{cd} = \{x\}$ és $Q_{xy} \cap U_y^{ef} = \{y\}$,
3. $Q_{xy} \cap U_{\{c,d\}-x}^{cd} = \emptyset$ és $Q_{xy} \cap U_{\{e,f\}-y}^{ef} = \emptyset$ a 7.15. Lemma miatt.

A szimmetria miatt elég az $xy = de$ esettel foglalkoznunk. 1: Ha Q_{de} metszené P_{max}-ot, akkor a $Q_{de}, P_{max}, U_d^{cd}$ ellentmondana a 7.19. Állítás 2. pontjának. 2: a szimmetria miatt elég belátni, hogy $Q_{de} \cap U_d^{cd} = \{d\}$. Indirekt tegyük fel, hogy $Q_{de} \cap U_d^{cd}$ legalább két elemű, ekkor $Q_{de} \cup U_d^{cd}$ pontos, és így a $Q_{de} \cup U_d^{cd}, P_{max}, U_e^{ef}$ hármas ellentmond a 7.19. Állítás 2. pontjának. 3: a szimmetria miatt elég belátni, hogy $Q_{de} \cap U_c^{cd} = \emptyset$. Tegyük fel indirekt, hogy $Q_{de} \cap U_c^{cd}$ nem üres. Ha legalább két elemű, akkor $Q_{de} \cup U_c^{cd}$ pontos, amely legalább két csúcsban (az s és d) metszi U_d^{cd}-t, ezért $Q_{de} \cup U_c^{cd} \cup U_d^{cd}$ pontos. Ha $Q_{de} \cap U_c^{cd}$ egy elemű, akkor $Q_{de} \cup U_c^{cd} \cup U_d^{cd}$ pontos a 7.11. Állítás 3. pontja miatt. Tehát mindkét esetben $Q_{de} \cup U_c^{cd} \cup U_d^{cd}$, ekkor viszont a $Q_{de} \cup U_c^{cd} \cup U_d^{cd}, P_{max}, U_e^{ef}$ halmazok ellentmondanak a 7.19. Állítás 2. pontjának.

A következő állítások arról szólnak, hogy a Q_{xy} halmazok hogyan helyezkednek el egymáshoz képest.

1. Ha $x \in \{c, d\}$, akkor $Q_{xe} \cap Q_{xf} = \{x\}$, és ha $y \in \{e, f\}$, akkor $Q_{cy} \cap Q_{dy} = \{y\}$.

2. $Q_{de} \cap Q_{cf} = \emptyset$ és $Q_{df} \cap Q_{ce} = \emptyset$.

1: a szimmetria miatt elég belátni, hogy $Q_{ce} \cap Q_{cf} = \{c\}$. Tegyük fel indirekt, hogy $Q_{ce} \cap Q_{cf}$ legalább két elemű, ez viszont ellentmond annak, hogy $d(Q_{ce}, Q_{cf}) \geq 1$ az ef él miatt (7.11. Állítás 1.pontja). 2: a szimmetria miatt elég belátni, hogy $Q_{de} \cap Q_{cf} = \emptyset$. Tegyük fel indirekt, hogy $Q_{de} \cap Q_{cf}$ nem üres. Legalább két elemű nem lehet $d(Q_{de}, Q_{cf}) \geq 2$ (a cd, ef élek miatt) és a 7.11. Állítás 1. pontja miatt. Tehát $|Q_{de} \cap Q_{cf}| = 1$, de tudjuk, hogy $Q_{de} \cap Q_{ce} = \{e\}$ és $Q_{cf} \cap Q_{ce} = \{c\}$, ez a konfiguráció viszont nem lehetséges a 7.11. Állítás 3. pontja miatt, mert $Q_{de} \cup Q_{cf} \cup Q_{ce}$ több élet feszít, mint egyesével ez a három halmaz (a cd, ef élek miatt).

Ekkor tehát a $P_{max}, U_c^{cd}, U_d^{cd}, U_e^{ef}, U_f^{ef}, Q_{ce}, Q_{cf}, Q_{de}, Q_{df}$ olyan pontos halmazok, melyek közül bármely kettő legfeljebb egy pontban metszi egymást, a t, s, c, d, e, f pontok mindegyike pontosan 3 halmazban szerepel, és V minden más pontja vagy egyben vagy egyben sem. Belátjuk, hogy ilyen konfiguráció nem lehetséges. Legyen Z a fenti 9 halmaz uniója. Az alábbiakban a $\gamma(X)$ jelölés $\gamma_{E+F}(X)$-et jelenti. A fenti 9 halmazt pedig röviden $X_1, \ldots, X_9$-nek nevezzük. $b(Z) = k|Z| - l - \gamma(Z) = \sum k|X_i| - 6 \cdot 2k - l - \gamma(Z) = \sum(k|X_i| - l) + 9l - 12k - l - \gamma(Z) < \sum(k|X_i| - l) + 8l - 12k - \sum \gamma(X_i) = \sum b(X_i) + 8l - 12k \leq 0$ ($b(X_i) = 0$ a pontosság miatt, $l \leq \frac{12}{8}k = \frac{3}{2}k$, valamint $\gamma(Z)$ nagyobb, mint $\sum \gamma(X_i)$ a cd, ef élek miatt).

Tegyük fel mondjuk, hogy nem létezik olyan pontos halmaz, amely d, e-t tartalmazza, de nem tartalmazza a cd és az ef élek egyikét sem teljes egészében. Legyen $F' := F - cd - ef + ct + fs + de$. Belátjuk, hogy ez egy F-nél nagyobb méretű megengedett élhalmaz. Az sf élnek nincs akadálya az ef t-kritikus volta miatt (és a 7.19. Állítás 2. pontja miatt), hasonlóan a ct élnek nincs akadálya a cd t-kritikus volta miatt. A de élnek nincs akadálya amiatt, hogy feltettük, hogy nincs olyan pontos halmaz, amely d, e-t tartalmazza, de nem tartalmazza a cd és az ef élek egyikét sem. Az $\{sf, de\}$ akadálya egy s, f, d, e-t tartalmazó pontos X halmaz lenne, de ilyen nincs, mert akkor az X, P_{max}, U_e^{ef} hármas ellentmond a 7.19. Állítás

2. pontjának. Ugyanígy: a $\{tc, de\}$ akadálya egy t, c, d, e-t tartalmazó pontos halmaz lenne, de ilyen sincs. A $\{ct, fs, de\}$ akadálya egy s, t, c, d, e, f csúcsokat tartalmazó pontos lenne, de ilyen nincs (a 7.19. Állítás 1. pontja szerint).

Tehát F' megengedettségének akadálya csak az $\{sf, tc\}$ pár akadálya lehet. Az $\{sf, tc\}$ pár akadálya vagy egy s, f, t, c-t tartalmazó pontos X halmaz, vagy egy s, f, t, c-t tartalmazó és d, e-t nem tartalmazó 1-pontos X halmaz lehet. Az s, f, t, c csúcsokat tartalmazó pontos halmaz nincs (a 7.19. Állítás 1. pontja), tehát X egy s, f, t, c-t tartalmazó és d, e-t nem tartalmazó 1-pontos halmaz. Ekkor legyen $F'' := F - cd - ef + ct + de$. F'' egy F-fel megegyező méretű megengedett élhalmaz, amelyre P_{max} pontos marad, és az X pontossá válik, és mivel $|X \cap P_{max}| \geq 2$, $X \cup P_{max}$ pontos, így az F''-höz tartozó, az F''-hiányosakat tartalmazó maximális pontos halmaz bővebb P_{max}-nál, ami ellentmond P_{max} maximalitásának. Tehát nem létezik az F'-höz akadály, azaz F' valóban egy F-nél nagyobb méretű megengedett. Ez ellentmondás. $\square$

Innentől tegyük fel, hogy a P_{max}-on kívüli F-élek mind t-kritikusak.

7.24. Állítás. *Legyen cd olyan t-diszjunkt F-beli él, amelyre $c \in P_{max}$ és $d \notin P_{max}$. Ekkor cd is t-kritikus.*

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy $c \neq t$, de $c = s$ lehetséges. Legyen ef egy P_{max}-on kívüli F-él. Az világos, hogy a P_{max} egy c-t tartalmazó és d-t nem tartalmazó pontos, azt kell csak belátni, hogy létezik olyan pontos halmaz, amely d, t-t tartalmazza és c-t nem. Indirekt tegyük fel hogy, nem létezik olyan pontos halmaz, amely d, t-t tartalmazza és c-t nem. Emiatt az ef diszjunkt cd-től (hiszen az ef él t-kritikus). Legyen $F' = F - cd - ef + se + fc + dt$. F' nagyobb méretű F-nél, tehát F maximalitása miatt F' nem lehet megengedett. Az se élnek nincs akadálya az ef t-kritikus volta miatt (és a 7.19. Állítás 2. pontja miatt), fc élnek szintén nincs akadálya az ef t-kritikus volta miatt, a dt élnek nincs akadálya az indirekt feltevés miatt. Az $\{se, fc\}$ párnak nincs akadálya, mert az egy s, e, f, c-t tartalmazó pontos halmaz lenne, de ilyen a 7.19. Állítás 1. pontja miatt nincs, ugyanígy az $\{se, fc, dt\}$-nek sincs akadálya. Tehát ha F' nem megengedett, az azt jelenti, hogy $\{se, dt\}$-nek van egy X akadálya. Ez az X nem lehet egy s, t, d, e-t tartalmazó pontos, mert ilyen nincs (a 7.19. Állítás 1. pontja), tehát X egy s, t, d, e-t tartalmazó és c, f-et nem tartalmazó 1-pontos. Ekkor viszont $F'' := F - cd + td$ az F-fel azonos méretű megengedett élhalmaz, amelyre nézve P_{max} pontos marad, és X pontossá válik, és mivel $P_{max} \cap X$ legalább két elemű, a $P_{max} \cup X$ halmaz egy P_{max}-nál nagyobb pontos, ez pedig ellentmond P_{max} maximalitásának. Tehát nem létezhet $\{se, dt\}$-nek akadálya, ami azt jelenti, hogy F' megengedett, ami ellentmond F maximalitásának. $\square$

Ha c egy olyan csúcs, amelyre illeszkedik t-diszjunkt F-él, akkor jelölje P_c a c, t csúcsokat tartalmazó minimális pontos halmazt. A 7.19. Állítás azonnali következménye az alábbi.

7.25. Lemma. *Ha $c \notin P_{max}$, akkor nem létezik olyan Q pontos halmaz, amely belemetsz $(P_{max} - t)$-be és $(P_c - t)$-be is.*

7.26. Állítás. *Legyen cd egy P_{max}-on belüli t-diszjunkt F-él. Ekkor cd t-kritikus.*

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy $d = s$ vagy $c = s$ lehetséges. Legyen ef egy P_{max}-on kívüli F-él. A szimmetria miatt elég belátni, hogy létezik d-t és t-t tartalmazó és c-t nem tartalmazó pontos él. Indirekt tegyük fel, hogy nem létezik olyan pontos halmaz, amely d, t-t tartalmazza és c-t nem. Legyen $F' = F - cd - ef + se + fc + dt$, belátjuk, hogy F' megengedett. Az se élnek a 7.25. Lemma miatt nincs akadálya, hasonlóképpen az fc élnek sincs, és a dt élnek az indirekt feltevés miatt nincs akadálya. Az $\{se, fc\}$ párnak az akadálya egy s, c, e, f csúcsokat tartalmazó pontos halmaz lehetne, de ilyen a 7.19. Állítás 1. pontja miatt nincs, hasonlóan a $\{td, fc\}$ párnak az akadálya egy t, d, e, f csúcsokat tartalmazó pontos halmaz lehetne, de ilyen nincs. Az $\{se, fc, dt\}$ akadálya pedig szintén csak egy s, t, c, d, e, f-et tartalmazó pontos halmaz lehetne, ami nincs. Az $\{se, td\}$ halmaz akadálya nem lehet egy s, e, t, d-t tartalmazó pontos (mert ilyen nincs), tehát csak egy s, e, t, d-t tartalmazó és c, f-et nem tartalmazó X 1-pontos halmaz lehet. Ha X ilyen, akkor legyen $F'' := F - cd - ef + fc + dt$. Így F'' egy F-fel megegyező méretű megengedett élhalmaz, amelyre nézve P_{max} pontos marad, és X pontossá válik, és mivel $X \cap P_{max}$ legalább két elemű, $X \cup P_{max}$ egy P_{max}-nál bővebb pontos, amely tartalmazza az F''-re hiányos csúcsokat. Ez pedig ellentmond P_{max} maximalitásának. Tehát azt kaptuk, hogy F'-nek nem lehet akadálya, azaz F' egy F-nél nagyobb megengedett élhalmaz, ez pedig ellentmond F maximalitásának. □

Ha cd egy t-diszjunkt F-él, akkor legyen P_c az egyértelmű minimális t, c-t tartalmazó pontos. Ez tehát nem tartalmazza d-t.

7.27. Lemma. *Ha cd egy t-diszjunkt F-él, és $e \in P_c$, akkor nem létezik olyan pontos halmaz, amely tartalmazza e-t és d-t és nem tartalmazza c-t.*

Bizonyítás. Ez a 7.15. Lemma speciális esete $P_1 = P_c, P_2 = P_d, a = c, b = d$-vel. □

7.28. Állítás. *Legyen c olyan él, amelyre illeszkedik t-diszjunkt F-él, ekkor P_c nem tartalmaz t-diszjunkt F-élet.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy ef egy P_c-beli t-diszjunkt F-él. Könnyen látszik, hogy P_c nem tartalmazhat c-re illeszkedő t-diszjunkt F-élet, mert tegyük fel, hogy mondjuk $e = c$, de ekkor $U_e^{ef} \cap P_c$ szűkebb lenne P_c-nél (nincs benne f).

