4. fejezet

Nemlineáris folyamatok

4.1. Egy nemlineáris fehér zaj

Mostantól nemlineáris modelleket fogunk vizsgálni. Ezek első ránézésre lineárisnak is tűnhetnek, mert előfordulhat, hogy az első két momentum egyezik egy lineárisével, így ha csak autokovariancia erejéig tekintjük őket, akkor nem vehetjük észre a különbséget. A következő példa is egy furcsaságot mutat be: fehér zaj, mely nem független értékű.

Állítás 4.1.1. *Legyen $e(t)$ i.i.d. sorozat 0 várható értékkel és véges negyedik momentummal. Ezzel legyen*

$$\varepsilon(t) = e(t) + \beta \cdot e(t-1) \cdot e(t-2).$$

Jel.: $WN(\beta)$ Ekkor $\varepsilon(t)$ fehér zaj, de nem i.i.d. ($e(t-1)$ helyett $\varepsilon(t-1)$ kellene, hogy bilineáris legyen).

BIZONYÍTÁS:

$$E\varepsilon(t) = Ee(t) + \beta \cdot Ee(t-1) \cdot Ee(t-2) = 0$$

$$R(0) = D^2\varepsilon(t) = D^2e(t) + \beta^2 D^2(e(t-1)\cdot e(t-2)) = \sigma_e^2 + \beta^2\cdot\sigma_e^4$$

$$R(1) = E\varepsilon(t)\varepsilon(t+1) - 0 =$$

$$= E\left[e(t) + \beta e(t-1)e(t-2)\right]\left[e(t+1) + \beta e(t)e(t-1)\right] = 0,$$

mert beszorzás után minden összeadandóban lesz elsőfokú, a többitől független és 0 várható értékű tag. Továbbá

$$R(2) = 0 + \beta E e(t-1)\cdot e(t-2)^2 = 0$$

ugyanúgy, mint fenn, és $R(\tau) = 0$ $\tau \geq 3$ esetén. Ez utóbbi nyilvánvaló, mert nincs azonos időhöz tartozó tag, azaz minden elsőfokon szerepel. Tehát $\varepsilon(t)$ fehér zaj, de nem független, azonos eloszlású, mert a hármas szorzatnak nem 0 a várható értéke, azaz

$$E\varepsilon(t-1)\cdot\varepsilon(t)\cdot\varepsilon(t+1) \neq 0.$$

Ugyanis ez egyenlő

$$E\left([e(t-1) + \beta e(t-2)e(t-3)]\cdot[e(t) + \beta e(t-1)e(t-2)]\cdot[e(t+1) + \beta e(t)e(t-1)]\right)$$

$$= \beta\cdot E\left(e^2(t)\cdot e^2(t-1)\right) = \beta\cdot\sigma_e^4.$$

Tehát a harmadik vegyes momentum (és mellesleg a 3. kumuláns) nem 0, így $WN(\beta)$ nem független értékű fehér zaj.

■

Legyen $e(t) \sim N(0,1)$. Ekkor $\varepsilon(t)$ eloszlása nyilván ugyanaz, mint a független standard normális X, Y, Z változókból előállított $X + B \cdot Y \cdot Z$ eloszlása.
Ha viszont $\varepsilon(t)$ és $\varepsilon(t-1)$ együttes eloszlását nézzük, az már különbözik az

$$U = X + B \cdot Y \cdot Z \text{ és } V = X' + B' \cdot Y' \cdot Z'$$

együttes eloszlásától, ahol X, Y, Z, X', Y', Z' teljesen függetlenek.

Tekintsük azt a folyamatot, amelynek differenciája éppen az előző $WN(\beta)$, azaz

$$Y(t) - Y(t-1) = \varepsilon(t) = e(t) + \beta e(t-1)e(t-2).$$

Erre $EY(t) = 0$, a szórásnégyzet pedig

$$D^2Y(t) = D^2\left(\sum_{i=1}^{t} Y(i) - Y(i-1)\right) = t \cdot D^2\left(Y(k) - Y(k-1)\right) =$$

$$= t \cdot D^2\varepsilon(t) = t \cdot \sigma_e^2(1 + \beta^2\sigma_e^2).$$

(Ehhez $Y(0) = c$-nek ($c = 0$) teljesülnie kell 1 valószínűséggel, mert így a teleszkópos összeg után $Y(t) - Y(0)$ marad.) Ezért $t \to \infty$ esetén $D^2Y(t)$ tart végtelenbe $O(t)$ nagyságrendben, így $Y(t)$ egy Wiener folyamat diszkretizáltjára hasonlít (de nem az, mert nem független növekményű a folyamat).

4.2. A bilineáris modell

Definíció 4.2.1. Bilineáris folyamat: $BL(p, q, P, Q)$,

$$X(t) + \underbrace{\sum_{i=0}^{p} a_i X(t-i)}_{AR\ komponens} = \underbrace{\varepsilon(t)}_{zaj} + \underbrace{\sum_{j=0}^{q} b_j \cdot \varepsilon(t-j)}_{MA\ komponens} + \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{Q} c_{ij} X(t-i)\varepsilon(t-j),$$

ahol $\varepsilon(t)$ i.i.d. 0 várható értékkel, és vegyük észre, hogy az utolsó (nem lineáris) tagban a folyamat és a zaj múltbéli értékei vannak összeszorozva.

A stacionárius megoldás létezésére Liu és Brockwell adtak feltételt 1988-ban [1].

Most vizsgáljuk a $BL(1, 0, 1, 1)$-et a $c_{1,1} = c$ jelölés mellett:

$$X(t) - aX(t-1) = \varepsilon(t) + cX(t-1)\varepsilon(t-1).$$

A bilineáris folyamat paraméterbecslése nagyon bonyolult. Ld. SubbaRao-Gabr.

