3. fejezet

Lineáris folyamatok

3.1. Zaj folyamatok

1. Az $\varepsilon(t)$ folyamat **független értékű zaj**, ha a várható értéke 0 és $\varepsilon(t)$-k független, azonos eloszlású valószínűségi változók.

2. Az $\varepsilon(t)$ folyamat **fehér zaj**, ha $E\varepsilon(t) = 0$, és $\varepsilon(t)$-k azonos eloszlásúak minden t-re és korrelálatlanok (de nem feltétlen függetlenek). A fehér zaj autokovariancia-függvénye $R(0) = \sigma^2$, $R(\tau) = 0 \quad (\tau \geq 1)$.

A független értékű zaj erősen, a fehér zaj gyengén vagy másodrendben stacionárius. Továbbá

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} R(\tau) = \frac{1}{2\pi} R(0) = \frac{\sigma^2}{2\pi},$$

tehát a Fourier-transzformált konstans, így a spektrálmértéke minden frekvenciára azonos súlyt helyez. Innen ered az elnevezés, hiszen fehér fény ugyanígy áll elő az összes lehetséges különböző színű komponensből.

3.2. Autoregressziós folyamatok

3.2.1. Elsőrendű autoregresszió, AR(1)

:

$$X(t) = \alpha X(t-1) + \sigma_\varepsilon \cdot \varepsilon(t).$$

Az $\varepsilon(t)$-k független, azonos eloszlású valószínűségi változók, általában $N(0,1)$-ek, de eloszlásuk lehet persze más is. Általában (de nem mindig) $EX(t) = 0$ és amennyiben oksági a megoldás, azaz $X(t-1)$ és $\varepsilon(t)$ függetlenek, akkor

$$D^2X(t) = \alpha^2 D^2X(t-1) + \sigma_\varepsilon^2 D^2\varepsilon(t)$$

(a függetlenség miatt a szórásnégyzetek összeadódnak). Ha létezik stacionárius megoldás, akkor $D^2X(t) = D^2X(t-1)$-ből következik, hogy $\sigma_X^2 = \alpha^2\sigma_X^2 + \sigma_\varepsilon^2$, azaz $\sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2} > 0$. Így $|\alpha| \geq 1$ esetén nincs stacionárius megoldás (nem lenne véges vagy nem lenne pozitív a szórásnégyzet).

Állítás 3.2.1. *Ha $|\alpha| < 1$, akkor létezik stacionárius megoldás. (Ezt egyelőre higgyük el, ellenkező esetben láttuk, hogy nem létezik.)*

$$R(k) = cov(X(t), X(t+k)) = cov(X(t), \alpha \cdot X(t+k-1) + \sigma \cdot \varepsilon(t+k)) =$$

$$= \alpha \cdot cov(X(t), X(t+k-1)) = \alpha \cdot R(k-1),$$

ami kielégíti a zaj nélküli rekurziót (az pedig exponenciális sebességgel lecseng). Mivel $R(0) = D^2X(t) = \sigma_X^2$, így

$$R(k) = \sigma_X^2 \cdot \alpha^k = \frac{\alpha^k}{1-\alpha^2} \cdot \sigma_\varepsilon^2, \text{ és } r(k) = \frac{R(k)}{R(0)} = \alpha^k .$$

Ha $\varepsilon(t)$ standard normális eloszlású, akkor $X(0) \sim N(0, \sigma_X^2)$, és az autokorreláció-függvény által az összes véges dimenziós eloszlás adott. A parciális autokorreláció-függvény (PACF)

$$\varrho(k) = \begin{cases} \alpha & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

. Ezt $k = 2$-re könnyen láthatjuk, ugyanis $\varepsilon(t)$ független zaj mellett a parciális autokovarianciára 0-t kapunk:

$$\varrho(2) = cov(X(t+2), X(t)|X(t+1)) =$$

$$= cov(\alpha X(t+1), X(t)|X(t+1)) + cov(\varepsilon(t+2), X(t)|X(t+1)) =$$

$$= \alpha \cdot E\big[X(t+1) - E(X(t+1)|X(t+1))\big]\big[X(t) - E(X(t)|X(t+1))\big] + 0$$

mert $\varepsilon(t+2)$ és $X(t)$ függetlenek (feltételesen is), a feltételes várható értékeket tekintve pedig könnyen láthatóan 0-t kapunk, így ez tovább $= \alpha \cdot 0 + 0 = 0$. Továbbá $k > 2$-re ugyanígy a rekurziós egyenlet miatt a feltételre mérhető lesz $X(t+k-1)$.