Figyeljük meg, hogy ha $c \in P_{max}$, akkor $P_c \subseteq P_{max}$, valamint hogy ha $c \notin P_{max}$, akkor $P_c \cap P_{max} = \{t\}$.

1. eset: $c \notin P_{max}$, ekkor persze ef P_{max}-on kívül fut (mert t-diszjunkt). Ekkor t, e, f, c, d különböző pontok (a d azért különböző, mert nincs benne P_c-ben), $d = s$ esetleg előfordulhat, más egybeesés nem. Legyen $F' := F - cd - ef + tc + de + fs$ egy F-nél nagyobb megengedett élhalmaz. A tc él akadálya egy őt tartalmazó és ef-et nem tartalmazó pontos halmaz lehetne, de ilyen a P_c minimalitása miatt nincs. Az ed élnek nincs akadálya a 7.27. Lemma miatt, az fs élnek nincs akadálya a 7.25. Lemma miatt. A $\{tc, de\}$ akadálya egy t, c, d, e-t tartalmazó és f-et nem tartalmazó pontos lehetne, de ilyen nincs, mert P_c minimalitása miatt ha egy pontos tartalmazza t-t és c-t, akkor tartalmazza f-et is. A $\{de, fs\}$ akadálya egy d, e, f, s-t tartalmazó pontos halmaz lehetne, de ilyen nincs a 7.25. Lemma miatt. A $\{tc, de, fs\}$ akadálya pedig egy s, t, d, e, f, c-t tartalmazó pontos lenne, és ilyen nincs a 7.19. Állítás 1. pontja miatt.

Tehát az F' megengedettségének egyetlen akadálya csak az $\{sf, tc\}$ akadálya lehet. Ez nem lehet egy s, f, t, c-t tartalmazó pontos, mert olyan nincs, tehát $\{sf, tc\}$ akadálya egy s, f, t, c-t tartalmazó és e, d-t nem tartalmazó 1-pontos X halmaz lehet. Ekkor legyen $F'' := F - cd - ef + de + fs$ egy F-fel megegyező méretű megengedett élhalmaz. F''-re P_{max} és X is pontos, és ekkor $X \cup P_{max}$ egy P_{max}-nál bővebb, minden F''-hiányost tartalmazó pontos halmaz, ami ellentmond P_{max} maximalitásának. Tehát F' valóban megengedett, ellentmondásban F maximalitásával.

2. eset: $c \in P_{max}$, ekkor ef is P_{max}-beli. Legyen gh egy P_{max}-on kívüli F-él. Az e, f közül legalább az egyik nem s, legyen tehát mondjuk $e \neq s$. ($f = s$, $c = s$, $d = s$ lehetségesek, de t, c, e, f, g, h különbözőek.) Legyen $F' := F - cd - ef - gh + tc + de + fg + hs$. Belátjuk, hogy ez egy F-nél nagyobb megengedett élhalmaz.

A tc-nek nincs akadálya a P_c minimalitása miatt, az ed élnek nincs akadálya a 7.27. Lemma miatt, az fg-nek nincs akadálya a 7.25. Lemma miatt, valamint a hs élnek nincs akadálya a 7.25. Lemma miatt.

A $\{tc, de\}$ pár akadálya csak egy t, c, d, e-t tartalmazó és f-et nem tartalmazó pontos lehetne, de ilyen nincs, mert P_c minimalitása miatt egy t, c-t tartalmazó pontosban f is benne van.

A $\{tc, fg\}$ akadálya egy t, c, f, g-tartalmazó és e, d-t nem tartalmazó 1-pontos X halmaz lehet (mert t, c, f, g-tartalmazó pontos halmaz nincs). A 7.11. Állítás 1. pontja miatt $X \cap P_c$ és $X \cup P_c$ közül legalább az egyik pontos, de $X \cap P_c$ pontossága P_c minimalitásának mond ellent, $X \cup P_c$ pontossága pedig a 7.19. állítás 1. pontjának.

A $\{tc, hs\}$ akadálya egy t, c, h, s-et tartalmazó és d, g-t nem tartalmazó 1-pontos X halmaz lehet (mert t, c, h, s-et tartalmazó pontos nincs), sőt X nem tartalmazhatja e, f-et együtt. A 7.11. Állítás 1. pontja miatt $X \cap P_c$ és $X \cup P_c$ közül legalább az egyik pontos. $X \cup P_c$ nem lehet pontos a 7.19. állítás 1. pontja szerint, tehát $X \cap P_c$ pontos. Viszont P_c minimalitása miatt ez csak úgy lehet, ha $P_c \subseteq X$, de ekkor e, f benne van X-ben, ami ellentmondás.

Az $\{fg, hs\}$ akadálya egy f, g, h, s-et tartalmazó pontos halmaz lehetne, de ilyen nincs. A $\{de, fg\}$ akadálya egy d, e, f, g-t tartalmazó pontos halmaz lehetne, de ilyen sincs. A $\{de, hs\}$ akadályát később vizsgáljuk.

A $\{tc, de, fg\}$ akadálya egy t, c, d, e, f, g-t tartalmazó pontos halmaz lehetne, de ilyen nincs. A $\{de, fg, hs\}$ akadálya egy d, e, f, g, h, s-et tartalmazó pontos halmaz lehetne, de ilyen nincs. A $\{tc, de, hs\}$ akadálya csak egy t, c, d, e, h, s-et tartalmazó és f, g-t nem tartalmazó 1-pontos X halmaz lehet (mert t, c, d, e, h, s-t tartalmazó pontos nincs). A 7.11. Állítás 1. pontja miatt $X \cap P_c$ és $X \cup P_c$ közül legalább az egyik pontos, de $X \cap P_c$ pontossága P_c minimalitásának mond ellent, $X \cup P_c$ pontossága pedig a 7.19. állítás 1. pontjának. A $\{tc, fg, hs\}$ akadálya csak egy t, c, f, g, h, s-et tartalmazó és d, e-t nem tartalmazó 1-pontos X halmaz lehet (mert t, c, f, g, h, s-t tartalmazó pontos nincs). A 7.11. Állítás 1. pontja miatt $X \cap P_c$ és $X \cup P_c$ közül legalább az egyik pontos, de $X \cap P_c$ pontossága P_c minimalitásának mond ellent, $X \cup P_c$ pontossága pedig a 7.19. Állítás 1. pontjának.

Végül a $\{tc, de, fg, hs\}$-nek sincs akadálya, mert az csak egy t, c, d, e, f, g, h, s-et tartalmazó pontos halmaz lehetne, olyan pedig nincs.

Tehát ha F' nem megengedett, az azt jelenti, hogy van a $\{de, hs\}$ párnak akadálya. Ez egy d, e, h, s-et tartalmazó és f, g-t nem tartalmazó 1-pontos X halmaz lehet (mert d, e, h, s-et tartalmazó pontos halmaz nincs). Ekkor $F'' := F - cd - ef - gh + tc + de + fg$ egy F-fel megegyező méretű megengedett élhalmaz, melyre X pontos lesz, és P_{max} is pontos maradt (ugyanis ha $d \in P_{max}$, akkor kivettük belőle dc, ef-et és beraktuk de, tc-t, ha pedig $d \notin P_{max}$, akkor kivettük belőle ef-et és beraktuk tc-t). Ekkor tehát $X \cup P_{max}$ egy P_{max}-nál bővebb, minden F''-hiányost tartalmazó pontos halmaz, ami ellentmond P_{max} maximalitásának. Tehát F' valóban megengedett, ellentmondásban F maximalitásával. □

Ha c egy olyan csúcs, amelyre illeszkedik t-diszjunkt F-él, akkor legyen P'_c olyan c-t és t-t tartalmazó pontos, amely nem tartalmaz t-diszjunkt élet (ilyen van, például P_c), és ezek között egy tartalmazásra nézve maximális.

7.29. Állítás. *Legyen c olyan csúcs, amelyre illeszkedik t-diszjunkt F-él. Ekkor a P'_c-k t-ben metszik egymást.*

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint az első esetben: legyenek c_1, c_2 olyan csúcsok, melyekre illeszkednek t-diszjunkt F-élek és $P'_{c_1} \neq P'_{c_2}$. Ha $|P'_{c_1} \cap P'_{c_2}| \geq 2$ lenne, akkor P'_{c_i} pontossága miatt $d(P'_{c_1}, P'_{c_2}) = 0$ lenne, így az uniójuk sem tartalmazhat t-diszjunkt élet, és ellentmondana maximalitásuknak. □

Ezzel beláttuk, hogy a P'_c-k éles t-virágot alkotnak: nem tartalmaznak t-diszjunkt F-éleket, de fednek minden olyan csúcsot, amelyre illeszkedik t-diszjunkt F-él, és $V - t$-ben csak egy darab nem telített csúcs van, az s csúcs, és s hiánya egy. □

8. fejezet

Merevítés csúcsok rögzítésével és egy forrás-elhelyezési probléma

Ebben a fejezetben két problémát fogunk vizsgálni: *(i)* Adott egy nem merev gráf. Szögezzük le minimális számú csúcsát, hogy a kapott gráf merev legyen a síkban. *(ii)* Adott egy gráf. Húzzunk össze egy minimális méretű csúcshalmazt úgy, hogy a kapott gráfban legyen két éldiszjunkt feszítőfa. Látni fogjuk, hogy ezek a feladatok közösen kezelhetőek és polinomiálisan megoldhatóak.

8.1. A leszögezési probléma

Először lássuk az *(i)*-es feladat precíz megfogalmazását. Tegyük fel, hogy adott egy (G, p) rúdszerkezet, ahol $G = (V, E)$, és legyen $Z \subseteq V$ egy csúcshalmaz. Azt mondjuk, hogy egy $m : V \to \mathbb{R}$ infinitezimális mozgás **fixen hagyja** Z-t, ha $m(v) = 0$ minden $v \in Z$ esetén. Azt mondjuk, hogy **a** (G, p) **rúdszerkezet** Z**-t rögzítve (infinitezimálisan) merev**, ha a nullvektor az egyetlen, Z-t fixen hagyó infinitezimális mozgás. Azt mondjuk, hogy **a** G **gráf az** Z **csúcshalmazt rögzítve merev**, ha egy generikus p esetén a (G, p) rúdszerkezet Z-t rögzítve merev.

Azt, hogy adott (G, p) rúdszerkezet és Z csúcshalmaz esetén a (G, p) rúdszerkezet Z-t rögzítve merev-e, könnyen leolvashatjuk a merevségi mátrixról. Ez ugyanis azzal ekvivalens, hogy a merevségi mátrix $V - Z$-hez tartozó $2|V - Z|$ darab oszlopa független.

A következő állítás tartalma annak a kombinatorikus karakterizációja, hogy a G gráf az Z-t leszögezve merev.

8.1. Állítás. *Legyen* $G = (V, E)$ *egy nem merev gráf,* $Z \subseteq V$ *és* $|Z| \geq 2$*. A* G *gráf az* Z*-t leszögezve merev akkor és csak akkor, ha* $G + K_Z$ *merev, ahol* K_Z *a* Z *csúcshalmazon a teljes gráfot jelöli.*

A merevségi mátrixos átfogalmazásból láthatjuk, hogy a megoldandó feladat a következő: *keressünk egy minimális* Z *csúcshalmazt úgy, hogy a merevségi mátrix* $V - Z$*-hez tartozó oszlopai függetlenek.* Azaz másképpen fogalmazva, rendezzük $|V|$ darab párba természetes módon a merevségi mátrix $2|V|$ oszlopát (egy csúcshoz tartozó két oszlop alkot egy párt), és válasszunk ki maximálisan sok vektorpárt úgy, hogy az uniójuk lineárisan független. Ez tehát egy lineáris matroid-párosítás feladat.

Tehát azt kaptuk, hogy abban az esetben, ha p egy adott racionális vektor, akkor a (G, p) rúdszerkezethez meg tudjuk határozni, hogy mi a minimálisan rögzítendő csúcsok száma. Ezt már Lovász [31] is megfigyelte.

Viszont abban az esetben, ha generikus p-ről van szó, akkor Lovász algoritmusa és minimax tétele nem ad polinomiális algoritmust sem jó karakterizációt. Következik viszont belőle (a Schwartz-lemma használatával), hogy randomizált polinomiális algoritmust létezik a feladatra. Továbbiakat a leszögezésről lásd a [41, Section 8.2 és 18.2]-ben.

A fentiek fényében izgalmas kérdés egy polinomiális algoritmus illetve egy minimax tétel megadása. Viszont rossz jel, hogy a háromdimenziós változat „matroid-trinity" feladatra vezet, tehát nem meglepő, hogy a háromdimenziós leszögezési feladat NP-nehéz. Erre is mutatunk majd egy rövid bizonyítást a fejezet végén.