Meg lehet mutatni, hogy

$$\mu = EX(t) = \frac{c \cdot \sigma_\varepsilon^2}{1-a} \quad konstans,$$

$$m_2 = EX^2(t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1 + 2c\sigma_\varepsilon^2 + 4ac\mu)}{1 - a^2c^2\sigma_\varepsilon^2}.$$

[1] Földrengések modellezésére jó, mert néha kiugrik, majd lassan lecseng, ráadásul hosszú távon stacionárius.

Nyilván $R(0) = m_2 - \mu^2$, továbbá

$$S(1) = E(X(t)X(t+1)) = am_2 + 2c\sigma_\varepsilon^2\mu,$$

és

$$S(s) = E(X(t)X(t+s)) = aS(s-1) + c\sigma_\varepsilon^2\mu,$$

azaz $S(s)$ nem függ t-től, így másodrendben stacionárius. Innen pedig

$$R(s) = S(s) - \mu^2, \;\; S(s-1) = R(s-1) + \mu^2,$$

tehát felírhatjuk, hogy

$$R(s) = a\left[R(s-1) + \mu^2\right] + \underbrace{c\sigma_\varepsilon^2\mu}_{(1-a)\mu^2} - \mu^2 =$$

$$= aR(s-1) + a\mu^2 + (1-a)\mu^2 - \mu^2 = aR(s-1).$$

Ezzel azt kaptuk, hogy $R(s) = const \cdot a^s$ alakban írható, vagyis ugyanolyan, mint egy elsőrendű autoregresszió kovariancia struktúrája, így csak az első két momentum - és annak becslése - alapján nem elkülöníthető egy $AR(1)$-től, $ARMA(1,1)$-től [2]. Kell a kumuláns, illetve az annak megfelelő bispek-

[2]Ha a spektrumot tekintenénk, az sem segítene, hisz az is csak az autokovariancia Fourier-transzformáltja.

trum [3] [4].

A stacionaritás, más szóval a stacionárius megoldás létének elégséges feltétele, hogy $a^2 + c^2 \leq 1$. $X(t)$ sűrűségfüggvénye ekkor létezik és folytonos, kivéve $-\frac{a}{c}$-t, ugyanis erre $f(-\frac{a}{c}) = +\infty$, és határértékben is végtelenbe tart. Minden $a \neq 0$-ra és minden pozitív A-ra $f_c(x) \xrightarrow{c \to 0} f_0(x)$ egyenletesen is $|x| < A$-n. Egy ismert sejtés szerint, ha $X(t)$ $BL(p, q, P, Q)$, akkor stacionárius eloszlása egycsúcsú.

4.2.1. Egyszerű bilineáris modell

$$X(t) = \beta \cdot X(t-k) \cdot \varepsilon(t-l) + \varepsilon(t)$$

diagonális, ha k=l, szuperdiagonális, ha k>l, illetve szubdiagonális, ha k<l. Az autokorrelációk számítása nem egyszerű, mert nem függetlenek szorzata!

Szuperdiagonális modell:

$$EX(t) = \beta \cdot E\left[X(t-k+l)E\left(\varepsilon(t) \mid \varepsilon(t-l)\right)\right] + E\,E(\varepsilon(t) \mid \varepsilon(t-l)) = 0.$$

$$EX(t) \cdot X(t-j) = 0 \quad \text{hasonlóan számolható.}$$

[3] A karakterisztikus függvény logaritmusát kumulánsgeneráló függvénynek is nevezik, értelemszerűen a sorfejtésének együtthatóit kumulánsoknak nevezzük. A név arra a fontos tulajdonságra utal, hogy független valószínűségi változók összegének kumulánsa a valószínűségi változók kumulánsainak összege (persze: függetlenek összegénél a karakterisztikus függvények szorzódnak, és a logaritmus hatására ebből összeg lesz). Emiatt szokták még szemiinvariánsoknak is hívni őket.

[4] A harmadik kumuláns (stacionaritás miatt csak két változós függvény) Fourier-transzformáltját bispektrumnak hívjuk. Gauss folyamatra 0. Gyakran használják linearitás tesztekre.

Diagonális modell:

$$EX(t) = \beta \cdot \mu_2, \ \ ahol \ \ \mu_2 = E\left(\varepsilon(t)^2 \mid \varepsilon(t-1)\right),$$

speciálisan $\mu_2 = \sigma_\varepsilon^2$, ha $\varepsilon(t)$ i.i.d.

$$cov\left(X(t), X(t-j)\right) = 0, \ \ ha \ \ j \neq k$$

és

$$cov\left(X(t), X(t-k)\right) = \beta \cdot \mu_2^2.$$

Tegyük fel még, hogy $\varepsilon(t)$ i.i.d. és

$$E\varepsilon^{2p-1} = 0, \ \ p = 1, \ldots, 4, \ \ \beta^4\mu_4 < 1,$$

ahol $\mu_4 = E\varepsilon^4$. Ekkor:

$$cov\left(X^2(t), X^2(t-j)\right) = 0 \quad 1 \leq j \leq k-1.$$

Szuperdiagonális modell:

$$cov\left(X^2(t), X^2(t-j)\right) = 0,$$

ha

$$j = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, k-1 \ \ \text{és} \ \ j \neq k-l.$$

Egyébként:

$$cov\left(X^2(t), X^2(t-j)\right) = \frac{\beta^4 \cdot \mu_2(\mu_4 - \mu_2^2)}{1 - \beta^4\mu_2^2} EX(t).$$

Legyen $Y(t) - Y(t-1) = X(t)$, ahol $X(t) \sim BL(1,0,1,1)$. Behelyettesítve $X(t)$ formuláját kapjuk, hogy

$$Y(t) - (1+a)Y(t-1) + aY(t-2) =$$
$$= cY(t-1)\varepsilon(t-1) - cY(t-2)\varepsilon(t-1) + \varepsilon(t),$$

azaz $Y(t) \sim BL(2,0,2,1)$ lesz. De míg az előző modellben $|a| < 1$-re stacionárius a folyamat, az itt lévő $AR(2)$ "tagot" egy olyan gerjesztéssel hajtjuk meg, amely a folyamat múltjától is függ - jogos az $AR(2)$ karakterisztikus polinomját nézni (bal oldal). Ez pedig a $z^2 - (1+a)z + a$, aminek a $z = 1$ tetszőleges a mellett gyöke, így nem lesz stacionárius a folyamat.