[!! Szept. 22-i megjegyzések hiányoznak: lineáris folyamatok]

Most tegyük fel, hogy $|\alpha| < 1$, és iteráljuk az AR(1) elsőrendű autoregresszziós egyenletet.

$$X(t) = \alpha X(t-1) + \varepsilon(t)$$

$$X(t) = \alpha(\alpha X(t-2) + \varepsilon(t-1)) + \varepsilon(t)$$

$$\dots$$

$$X(t) = \alpha^{s+1} X(t-s-1) + [\alpha^s \varepsilon(t-s) + \ldots + \alpha\varepsilon(t-1) + \varepsilon(t)],$$

ahol az utolsó egyenlőség jobb oldalában az első maradéktag exponenciális sebességgel lecseng, a szögletes zárójelen belüli pedig egy lineáris folyamathoz hasonlít. Így $X(t) - \sum_{u=0}^{s} \alpha^u \varepsilon(t-u) = \alpha^{s+1} X(t-s-1)$, erre a négyzet várható értéke

$$E\left(X(t) - \sum_{u=0}^{s} \alpha^u \varepsilon(t-u)\right)^2 = \alpha^{2s+2} E\left(X(t-s-1)^2\right) \longrightarrow 0,$$

ha $EX^2(t) < K$ minden t-re, ami persze teljesül, ha $X(t)$ stacionárius folyamat. Ezzel $\sum_{u=0}^{s} \alpha^u \varepsilon(t-u) \xrightarrow{s\to\infty} X(t)$ L_2-ben, tehát legyen ez az L_2-beli határérték a megoldás $X(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \alpha^u \varepsilon(t-u)$. (Ez stacionárius is.)

Állítás 3.2.2. *Ha $|\alpha| < 1$, $\varepsilon(t)$ i.i.d. zaj, továbbá $E(\varepsilon(t)^2) < \infty$, akkor az $AR(1)$ egyenletnek létezik stacionárius megoldása.*

Bizonyítás: 1) Az $\varepsilon(t)$-ről feltehető, hogy negatív értékre is értelmezett, hiszen ha nem így lenne, akkor a Kolmogorov-alaptétel szerint kiegészíthetjük függetlenül ugyanazon eloszlásból.
2) A $\sum_{u=0}^{\infty} \alpha^u \cdot \varepsilon(t-u)$ független tagú összeg konvergens L_2-ben és 1 valószínűséggel is. Ugyanis L_2-ben nyilván Cauchy, ezért konvergens, az 1 valószínűségű konvergenciához pedig a független tagok miatt elég a második momentumok konvergenciáját látni [1]. Így $X(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \alpha^u \varepsilon(t-u)$ jóldefiniált.
3) $X(t)$ kielégíti az $AR(1)$ egyenletet:

$$X(t+1) = \sum_{u=0}^{\infty} \alpha^u \varepsilon(t+1-u) = \alpha \left[\sum_{v=0}^{\infty} \alpha^v \varepsilon(t+1-v-1)\right] + \varepsilon(t+1) =$$

[1] A Kolmogorov-Hincsin-tétel szerint ha $\sum EX_n^2 < \infty$, akkor $\sum X_n$ 1−valószínűséggel konvergens. A feltétel a mi esetünkben $\sum_{u=0}^{\infty} E\alpha^{2u}\varepsilon^2(t-u)$ végességét jelenti, ami az $|\alpha| < 1$-ből és $E\varepsilon(t)^2$ végességéből rögtön következik. Ugyanis $\sum_{u=0}^{\infty} \alpha^{2u}\varepsilon^2(t-u) = \frac{1}{1-\alpha^2} E\varepsilon^2(t-u) < \infty$.

$$= \alpha \sum_{v=0}^{\infty} \alpha^v \varepsilon(t-v) + \varepsilon(t+1) = \alpha X(t) + \varepsilon(t+1)$$

4) Az így definiált $X(t)$ eloszlása eltolásinvariáns (stacionárius eloszlású):

$$X(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \alpha^u \varepsilon(t-u) \sim X(t+h) = \sum_{u=0}^{\infty} \alpha^u \varepsilon(t+h-u),$$

mivel $\varepsilon(t)$ és $\varepsilon(t+h)$ eloszlásban megegyeznek, ezért mint sorozatok is. Ezzel minden $t_1, \ldots, t_k$-ra teljesül, hogy $X(t_1), \ldots, X(t_k) \sim X(t_1+h), \ldots, X(t_k+h)$. Ezzel igazoltuk, hogy $X(t)$ stacionárius.

$\blacksquare$

Megjegyzés 3.2.3. Az $\varepsilon(t)$ fehér zajról: várható értéke 0, minden t-re $\varepsilon(t)$ azonos eloszlású, és
$corr(\varepsilon(t), \varepsilon(t+h)) = 0$. Továbbá $R(0) = \sigma_\varepsilon^2$ és $R(t) = 0$, ha $t > 0$. A Fourier-transzformált $\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \cdot R(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sigma_\varepsilon^2$ minden $\lambda \in (-\pi, \pi)$-re (csak a $t = 0$ tag marad meg). Azaz a spektrál-sűrűségfüggvénye λ-tól független konstans (tehát az előállításában minden frekvencia azonos amplitúdóval vesz részt, mint a fehér fénynél).
$AR(1)$-re