8.2. Forrás-elhelyezési feladat éldiszjunkt feszítőfákkal

Felidézünk most egy rokon problémakört, az úgynevezet forrás-elhelyezési (source location) feladatokat. Ezek általában arról szólnak, hogy egy G gráfban keressünk egy minimális elemszámú (vagy súlyú) X csúcshalmazt úgy, hogy bizonyos összefüggőségi feltételek teljesüljenek valamilyen értelemben az X és a $V - X$ halmazok között. Definiáljuk a k-**LOC** feladatot a következőképpen: *Adott egy* $G = (V, E)$ *irányítatlan gráf. Határozzunk meg egy olyan* $Z \subseteq V$ *minimális méretű csúcshalmazt, amelyre tetszőleges* $v \in V - Z$ *csúcsba létezik* k *élidegen út a* Z *halmazból.* Ez egy viszonylag egyszerű feladat (lásd például [24]). A megoldása azon múlik, hogy a maximális hiányos halmazok részpartíciót alkotnak. Nehezebbnek bizonyult a feladat következő irányított verziója, nevezzük ezt k-**DIR-LOC** feladatnak. *Adott egy* $G = (V, E)$ *irányított gráf. Határozzunk meg egy olyan* $Z \subseteq V$ *minimális méretű csúcshalmazt, amelyre tetszőleges* $v \in V - Z$ *csúcsba létezik* k *élidegen irányított út a* Z *halmazból.* Erre a kérdésre is született jó karakterizáció és polinomiális algoritmus (lásd [1], [54] és [23]).

Most tekintsük ezen kérdés következő változatát. k-**TREE-LOC**: *Adott egy* $G = (V, E)$ *irányítatlan gráf. Határozzunk meg egy olyan* $Z \subseteq V$ *minimális méretű csúcshalmazt, amelyre az élhalmaz felbomlik az* $F_1, \ldots, F_k$ *élhalmazok diszjunkt uniójára úgy, hogy tetszőleges* $v \in V - Z$ *csúcsba létezik* F_i*-beli út a* Z *halmazból minden* $i = 1, \ldots, k$ *esetén.*

A k-TREE-LOC kérdés annyiban különbözik a k-LOC problémától, hogy a k-LOC feladatban egy Z csúcshalmazt akkor tekintünk megengedettnek, ha minden $v \in V - Z$ csúcs esetén az élhalmaz felbontható $F_1, \ldots, F_k$ élhalmazok diszjunkt uniójára úgy, hogy v-be létezik F_i-beli út a Z halmazból minden $i = 1, \ldots, k$ esetén, míg a k-TREE-LOC kérdésben minden v-re ugyanaz a felbontás kell, hogy teljesítse ezt a feltételt. Tehát ha a k-LOC kérdés információ eljuttatását modellezi Z-ből G többi csúcsába, akkor a k-TREE-LOC feladat az információ egyidejű eljuttatását modellezi.

Az irányított esetben megfogalmazható analogonja a k-TREE-LOC feladatnak ekvivalens a k-DIR-LOC kérdéssel Edmonds feszítőfák pakolására vonatkozó tétele miatt.

Itt megjegyezzük, hogy a forráselhelyezéses feladatok is megfogalmazhatóak összehúzással és klikkhozzáadással: azaz keressünk minimális olyan Z csúcshalmazt, melyre G/Z k-élösszefüggő, vagy keressünk minimális olyan Z csúcshalmazt, melyre $G + K_Z$ k-élösszefüggő (ahol K_Z egy olyan teljes gráf a Z-n, ahol minden él k-szoros illetve irányított esetben mindkét irányba k-szoros). Érdemes meggondolni a k-TREE-LOC feladatnak a következő ekvivalens átfogalmazásait: *adott egy $G = (V, E)$ gráf, határozzunk meg egy olyan $Z \subseteq V$ minimális méretű csúcshalmazt, amelyre $G + K_Z$-ben van k éldiszjunkt feszítőfa.* Illetve: *adott egy $G = (V, E)$ gráf, határozzunk meg egy olyan $Z \subseteq V$ minimális méretű csúcshalmazt, amelyre G/Z tartalmaz k éldiszjunkt feszítőfát.*

Látni fogjuk, hogy a 2-TREE-LOC feladat polinomiálisan megoldható, míg a 3-TREE-LOC NP-nehéz.

Azt állítjuk, hogy 2-TREE-LOC feladat esetében is található egyváltozós mátrix, amelynek az oszlopain ez egy matroid-párosítás feladat. Tekintsük ugyanis a gráfhoz tartozó absztrakt 2-rúdszerkezet merevségi mátrixát, azaz azt az $|E| \times 2|V|$-es mátrixot, amelynek sorai az élekkel vannak indexelve, és minden csúcshoz tartozik két oszlop. Legyenek x_e, y_e változók minden $e \in E$ él esetén. A csúcsoknak tekintjük egy tetszőleges sorrendjét, $v_1, \ldots, v_n$, és az $e = v_i v_j$ él sorának v_i csúcshoz tartozó két koordináta helyén x_e, y_e és a v_j csúcshoz tartozó két helyen $-x_e, -y_e$ áll, ha $i < j$. Belátható, hogy ez a mátrix analóg szerepet játszik, mint a merevségi mátrix az *(i)* feladatban. Azaz akkor és csak akkor $2|V| - 2$ a rangja, ha létezik a gráfban két éldiszjunkt feszítőfa, valamint akkor és csak akkor független, ha lefedhető az élhalmaz két erdővel, azaz ez a mátrix pontosan a körmatroid kétszeresét reprezentálja. Valamint $G + K_Z$ pontosan akkor tartalmaz két éldiszjunkt feszítőfát, ha $V - Z$ oszlopai függetlenek. Tehát ez a feladat is egy matroid-párosítás feladat egy változós mátrixon, azaz tudjuk róla, hogy megoldható randomizált polinomidejű algoritmussal.

A 8.3. szakaszban megadjuk a két feladat egy közös megfogalmazását, majd a 8.4. szakaszban belátjuk, hogy a feladat polinomiálisan megoldható, és bizonyítunk egy minimax formulát is.

8.3. Közös megfogalmazás

Először is öntsük közös formába az $\mathcal{M}_{2,2}$ és az $\mathcal{M}_{2,3}$ matroidok rangfüggvényét meghatározó formulát. Legyen ebben a fejezetben $l = 2$ vagy $l = 3$. Tekintsük az $\mathcal{M}_{2,l}$ matroidot, és jelöljük a rangfüggvényét r_l-lel.

8.2. Állítás. *Egy $F \subseteq E$ élhalmaz rangja a következő:*

$$\min_{\mathcal{X}} \sum_{X \in \mathcal{X}} (2|X| - l) + |F - F(\mathcal{X})|,$$

ahol a minimumot az $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_t\}$ halmazrendszerek felett vesszük, ahol $X_i \subseteq V$, $|X_i| \geq 2$ és $F(\mathcal{X}) := \cup_{X \in \mathcal{X}} F(X)$.

Tudjuk, hogy ha $l = 2$, akkor ez az $\mathcal{X}$ halmazrendszer választható a V egy részpartíciójának (ez könnyen következik abból, hogy a metsző halmazokat helyettesíthetjük az uniójukkal), és ha $l = 3$, akkor feltehető, hogy $F = F(\mathcal{X})$ (1.10. Tétel).

Ha $Z \subseteq V$, akkor K_Z jelöljön egy $(4 - l)$-szeres teljes gráfot (pontosabban annak az élhalmazát) a Z csúcshalmazon, azaz egy olyan gráfot, amelyben Z bármely két csúcsa között $4 - l$ darab párhuzamos él fut. Természetesen csak az a fontos, hogy elég sok él legyen, nem lényeges, hogy éppen $4-l$, mindenesetre ennyi elég. A következő kérdést fogjuk vizsgálni.

> Adott egy $G = (V, E)$ gráf, és a feladatunk az, hogy találjunk egy minimális elemszámú $Z \subseteq V$ csúcshalmazt úgy, hogy az $E + K_Z$ rangja $2|V| - l$ legyen.

Ha $l = 2$, akkor $r_l(E) = 2|V| - 2$ pontosan akkor teljesül, ha létezik 2 éldiszjunkt feszítőfa G-ben (1.4. Tétel). Tehát ebben az esetben a következő a feladat.

> Adott egy $G = (V, E)$ gráf. Találjunk egy minimális elemszámú $Z \subseteq V$ csúcshalmazt úgy, hogy $G + K_Z$ tartalmazzon két éldiszjunkt feszítőfát – vagy, ami ezzel ekvivalens: G/Z tartalmazzon két éldiszjunkt feszítőfát.

Ha $l = 3$, akkor $r_l(E) = 2|V| - 3$ pontosan akkor teljesül, ha G generikusan merev a síkban (1.9. Tétel). Tehát ekkor a probléma a következő.

> Adjunk egy minimális méretű klikket egy gráfhoz úgy, hogy a síkban generikusan merevé tegyük.

Mint láttuk ez ekvivalens azzal, hogy szögezzünk le egy minimális méretű halmazt úgy, hogy a kapott rúdszerkezet generikusan infinitezimálisan merev legyen.

Ezen fejezet fő eredménye az, hogy belátjuk, hogy ezek a feladatok polinomidőben megoldhatóak (8.4. Tétel). Tulajdonképpen egy kicsit általánosabb feladatról is kiderül, hogy megoldható, nevezetesen arról, hogy előírhatunk egy T csúcshalmazt, amelyet Z-nek tartalmaznia kell.

8.4. A két feladat közös megoldása

A 8.3. Lemma tartalma az, hogy abban az esetben, ha E független az $\mathcal{M}_{2,l}$ matroidban, akkor az $E+K_Z$ rangja szebben karakterizálható, és így a feladatnak egy kezelhetőbb alakját kapjuk, amelyet már vissza tudunk vezetni egy párosítás-feladatra.

8.3. Lemma. *Legyen E független az $\mathcal{M}_{2,l}$ matroidban, $|E| < 2|V| - l$, és legyen $Z \subseteq V$.*

(i) Ha $|V - Z| \geq 2$, akkor

$$r_l(E + K_{V-Z}) = \min_{X \subseteq Z} 2|V - X| - l + e(X).$$

(ii) $r_l(E+K_{V-Z}) = 2|V|-l$ akkor és csak akkor, ha $e(X) \geq 2|X|$ teljesül minden $X \subseteq Z$ esetén.

Bizonyítás. *(i)* Legyen $E' := E + K_{V-Z}$. Egy $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_t\}$, $X_i \subseteq V$, $|X_i| \geq 2$ halmazrendszer esetén jelölje $v(\mathcal{X})$ a következő mennyiséget $v(\mathcal{X}) := \sum_{X \in \mathcal{X}}(2|X|-l)+|E' - E'(\mathcal{X})|$. A 8.2. Állítás szerint $r_l(E') = \min_{\mathcal{X}} v(\mathcal{X})$. Elég azt belátnunk, hogy a minimum felvétetik egyelemű $\mathcal{X} = \{X\}$ halmazrendszeren is, ahol $Z - V \subseteq X \subseteq V$, ugyanis $v(\{X\}) = 2|X| - l + e(V - X)$, tehát az X komplementálásával megkapjuk az *(i)* állítását.

Válasszuk úgy a $\mathcal{X}$ halmazrendszert, hogy lexikografikusan minimalizálja a következő vektort $(v(\mathcal{X}), |E' - E'(\mathcal{X})|, |\mathcal{X}|)$. Ekkor a következők teljesülnek.

$$|X \cap Y| \leq 1, \text{ ha } X \neq Y \in \mathcal{X}, \tag{8.1}$$

$$\nexists X, Y, Z \in \mathcal{X} : \ |X \cap Y| = |X \cap Z| = |Y \cap Z| = 1 \text{ és } X \cap Y \cap Z = \emptyset, \tag{8.2}$$

$$\text{minden } u \neq v \in V - Z \text{ esetén létezik egy egyértelmű } X_{uv} \in \mathcal{X} : u, v \in X_{uv}. \tag{8.3}$$

A (8.1) azért igaz, mert $2|X|-l+2|Y|-l = 2|X \cup Y|-l+2|X \cap Y|-l > 2|X \cup Y|-l$ teljesül, ha $|X \cap Y| \geq 2$, és ezért $\mathcal{X} - X - Y + X \cup Y$ ellentmondana a $v(\mathcal{X})$ minimalitásának. A (8.2)-t indirekt látjuk be. Tegyük fel, hogy létezik ilyen konfiguráció, ekkor $2|X| - l + 2|Y| - l + 2|Z| - l = 2(|X \cup Y \cup Z|+3) - 3l \geq 2|X \cup Y \cup Z| - l$. Ha most az X, Y, Z halmazokat kicseréljük az $X \cup Y \cup Z$ halmazra, akkor lexikografikusan csökkentenénk a $(v(\mathcal{X}), |E' - E'(\mathcal{X})|, |\mathcal{X}|)$ vektort. Ez ellentmondás. A (8.3) igazolásához tegyük fel, hogy $u \neq v \in V - Z$, és nem létezik u-t és v-t tartalmazó X. Ekkor az $\{u, v\}$ halmaz hozzávétele $\mathcal{X}$-hez lexikografikusan csökkenti $(v(\mathcal{X}), |E' - E'(\mathcal{X})|, |\mathcal{X}|)$-et. Az ilyen halmaz egyértelműsége pedig következik (8.1)-ből.

Belátjuk, hogy ha $u, v, w \in V - Z$, akkor $X_{uv} = X_{vw}$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül. Ekkor a (8.1) miatt $X_{uv} \cap X_{vw} = \{v\}$, de ekkor $X_{uv} \cap X_{uw} = \{u\}$ és $X_{vw} \cap X_{uw} = \{w\}$. Ez pedig ellentmond (8.2)-nek.

Ebből következik, hogy $X_{uv} = X_{u'v'}$ teljesül minden $u, v, u', v' \in V - Z$ esetén, azaz létezik egy egyértelmű $X \in \mathcal{X}$, amely tartalmazza $V - Z$-t, és $|X \cap Y| \leq 1$ teljesül minden $Y \in \mathcal{X} - X$ esetén. Könnyen látható, hogy $v(\mathcal{X}) \geq v(\{X\})$, mert $\gamma_{E'}(X') = \gamma_E(X') \leq 2|X'| - l$ minden $X' \in \mathcal{X} - X$ esetén. Tehát az $\{X\}$ egyelemű halmazrendszer teljesíti, hogy $r_l(E') = v(\{X\})$.