4.3. $ARCH$ folyamatok és általánosításaik

4.3.1. Az $ARCH(1)$ folyamat

A most következő folyamatok és általánosításaik a pénzügyi modellezésben nagyon népszerűek. Az $ARCH(1)$ folyamatot Robert F. Engle vezette be 1982-ben, később közgazdasági Nobel-díjat kapott érte. Az ARCH elnevezés az Autoregressive Conditional Heteroscedasticity rövidítése. [5]

Legyen $\varepsilon(t)$ GWN, $\varepsilon(t) \sim N(0,1)$ és i.i.d. Az $X(t)$ folyamatot az

$$X(t) = \sigma(t)\varepsilon(t)$$

[5] Ez azt takarja, hogy a jelenlegi hiba varianciája függ a múltbeli értékektől (általában úgy, hogy a folyamat stacionárius maradjon). a Heteroscedasticity szó alapja a görög szkedásztikosz $\sigma\kappa\varepsilon\delta\alpha\sigma\tau\iota\kappa\omega\varsigma$ szó, melynek jelentése kb. (szét)szóródni képes.

egyenlettel adjuk meg, azaz egy (nemkonstans) valószínűségi változószor egy fehér zaj. A valószínűségi változóra időtől függő szórásként gondolhatunk. Erről a szórásról azt feltételezzük, hogy a folyamat megelőző értékétől (értékeitől) függ. Ezért feltételes szórásként is értelmezhetjük, feltéve, hogy a folyamat múltját ismerjük. E szórást a

$$\sigma^2(t) = \alpha_0 + \alpha_1 X^2(t-1)$$

egyenlet [6]határozza meg. Az egyenletben α_0, α_1 nemnegatív valós konstansok. A feltételes szórásnégyzet

$$D^2\big(X(t)|X(t-1) = x\big) = \alpha_0 + \alpha_1 x^2$$

az előző érték *kvadratikus* függvénye. A négyzet helyett más hatvány is szóba jöhet itt, de ez persze már általánosítás – Power ARCH -nak szokás hívni. A fentebbi két egyenletből kapjuk, hogy

$$X^2(t) = \big(\alpha_0 + \alpha_1 X^2(t-1)\big)\,\varepsilon^2(t),$$

de ez nem ekvivalens velük, mert pl. Gauss zajjal történő generálás mellett az egyesített egyenletnek akár nemnegatív $X(t)$ megoldása is lehet, míg az eredeti két egyenlet megoldása biztos, hogy negatív értékeket is felvesz. Keressük a stacionárius megoldást. Ehhez tegyük fel, hogy létezik ilyen, és iteráljuk az egyenletet:

$$X^2(t) = \alpha_0 \cdot \varepsilon^2(t) + \alpha_1\alpha_0 \cdot \varepsilon^2(t) \cdot \varepsilon^2(t-1) + \alpha_1^2 \cdot X^2(t-2) \cdot \varepsilon^2(t) \cdot \varepsilon^2(t-1)$$

[6]Ebből látszik, hogy a variancia függ a múlttól, azaz feltételes.

$$\vdots$$

$$X^2(t) = \alpha_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \cdot \varepsilon^2(t) \cdot \ldots \cdot \varepsilon^2(t-j).$$

Ez utóbbi akkor írható fel így, ha $\alpha_1 < 1$, mert a maradéktagokban α_1 egyre nagyobb hatványai jelennek meg, amik így nullához tartanak, miközben $X(t)$ stacionaritása és $\varepsilon(t)$ függetlensége, 1 szórása miatt a valváltozók szorzata korlátos a maradéktagokban (pl. $\mathcal{L}_2$ norma szerint). Ha az összegzés és a várható érték felcserélhető, akkor

$$EX^2(t) = \alpha_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \cdot E\varepsilon^2(t) \cdot \ldots \cdot E\varepsilon^2(t-j) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1},$$

ugyanis az $\varepsilon(t)$-k várható értéke 0, így második momentumuk a szórásnégyzetükkel egyenlő, ami 1, tehát egy egyszerű mértani sort kellett összegeznünk. Ebből látjuk, hogy $\alpha_0 = 0$ esetén $X(t)$ az azonosan 0 folyamat, ami nem túl érdekes.

Ha az

$$X(t) = \varepsilon(t) \cdot \sqrt{\alpha_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_1^{k+1} \cdot \varepsilon^2(t-1) \cdot \ldots \cdot \varepsilon^2(t-k-1)\right)} \quad (*)$$

felírásban a szumma konvergál, akkor stacionárius folyamatot állít elő, hiszen az $\eta(t) = \varepsilon(t+h)$ zaj véges dimenziós eloszlásai megegyeznek, és $(X(t_1+h), \ldots, X(t_m+h))$-t ugyanúgy állíthatjuk elő η-ból, mint $(X(t_1), \ldots, X(t_m))$-et ε-ból, tehát az eloszlásaik megegyeznek.