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \cdot R(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{t=-\infty}^{0} e^{-i\lambda t} \cdot R(t) + \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} e^{-i\lambda t} \cdot R(t) - R(0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} R(0) \cdot \left[\sum_{t=0}^{\infty} e^{-i\lambda t} \alpha^t + \sum_{t=0}^{\infty} e^{i\lambda t} \alpha^t - 1 \right] = \frac{\sigma_X^2}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{1 - \alpha \cdot e^{-i\lambda}} + \frac{1}{1 - \alpha \cdot e^{i\lambda}} - 1 \right] =$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi(1-\alpha^2)} \cdot \frac{1 - \alpha e^{i\lambda} + 1 - \alpha e^{-i\lambda} - |1 - \alpha e^{i\lambda}|^2}{|1 - \alpha e^{i\lambda}|^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2} \cdot \frac{2 - 1 - \alpha e^{i\lambda} - \alpha e^{-i\lambda} + \alpha e^{i\lambda} + \alpha e^{-i\lambda} - \alpha^2}{|1-\alpha e^{i\lambda}|^2} =$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1-\alpha e^{i\lambda}|^2},$$

tehát a fehér zajhoz képest lényeges a különbség az $AR(1)$-nél.

Példa 3.2.4. Nézzünk egy példát nem Gauss-féle fehér zajból generált $AR(1)$-re. Legyen $P(\varepsilon(t) = \frac{1}{2}) = P(\varepsilon(t) = 0) = \frac{1}{2}$ minden t-re. Az $X(t) = \frac{1}{2}X(t-1) + \varepsilon(t)$ egyenlet stacionárius megoldása

$$\sum_{u=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^u \varepsilon(t-u) = \sum_{u=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{u+1} \cdot 2\varepsilon(t-u).$$

A $2\varepsilon(t-u)$ egy véletlen 0-1 sorozat. Az $\frac{1}{2}$ hatványaival szorozva tetszőleges $[0,1]$-beli számot előállít, és mivel minden 0-1 sorozat "egyenlően valószínű", ezért a $[0,1]$-belieken egyenletes lesz az előállított számok eloszlása. Tehát a stacionárius eloszlás $U(0,1)$ lesz. Ebből látszik, hogy a zaj eloszlása nem sokat mond a stacionárius eloszlásról, hiszen ebből a diszkrét $\varepsilon(t)$-ből abszolút folytonos eloszlású $X(t)$-t kaptunk.

Előrejelzés: $E(X(t)|X(t-1)) = \frac{1}{2}X(t-1) + \frac{1}{4}$, mert a zaj nem 0 várható értékű (ez lineáris). A hátrafelé predikció pedig $E(X(t-1)|X(t))$, ha például a mai értéket ismerjük, de a tegnapit elfelejtették regisztrálni. Az egyenlet kétszereséből $2X(t) - 2\varepsilon(t) = X(t-1)$, így $X(t-1) = 2X(t)$ $mod(1)$ a stacionárius esetben. $E(X(t-1)|X(t)) = 2X(t)$ $mod(1)$, ami nem lineáris, tehát a legjobb és a legjobb lineáris becslés (predikció) nem esik egybe.

Általában $E(X(t)|X(t-1)) = E(X(t)|\mathcal{F}_t)$, tehát az $AR(1)$ folyamat Markov-folyamat. Ez tovább $= E(\alpha X(t-1) + \varepsilon(t)|X(t-1)) = \alpha X(t-1)$, ha a megoldás a zaj jövőjétől független. ($\varepsilon(t)$ az $X(t-1)$-től független, és a feltételhez vett további múltbéli tagok nem változtatnak: ε független és $\alpha X(t-1)$ mérhető marad a feltételre nézve). Ekkor a legjobb lineáris előrejelzés a legjobb előrejelzés.

3.2.2. Másodrendű autoregresszió ($AR(2)$)

A másodrendű autoregressziós folyamat az alábbi egyenletet elégíti ki:

$$X(t) = \alpha_1 X(t-1) + \alpha_2 X(t-2) + \sigma_\varepsilon \varepsilon(t),$$

azaz $X(t) - \alpha_1 X(t-1) - \alpha_2 X(t-2) = \sigma_\varepsilon \varepsilon(t)$. Ennek megfelelően az ún. **karakterisztikus polinom**

$$x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2.$$

A stacionárius megoldás létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a karakterisztikus polinom gyökei az egységkörön belül legyenek. (A közönséges rekurzió is akkor stabilis, ha a gyökök az egységkörön belül vannak.) [Ábra] A gyökök összege α_1, ebből rögtön következik, hogy $-2 < \alpha_1 < 2$. Ezen kívül a karakterisztikus polinomnak (ha gyökei valósak) az 1 illetve -1 helyen felvett értékeinek pozitívnak kell lenniük (pozitív főegyüttható miatt felfelé néző parabola), amiből adódik, hogy $\alpha_2 + \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 - \alpha_1 < 1$. Így az (α_1, α_2) síkon ez utóbbi három egyenlőtlenség által meghatározott háromszögön belül lesznek a gyökök. Az autokovarianciafüggvény $R(k) = \alpha_1 R(k-1) + \alpha_2 R(k-2)$, illetve az autokorreláció-függvény $r(k) = \alpha_1 r(k-1) + \alpha_2 r(k-2)$. A parciális autokorreláció-függvényre pedig $\varrho(1) = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}$, $\varrho(2) = \alpha_2$ és $\varrho(k) = 0$, ha $k \geq 3$. (Általában is igaz, hogy az első p nem nulla.)