(ii) Ha $|V - Z| \geq 2$, akkor *(i)*-ből következik *(ii)*. Ha $|V - Z| \leq 1$, akkor $r_l(E + K_{V-Z}) = r_l(E) = |E| < 2|V| - l$, és $e(Z) = |E| < 2|V| - l \leq 2|Z|$. □

Egy $Z \subseteq V$ halmazt **jó halmaz**nak nevezünk, ha $e(X) \geq 2|X|$ teljesül minden $X \subseteq Z$ esetén. A 8.3. Lemma (ii)-es pontja miatt ha E független az $\mathcal{M}_{2,l}$-ben, akkor a minimális méretű olyan Y halmaz keresése, amelyre $r_l(E + K_Y) = 2|V| - l$, ekvivalens maximális méretű jó halmaz keresésével.

8.4. Tétel. *Adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy $T \subseteq V$. Ekkor létezik egy $O\left((|E| + |V|)^{3/2}\right)$ futásidejű algoritmus egy maximális elemszámú, T-től diszjunkt jó halmaz keresésére, és létezik egy $O(|V|^2)$ futásidejű algoritmus egy minimális elemszámú olyan Z keresésére, amely tartalmazza T-t, és $r_l(E + K_Z) = 2|V| - l$.*

Bizonyítás. Először azt állítjuk, hogy a második feladat esetén feltehető, hogy E független az $\mathcal{M}_{2,l}$-ben. Ez azért van, mert ha E' egy bázisa az E-nek az $\mathcal{M}_{2,l}$ matroidban, akkor $r_l(E + K_Z) = r_l(E' + K_Z)$ teljesül minden $Z \subseteq V$ esetén. Egy élhalmaz $\mathcal{M}_{2,l}$-beli bázisának megkeresése $O(|V|^2)$ időben megtalálható (ha $l = 2$, akkor lásd például [42, Section 51.5a]-t, és ha $l = 3$, akkor lásd például [17] vagy [2]-t további referenciákért).

A 8.3. Lemma (ii) része szerint a két optimalizálási feladat ekvivalens (ha E független). Belátjuk, hogy a maximális jó halmaz keresése visszavezethető egy maximális párosítás feladatra. Definiáljuk a következő B páros gráfot. Jelölje $\tilde{V}$ azt a halmazt, amely minden $v \in V - T$ csúcshoz tartalmaz két csúcsot: v', v''. Egy tetszőleges $X \subseteq V - T$ esetén jelölje $\tilde{X}$ a $\{v' : v \in X\} \cup \{v'' : v \in X\}$ halmazt. A B két színosztálya legyen a $\tilde{V}$ és az E. A B élhalmaza pedig legyen $F := \{ev' :$ az e él egyik végpontja $v \in V - T\} \cup \{ev'' :$ az e él egyik végpontja $v \in V - T\}$. A definícióból következik, hogy $Z \subseteq V - T$ jó halmaz akkor és csak akkor, ha $|\Gamma(\tilde{X})| \geq |\tilde{X}|$ teljesül minden $X \subseteq Z$ esetén, ez pedig könnyen láthatóan ekvivalens azzal, hogy $|\Gamma(X)| \geq |X|$ minden $X \subseteq \tilde{Z}$ esetén. A Hall-tétel szerint Z akkor és csak akkor jó, ha létezik egy $M \subseteq F$ párosítás, amely fedi $\tilde{Z}$-t.

Készítsünk egy $G' = (V', E')$ gráfot, ahol $V' := \tilde{V} \cup E$ és $E' := F \cup \{v'v'' : v \in V - T\}$. Legyen M egy maximális párosítás G'-ben és Z egy maximális jó halmaz G-ben. Azt állítjuk, hogy $|M| = |V - T| + |Z|$. Ha Z' jó halmaz, és $M_{Z'} \subseteq F$ egy Z'-t fedő párosítás, akkor $M_{Z'} \cup \{v'v'' : v \in V - T - Z'\}$ egy $2|Z'| + |V - T| - |Z'| = |V - T| + |Z'|$ elemszámú párosítás G'-ben. Ha pedig M' egy maximális párosítás G'-ben, akkor $Z := \{v \in V - T :$ $M' \cap F$ fedi a v' és v'' csúcsokat $\}$ egy $|M'| - |V - T|$ számosságú jó halmaz.

Alkalmazhatunk tehát egy maximális párosítást kereső algoritmust G'-ben arra, hogy G-ben találjuk egy maximális jó halmazt. Egy maximális párosítás megtalálható $O(\sqrt{|V'|}|E'|)$ időben (az irodalmat lásd például [42, Section 24.4a]-ben). A G' gráf definíciója szerint $|V'| \leq 2|V| + |E|$ és $|E'| \leq 4|E| + |V|$, tehát $O(\sqrt{|V'|}|E'|) = O\left((|E| + |V|)^{3/2}\right)$. Mivel $|E| \leq 2|V|$ teljesül, ha E független $\mathcal{M}_{2,l}$-ben, ezért független E-re $O(|V|^{3/2})$ futásidőt kapunk. Tehát $O(|V|^2)$ a teljes futásideje minimális olyan T-t tartalmazó Z halmaz keresésének, melyre $r_l(E + K_Z) = 2|X| - l$. $\square$

A fenti visszavezetés és a Berge-Tutte formula segítségével levezethetünk egy minimax tételt a maximális jó halmaz méretére.

8.5. Tétel. *Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy $T \subseteq V$ halmaz, akkor a következő egyenlőség áll fenn:*

$$\max_{Z \text{ jó és } Z \cap T = \emptyset} |Z| = \min_{Y : T \subseteq Y \subseteq V} \sum_{C \in \mathcal{C}(G-Y)} \left\lfloor \frac{e(C)}{2} \right\rfloor + |Y - T|. \tag{8.4}$$

Bizonyítás. max $\leq$ min: Ha $Z \subseteq V - T$ jó halmaz és $T \subseteq Y \subseteq V$, akkor $|Z| \leq \sum_{C \in \mathcal{C}(G-Y)} |Z \cap C| + |Y - T| \leq \sum_{C \in \mathcal{C}(G-Y)} \left\lfloor \frac{e(C)}{2} \right\rfloor + |Y - T|$.

max $\geq$ min: Az előző bizonyítás jelöléseit, segédgráfjait és állításait használva elég azt belátnunk, hogy G'-ben egy maximális párosítás mérete legalább

$$\min_{Y : T \subseteq Y \subseteq V} \left(\sum_{C \in \mathcal{C}(G-Y)} \left\lfloor \frac{e(C)}{2} \right\rfloor + |Y| \right) + |V| - 2|T|.$$

Használjuk a következő jelölést: $w(X) := \sum_{C \in \mathcal{C}(G'-X)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor + |X|$ $(X \subseteq V')$. A Berge-Tutte formulából következik, hogy a maximális párosítás mérete egyenlő $\min_{X \subseteq V'} w(X)$-szel Tegyük fel, hogy $v' \in C \in \mathcal{C}(G' - X)$ és $v'' \in X$, ahol $v \in V - T$. Ha $|C|$ páros, akkor $w(X + v') \leq w(X)$. Ha C páratlan, akkor $w(X - v'') \leq w(X)$. Tehát feltehetjük, hogy az $X \cap \tilde{V}$ halmaz v', v'' párok uniójából áll. Ha egy e élre $e \in X \cap E$, akkor $w(X - e) \leq w(X)$. Tehát létezik egy olyan optimális X, amelyre $X = \tilde{U}$ valamely $U \subseteq V - T$-re. Így a $w(X) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G'-X)} \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor + |X| = |V - T - U| + \sum_{C \in \mathcal{C}(G-U \cup T)} \left\lfloor \frac{e(C)}{2} \right\rfloor + 2|U|$ egyenlőségből következik, hogy (8.4)-ben egyenlőség áll az $Y = U \cup T$ halmazra. $\square$

Említettük már, hogy a minimális olyan Z halmaz keresése, melyre $r_l(E + K_Z) = 2|V| - l$ teljesül, ekvivalens egy lineáris matroid párosítás feladattal, méghozzá $l = 3$ esetén a merevségi mátrix oszlopain, és $l = 2$ esetén az absztrakt 2-rúdszerkezet merevségi mátrixának oszlopain. Legyen $r_0(Z) := r_l(E + K_{V-Z}) - r_l(K_{V-Z})$ $(Z \subseteq V)$. Belátható, hogy $r_0(Z)$ a Z csúcsokhoz tartozó $2|Z|$ darab oszlop rangja, tehát r_0 egy 2-polimatroid függvény a V alaphalmazon. Tehát a minimális olyan Z keresése, amelyre $r_l(E + K_Z) = 2|V| - l$

teljesül, ekvivalens a maximális olyan W keresésével, amelyre $r_0(W) = 2|W|$. Most belátjuk, hogy erre a matroid párosítás feladatra egy egyszerű minimax formula teljesül a 8.5. Tétel következményeképpen.

8.6. Tétel. *Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf, akkor*

$$\max_{W \subseteq V-T : r_0(W)=2|W|} |W| = \min_{\mathcal{F} \text{ egy partíciója } V-T\text{-nek}} \sum_{X \in \mathcal{F}} \left\lfloor \frac{r_o(X)}{2} \right\rfloor .$$

Bizonyítás. A min $\geq$ max irány minden 2-polimatroidfüggvény esetén igaz. A min $\leq$ max irány igazolásához figyeljük meg, hogy elég a formulát akkor belátni, ha E független az $\mathcal{M}_{2,l}$ matroidban (választhatunk egy bázist, ugyanis könnyen látható, hogy r_0 értékét ez nem változtatja meg). Mutatunk egy partíciót, amelyre a baloldal nagyobb vagy egyenlő mint a jobb. Legyen Y egy optimális halmaz a (8.4) formulában. Legyen $\mathcal{F}'$ a $V - T$-nek azon részpartíciója, amely $G - Y$ komponenseiből áll, azaz $\mathcal{F}' := \mathcal{C}(G - Y)$. Valamint legyen $\mathcal{F} := \mathcal{F}' \cup \{\{y\} : y \in Y - T\}$. Erre az $\mathcal{F}$ partícióra pedig:

$$\sum_{X \in \mathcal{F}} \left\lfloor \frac{r_o(X)}{2} \right\rfloor \leq \sum_{X \in \mathcal{F}'} \left\lfloor \frac{e(X)}{2} \right\rfloor + |Y - T| = \max_{Z \text{ jó}, \, Z \cap T = \emptyset} |Z| =$$

$$= \max_{W \subseteq V-T : r_0(W)=2|W|} |W|.$$

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Merevség esetén ($l = 3$) a fenti formulából egy érdekes geometriai jelentés is kiolvasható. A merevségi vizsgálatoknál fontos szerepet játszik a **szabadsági fok** fogalma. Egy $Z \subseteq V$ csúcshalmaz esetén legyen $szf(Z) = 2|Z| - r_0(Z)$. Az előzőekből következik, hogy $szf(Z)$ a G gráf $V - Z$-t fixen hagyó mozgásai által meghatározott altér dimenziója, azaz valamilyen értelemben $szf(Z)$ tényleg nevezhető Z szabadsági fokának. Valamint a 8.6. Tételből egyszerű átrendezéssel adódik a következő minimax formula:

$$\min_{G \text{ a } Z\text{-t rögzítve merev}} |Z| = \max_{\mathcal{F} \text{ a } V \text{ részpartíciója}} \sum_{X \in \mathcal{F}} \left\lceil \frac{szf(X)}{2} \right\rceil + |V - \cup \mathcal{F}|$$

Ezen minimax tétel könnyű irányának a geometriai jelentése az, hogy ha $\mathcal{F}$ egy részpartíció, akkor egy G-t rögzítő csúcshalmaz az $\mathcal{F}$ minden X elemébe legalább $\left\lceil \frac{szf(X)}{2} \right\rceil$-t metsz bele, mert „minden egyes X-beli csúcs rögzítése az X-nek legfeljebb 2 szabadsági fokát tüntetheti el”.

Mutatunk egy rövid bizonyítást a 3 éldiszjunkt feszítőfás forrás-elhelyezési feladat és a háromdimenziós leszögezési feladat NP-nehézségére. (Az utóbbi, azaz *(ii)* már ismert volt [36].)

8.7. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf.*

(i) A minimális olyan $Z \subseteq V$ halmaz keresése, amelyre G/Z-ben van 3 éldiszjunkt feszítőfa, NP-teljes.

(ii) A minimális olyan $Z \subseteq V$ halmaz keresése, amelyre $G + K_Z$ 3 dimenzióban merev, NP-teljes.

Bizonyítás. *(i)* Világos, hogy a feladat NP-beli. A maximális stabil halmaz keresése egy 3-reguláris gráfban NP-teljes, lásd például [18]. Könnyen látható, hogy ha G 3-reguláris, akkor G/Z-ben pontosan akkor van 3 éldiszjunkt feszítőfa, ha $V - Z$ stabil.