Tétel 4.3.1. *Ha* $|\alpha_1| < 1$, *akkor* $(*)$ *konvergál, és az* $ARCH(1)$ *egyenlet egyértelmű, véges szórású, stacionárius megoldását adja.* [7] *Ha nem követeljük meg a véges szórást, akkor* $|\alpha_1| > 1$*-re is van stacionárius megoldás.*

BIZONYÍTÁS:
Nem bizonyítjuk.

∎

Megjegyzés 4.3.2. Ez a 2.2 állítás általánosítása.

Következmény 4.3.3. Az $\varepsilon(t)$ és $\sqrt{\cdot}$ tagok függetlensége miatt

$$EX(t) = E\varepsilon(t) \cdot E\sqrt{\cdot} = 0,$$

továbbá

$$D^2X(t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}.$$

Az autokovariancia pedig

$$E\big(X(t+h)X(t)\big) = E\varepsilon(t+h) \cdot E\underbrace{\left(\sqrt{\cdot} \cdot \varepsilon(t) \cdot \sqrt{\cdot}\right)}_{\text{t+h múltja mind}} = 0,$$

azaz az $ARCH(1)$ korrelálatlan, stacionárius, 0 várható értékű, tehát **fehér zaj**.

[7] Ez a megoldás véges szórásának megkövetelése mellett szükséges, egyébként csak elégséges feltétel.

Az ARCH(1) azonban nem független értékű:

$$E\left(X^2(t)|X(t-1)\right) = \left[\alpha_0 + \alpha_1 X^2(t-1)\right] \cdot E\left(\varepsilon^2(t)|X(t-1)\right),$$

ahol $\varepsilon^2(t)$ és $X(t-1)$ függetlenek és $E\varepsilon^2(t) = 1$, tehát

$$E\left(X^2(t)|X(t-1)\right) = \alpha_0 + \alpha_1 X^2(t-1).$$

Ez pedig nem konstans valószínűségi változó, mint ahogy azt a függetlentől várnánk. Tehát az $ARCH(1)$ nem is Gauss-eloszlású, hiszen akkor a korrelálatlanságából már a függetlenség is következne. Ezen kívül szimmetrikus zajból generálva az $ARCH(1)$ szimmetrikus eloszlású, hiszen $\underbrace{\varepsilon(t)}_{\textit{szimm. } X} \cdot \underbrace{\sqrt{\ }}_{\textit{nemneg. } Y}$ alakú, ami szimmetrikus eloszlású:

(Biz.:) $Z = X \cdot Y$ mellett

$$\{Z > z\} = \left\{\omega : Y(\omega) = y > 0, X(\omega) > \frac{z}{y}\right\}$$

és

$$\{X < -x\} = \left\{\omega : Y(\omega) = -y \ (y > 0), X(\omega) > \frac{z}{y}\right\},$$

így $P(Z > z) = P(Z < -z)$.

Állítás 4.3.4. *Minden $\alpha_1 \in (0,1)$-re létezik β, hogy $EX^{2\beta}(t) = \infty$.*

Állítás 4.3.5. *$EX^4(t)$ pontosan akkor véges, ha $3\alpha_1^2 < 1$.*

Állítás 4.3.6. *Ha $EX^4(t) < \infty$, akkor az $X^2(t)$ autokorrelált és ACF-je ugyanaz, mint az AR(1)-nek α_1-gyel.*

4.3.2. Az $ARCH(p)$ folyamat

Definíció 4.3.7. Kicsit általánosabban az $ARCH(p)$ az az $X(t) = \sigma(t)\varepsilon(t)$ folyamat, ahol

$$\sigma^2(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X^2(t-i).$$

Megjegyzés 4.3.8. Az előző állítás $AR(p)$-vel igaz $ARCH(p)$-re. Innen a névben (ARCH) az AR.

Állítás 4.3.9. *Az $ARCH(p)$ feltételesen Gauss-eloszlású, ha adott $X(t-1), \ldots, X(t-p)$.*

Tehát könnyű feltételes likelihood-ot számolni és a maximumhelyével paraméter becslést adni - de ez nem az igazi max likelihood ezért kvázi ML-nek hívják.

4.3.3. A $GARCH(p,q)$ folyamat

Definíció 4.3.10. További általánosításként bevezetjük a $GARCH(p,q)$[8] folyamat fogalmát, amely
Bollerslev (1986) nevéhez fűződik, és $X(t) = \sigma(t) \cdot \varepsilon(t)$ alakban definiálható, ahol $\varepsilon(t)$ i.i.d. 0 várható értékkel és véges negyedik momentummal[9], továbbá

$$\sigma^2(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X^2(t-i) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma^2(t-j).$$

[8]Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity; a konkrét alkalmazásokban igen nagy p kellett az ARCH-ban.

[9]ez utóbbit nem muszáj feltenni, de így lesz jó a Bollerslev-tételben

Állítás 4.3.11. *A $GARCH(p,q)$ is WN.*

(A bizonyítás nem nehéz.)

Megjegyzés 4.3.12. $\varepsilon(t)$ általában $N(0,1)$, de stabilis is lehet. Az α_i, β_j konstansok pedig pozitívak (mert a bal oldalon egy szám négyzete van). Továbbá látható a $\sigma^2(t)$ előállításából, hogy a korábbi szórásokra és állapotokra feltételes.

Tétel 4.3.13 (Bollerslev, 1986.). *A fenti $GARCH(p,q)$ gyengén, azaz másodrendben stacionárius, ha*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1.$$

Ekkor $EX(t) = 0$, $X(t) \sim WN$, azaz $R(\tau) = 0$ pozitív τ-ra, továbbá

$$R(0) = D^2X(t) = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j\right)} < \infty.$$

Ha megköveteljük $D^2X(t)$ végességét, akkor az együtthatók összegére vonatkozó fenti < 1 feltétel szükséges is.