Legjobb előrejelzés: $E(X(t)|\mathcal{F}_t) \neq E(X(t)|X(t-1))$, azaz $X(t)$ nem Markov-tulajdonságú. Ehelyett

$$E(X(t)|\mathcal{F}_t) = E(\alpha_1 X(t-1)+\alpha_2 X(t-2)+\sigma\varepsilon(t)|\mathcal{F}_t) = \alpha_1 X(t-1)+\alpha_2 X(t-2),$$

azaz a legjobb előrejelzés lineáris. Ebben felhasználtuk hogy $X(t)$ független a zaj jövőjétől, azaz oksági a megoldás.

3.2.3. p-edrendű autoregressziós folyamat, $(AR(p))$

Legyen $\varepsilon(t)$ független értékű zaj, (pl. speciálisan Gauss-féle fehér zaj), és $X(t)$ elégítse ki az

$$X(t) = \alpha_1 X(t-1) + \alpha_2 X(t-2) + \ldots + \alpha_p X(t-p) + \sigma_\varepsilon \varepsilon(t)$$

egyenletet. Ekkor $X(t)$ p-edrendű autoregressziós folyamat. Az egyenletet átrendezve:

$$X(t) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X(t-k) = \sum_{k=0}^{p} X(t-k)\tilde{\alpha}_k = \sigma \cdot \varepsilon(t)$$

Ennek a karakterisztikus polinomja

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p} \tilde{\alpha}_k x^{p-k},$$

ahol $\tilde{\alpha}_0 = 1$, $\tilde{\alpha}_k = -\alpha_k$.

Tétel 3.2.5. *Az $AR(p)$ egyenletnek pontosan akkor létezik eloszlását tekintve egyértelmű, stacionárius megoldása, megfelelő $X(0) = X_0, \ldots, X(p-1) = X_{p-1}$ indítással, ha az így definiált karakterisztikus polinom komplex gyökei az egységkörön belül vannak* [2]. *Ez a Gauss esetben erősen sta-*

[2] idáig még nem szükséges a Gauss-tulajdonság

cionárius is. Nem stacionáriusan indított $AR(p)$ folyamat pedig exponenciális sebességgel stacionarizálódik, más szóval a folyamat geometrikusan ergodikus.

Megjegyzés 3.2.6. Szokás még a $\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{p} \tilde{\alpha}_k x^k$ polinomot is tekinteni. Erre $\tilde{P}(x) = x^p \cdot P(\frac{1}{x})$, és a tétel feltétele úgy módosul, hogy ennek gyökei az egységkörön kívül vannak.

Definíció 3.2.7. B az eltolás vagy visszaléptetés operátor (backward shift), ha

$$BX(t) = X(t-1), \quad B^2X(t) = X(t-2) \ \ldots$$

sít.

Megjegyzés 3.2.8. Ezzel is felírható az autoregressziós egyenlet:

$$\left(\sum_{k=0}^{p} \tilde{\alpha}_k B^k \right) X(t) = \varepsilon(t).$$

Innen

$$X(t) = \left(\sum_{k=0}^{p} \tilde{\alpha}_k B^k \right)^{-1} \cdot \varepsilon(t)$$

formálisan és valóban is, ha az inverzoperátor létezik. Operátorok függvényét pedig Taylor-sorokkal definiálhatjuk, és akkor létezik az inverz, ha a függvény konvergenciasugara nagyobb, mint az operátor spektrálsugara. Tekintsük az

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{p} \tilde{\alpha}_k x^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k x^k$$

Taylor sorfejtést. Ez alapján

$$X(t) = \left(\sum_{k=0}^{p} \tilde{\alpha}_k B^k\right)^{-1} \varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k B^k \varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot \varepsilon(t-k).$$

Annak a megállapítására, hogy ez mikor lesz konvergens, alkalmazzuk a spektrálsugár feltételt, mely szerint az operátor spektrálsugara kisebb, mint a Taylor sor konvergenciasugara. Ebből az következik, hogy a stacionárius megoldás létezésének feltétele, hogy a polinom gyökeinek az egységkörön belül kell lenniük. Erről szól a következő állítás.

Állítás 3.2.9. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot \varepsilon(t-k)$ *pontosan akkor konvergens, ha a karakterisztikus polinom gyökei az egységkörön belül vannak. Ekkor* $X(t)$ *független lesz a zaj jövőjétől, továbbá mivel* $X(t+h)$ *megkapható* $\varepsilon_h(t) = \varepsilon(t+h)$*-val is* $X(t+h) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot \varepsilon_h(t-k)$ *így stacionárius megoldását adja az egyenletnek.* [3]

A spektrál-sűrűségfüggvény a fenti karakterisztikus polinommal kifejezve a $\sigma_\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|P(e^{i\lambda})|^2}$ alakot ölti.

Állítás 3.2.10. *Stacionárius esetben a következők igazak az autokovariancia-függvényre:*

1. $R(0) = \alpha_1 R(1) + \ldots + \alpha_p R(p) + \sigma_\varepsilon^2.$

2. $R(\tau) = \alpha_1 R(\tau-1) + \ldots + \alpha_p R(\tau-p)$, *ahol* $\tau \geq 1$.