(ii) Ez a feladat azért NP-beli, mert a 3 dimenziós merevség NP-beli (a Schwartz-lemma miatt). Az (i)-hez hasonlóan itt is igaz, hogy ha G 3-reguláris, akkor $G + K_Z$ pontosan akkor merev 3 dimenzióban, ha $V - Z$ stabil. $\square$

9. fejezet

Globális merevség elérése csúcsok rögzítésével

Szenzor-hálózatok lokalizációs problémái által motivált forrás-elhelyezési kérdéseket fogunk ebben a fejezetben vizsgálni. Egy szenzor-hálózatban alapvető kérdés az, hogy határozzuk meg a szenzorok pozícióit bizonyos párok távolságának ismeretében. Ehhez nyilván szükséges bizonyos szenzorok pontos pozícióit ismerni, nevezzük ezeket horgonynak. A kérdés, amelyet vizsgálunk, az, hogy határozzuk meg a minimális számú horgonyt ahhoz, hogy a pozícióik és az adott párok távolságának ismerete meghatározzák az összes pozíciót, feltéve, hogy a koordináták generikusak. Polinomiális algoritmust adunk ezen kérdés két relaxáltjára, és ezek kombinációjából egy 2-approximációs algoritmus adódik a horgonyok számának minimalizálására.

9.1. Szenzor-hálózatok és globális merevség

Ebben a fejezetben szenzor-hálózatnak nevezünk egy (G, p, Z) hármast, ahol $G = (V, E)$ gráf, $p : V \to \mathbb{R}^2$ egy realizáció és $Z \subseteq V$ egy csúcshalmaz. A (G, p_1, Z) és (G, p_2, Z) szenzorhálózatokat ekvivalensnek nevezzük, ha tetszőleges $e = uv \in E$ esetén $\|p_1(u) - p_1(v)\| = \|p_2(u) - p_2(v)\|$ teljesül, és $p_1(v) = p_2(v)$ teljesül minden $v \in Z$ esetén. Azt mondjuk, hogy egy (G, p, Z) szenzor hálózat **egyértelműen lokalizálható**, ha tetszőleges vele ekvivalens (G, p', Z) esetén $p = p'$. Ez azt jelenti, hogy egy szenzor hálózat egyértelműen lokalizálható, ha a G gráf, $\|p_u - p_v\|$ $(uv \in E)$ távolságok és a p_v $(v \in Z)$ pozícióik ismeretében a p_v $(v \in V)$ pozíciók egyértelműen meghatározhatók.

Egy szenzor hálózat V csúcshalmazát **szenzorok**nak nevezzük, az ismert pozíciójú csúcsokat, a Z elemeit pedig **horgonyok**nak. A két-dimenziós szenzor-hálózatok **lokalizációs problémája** a következő: adott a gráf, adottak d_{uv} távolságok az $e = uv \in E$ élek esetén, és adottak a $q_v, v \in Z$ pozíciók. Határozzunk meg egy p realizációt, melyre $\|p(u)-p(v)\| = d_{uv}$ minden $e = uv \in E$ esetén és $p(v) = q_v$ minden $v \in Z$-re. Ez egy alapvető algoritmikus kérdés a drótnélküli szenzor-hálózatok elméletében, az utóbbi időben több cikk is született erről a feladatról, lásd például [6, 44]. Ehhez szorosan kapcsolódó kérdés az egyértelmű lokalizálhatóság kérdése: adott egy megengedett megoldás a lokalizációs problémára, kérdés, hogy egyértelmű-e.

Az világos, hogy legalább három horgonyra szükség van az egyértelmű lokalizálhatósághoz. Bizonyos hálózatokra nem várhatunk egyértelmű megoldást akkor sem, ha van 3 horgonyunk. Például ha a gráfban van egy szeparáló u, v csúcspár, amelyre egy, az u, v törlésével kapott C komponensben nincs horgony. Ekkor ugyanis az egész C komponenst tükrözhetjük a $p(u), p(v)$ egyenesére, és így egy ekvivalens, de nem azonos szenzor-hálózatot kapunk. Egy másik szükséges feltétel a merevség. Gondoljunk egy szenzor-hálózatra, mint egy rúd-és-csukló rúdszerkezetre, ahol a horgonyok le vannak rögzítve a síkhoz. Ha ennek a szerkezetnek van folytonos deformációja, azaz nem merev, akkor a lokalizációs feladatnak sem lehet egyértelmű megoldása. Két természetes kérdés merül fel: Mely szenzor-hálózatok egyértelműen lokalizálhatók? Hogyan találhatunk egy adott hálózatban minimális számú horgonyt, amellyel a hálózat egyértelműen lokalizálható lesz? Az első kérdésre generikus hálózatok esetén ismert a válasz. A második kérdés megválaszolásával, azaz a horgonyok számának minimalizálásával foglalkozunk ebben a fejezetben. Ezt a kérdést már [44]-ben is felvetették.

Az egyértelmű lokalizálhatóság kérdése szoros összefüggésben van egy gráf globális merevségének fogalmával. Azt mondjuk, hogy a $(G, p_1), (G, p_2)$ rúdszerkezetek ekvivalensek, ha bármely $e = uv$ él esetén $\|p_1(u) - p_1(v)\| = \|p_2(u) - p_2(v)\|$. Azt mondjuk, hogy a $(G, p_1), (G, p_2)$ rúdszerkezetek egybevágóak, ha bármely u, v pontpár esetén $\|p_1(u)-p_1(v)\| = \|p_2(u)-p_2(v)\|$. Egy (G, p) rúdszerkezetet **globálisan merev**nek nevezünk, ha bármely vele ekvivalens rúdszerkezet egybevágó is vele. Korántsem triviális tény, hogy ha p_1 és p_2 generikus, akkor (G, p_1) pontosan akkor globálisan merev, ha (G, p_2) globálisan merev [25]. Tehát egy G gráfot **globálisan merev**nek nevezünk, ha (G, p) globálisan merev egy generikus p esetén. Ezek után lássuk, mi a kapcsolat a lokalizálhatóság kérdésével.

A globális merevség és az egyértelmű lokalizálhatóság kapcsolatát a következő egyszerűen bizonyítható állítás mutatja. Ezt már a [6, 44] cikkekben is megfigyelték.

9.1. Tétel. *Legyen (G, p, Z) egy szenzor-hálózat, p egy generikus beágyazás, $|V| \geq 4$, $|Z| \geq 3$. Ekkor a (G, p, Z) szenzor-hálózat pontosan akkor egyértelműen lokalizálható, ha $G + K_Z$ globálisan merev.*

A globálisan merev gráfok kombinatorikus karakterizációját [25]-ben adta meg Bill Jackson és Jordán Tibor, bebizonyítva ezzel Hendrickson sejtését. Szükségünk lesz a redundáns merevség fogalmára. Egy G gráfot **redundánsan merev**nek nevezünk, ha $G - e$ merev minden $e \in E$ estén. A globális merevség karakterizációja a következő.

9.2. Tétel. *Legyen p a legalább négy csúcsú G gráf generikus realizációja. A (G, p) rúdszerkezet pontosan akkor globálisan merev, ha G 3-összefüggő és redundánsan merev.*

Ebből a tételből következik, hogy generikus esetben a globális merevség kérdése nem függ p-től. Ezzel tehát van egy kombinatorikus karakterizációnk az egyértelmű lokalizálhatóságra.

9.3. Tétel. *[25, 6, 44] Egy (G, p, Z) szenzor-hálózat (legalább négy csúccsal és legalább három horgonnyal) pontosan akkor egyértelműen lokalizálható, ha $G + K_Z$ 3-összefüggő és redundánsan merev.*

A 9.3. Tétel fényében a horgony minimalizálás kérdése generikus p esetén a következőképpen fogalmazható meg: adott egy $G = (V, E)$ gráf, keressünk egy minimális elemszámú $P \subseteq V$ halmazt, melyre $|P| \geq 3$, $G + K_P$ 3-összefüggő és redundánsan merev.

Ezen minimalizálási kérdés bonyolultsága nem ismert. A fejezet célja, hogy megmutassuk, hogy ha a „$G+K_P$ 3-összefüggő és redundánsan merev” feltételt a gyengébb feltételekre cseréljük, akkor kezelhető feladatokat kapunk, ami egy randomizált 2-approximációs algoritmust szolgáltat a horgony minimalizálási problémára. Egy gráf **M-összefüggő**, ha a merevségi matroidja összefüggő. Lásd még a 9.2. szakaszt további részletekért.

A következő két relaxált feladatot tekintjük: (i) adott egy G gráf, és keressünk egy minimális méretű P csúcshalmazt, melyre $G + K_P$ M-összefüggő, (ii) adott egy 2-összefüggő G gráf, és keressünk egy minimális méretű P csúcshalmazt, melyre $G + K_P$ 3-összefüggő. Az (i) feladatra adunk egy randomizált polinomidejű algoritmust, a (ii) feladatot pedig könnyen megoldhatjuk egy (determinisztikus) polinomiális algoritmussal.

Mivel az M-összefüggő gráfok 2-összefüggőek (hiszen merevek, ami következik a 9.6. Lemmából), ezekből kaphatunk egy randomizált 2-approximációs algoritmust a horgony minimalizálási problémára: oldjuk meg először (i)-et a G input-gráfra, majd oldjuk meg (ii)-t a $G + K_P$ gráfra, ahol a P az (i) outputjaként kapott halmaz.

9.2. M-összefüggőség

Adott egy $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ matroid, definiáljuk a következő relációt E-en: $e, f \in E$ relációban áll, ha $e = f$, vagy ha létezik egy C köre $\mathcal{M}$-nek, melyre $e, f \in C$. Ismeretes, hogy ez egy ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályokat az $\mathcal{M}$ matroid **komponenseinek** nevezzük. Ha $\mathcal{M}$ legalább kételemű, de csak egy komponense van, akkor $\mathcal{M}$-et **összefüggő**nek nevezzük.

A következő lemma két egyszerű matroidelméleti állítást mond ki.

9.4. Lemma. *Legyenek az $\mathcal{M}$ matroid komponensei az $E_1, E_2, \ldots, E_t$. Ekkor*
(i) $r(\mathcal{M}) = \sum_1^t r(E_i)$, és
(ii) ha $r(\mathcal{M}) = \sum_1^q r(F_i)$ teljesül az E valamely $F_1, F_2, \ldots, F_q$ partíciójára, akkor minden E_i, $1 \leq i \leq t$ komponenshez létezik egy F_j halmaz, melyre $E_i \subseteq F_j$.

Azt mondjuk, hogy egy $G = (V, E)$ gráf **M-összefüggő**, ha $\mathcal{M}_{2,3}$ összefüggő. Könnyen ellenőrizhető, hogy az M-összefüggő gráfok merevek (sőt redundánsan merevek), következésképp 2-összefüggőek is [25]. Például $K_{3,m}$ M-összefüggő minden $m \geq 4$ esetén. Egy G gráf **M-összefüggő komponens**einek nevezzük az $\mathcal{M}_{2,3}$ komponensei által feszített részgráfokat. Könnyen látható, hogy egy gráf M-összefüggő komponensei páronként éldiszjunkt feszített részgráfok. A globális merevség vizsgálatában központi szerepet játszanak az M-összefüggő gráfok.

9.5. Tétel. *[25] Legyen G egy 3-összefüggő gráf. Ekkor G pontosan akkor redundánsan merev, ha M-összefüggő.*

A 9.4. Lemma egyszerű következménye az alábbi.

9.6. Lemma. *Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor M-összefüggő, ha $val(\mathcal{X}) \geq 2|V| - 2$ a G minden nem-triviális $\mathcal{X}$ fedésére.*

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, és jelölje $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_t\}$ az M-összefüggő komponenseinek halmazát.

9.7. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, és $P \subseteq V$, amelyre $|P| \geq 4$. Ekkor $G + K_P$ pontosan akkor M-összefüggő, ha*

$$2|V| - 2 \leq 2|Z| - 3 + \sum_{H_i \in \mathcal{H}: V(H_i) \cap (V - Z) \neq \emptyset} (2|V(H_i)| - 3) \tag{9.1}$$

teljesül minden $Z \subsetneq V$, $P \subseteq Z$ esetén.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $G + K_P$ M-összefüggő. Mivel $\mathcal{H}$ fedése G-nek és $P \subseteq Z$, ezért $Z \cup \{H_i \in \mathcal{H} : V(H_i) \cap (V - Z) \neq \emptyset\}$ egy fedése $G + K_P$-nek. Ez a fedés nem triviális, mivel $Z \neq V$. Tehát a (9.1) következik a 9.6. Lemmából.

A másik irány bizonyításához indirekt tegyük fel, hogy (9.1) teljesül, de $G' = G + K_P$ nem M-összefüggő. Jelölje $\mathcal{H}' = \{H'_1, H'_2, \ldots, H'_q\}$ a $G + K_P$ M-összefüggő komponenseit. Mivel $|P| \geq 4$, így $G'[P]$ M-összefüggő, tehát létezik egy M-összefüggő komponens, mondjuk H'_1, amelyre $P \subseteq V(H'_1)$.