BIZONYÍTÁS:

A bizonyítás ugyanolyan folyamatos behelyettesítéssel történik, mint az $ARCH(1)$ esetben.

■

Legyen $\mathcal{F}_t = \sigma\{X(s) : s \leq t\}$ filtráció. Ez megegyezik $\mathcal{F}_t^\varepsilon = \sigma\{\varepsilon(s) : s \leq t\}$-vel.

Állítás 4.3.14. *Ha valamely t_0-ra $\sigma(t_0)$ $\mathcal{F}_{t_0}$-mérhető, akkor $\sigma(t_0+1)$ $\mathcal{F}_{t_0}$-mérhető* [10]*, így minden $t \geq t_0$-ra $\sigma^2(t)$ $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető. Ezzel az $\varepsilon(t)$-től való függetlenség miatt a szorzatuk várható értéke $E\sigma(t)\varepsilon(t) = 0$, és $E\sigma^2(t) \cdot \sigma^2(t+\tau) \cdot \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t+\tau) = 0$. Ez adja az $R(\tau) = 0$-ra vonatkozó állítást.*

4.4. Sztochasztikus rekurziós egyenletek

Definíció 4.4.1. Az $X(t) = A(t)X(t-1) + B(t)$ egyenletet **sztochasztikus rekurziós egyenlet**nek hívjuk (SRE), ahol $A(t)$ véletlen $d \times d$-s mátrix, $B(t)$ véletlen d-dimenziós vektor, továbbá $(A(t), B(t))$ i.i.d.

Szokásos módon jelölje $|\cdot|$ az euklideszi normát $\mathbb{R}^d$-ben, $\|\cdot\|$ pedig az operátornormát, azaz $\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$. $A > 0$ azt jelenti, hogy A minden eleme pozitív. Kérdés a stacionárius megoldás létezése.

Definíció 4.4.2. $\gamma = \inf\{\frac{1}{n} \cdot E\log\|A_1 \cdot \ldots \cdot A_n\|\}$-t **Ljapunov-exponens**nek nevezzük. Determinisztikus esetben a Ljapunov-exponens $\inf\log\left(\|A_1 \cdot \ldots \cdot A_n\|^{\frac{1}{n}}\right)$, azaz a "geometriai közép" logaritmusának infimuma.

Megjegyzés 4.4.3. Fürstenberg és Kesten egy, a nagy számok törvényéhez hasonló tétele szerint (szubadditív ergodtétel) $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\|A_1 \cdot \ldots A_n\|$

[10] Ez teljesül, ha adaptált megoldását nézzük a *GARCH* egyenletnek.

1 valószínűséggel, tehát "kiválthatjuk" a várható értéket 1 valószínűségű konvergenciára.

Tétel 4.4.4. *A_t és B_t független, azonos eloszlású, azaz i.i.d.*

Tegyük fel, hogy $E \log^+ \|A_1\| < \infty$, $E \log^+ |B_1| < \infty$ és $\gamma < 0$. Ekkor az

$$X_n = B_n + \sum_{k=1}^{\infty} A_n \cdot \ldots \cdot A_{n-k+1} B_{n-k}$$

sorozat 1 valószínűséggel konvergens, és ez az egyértelmű, erősen stacionárius, oksági megoldása a sztochasztikus rekurziós egyenletnek.
Ha $d = 1$, a γ-ra tett feltétel

$$\frac{1}{n} E \log \|A_1 \cdot \ldots \cdot A_n\| = \frac{1}{n} E \log (|A_1 \cdot \ldots \cdot A_n|) = E \log |A_1| < 0.$$

Definíció 4.4.5. Reguláris változás: Az X d-dimenziós véletlen vektort *reguláris változású*nak mondjuk $\alpha \geq 0$ index-szel, ha van olyan (a_n) számsorozat, hogy

$$n \cdot P(|X| > t \cdot a_n, e_X \in B_S) \longrightarrow t^{-\alpha} Q(B_S) \qquad n \to \infty$$

ahol e_X jelöli az X irányú egységvektort és B_S a d dimenziós tér egységgömbjét[11]. [ÁBRA]

Megjegyzés 4.4.6. Egydimenzióban B_S 1 pont[12], és $n \cdot P(|X| > t \cdot a_n) \longrightarrow const \cdot t^{-\alpha}$. Legyen például $a_n = n$, ekkor

$$P(|X| > t \cdot n) \sim \frac{const}{n} \cdot t^{-\alpha}.$$

[11] itt az egyéggömbre, mint Borel-halmazra kell gondolnunk

[12] mármint 2 pont, de nyilván csak a pozitív oldalon levővel foglalkozunk, mert $|X|$-et nézzük

Tehát ez azt mondja meg, hogy elég nagy n mellett, ha elég messziről indulunk[13], akkor a farokviselkedés $t^{-\alpha}$ nagyságrendű, azaz hiperbolikus lecsengésű. Explicite úgy fogalmazhatunk, hogy léteznek c_+ és c_- konstansok úgy, hogy $t \to +\infty$ esetén $P(X > t) \sim c_+ t^{-\alpha}$ és $P(X < -t) \sim c_- t^{-\alpha}$.