[3] Az $AR(p)$ folyamat nem Markov, de beágyazható úgy, mint egy p-dimenziós Markov-folyamat első komponense, amivel szintén igazolható a stacionárius megoldás létezése ("egységkörös" tétel).

BIZONYÍTÁS: Tudjuk, hogy $R(\tau) = R(-\tau)$. Tegyük fel, hogy $EX(t) = 0$, ekkor

$$R(0) = E(X(0)^2) = E\left(X(0) \cdot \left(\alpha_1 X(-1) + \ldots + \alpha_p X(-p) + \sigma_\varepsilon^2 \cdot \varepsilon(0)\right)\right).$$

Innen 1. rögtön adódik

$$E(X(0)X(-\tau)) = R(-\tau) = R(\tau),$$

valamint $E(X(0) \cdot \varepsilon(0)) = \sigma_\varepsilon^2$ miatt.
Hasonlóan

$$R(\tau) = E\left(X(0)X(\tau)\right) = E\left(X(0)\left(\alpha_1 \cdot X(\tau-1) + \ldots + \alpha_p \cdot X(\tau-p) + \sigma_\varepsilon^2 \cdot \varepsilon(\tau)\right)\right),$$

de itt most $E\left(X(0)\varepsilon(\tau)\right) = 0$, mert a zaj jövőjétől független a folyamat. Ezzel 2. is megvan.

■

Definíció 3.2.11. Az állításban szereplő egyenletek az ún. **Yule-Walker-egyenletek**.

Ha az első p autokovariancia adott, akkor a többi számolható, és ugyanígy igaz ez az autokorrelációra is: $r(\tau) = \alpha_1 r(\tau-1) + \ldots + \alpha_p r(\tau-p)$ $\tau > p$-re. Ezen rekurzió alapján az $R_k^\#$ mátrix utolsó sora $k > p$ mellett az előző p sor lineáris kombinációja éppen az $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ együtthatókkal. Ezért a parciális autokorreláció-függvényre $\varrho(\tau) = 0$, ha $\tau > p$.
Az $AR(p)$ folyamat előrejelzése a következő módon végezhető: $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \sigma \cdot \varepsilon_t$, ezek szerint

$$E(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + E(\sigma\varepsilon_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots),$$

ahol ez az utolsó tag 0, mert a zaj jövője független a folyamat múltjától (és $E\varepsilon(t) = 0$). A hiba szórásnégyzete

$$D^2(X_t - E(X_t|X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots)) = D^2\left(\sigma_\varepsilon \cdot \varepsilon_t\right) = \sigma_\varepsilon^2,$$

és ez a legkisebb hibájú (hibaszórású) előrejelzés.

3.2.4. Folytonos idejű autoregresszió

Most pedig lássuk az $AR(p)$ folyamat megfelelőjét folytonos időben. Az előző definíció analógiájára tekintsük a következő általánosított differenciálegyenletet, ami formálisan a következőképpen néz ki:

$$X^{(p)}(t) + a_1 X^{(p-1)}(t) + \ldots + a_{p-1}X'(t) + a_p X(t) = \eta(t),$$

ahol $\eta(t)$ fehér zaj - de ez utóbbi fogalmat technikai nehézsége miatt nem definiáljuk folytonos időben. Általánosított függvény (disztribúció) értelemben az egyenlet

$$(\varphi, X^{(p)} + a_1 X^{(p-1)} + \ldots + a_p X) = (\varphi, \eta),$$

ahol $\eta = \frac{dW(t)}{dt}$ a Wiener-folyamat deriváltja. Természetesen ez utóbbit is disztribúció értelemben értjük[4], hisz a Wiener-folyamat a szokásos analízisbeli értelemben seholsem differenciálható. A szokásos differenciálalakba átírva:

$$dX^{(p-1)}(t) = \left(-a_1 X^{(p-1)}(t) - a_2 X^{(p-2)} - \ldots - a_p X(t)\right) dt + dW(t).$$

[4]Folytonos függvénynek létezik deriváltja disztribúciós értelemben, és a Wiener-folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel folytonosak.

Amennyiben a

$$P(x) = x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p$$

karakterisztikus polinom gyökei a komplex sík bal félsíkjában helyezkednek el, akkor létezik stacionárius megoldás.

Speciálisan az $AR(1)$ folyamatot Ornstein-Uhlenbeck-folyamatnak hívják, amely ekkor a

$$dX(t) = -\alpha X(t)dt + \sigma dW(t)(\alpha > 0)$$

sztochasztikus differenciálegyenletet elégíti ki. Ez diffúziós folyamat is, így Markov, és létezik folytonos trajektóriájú modifikációja. Az egyenlet megoldása explicite megadható:

$$X(t) = e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha s}\cdot \sigma dW(s) = \int_0^t e^{\alpha(t-s)}\cdot \sigma dW(s)$$