9.8. Állítás.

$$\left\{H'_j \in \mathcal{H}' : 2 \le j \le q\right\} = \{H_i \in \mathcal{H} : V(H_i) \cap (V - V(H'_1)) \neq \emptyset\}$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy $H'_j \in \mathcal{H}'$, $j \ge 2$ M-összefüggő komponenset. Mivel az M-összefüggő komponensek éldiszjunktak ezért $V(H'_j) \cap (V - V(H'_1)) \neq \emptyset$ teljesül. Mivel $E_{G'}(H'_1) \cap E_{G'}(H'_j) = \emptyset$, ezért $G[V(H'_j)] = H'_j$ M-összefüggő. Tehát mivel G' szupergráfja G-nek és H'_j egy feszített részgráf, ezért $H'_j = H_i$ valamely $H_i \in \mathcal{H}$-ra.. Legyen most $H_i \in \mathcal{H}$ úgy, hogy $V(H_i) \cap (V - V(H'_1)) \neq \emptyset$. Mivel H'_1 M-összefüggő G'-ben, és az M-összefüggő komponensek éldiszjunktat, így $V(H_i)$ egy maximális M-összefüggő részgráfot feszít G'-ben. $\square$

A 9.4. Lemma (i) részét, a 9.8. Állítást és a (9.1)-et alkalmazva $Z = V(H'_1)$-vel kapjuk, hogy $2|V| - 3 \ge r(G') = 2|V(H'_1)| - 3 + \sum_{H_i \in \mathcal{H}: V(H_i) \cap (V - V(H'_1)) \neq \emptyset}(2|V(H_i)| - 3) \ge 2|V| - 2$, ez pedig ellentmondás. $\square$

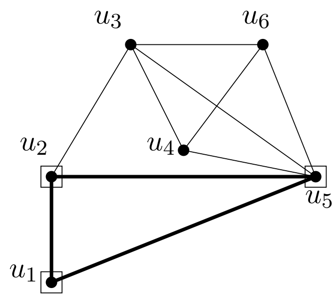
Legyen $\tilde{\mathcal{H}} = (V, \mathcal{E})$ egy hipergráf, amelyet úgy kapunk a $\mathcal{H}$ halmazrendszerből, hogy minden H_i $(1 \le i \le t)$ esetén a $V(H_i)$ halmaz $2|V(H_i)| - 3$ darab másolatát belevesszük. A 9.4. Lemma (i) része miatt $|\mathcal{E}| \le 2|V| - 3$. Valamely $X \subseteq V$ esetén jelölje $e_{\tilde{\mathcal{H}}}(X)$ az olyan $e \in \mathcal{E}$ hiperélek számát, melyekre $e \cap X \neq \emptyset$. A 9.7. lemmabeli P komplementerét véve és a fenti definíciót használva kapjuk a következőt.

9.9. Következmény. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, és legyen $T \subseteq V$, amelyre $|V - T| \ge 4$. Ekkor $G + K_{V-T}$ pontosan akkor M-összefüggő, ha*

$$e_{\tilde{\mathcal{H}}}(S) \ge 2|S| + 1 \tag{9.2}$$

teljesül minden olyan $S \subseteq V$ esetén, melyre $\emptyset \neq S \subseteq T$.

Tehát egy legkisebb olyan P halmaz keresése, amelyre $|P| \ge 4$ és $G + K_P$ M-összefüggő, ekvivalens egy legnagyobb olyan T keresésével, amelyre (9.2) teljesül. Megjegyezzük, hogy a 9.9. Következmény a $|V - T| \ge 4$ feletél nélkül nem igaz. Tekintsük a 9.1. ábrán látható gráfot: a legynagyobb T, melyre a (9.2) teljesül minden $S \subseteq V, \emptyset \neq S \subseteq T$ esetén, az $\{u_3, u_4, u_6\}$ halmaz, de ezzel a T-vel $G + K_{V-T}$ nem M-összefüggő. Tehát a 9.9. Következményt a következő módon használhatjuk egy minimális olyan P keresésére, melyre $G + K_P$ M-összefüggő. Keresünk egy maximális T-t, melyre a (9.2) teljesül minden $S \subseteq V, \emptyset \neq S \subseteq T$ esetén. Ha a talált T-re $|V - T| \ge 4$ teljesül, akkor $P := V - T$ egy minimális olyan halmaz, melyre $G + K_P$ M-összefüggő. Ha pedig $|V - T| \le 3$, akkor legyen P egy tetszőleges 4 elemű, $V - T$-nél bővebb halmaz, ezzel a választással P egy minimális olyan halmaz, melyre $G + K_P$ M-összefüggő.



9.1. ábra.

Ezek után belátjuk, hogy egy maximális olyan T keresése, melyre a (9.2) teljesül minden $S \subseteq V, \emptyset \neq S \subseteq T$ esetén, ekvivalens egy matroid párosítás feladattal.

Tekintsük a G^* páros gráfot, amelyet úgy kapunk a $\tilde{\mathcal{H}}$ hipergráf $G_{\tilde{\mathcal{H}}}$ páros gráfjából, hogy minden $v \in V$ csúcsot kicserélünk két v_1, v_2 csúcsra (amelyeket a v $G_{\tilde{\mathcal{H}}}$-beli szomszédjaival kötünk össze). Legyen most $\mathcal{L}$ az a hipergráf, amelynek a $G_{\mathcal{L}}$ páros gráfja a színosztályok felcserélésével kapható a G^*-ból. Tekintsük a v_1, v_2, $v \in V$ párok által definiált párbaállítását az $\mathcal{L}$ hiperéleinek. Könnyen látható, hogy a legnagyobb, (9.2)-t teljesítő T halmaz keresése ekvivalens az $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ hipergrafikus matroidban egy legnagyobb méretű, párokból álló független halmaz keresésével.

A hipergrafikus matroidbeli matroid párosítás feladatra Makai Márton [35] adott jó karakterizációt, de az továbbra is nyitott, hogy polinomiálisan megoldható-e. Ezen eredmény, és az a tény, hogy $|\mathcal{E}| \leq 2|V| - 3$, valamint az, hogy az M-összefüggő komponensek megtalálhatóak polinomidőben [2], mutatja, hogy az (i) feladatra van NP$\cap$co-NP karakterizáció.

Most adunk egy egyszerű véletlen algoritmust a következő szakaszban, amely azon alapul, hogy a hipergrafikus matroidok lineárisak.

9.3. A hipergrafikus matroid generikus reprezentációja

Lovász belátta [32], hogy a matroid párosítási feladat polinomiálisan megoldható, amennyiben a matroid lineáris, és ismert is egy lineáris reprezentációja. A hipergrafikus matroidokról tudjuk, hogy lineárisak, de nem ismert determinisztikus polinomiális algoritmus egy megfelelő reprezentáció keresésére. Ha megengedünk véletlent használó algoritmusokat, akkor ez a nehézség eltűnik. Ebben a szakaszban adunk egy generikus reprezentációt (olyan reprezentáló mátrixot, amely változókat tartalmaz) a hipergrafikus matroidokra, és ez mutatja, hogy randomizáltan hogyan lehet reprezentálni őket.

Legyen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ egy hipergráf, és legyen $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ a hipergrafikus matroidja.

9.10. Tétel. *[29] $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ pontosan akkor független az $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ matroidban, ha létezik egy $f : \mathcal{F} \to \binom{V}{2}$ függvény, melyre $f(e) \subseteq e$ minden $e \in \mathcal{E}$ esetén, és $\{f(e) : e \in \mathcal{F}\}$ egy erdő.*

Minden $e \in \mathcal{E}$ élhez bevezetünk $|e|-1$ változót, legyenek ezek $x_1^e, \ldots, x_{|e|-1}^e$, és definiáljuk az $R_e \in \mathbb{R}^{|V|}$ vektort a következőképpen. Rögzítsük a V elemeinek egy $V = \{v_1, \ldots, v_{|V|}\}$ felsorolását. Ha $e = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$, ahol $e \in \mathcal{E}$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq |V|$, akkor legyen

$$R_e(v) := \begin{cases} x_j^e & \text{ha } v = v_{i_j} \text{ és } 1 \leq j \leq k-1, \\ -\sum_{j=1}^{k-1} x_j^e & \text{ha } v = v_{i_k}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy ha $|e| = 1$, akkor $R_e = 0 \in \mathbb{R}^{|V|}$. Jelölje $a_v \in \mathbb{R}^{|V|}$ a v koordinátához tartozó egységvektort ($a_v(v) = 1$ és $a_v(u) = 0$, ha $u \in V - v$), és legyen $a \in \mathbb{R}^{|V|}$ a csupa-egy vektor ($a(u) = 1$ minden $u \in V$ esetén). Figyeljük meg, hogy $\sum_{v \in V} R_e(v) = 0$, azaz R_e merőleges a-ra.

9.11. Állítás. *Legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$. Az $\mathcal{F}$ halmaz pontosan akkor független az $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ matroidban, ha az R_e, $e \in \mathcal{F}$ vektorok lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az R_e, $e \in \mathcal{F}$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen $\emptyset \neq X \subseteq V$. Az $a_v, v \in V - X$ vektorok és az a vektor merőleges az $R_e, e \in \mathcal{F}$ vektorokra, tehát $\dim(\{R_e \in \mathbb{R}^{|V|} : e \in \mathcal{F}, e \subseteq X\}) \leq |X| - 1$. Az R_e vektorok függetlensége miatt pedig $\gamma_\mathcal{F}(X) = |\{e \in \mathcal{F} : e \subseteq X\}| = \dim(\{R_e \in \mathbb{R}^{|V|} : e \in \mathcal{F}, e \subseteq X\})$. Ezekből következik, hogy $\gamma_\mathcal{F}(X) \leq |X| - 1$.

Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ független az $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ hipergrafikus matroidban. A 9.10. Tétel szerint létezik egy $f : \mathcal{F} \to \binom{V}{2}$ függvény, melyre $f(e) \subseteq e$ minden $e \in \mathcal{E}$ esetén, és $\{f(e) : e \in \mathcal{F}\}$ egy erdő. Könnyen látható, hogy ha $f(e) = \{u, v\}$ teljesül, akkor hozzárendelhetünk olyan értékeket az x_j^e változókhoz, melyekre $R_e(u) = 1, R_e(v) = -1$ és $R_e(w) = 0$ teljesül minden más $w \in V - \{u, v\}$ esetén. Jelölje M azt a mátrixot, amelynek sorai az $R_e, e \in \mathcal{F}$ vektorok a fenti értékek behelyettesítésével. Ez az M mátrix pedig éppen az irányított incidencia-mátrixa az $\{f(e) : e \in F\}$ erdőnek. Ebből következik, hogy az M sorai lineárisan függetlenek. $\square$

9.12. Következmény. *Az R_e, $e \in \mathcal{E}$ vektorok reprezentálják az $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ hipergrafikus matroidot.*

A Schwartz-lemma [43] segítségével le lehet ellenőrizni, hogy létezik egy $N = 2^{O(|V|)}$ egész úgy, hogy ha a $[0, N]$ intervallumból véletlen számokat választunk egyenletes eloszlással, és ezeket adjuk a fenti változók értékének, akkor egy olyan mátrixot kapunk, amelynek a matroidja több, mint 1/2 valószínűséggel izomorf $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$-val. Ezzel és Lovász matroid-párosítási algoritmusával [29] egy randomizált polinomiális algoritmust kapunk az (i)-es problémára. Itt használjuk a 9.8. Állítás utáni megjegyzésünket, miszerint $|\mathcal{E}| \leq 2|V| - 3$.

9.4. Algoritmus a horgonyok számának minimalizálására

Megmutatjuk, hogyan oldható meg a (ii)-es feladat. Legyen $H = (V, E)$ egy gráf, valamely $X \subseteq V$ esetén jelölje $N(X)$ az X szomszédainak halmazát, és legyen $S(X) := X \cup N(X)$. Azt mondjuk, hogy az $X \subseteq V$ halmaz **szoros**, ha $|N(X)| = 2$ és $S(X) \neq V$.

9.13. Lemma. *Legyen $H = (V, E)$ egy 2-összefüggő gráf, és legyenek $X, Y \subseteq V$ különböző minimális szoros halmazok G-ben. Ekkor $X \cap Y = \emptyset$. Továbbá ha $N(X) \cap Y \neq \emptyset$, akkor $|X| = |Y| = 1$.*

9.14. Lemma. *Legyen $H = (V, E)$ egy 2-összefüggő gráf, és legyen $P \subseteq V$. Ekkor $H + K_P$ pontosan akkor 3-összefüggő, ha $P \cap X \neq \emptyset$ a H minden X szoros halmaza esetén.*

A 9.13 és a 9.14. Lemmákból következik, hogy minden tartalmazásra nézve minimális P, amelyre $H + K_P$ 3-összefüggő, egy optimális megoldás a (ii)-es feladatra. Ez a megfigyelés egy egyszerű polinomiális algoritmust ad a (ii)-re.

Végül vázoljuk a randomizált 2-approximációs polinomiális algoritmust a horgony-minimalizálási feladatra. Először ellenőrizzük le, hogy létezik-e olyan $P \subseteq V$ halmaz a $G = (V, E)$ input-gráf esetén, amelyre $|P| = 3$ és $G + K_P$ M-összefüggő. Ha ilyen nincs, akkor alkalmazzuk a matroid-párosításon alapuló randomizált algoritmust arra, hogy találjunk egy legkisebb P-t, amelyre $G + K_P$ M-összefüggő. Megjegyezzük, hogy a $H = G + K_P$ már 2-összefüggő lesz. Ezután keressünk egy minimális P' halmazt, amelyre $H + K_{P'}$ 3-összefüggő. Könnyen látható, hogy $P \cup P'$ egy olyan megengedett megoldás, amelynek a mérete legfeljebb az optimum kétszerese.

10. fejezet

Összefogalalás

Alkalmazások

A dolgozatban láthattunk példákat arra, hogy kombinatorikus eredmények hogyan alkalmazhatók geometriai és merevségi eredmények bizonyítására. A 2. fejezetben bizonyítottuk a síkbarajzolható Laman-gráfok egy előállítási tételét, amelynek segítségével belátható, hogy ezen gráfoknak van konkáv pszeudo-háromszögelésük.

A 4. fejezetben szintén egy előállítási eredményt alkalmazva sikerült belátnunk, hogy minden merev gráfnak létezik merev realizációja kicsi egész koordinátákkal.