Tétel 4.4.7 (Kesten, 1973 - Vervaat, 1979 - Goldie, 1991)**.** *Legyen (A_t, B_t) i.i.d., A_t nemnegatív elemekkel van kitöltve, B_t szintén és nem nulla. Tegyük fel, hogy*

1. *$E\|A_1\|^\varepsilon < 1$, valamilyen pozitív ε-ra,*

2. *A_1 nem degenerált,*

3. *létezik olyan pozitív κ_0, hogy $E\left(\min\limits_{i=1,\dots,d} \sum\limits_{j=1}^{d} (A_1)_{i,j}\right)^{\kappa_0} \geq d^{\kappa_0/2}$,*

4. *$E\left(\|A_1\|^{\kappa_0} ln^+ \|A_1\|\right)$ véges*

5. *sűrű csoport feltétel:*
   Az $\{ln\|\mathtt{a}_n \dots \mathtt{a}_1\| : n \geq 1,\ \mathtt{a}_n \dots \mathtt{a}_1 > 0 \text{ and } \mathtt{a}_n, \dots, \mathtt{a}_1 \in suppP_{A_1}\}$ halmaz egy $\mathbb{R}$-ben sűrű csoportot generál.

Ekkor a következők teljesülnek:

1. *Létezik $\kappa_1 \in (0, \kappa_0]$ egyértelmű megoldása a*

$$0 = \lim \frac{1}{n} \cdot \log E\|A_n \cdot \ldots \cdot A_1\|^{\kappa_1}$$

   egyenletnek.

2. *Létezik egyértelmű (erősen) stacionárius oksági megoldása az SRE-nek.*

[13] tehát t még n-nél is nagyobb

3. Ha $E|B|^{\kappa_1}$ véges, akkor $X(t)$ reguláris változású $\kappa_1 = \alpha$-val.

Megjegyzés 4.4.8. 1 dimenzióban $0 = \log E|A_1|^{\kappa_1}$ pontosan az $1 = E|A_1|^{\kappa_1}$ egyenlettel ekvivalens, tehát azt az abszolút momentumot keressük, amelyre éppen 1 az értéke, és ez lesz a regularitási index. Felhasználtuk, hogy a függetlenség miatt $\log E\|A_n \cdot \ldots \cdot A_1\|^{\kappa_1} = n \cdot \log E|A_1|^{\kappa_1}$.

4.4.1. Az elsőrendű bilineáris modell stacionárius eloszlása

Vizsgáljuk most az elsőrendű bilineáris modellt:

$$X(t) = aX(t-1) + bX(t-1)\varepsilon(t-1) + \varepsilon(t),$$

ahol $\varepsilon(t)$ i.i.d., a, b pedig valós konstansok. Tegyük fel, hogy $\varepsilon(t) \sim N(0,1)$. Ekkor az egyenlet átírható a következő alakba:

$$X(t) = Y(t-1) + \varepsilon(t),$$

ahol

$$Y(t) = (a + b \cdot \varepsilon(t))X(t) = (a + b \cdot \varepsilon(t))(Y(t-1) + \varepsilon(t)) =$$

$$= (a + b\varepsilon(t)) \cdot Y(t-1) + (a\varepsilon(t) + b\varepsilon^2(t)) = A_t \cdot Y(t-1) + B_t.$$

Megjegyezzük, hogy az A_t, B_t pár független az A_{t-1}, B_{t-1} pártól. Ez kielégít egy sztochasztikus rekurziós egyenletet, mivel A_t -k és B_t -k független, azonos eloszlású sorozatok (minden egydimenziós).
Ha $\varepsilon(t) \sim N(0,1)$, akkor $A_t \sim N(a, b^2)$. Ekkor vajon mi lesz a stacionárius megoldás?

Az, hogy $E\log|A_t|<0$ - azaz a Ljapunov-exponens negatív -, átírható az ekvivalens

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\log|x|\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}\,dx<0$$

alakba. Kesten tételéből azt kapjuk, hogy ha κ_1 kielégíti az

$$E|a+b\cdot\varepsilon(t)|^{\kappa_1}=1$$

egyenletet, akkor létezik stacionárius megoldás, és az reguláris változású κ_1-gyel. (Ezt a κ_1-et persze nem könnyű kiszámolni.) A feltételből

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^{\kappa_1}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{\infty}(by+a)^{\kappa_1}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=1,$$

ahol fontos feltételezésünk az $a=0$, hiszen $a\neq 0$ esetén nem végezhető el ilyen formában a helyettesítéses integrálás, főként az integrálandó függvény nem páros (és az $x=a$ egyenesre sem szimmetrikus) volta miatt. Viszont ha $a=0$, akkor már páros a függvény, így első lépésben a 0-tól végtelenig való integráljának a kétszerese írható, majd erre az $x=by$ helyettesítés. Ezután az $y^2=t$, $dy=\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ helyettesítéssel

$$1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot b^{\kappa_1}\int\limits_{0}^{\infty}t^{\frac{\kappa_1}{2}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt=\frac{b^{\kappa_1}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}t^{\frac{\kappa_1-1}{2}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{b^{\kappa_1}}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2^{\frac{\kappa_1+1}{2}}\int\limits_{0}^{\infty}z^{\frac{\kappa_1-1}{2}}\cdot e^{-z}\,dz,$$

ahol ez utóbbi lépésben a $\frac{t}{2}=z$, $dt=2dz$ áttérést alkalmaztuk. Itt az intergrál éppen a Γ függvény alakját öltötte a $\frac{\kappa_1+1}{2}$ helyen. Azaz

$$\frac{(\sqrt{2}b)^{\kappa_1}}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{\kappa_1+1}{2}\right)=1.$$

Ebből pedig – felhasználva a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ azonosságot – kapjuk, hogy

$$\left(\frac{\Gamma\left(\frac{\kappa_1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{-\frac{1}{\kappa_1}}=\sqrt{2}b$$

.