Bizonyítás: Itô-formulával, mely szerint, ha

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t),$$

akkor az összetett függvény deriváltja

$$df(t, X(t)) = \left(f_t'(t, X(t)) + f_x'(t, X(t))\cdot a(t) + \frac{1}{2}f_{xx}''(t, X(t))\cdot b^2(t)\right)dt +$$
$$+ f_x'(t, X(t))b(t)dW(t)$$

Esetünkben $a(t) = a$ és $b(t) = \sigma$ konstansok. Legyen

$$f(t, x) = e^{at}\cdot x, \text{ és } X(t) = f(t, Y(t)).$$

Ekkor $e^{-at}X(t) = Y(t)$ ebből pedig

$$dY(t) = d\left(e^{-at}\cdot X(t)\right) = -a\cdot e^{-at}X(t) + e^{-at}dX(t) =$$

$$= -a \cdot e^{-at} X(t) + e^{-at} a X(t) dt + e^{-at} \sigma dW(t) =$$

$$= e^{-at} \sigma dW(t).$$

Tehát erre alkalmazzuk az Itô-formulát. Tekintve a deriváltakat, az $f''_{xx} = 0$, így ez a tag kiesik. Továbbá az Y-ra vonatkozó formulában nincs dt-s tag, ezért az $f'_x(t, Y(t)) \cdot a(t)$ szintén 0, mert $a(t)$ pont ez a dt-s tag lenne. Ami így marad:

$$f'_t(t, Y(t))dt + f'_x(t, Y(t))b(t)dW(t),$$

ez pedig a konkrét függvényre felírva

$$a \cdot \underbrace{e^{at} \cdot Y(t)}_{X(t)} dt + \underbrace{e^{at} \cdot e^{-at}}_{1} \cdot \sigma dW(t).$$

Innen

$$dX(t) = aX(t)dt + \sigma dW(t)(a < 0),$$

ami a kívánt differenciálegyenlet, illetve ha $-\alpha$-val volt felírva, akkor a megoldásban is $a = -\alpha$-t helyettesítünk, azaz

$$X(t) = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \sigma dW(s) \quad \alpha > 0.$$

$\blacksquare$

Megjegyzés 3.2.12. A fentit diszkretizálva

$$X\left(\frac{k}{n}\right) = e^{-a\frac{k}{n}} \int_0^{\frac{k}{n}} e^{as} \cdot \sigma dW(s) =$$

$$= e^{-\frac{a}{n}} \cdot e^{-a\cdot\frac{k-1}{n}} \cdot \int\limits_0^{\frac{k-1}{n}} e^{as}\sigma dW(s) + \underbrace{e^{-a\frac{k}{n}} \cdot \int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} e^{as}}_{\approx 1} \sigma dW(s) =$$

$$= e^{-\frac{a}{n}} \cdot X\left(\frac{k-1}{n}\right) + \sigma \cdot \varepsilon(k),$$

ahol $\varepsilon(k) \sim N(0, \frac{1}{n})$. Tehát

$$X\left(\frac{k}{n}\right) = e^{-\frac{a}{n}} \cdot X\left(\frac{k-1}{n}\right) + \sigma \cdot \varepsilon(k).$$

Ez azt jelenti, hogy a folyamat diszkretizáltja egy diszkrét idejř autoregresszió.

3.2.5. Vektor Autoregresszió

Egy folyamat fejlődése nem csak endogén hatások eredménye, hanem exogén tényezők is szolgáltatnak hajtóerőt az evolúciójához. Ezek az exogén tényezők maguk is időfüggőek, és kölcsönhatásban is állhatnak a gerjesztett folyamattal, az visszahat fejlődésükre. Tehát több egyidejűleg zajló folyamatot kell feltételeznünk és vizsgálnunk.

$\underline{X}(t)$ vektor értékű idősor vagy folyamat: $\begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_k(t) \end{pmatrix}$.

Stacionaritása (erős) ugyanúgy definiálható, mint az egy dimenziósé.

$EX(t) = \underline{\mu}(t)$ vektor $\Sigma(t) = E(\underline{X}(t) - \underline{\mu}(t))(\underline{X}(t) - \underline{\mu}(t))^T$

Gyengén stacionárius:$\mu(t) = \mu$, $\Sigma(t) = \Sigma$

Ugyanúgy létezik spektrálreprezentáció: $X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\underline{\lambda}t} \mathrm{d}\phi(\underline{\lambda})$.

$\phi(\Delta)$ vektor értékű ortogonális sztochasztikus mérték.
Autokovariancia függvény komponensenként: $R_{i,i}(\tau)$
Keresztkovariancia függvény:

$$R_{i,j}(\tau) = cov(X_i(t), X_j(t+\tau))$$

A keresztkovariancia függvény **nem** páros és **nem** pozitív szemidefinit, keresztkorreláció a 0-ban **nem** feltétlen 1.
VAR(p) folyamat:

$$\underline{X}(t) = A_1\underline{X}(t-1) + \ldots + A_p\underline{X}(t-p) + \underline{\varepsilon}(t)$$

ahol A_i k×k-s valós mátrix, $\underline{\varepsilon}(t)$ komponensenként fehér zaj időinvariáns Σ_ε szórásmátrixszal. A B backshift=visszaléptetés operátorral:

$$(B)\underline{X}(t) = \varepsilon(t)$$

ahol $\Pi(B) = I_k - A_1B - \ldots - A_pB^p$

Állítás 3.2.13. *A VAR(p) modell stabil, és így létezik stacionárius megoldás, ha a*

$$\det(I_k - A_1z - \ldots - A_pz^p) = 0$$

egyenlet gyökei az egységkörön ***kívül*** *fekszenek, azaz, ha az*

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I_n & 0 \end{matrix}$$

$(np)\times(np)$-s mátrix sajátértékei az egységkörön ***belül*** *helyezkednek el.*