Az előállítási tételek gyakori alkalmazása a merevség kombinatorikus elméletén belül az, hogy egy bizonyos merevségi fogalom kombinatorikus karakterizációját vezetjük le egy előállítási tétel segítségével, mint ahogyan az 1.6. szakaszban illusztráltuk a Laman-tétel bizonyítása esetén.

Dolgozatunkban erre példa az 5. fejezet, ahol definiáljuk az $u = v$-merevség fogalmát, és kombinatorikusan karakterizáljuk azt. Másik példa erre a 3. fejezet, ahol definiáljuk két dimenziós felületeken a merevség fogalmát, és előállítási tételek segítségével adunk kombinatorikus jellemzéseket.

Változós mátrixok, karakterizáció és reprezentáció

A merevség elméletén belül gyakori, hogy egy változós mátrix által definiált struktúra merevségét kell karakterizálni. Sokszor ez egy változós mátrix rangjának meghatározását jelenti. Dolgozatunkban ilyen feladat az 5. fejezet feladata. Hasonló jellegű a 3. fejezet feladata, azzal az eltéréssel, hogy ott az a kérdés, hogy megválaszthatjuk-e egy változós mátrix sorait úgy, hogy a kapott mátrix rangja nagy legyen. Ez tehát egy változós mátrix által meghatározott matroid homomorf képének a meghatározása. További érdekes kérdés, hogy meg lehet-e határozni bizonyos esetekben az eredeti matroidot.

A 4. fejezet fő eredménye az, hogy egy a Laman-tétel által karakterizált matroid esetén a változós mátrix változóinak adunk olyan értéket, melyek behelyettesítésével kapott mátrix rangja megegyezik a változós mátrix rangjával. Ez azt jelenti, hogy polinomidőben meg tudjuk határozni egy természetes NP-bizonyítékát annak, hogy egy gráf merev két dimenzióban.

Nagy továbblépés lenne, ha tetszőleges gráfra tudnánk olyan behelyettesítést adni, amely esetén nemcsak a teljes merevség mátrix rangja egyezik meg a generikus ranggal, hanem tetszőleges részmátrixra is ez áll. Ennek következménye lenne ugyanis, hogy a matroid párosítás feladat megoldható Lovász algoritmusával a merevségi mátrix sorain és oszlopain. A sorokon tekintett matroid párosításról tudjuk, hogy NP∩co-NP-beli [35], de jelenleg nem ismert rá polinomiális algoritmus, míg az oszlopokon tekintett matroid párosítás feladatról a 8. fejezetben beláttuk, hogy P-beli. Viszont a 9. fejezetben vizsgált *M-összefüggővé tevés* problémáról azt sikerült belátnunk, hogy ekvivalens egy matroid párosítás feladattal egy hipergrafikus matroidon, ennek P-belisége még nem ismert, itt is csak azt tudjuk, hogy a feladat NP∩co-NP-beli [35].

Előállítási tételek és bizonyításuk

Előállítási tétel bizonyítására több példát láthatunk az értekezésben. Egyfajta közvetlen módszernek tekinthetjük azt, amikor keresünk egy olyan kisfokú csúcsot, amelyen az inverzművelet végrehajtható, és ezt definíció szerint bizonyítjuk. Erre példa a 7. fejezetben bemutatott 7.4. Tétel bizonyítása, amely a 6.8. Tétel egy közvetlen bizonyításának tekinthető. Megjegyezzük, hogy ezen leemelési tétel igazolásánal egy érdekes jelenség, hogy nem lehet „mohó” módon bizonyítani, mint például Lovász vagy Mader leemelési tételét (6.10. Tétel). Itt nem igaz, hogy ha van egy „rész-leemelésünk”, melyre a gráf $[k,l]$-ritka, akkor ez mindig befejezhető – itt szükség lehet visszaemelésekre is. Ez a 7.4. Tétel bizonyításánál úgy jelenik meg, hogy olyan leemelést választunk, amelyre egy akadályozó halmaz maximális, és azt igazoljuk, hogy ha ez nem teljes leemelés, akkor visszaemelve és másként leemelve olyan leemelést kapnánk, ahol az akadály nagyobb lenne.

Az előállítási tétel igazolásának közvetlen módszerére egy másik példa dolgozatunkban a 2. fejezet fő előállítási tétele, itt a nehézség az, hogy nem igaz, hogy háromszögtartománynak van összehúzható éle.

A 4. fejeztben egy leszámlálás garantálta a szükséges csúcsot, amelynél a klasszikus leemelési tételt alkalmaztuk.

A közvetlen módszerrel szemben a $[k,l]$-gráfok előállítási tételére láttunk egy elegáns bizonyítási módot a 6. fejezetben. Itt ugyanis adtunk egy karakterizációt irányítások segítségével a $[k, l]$-gráfokra, majd ezen karakterizáció és Mader irányított leemelési tétele segítségével gyors bizonyítást adtunk a 6.8. Tételre. A 3. fejezetben pedig Whiteley jellemzését (3.13. Tétel) használva láttuk be a szükséges előállítási tételt egyfajta kicserélési technikával dolgozva.

Megemlítjük, hogy a fákkal való jellemzések nemcsak előállítási tételek bizonyításánál bizonyulnak hasznosnak, hanem merev struktúrák karakterizációjára is érdekes bizonyításokat adhatnak. Lásd például [40, 52].

A fentiektől különböző módszert alkalmaztunk az 5. fejezetben, ahol először beláttuk, hogy matroidot alkot egy bizonyos gráfosztály, majd ennek a ténynek a segítségével adtunk egyszerű bizonyítást a szükséges leemelési tételre.

Ezen matroidos megközelítés tanulmányozása érdekes lenne más problémák esetében is, például további vizsgálat tárgya lehet, hogy a 7. fejezetben szereplő tételeket meg lehet-e fogalmazni a matroidhoz jobban kötődő terminológiában (például a rangfüggvényt használva a b halmazfüggvény helyett), és lehet-e a bizonyításban jobban kihasználni azt a tényt, hogy matroidokkal dolgozunk.

Matroidok alkalmazása

Mint az imént említettük, az 5. fejezetben lényegében egy előállítási tétel igazolásához használtuk a „matroidságot”. Ezen túl számos helyen nagyon fontos eszköznek bizonyultak a matroidelmélet fogalmai. Alapvető szerepet játszik az, hogy amikor egy matroidot szeretnénk karakterizálni, érdemes először a függetleneket, vagy méginkább a bázisokat karakterizálni.

Nagyon izgalmas példa erre az 5. fejezet, ahol az 5.10. Következmény karakterizálja az $u = v$-merev gráfokat. Ebben a karakterizációban nincs szó matroidokról, ez önmagában egy geometriai állítás. Az út, amely hozzá vezet, viszont azon matroid karakterizálása volt, amelynek generátorai az $u = v$-merev gráfok. Ezen matroid esetén is a bázisok karakterizációja volt könnyen kivitelezhető. Ebből következett magának a matroidnak a karakterizációja is, hiszen ha két matroid bázisai ugyanazok, akkor a két matroid megegyezik.

Az, hogy a bázisokat célszerűbb vizsgálni, mint a függetleneket, talán abból látszik, hogy ha egy Henneberg-féle előállítási tételt szeretnénk belátni a független gráfokra, akkor arra több műveletet kellene használni, például a kétdimenziós merevség esetén az elsőfokú csúcs és az izolált pont hozzávétele lenne szükséges. Ez tehát egy apró technikai különbség. Bár, mint a 3. fejezetben láttuk, az, hogy sok művelet van, jelentősen meghosszabbíthatja a bizonyítást. A bázisokkal praktikusabb dolgozni, hiszen fix elemszámúak, és kevesebb van belőlük.

Az előállítási tételeken illetve a merevség karakterizációján túl az általunk vizsgált kombinatorikus optimalizálási feladatoknál is nagy segítséget jelentettek a matroidok. A 7. fejezetben a 7.7. Tétel bizonyítása nagy mértékben azon a megfigyelésen múlott, hogy a feladatot elég függetlenekre megoldani.

Ugyanez történt a 8. fejezetben is, ahol szintén az a feladat, hogy valamilyen struktúra (ott klikk) hozzáadásával tegyük teljes rangúvá az élhalmazt. Itt is fontos, hogy elegendő független élhalmazok növelésésvel foglalkoznunk.

Végül pedig a 9. fejezetben központi szerepet kapott az M-összefüggőség illetve a gráf M-komponenseinek fogalma.

Halmazrendszeres feltételekből halmaz-feltétel

Mint említettük, egy matroidot érdemes a függetlenjeinél vagy bázisainál fogva megragadni. A generátorokkal dolgozni ugyanis lényegesen nehezebb, mint akár a bázisokkal vagy függetlenekkel. Ez talán azon múlik, hogy a generátorok, azaz a merevség általában valamilyen „halmazrendszeres feltétellel" karakterizálható. Tekintsük például az $\mathcal{M}_{k,l}$ matroid rangfüggvényformuláját (1.2. Állítás) vagy speciálisan a Lovász-Yemini féle karakterizációt (1.11. Tétel) a merevségre. A függetlenek ezzel ellentétben halmazokon vett ritkasági feltétellel karakterizálhatóak. Próbáljuk csak meg a Lovász-Yemini féle karakterizációt (1.11. Tétel) használva belátni azt az állítást, hogy a síkban egy merev gráf harmadfokú csúcsánál végre lehet hajtatni egy 1-leemelést úgy, hogy a kapott gráf merev legyen. Már ez is sok technikai nehézséget jelent. Abban az esetben pedig, ha az „egyszerű halmazfeltétel" valamilyen oknál fogva kicsit bonyolultabbá válik – mint ahogy az 5. fejezetben egyfajta virágokon vett ritkasági feltétellel egészült ki –, a generátorokkal való dolgozás teljesen ellehetetlenül.

A 7. fejezetben a 7.7. Tétel helyett a 7.8. Tételt bizonyítani könnyebb, mert csak halmazfeltétel van benne. Ugyanígy a 8. fejezetben felvetett leszögezési feladat és két feszítőfát megkövetelő forráselhelyezési feladat is azért vált kezelhetővé, mert az „adjunk a gráfhoz egy klikket úgy, hogy egy halmazrendszeres feltétel teljesüljön" feladatot visszavezettük egy „adjunk a gráfhoz egy klikket úgy, hogy egy halmazfeltétel teljesüljön" feladatra. Az pedig külön szerencse, hogy jelen esetben a két feladatot ugyanarra a feladatra, maximális jó halmaz keresésére sikerült visszavezetnünk.

Egy Z halmazt jó halmaznak nevezünk, ha minden $X \subseteq Z, X \neq \emptyset$ esetén $e(X) \geq 2|X|$. Tehát egy maximális ilyen tulajdonságú halmaz keresésére vezet a 8. fejezetbeli leszögezési probléma. A 9. fejezetben azt látjuk, hogy az a feladat, hogy adjunk egy minimális klikket a gráfhoz úgy, hogy M-összefüggő legyen, a következő feladatra vezet: egy $\mathcal{H}$ hipergráfban keressünk egy maximális méretű T csúcshalmazt, melyre $e_{\mathcal{H}}(S) \geq 2|S| + 1$ teljesül minden $S \subseteq T, S \neq \emptyset$ esetén.

Tehát mindkét esetben a halmazrendszeres feltétel egy halmazfeltételre redukálható, de míg az első esetben ez egy párosítás feladat segítségével kezelhető, addig a második esetben egy hipergrafikus matroidbeli matroid párosítás feladatra vezet. Valamint érdekes megjegyezni, hogy míg a leszögezési feladat esetében az a megfigyelés vezet a halmazrendszeres feltétel kiegyszerűsödéséhez, hogy elég független gráfokkal foglalkozni, addig az M-összefüggővé tevés esetében ez nyilvánvalóan nem igaz. Utóbbi esetben a visszavezetés azon múlik, hogy az M-összefüggő komponensek által meghatározott hipergráfot vizsgáljuk. Érdemes megjegyezni, hogy ez a megközelítés a leszögezési feladat esetében is egy járható út, csak ott a merevségi komponensek hipergráfját kell tekinteni.

Irodalomjegyzék

[1] Mihály Bárász, Johanna Becker, and András Frank. An algorithm for source location in directed graphs. *Oper. Res. Lett.*, 33(3):221–230, 2005.

[2] Alex R. Berg and Tibor Jordán. Algorithms for graph rigidity and scene analysis. In *Algorithms—ESA 2003*, volume 2832 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 78–89. Springer, Berlin, 2003.

[3] Alex R. Berg and Tibor Jordán. A proof of Connelly's conjecture on 3-connected circuits of the rigidity matroid. *J. Combin. Theory Ser. B*, 88(1):77–97, 2003.

[4] L. Chavez, L. Moshe, and W. Whiteley. Bases and circuits for 2-rigidity: constructions via tree coverings. preprint, Department of Mathematics and Statistics, York University, 2003.

[5] Jack Edmonds. Existence of k-edge connected ordinary graphs with prescribed degrees. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 68B:73–74, 1964.

[6] T. Eren, D.K. Goldenberg, W. Whiteley, Y.R. Yang, A.S. Morse, B.D.O. Anderson, and P.N. Belhumeur. Rigidity, computation, and randomization in network localization. In *Proceedings of the International Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM)*, March 2004.

[7] Zsolt Fekete. Source location with rigidity and tree packing requirements. *Oper. Res. Lett.* in press, on-line available.

[8] Zsolt Fekete. Source location problems with rigidity and tree packing requirements, 2005. EGRES Technical Riport TR-2005-04, `www.cs.elte.hu/egres`.