Például $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$-re $\Gamma\left(\frac{\kappa_1+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, így $\kappa_1=0$. Ekkor pedig nem lesz reguláris változású a megoldás, azaz a stacionárius megoldás a polinomiálisnál gyorsabban lecsengő eloszlású.
Most $b=1$-re nézve $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$-t felhasználva kapjuk, hogy $\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, tehát $\kappa_1=2$.
$b=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$-re $\kappa_1=1$; $b=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ -re $\kappa_1=4$; $b=\sqrt[6]{\frac{\pi}{32}}$-re $\kappa_1=3$. Ez utóbbinál érdemes megjegyezni, hogy $\sqrt[6]{\frac{\pi}{32}}=\sqrt[6]{\frac{1}{8}}\sqrt[6]{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[6]{\frac{\pi}{4}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tehát a $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nem határa a "reguláris változásúságnak".

Ha $a\neq 0$, akkor igencsak reménytelennek látszik az integrálás elvégzése.

4.4.2. A $GARCH(p,q)$ modell stacionárius megoldása és eloszlása

Ha $X(t)$ $GARCH$ folyamat, akkor (a definícióban szereplő) $X^2(t)$ és $\sigma^2(t)$ beágyazható egy sztochasztikus rekurziós egyenletbe, azaz az $\underline{X}(t)=A_t\underline{X}(t-1)+B_t$ vektorértékű folyamatokra vonatkozó egyenletbe.

$$\underline{X}(t)=\left(\sigma^2_{t+1},\dots,\sigma^2_{t-q+2},X^2_t,\dots,X^2_{t-p+2}\right)^\top$$

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_1\varepsilon^2(t)+\beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{q-1} & \beta_q & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon^2(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_t = (\alpha_0, 0, \dots, 0)^\top$$

Tétel 4.4.9. *Tegyük fel, hogy az SRE Ljapunov-exponense $\gamma < 0$, valamint $\alpha_0 > 0$.*

a) Tegyük fel, hogy $E\log^+|\varepsilon(1)|$ véges. Ekkor létezik egyértelmű, oksági, erősen stacionárius megoldása a $GARCH$ egyenletnek.

b) Tegyük fel, hogy $\varepsilon(1)$ abszolút folytonos eloszlású, mindenütt pozitív sűrűségfüggvénnyel, valamint $E|\varepsilon(1)|^h < \infty$ minden $h < h_0$-ra, de $E|\varepsilon(1)|^{h_0} = \infty$ valamely $0 < h_0 \leq \infty$-re. Ezen kívül nem tűnik el az összes α_i, β_i. Ekkor létezik olyan pozitív κ_1, és $w(\underline{x})$ véges értékű függvény, hogy minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$-ra $\lim_{u\to\infty} u^{\kappa_1} P(\langle \underline{x}, X_1\rangle > u) = w(\underline{x})$ létezik, azaz $\langle \underline{x}, X_1\rangle$ reguláris változású κ_1 indexszel. Továbbá ha κ_1 nem páros, akkor X_1 reguláris változású κ_1 indexszel.

c) Ha az $\varepsilon(1)$ sűrűségfüggvénye a 0 egy környezetében pozitív, akkor $X(t)$ erősen keverő geometriai sebességgel (gyakorlatilag geometrikusan ergodikus lesz).

Megjegyzés 4.4.10. Nehéz formulát kapni a Ljapunov-exponensre, így feltételt a stacionaritásra is.

Tegyük fel, hogy $\alpha_0 > 0$, $E\varepsilon(1) = 0$ és $E\varepsilon^2(t) = 1$. Ekkor

i) $\gamma < 0$ szükséges és elégséges feltétel az egyértelmű, erősen stacionárius, oksági megoldás létezéséhez.

ii) $\sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$ szükséges $\gamma < 0$-hoz

iii) $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$ elégséges $\gamma < 0$-hoz (ez egy nagyon erős feltétel)

iv) ha $\varepsilon(t)$ véges tartójú, nincs atomja 0-ban, $\alpha_i, \beta_j > 0$, akkor $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j = 1$ elégséges $\gamma < 0$-hoz.

4.4.3. Az $ARCH(1)$ modell erős stacionaritása

Nézzük az $ARCH(1)$ esetét! Láttuk, hogy $X(t) = \sigma(t) \cdot \varepsilon(t)$, négyzetre emelve pedig $X^2(t) = \sigma^2(t) \cdot \varepsilon^2(t)$, ahol $\sigma^2(t) = \alpha_0 + \alpha_1 X^2(t-1)$. Ezt behelyettesítve

$$X^2(t) = \big(\alpha_0 + \alpha_1 X^2(t-1)\big) \cdot \varepsilon^2(t) = A_t \cdot X^2(t-1) + B_t,$$

ahol $A_t = \alpha_1 \varepsilon^2(t)$ és $B_t = \alpha_0 \varepsilon^2(t)$, tehát (A_t, B_t) i.i.d. Összehasonlítva, az $ARCH(1)$-et

$$X^2(t) = \alpha_1 X^2(t-1) \cdot \varepsilon^2(t) + \alpha_0 \varepsilon^2(t),$$

és a bilineáris modellt

$$X(t) = bX(t-1) \cdot \varepsilon(t-1) + \varepsilon(t) + aX(t-1),$$

láthatjuk, hogy lényeges különbség van a kettő között[14]. A γ Ljapunov-exponens negativitásához az kell, hogy

$$E\log|A_1| = E\log|\alpha_1\cdot\varepsilon^2(t)| = \log|\alpha_1| + E\log(\varepsilon^2(t)) < 0$$

legyen. Mivel $\varepsilon(t)$ standard normális eloszlású, így

$$E\log(\varepsilon^2(t)) = E2\log(\varepsilon(t)) = 2\int \log(\varepsilon(t))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\varepsilon^2(t)}{2}}d\varepsilon(t),$$

ahonnan $\varepsilon(t)=\sqrt{2X}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$2\int\log(2x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x}\sqrt{2}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \int\log(2)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}dx+\int\log(x)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}dx$$

ahol felhasználtuk, hogy $\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Vegyük észre, hogy $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}$ éppen a $\Gamma_{\frac{1}{2},1}$ eloszlás sűrűség-függvénye, tehát X ilyen eloszlású. Így az előző tovább egyenlő

$$\log 2 + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\log(x)e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}dx\text{-szel.}$$