3.3. Mozgóátlag folyamatok

Definíció 3.3.1. Legyen $\varepsilon(t)$ független értékű zaj, vagy fehér zaj - gyakran Gauss fehér zaj (GWN, Gaussian white noise). Ekkor az

$$X(t) = \beta_0 \cdot \varepsilon(t) + \beta_1 \cdot \varepsilon(t-1) + \ldots + \beta_q \cdot \varepsilon(t-q)$$

folyamatot **q-rendű mozgóátlag folyamat**nak nevezzük. Jelölés: $MA(q)$.

Megjegyzés 3.3.2. Az $MA(q)$ folyamatok **mindig** erősen/gyengén stacionáriusak.

Megjegyzés 3.3.3. Vegyük észre, hogy ha $\beta_i = \dfrac{1}{q+1}$ minden i-re, akkor a folyamat jelenlegi értéke a zaj jelenének és q-lépésig visszatekintő múltjának átlaga.

Megjegyzés 3.3.4. A lineáris folyamatok ∞-rendű mozgóátlag folyamatok.

Az $X(t)$ mozgóátlag folyamat autokovariancia-függvénye $E\varepsilon(t) = 0$, $D^2\varepsilon(t) = 1$ mellett

$$R(\tau) = E\left(X(t)X(t+\tau)\right) =$$

$$= \beta_0 E\left(\varepsilon(t)X(t+\tau)\right) + \beta_1 E\left(\varepsilon(t-1)X(t+\tau)\right) + \ldots + \beta_q E\left(\varepsilon(t-q)X(t+\tau)\right) =$$

$$\beta_0 \cdot E\varepsilon(t) \cdot \underbrace{\beta_\tau \cdot \varepsilon(t+\tau-\tau)}_{\text{csak ettől nem független}} + 0 + \beta_1 \cdot E\varepsilon(t-1) \cdot \beta_{\tau+1}\varepsilon(t+\tau-(\tau+1)) + 0 + \ldots$$

$$\ldots + \beta_{q-\tau} \cdot \varepsilon(t-q+\tau) \cdot \beta_q \cdot \varepsilon(t+\tau-q) =$$

$$\beta_0\beta_\tau + \beta_1\beta_{\tau+1} + \ldots + \beta_{q-\tau}\beta_q,$$

amely alakot Wold-felbontásnak hívunk.

Megjegyzés 3.3.5. $R(\tau)$ valóban nem függ t-től (eltolásinvariáns), tehát $X(t)$ másodrendben (azaz gyengén) stacionárius. Ezért ha $\varepsilon(t)$ fehér zaj, akkor gyengén stacionárius; független értékűre [5] erősen is stacionárius.

Megjegyzés 3.3.6. Az autokorreláció függvénynek pontosan az első q tagja nem 0.

Tétel 3.3.7 (Wold, 1954.).

1. *Ha az $R(\tau)$ függvényre a Wold-felbontás teljesül, akkor létezik olyan $MA(q)$ folyamat, amelynek autokovariancia függvénye $R(\tau)$, és együtthatói pont a Wold-felbontás β-i.*

2. *Ha $X(t)$ stacionárius Gauss-folyamat, $EX(t) = 0$ és $R(\tau) = 0$ ($\tau > q$), akkor $X(t)$ $MA(q)$ folyamat.*

Megjegyzés 3.3.8. $\varrho(t)$ általában végtelen sok tagból áll, és nehezen számolható (Box-Jenkins, 1976.). Igaz, hogy $\varrho(t)$ exponenciális sebességgel tart 0-hoz.

[5] fehér zaj definíciójában benne van, hogy azonos eloszlású

A parciális autokorreláció és autokorreláció egymás duálisai a mozgóátlag, illetve az autoregressziós modellben.

$X(t)$ karakterisztikus polinomja $Q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_q x^q$. Ezzel az MA egyenlet

$$X(t) = Q(B)\varepsilon(t),$$

ahol $BX(t) = X(t-1)$ a már látott backshift operátor. Így ha az $\frac{1}{Q(x)} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j x^j$ végtelen sor konvergens, akkor

$$(Q(B))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j B^j,$$

és ezzel pedig $\varepsilon(t)$ felírható $\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j X(t-j)$ alakban [6], azaz $X(t)$-nek van $AR(\infty)$ előállítása.

Tétel 3.3.9. *A mozgóátlag folyamat pontosan akkor invertálható, azaz pontosan akkor van $AR(\infty)$ előállítása, ha karakterisztikus polinomjának gyökei az egységkörön kívül vannak. Másképp fogalmazva pontosan ekkor konvergens $\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j X(t-j)$.*

Megjegyzés 3.3.10. Ebben is tetten érhető az $AR(p)$ es az $MA(q)$ folyamatok közötti dualitás.