[9] Zsolt Fekete and Tibor Jordán. Rigid realizations of graphs on small grids. *Comput. Geom.*, 32(3):216–222, 2005.

[10] Zsolt Fekete and Tibor Jordán. Uniquely localizable networks with few anchors. In *Proceedings of the 4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Budapest*, June 2005.

[11] Zsolt Fekete, Tibor Jordán, and Walter Whiteley. An inductive construction for plane laman graphs via vertex splitting. In Susanne Albers and Tomasz Radzik, editors, *ESA*, volume 3221 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 299–310. Springer, 2004.

[12] Zsolt Fekete and László Szegő. A note on $[k, l]$-sparse graphs. In *Proceedings of Graph Theory 2004, a conference in memory of Claude Berge, Paris*.

[13] Zsolt Fekete and László Szegő. A note on $[k, l]$-sparse graphs, 2005. EGRES Technical Riport TR-2005-05, `www.cs.elte.hu/egres`.

[14] András Frank. Connectivity and network flows. In M. Grötschel R. Graham and L. Lovász, editors, *Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2*, pages 111–177. Elsevier, Amsterdam, 1995.

[15] András Frank and Tamás Király. Combined connectivity augmentation and orientation problems. *Discrete Appl. Math.*, 131(2):401–419, 2003. Submodularity.

[16] András Frank and László Szegő. Constructive characterizations for packing and covering with trees. *Discrete Appl. Math.*, 131(2):347–371, 2003.

[17] Harold N. Gabow and Herbert H. Westermann. Forests, frames, and games: algorithms for matroid sums and applications. *Algorithmica*, 7(5-6):465–497, 1992.

[18] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and intractability*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.

[19] Jack Graver, Brigitte Servatius, and Herman Servatius. *Combinatorial rigidity*, volume 2 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[20] Ruth Haas, David Orden, Günter Rote, Francisco Santos, Brigitte Servatius, Herman Servatius, Diane Souvaine, Ileana Streinu, and Walter Whiteley. Planar minimally rigid graphs and pseudo-triangulations. *Comput. Geom.*, 31(1-2):31–61, 2005. `http://www.arxiv.org/abs/math.CO/0307347`.

[21] Bruce Hendrickson. Conditions for unique graph realizations. *SIAM J. Comput.*, 21(1):65–84, 1992.

[22] L. Henneberg. Die graphische Statik der starren Systeme. 1911. Leipzig.

[23] Hiro Ito, Kazuhisa Makino, Kouji Arata, Shoji Honami, Yuichiro Itatsu, and Satoru Fujishige. Source location problem with flow requirements in directed networks. *Optim. Methods Softw.*, 18(4):427–435, 2003. The Second Japanese-Sino Optimization Meeting, Part II (Kyoto, 2002).

[24] Hiro Ito and Mitsuo Yokoyama. Edge connectivity between nodes and node-subsets. *Networks*, 31(3):157–163, 1998.

[25] Bill Jackson and Tibor Jordán. Connected rigidity matroids and unique realizations of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 94:1–29, 2005.

[26] Bill Jackson and Tibor Jordán. Rigid two-dimensional frameworks with three collinear points. *Graphs Combin.*, 21:427–444, 2005.

[27] G. Laman. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *J. Engrg. Math.*, 4:331–340, 1970.

[28] M. Loréa. Hypergraphes et matroïdes. *Cahiers Centre Études Recherche Opér.*, 17(2-4):289–291, 1975. Colloque sur la Théorie des Graphes (Paris, 1974).

[29] L. Lovász. A generalization of König's theorem. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 21:443–446, 1970.

[30] L. Lovász. Flats in matroids and geometric graphs. In *Combinatorial surveys (Proc. Sixth British Combinatorial Conf., Royal Holloway Coll., Egham, 1977)*, pages 45–86. Academic Press, London, 1977.

[31] L. Lovász. Matroid matching and some applications. *J. Combin. Theory Ser. B*, 28(2):208–236, 1980.

[32] L. Lovász. The matroid matching problem. In *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978)*, volume 25 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 495–517. North-Holland, Amsterdam, 1981.

[33] L. Lovász and Y. Yemini. On generic rigidity in the plane. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 3(1):91–98, 1982.

[34] W. Mader. Konstruktion aller n-fach kantenzusammenhängenden Digraphen. *European J. Combin.*, 3(1):63–67, 1982.

[35] Márton Makai. Matroid matching with dilworth truncation. In *Proceedings of EuroComb 2005, Berlin.*

[36] Anthony Mansfield. On the computational complexity of a rigidity problem. *IMA J. Appl. Math.*, 27(4):423–429, 1981.

[37] C. St. J. A. Nash-Williams. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *J. London Math. Soc.*, 36:445–450, 1961.

[38] D. Orden, F. Santos, Servatius B., and Servatius H. Combinatorial pseudo triangulations. preprint, `arXiv:math.CO/0307370v1`, 2003.

[39] James G. Oxley. *Matroid theory.* Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1992.

[40] András Recski. A network theory approach to the rigidity of skeletal structures. II. Laman's theorem and topological formulae. *Discrete Appl. Math.*, 8(1):63–68, 1984.

[41] András Recski. *Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics*, volume 6 of *Algorithms and Combinatorics.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[42] Alexander Schrijver. *Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency.*, volume 24 of *Algorithms and Combinatorics.* Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[43] J. T. Schwartz. Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 27(4):701–717, 1980.

[44] A. Man-Cho So and Yinyu Ye. Theory of semidefinite programming for sensor network localization. In *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 2005.

[45] Ileana Streinu. A combinatorial approach to planar non-colliding robot arm motion planning. In *41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Redondo Beach, CA, 2000)*, pages 443–453. IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 2000.

[46] Ileana Streinu. Combinatorial roadmaps in configuration spaces of simple planar polygons. In *Algorithmic and quantitative real algebraic geometry (Piscataway, NJ, 2001)*, volume 60 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 181–205. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[47] László Szegő. On constructive characterizations of (k,l)-sparse graphs, 2003. EGRES Technical Riport TR-2003-10, `www.cs.elte.hu/egres`.

[48] Tiong-Seng Tay. Rigidity of multigraphs. I. Linking rigid bodies in n-space. *J. Combin. Theory Ser. B*, 36(1):95–112, 1984.

[49] Tiong-Seng Tay. Linking $(n-2)$-dimensional panels in n-space. II. $(n-2,2)$-frameworks and body and hinge structures. *Graphs Combin.*, 5(3):245–273, 1989.

[50] Tiong-Seng Tay. Henneberg's method for bar and body frameworks. *Structural Topology*, 17:53–58, 1991.

[51] Tiong-Seng Tay. Linking $(n-2)$-dimensional panels in n-space. I. $(k-1,k)$-graphs and $(k-1,k)$-frames. *Graphs Combin.*, 7(3):289–304, 1991.

[52] Tiong-Seng Tay. A new proof of Laman's theorem. *Graphs Combin.*, 9(4):365–370, 1993.

[53] Tiong-Seng Tay and Walter Whiteley. Generating isostatic frameworks. *Structural Topology*, 11:21–69, 1985.

[54] Jan van den Heuvel and Matthew Johnson. Transversals of subtree hypergraphs and the source location problem in digraphs, 2004. CDAM Research Report Series Centre for Discrete and Applicable Mathematics, LSE 2004-10 (2004).

[55] Neil White and Walter Whiteley. The algebraic geometry of motions of bar-and-body frameworks. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 8(1):1–32, 1987.

[56] Walter Whiteley. The union of matroids and the rigidity of frameworks. *SIAM J. Discrete Math.*, 1(2):237–255, 1988.

[57] Walter Whiteley. Vertex splitting in isostatic frameworks. *Structural Topology*, (16):23–30, 1990. Dual French-English text.

[58] Walter Whiteley. Matroids and rigid structures. In *Matroid applications*, volume 40 of *Encyclopedia Math. Appl.*, pages 1–53. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[59] Walter Whiteley. Some matroids from discrete applied geometry. In *Matroid theory (Seattle, WA, 1995)*, volume 197 of *Contemp. Math.*, pages 171–311. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[60] Walter Whiteley. Rigidity and scene analysis. In J.E. Goodman and J. O'Rourke, editors, *Handbook of discrete and computational geometry, 2nd edition*, pages 1327–1354. 2004.

Összefogalás

Az értekezés a kombintorikus merevség két fontos területével foglalkozik: előállítási tételek bizonyítása és alkalmazása, valamint kombinatorikus optimalizálási problémák. Egy gráfosztály előállítási tételének nevezünk egy olyan állítást, amely azt mondja ki, hogy egy gráf pontosan akkor tartozik bele az adott gráfosztályba, ha előáll bizonyos egyszerű lépések sorozatán keresztül elemi gráfokból. Az előállítási tételek a merevség elméletének hasznos segédeszközei. Azt mondjuk, hogy egy gráf $[k,l]$-ritka, ha tetszőleges X csúcshalmaza esetén az X legfeljebb $k|X|-l$ élet feszít. Egy $G=(V,E)$ gráfot $[k,l]$-gráfnak nevezünk, ha $[k,l]$-ritka és $|E|=k|V|-l$. Laman tétele szerint a $[2,3]$-gráfok a minimálisan merev gráfok a síkban.

Az értekezésben igazoljuk a síkbarajzolt $[2,3]$-gráfok egy előállítási tételét, amelyet a síkbarajzolható $[2,3]$-gráfok pszeudo-háromszögeléseinek megkonstruálására alkalmazhatunk. Bevezetjük a merevség fogalmát kétdimenziós felületeken. Adunk egy előállítási tételt a $[k,l]$-gráfokra, amelynek segítségével karakterizáljuk a merev gráfokat bizonyos kétdimenziós felületeken, kiterjesztve ezzel Whiteley eredményeit. Szintén előállítási tétel segítségével látjuk be, hogy a síkban minden merev gráf realizálható merev módon egy $O(\sqrt{n})$ méretű rácsban. Valamint karakterizáljuk azon gráfokat, amelyeknek létezik olyan merev realizációja a síkban, melyre két kijelölt csúcs pozíciója azonos.

Az értekezés második részében $[k,l]$-gráfokkal kapcsolatos optimalizálási problémákkal foglalkozunk. Adunk egy minimax formulát a következő feladatra $0 \le l \le k$ esetén: határozzuk meg, hogy minimálisan mennyi élet kell egy gráfhoz hozzáadni, hogy a kapott gráf kielégítsen fokelőírásokat, és tartalmazzon $[k,l]$-gráfot feszítő részgráfként. Igazolunk egy minimax formulát a következő problémára $0 \le l \le \frac{3}{2}k$ esetén: adjunk maximális számú élet egy $[k,l]$-ritka gráfhoz, hogy a kapott gráf $[k,l]$-ritka maradjon és kielégítsen fokelőírásokat. Belátjuk, hogy a következő két optimalizálási feladat szoros rokonságban áll, és polinomiálisan kezelhető: (i) Rögzítsük minimális számú csúcsát egy nem merev gráfnak úgy, hogy a kapott gráf merev legyen a síkban. (ii) Húzzuk össze egy gráf minimális elemszámú csúcshalmazát úgy, hogy a kapott gráfban legyen két éldiszjunkt feszítőfa. Végül adunk egy randomizált 2-approximációs algoritmust a következő feladatra: adjunk egy minimális méretű klikket egy gráfhoz úgy, hogy a kapott gráf globálisan merev legyen a síkban.

Summary

This thesis concentrates on two main fields of combinatorial rigidity: proving and applying constructive characterization theorems and combinatorial optimization problems. Constructive characterization of a class of graphs is a building procedure consisting of simple steps so that the graphs obtained from a specified initial graph are precisely the elements of the class. Constructive characterization theorems can serve useful inductive tools to prove theorems in rigidity theory. We say that a graph is $[k,l]$-sparse, if the number of the induced edges of a vertex set X is at most $k|X|-l$. A graph $G=(V,E)$ is said to be a $[k,l]$-graph, if it is $[k,l]$-sparse and $|E|=k|V|-l$. By Laman's theorem the $[2,3]$-graphs are exactly the minimally rigid graphs in the plane.

We prove a constructive characterization theorem on planar $[2,3]$-graphs. It can be applied to construct a pseudo-triangulated realization of a planar $[2,3]$-graph. We introduce the notion of rigidity on two dimensional surfaces. We give a constructive characterization theorem for $[k,l]$-graphs and using it we characterize the rigid graphs on certain surfaces extending some results of Whiteley. We prove that every rigid graph in the plane can be realized in a grid of size $O(\sqrt{n})$. This result also relies on a constructive characterization theorem. We characterize the graphs having rigid realizations with identical positions of two specified nodes.

In the second part of the thesis we consider optimization problems on $[k,l]$-graphs. We give a minimax formula for the following problem in case of $0 \leq l \leq k$: Add minimum number of edges to a graph so the resulting graph satisfies degree specifications and contains a $[k,l]$-graph as a spanning subgraph. We prove a minimax formula for the following problem in case of $0 \leq l \leq \frac{3}{2}k$: Add maximum number of edges to a $[k,l]$-sparse graph so the resulting graph is $[k,l]$-sparse and satisfies degree specifications. We prove that the following two optimization problems are polynomially solvable: (i) We are given a non-rigid graph, pin down minimum number of vertices so that the structure becomes rigid in the plane. (ii) We are given a graph, contract a minimum size vertex set so that the resulting graph has two edge-disjoint spanning trees. At last we give a randomized 2-approximation algorithm for the following problem: We are given a graph, add a minimum size clique to the graph so that the resulting graph is globally rigid in the plane.