Állítás 3.3.11. *Az $MA(q)$ folyamat spektrál-sűrűségfüggvénye létezik, és*

[6] Elvileg végtelen sokáig visszanyúlhatunk a múltba. A folyamatot saját múltjából előállítani jó, hiszen a folyamat múltja megfigyelhető, míg a zajé nem.

$$\varphi(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \cdot \left|Q\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2.$$

Megjegyzés 3.3.12. A mozgóátlag simít.

3.4. $ARMA(p,q)$ folyamatok

Definíció 3.4.1. Legyen $\varepsilon(t)$ független értékű zaj, vagy fehér zaj - gyakran Gauss fehér zaj, GWN. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{p} \tilde{\alpha}_k X(t-k) = \sum_{m=0}^{q} \beta_m \varepsilon(t-m)$$

egyenlet megoldása az $ARMA(p,q)$ folyamat.
Az autoregressziós illetve a mozgóátlag tagok karakterisztikus polinomjait jelölje rendre $P(x)$ illetve $Q(x)$.

Tétel 3.4.2. *Ha a $P(x)$ gyökei az egységkörön belül helyezkednek el, akkor létezik $X(t)$ stacionárius ARMA folyamat, és ennek létezik $MA(\infty)$ előállítása. Ha továbbá $Q(x)$ gyökei az egységkörön kívül helyezkednek el, akkor $X(t)$-nek létezik $AR(\infty)$ előállítása is.*

A stacionárius $ARMA(p,q)$ folyamat autokovariancia függvénye szintén karakterizálható és e szerint gyorsan lecsengő, vagyis az $ARMA(p,q)$ rövid emlékezetű. Az $MA(\infty)$ előállításhoz a $\Delta(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ racionális törtfüggvényt kell sorbafejteni, míg a $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ sorbafejtése az $AR(\infty)$ előállítást adja.

Állítás 3.4.3. *Az $ARMA(p,q)$ folyamat spektrál-sűrűségfüggvénye:*

$$\varphi(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \cdot \frac{\left|Q\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left|P\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}.$$

3.5. $ARIMA$ folyamatok

Nem mindig van stacionárius folyamatunk, azonban gyakran differenciálással azt kaphatunk belőle.

Definíció 3.5.1. Az $X(t)$ folyamatot $ARIMA(p,1,q)$ **folyamat**nak nevezzük, ha az $Y(t) = X(t) - X(t-1) = (1-B)X(t)$ $ARMA$ folyamat. (Egyszeres differenciálással lineáris trend tüntethető el.)
Az $X(t)$ folyamat $ARIMA(p,d,q)$, ha a d-szeres differenciáltja, $(1-B)^d X(t)$ $ARMA$ folyamat. (d-szeres differenciálással d-edfokú trend tüntethető el.) [7]

3.6. Wold-felbontás stacionárius folyamatokra

Az MA nem egyszerűen egy modell, hanem ezzel minden stacionárius folyamat közelíthető, a következő értelemben.

Definíció 3.6.1. $X(t)$ lineárisan determinált idősor, ha értéke megegyezik a ∞ múltra vonatkozó lineáris predikciójával. "Durván" szólva:

$$X(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^* \cdot X(t-i) = 0.$$

[7] d lehet nem egész szám is, ami nem egészrendű differenciálást eredményez. Erről csak a következő félévben ejtünk szót.

Tétel 3.6.2. ***Wold felbontás.*** *Legyen* $\mathcal{D}^2 X(t) < \infty$.
Tetszőleges X(t) stacionárius idősor felírható

$$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z(t-j) + V(t)$$

alakban, ahol

- $\psi_0 = 1$ *és* $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$
- $Z(t) \sim WN(0, \sigma^2)$
- $cov(Z(s), V(t)) = 0 \quad \forall s, t$
- $V(t)$ *ún. determinált folyamat.*

Megjegyzés 3.6.3. Ha $X(t)$ -∞-ből jön, $Z(t)$ megadható, mint $X(s)$-ek s<t lineáris kombinációinak határértéke.

A Wold felbontásban

$$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j U(t-j) + V_t$$

$X(t)$ változékonyságát idő-lokalizáltan bontjuk fel, a varianciát a ψ_j^2 súlyoknak megfelelően elosztva.
Alternatív felbontásként felmerül, hogy időben "globálisan", nem időhöz kötődő együtthatókkal és időben adott függvényekkel is elvégezhető-e ilyen felbontás? Azaz

$$X(t) = \sum A_j \cdot h_j(t),$$

ahol h_j-k adott valós függvények egy készlete, míg az A_j-k véletlen együtthatók.

Elsőnek a színusz és koszínusz hullámok adnak egy természetes választási lehetőséget. Azonban szükség lehet egy lokalizált és lecsengő függvénycsaládra, amelyet nyújtással és eltolással transzformálva kapunk elegendően gazdag függvénykészletet. Az első választás adja a spektrálfelbontást, míg a második a wavelet felbontást.