Felhasználva, hogy

$$\Gamma'(y) = \int_0^\infty e^{-x}(x^{y-1})'dx = \int_0^\infty e^{-x}\log(x)x^{y-1}dx$$

kapjuk, hogy $\log 2+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\Gamma'(\frac{1}{2})$. $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ pedig definíció szerint a digamma függvény, ami az $\frac{1}{2}$ helyen $-C-2\log(2)$, ahol C az Euler-konstans[15]. Így végül

$$E\log(\varepsilon^2(t)) = \log(2) - C - 2\log(2) = -\log(2) - C.$$

[14] $X(t-1)$ az egyikben t-től függővel van szorozva, másikban meg $(t-1)$-től függővel

[15] $C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) = \int\limits_1^\infty\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)dx$

Innen $\alpha_1 > 0$-ra $E \log |A_1| = \log \alpha_1 - \log 2 - C < 0$, ami pontosan akkor teljesül, ha $0 < \alpha_1 < 2{\cdot}e^C \approx 3,5686$. Tehát ezen tartományban a Ljapunov-exponens negatív. Nyilván $E \log^+ |A_1| < \infty$, továbbá belátható, hogy minden pozitív α_0-ra $E \log^+ |B_1|$ is véges.

4.4.4. Az $ARCH(1)$ modell stacionárius eloszlásának regularitása

Nézzük a regularitás kérdését $0 < \alpha_1 < 2e^C$ mellett. Keressük azt a κ-t, amely kielégíti az $E|A_t|^\kappa = 1$ egyenletet.

$$E|\alpha_1 \varepsilon^2(t)|^\kappa = \alpha_1^\kappa \cdot E\varepsilon^{2\kappa} \overset{16}{=} \alpha_1^\kappa \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \int\limits_0^\infty x^{2\kappa} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

Most helyettesítsünk a következőképpen: legyen $t = \frac{x^2}{2}$, ezzel $dx = \frac{1}{2\sqrt{2t}} \cdot 2dt = \frac{1}{\sqrt{2t}} dt$, így az egyenlőség a következőképpen folytatható

$$= \alpha_1^\kappa \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty 2^\kappa {\cdot} t^\kappa {\cdot} e^{-t} {\cdot} \frac{1}{\sqrt{2t}} dt = (2\alpha_1)^\kappa \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty t^{(\kappa+\frac{1}{2})-1} {\cdot} e^{-t} dt = (2\alpha_1)^\kappa {\cdot} \frac{1}{\sqrt{\pi}} {\cdot} \Gamma\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)$$

Ezzel $(2\alpha_1)^\kappa \cdot \Gamma\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Speciálisan $\alpha_1 = 1$-re $\kappa = 1$ jó választás, mert $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$.

Állítás 4.4.11. *$h(\kappa)$ szigorúan konvex függvény, így létezik egyértelmű megoldása $h(\kappa) = 1$-nek. Továbbá erre a megoldásra*

- *$\kappa > 1$, ha $\alpha_1 \in (0, 1)$*
- *$\kappa = 1$, ha $\alpha_1 = 1$*

[16]páros függvényt integrálunk

- $\kappa < 1$, *ha* $\alpha_1 \in (1, 2e^C)$

Megjegyzés 4.4.12. X^2-es egyenletből indultunk ki, tehát pontosan akkor nincs κ-adik momentum, ha X-nek nincs 2κ-adik momentuma. Ezen kívül az egyenlet explicite nem oldható meg, de a következőket ismerjük:

α_1	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3	3,5
κ	13,24	4,18	2,37	1,59	1,15	1,0	0,54	0,31	0,17	0,075	0,007

Tétel 4.4.13. *Ha* $\alpha_0 > 0$, $0 < \alpha_1 < 2e^C$, *és* $\varepsilon(t) \sim N(0,1)$ *Gauss-féle fehér zaj, akkor az* $ARCH(1)$ *egyenletnek létezik erősen stacionárius megoldása, amelynek négyzete regulárisan változó eloszlású* κ *indexszel. Legyen* p *a* κ*-nál szigorúan kisebb legnagyobb egész szám. Ekkor* $m = 1, \ldots, p$*-re az* $EX(t)^{2m}$ *momentumok végesek.*
Továbbá, ha $X(t)$ *stacionárius* $ARCH(1)$ *folyamat,* $\varepsilon(t)$ *GWN, és* $\alpha_0 > 0$, $0 < \alpha_1 < 1$, *akkor egyrészt* X *második momentuma* $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$, *másrészt* $\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$ *esetén a negyedik momentum is véges, méghozzá*

$$EX^4 = \frac{3\alpha_0^2}{1-3\alpha_1^2}\frac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1},$$

innen a lapultság (kurtosis). [17]. $r_{X^2}(t) = corr(X_t^2, X_0^2) = \alpha_1^t$ *minden* t*-re.*

Tehát az $ARCH(1)$

- $\alpha_1 = 0$-ra GWN.
- $0 < \alpha_1 < 1$-re stacionárius véges szórással.
- $1 \leq \alpha_1 < 2e^C$-re stacionárius végtelen szórással.

[17] $Kurt\ X = \frac{E\left(X(t)^4\right)}{(E(X(t)^2))^2} = 3 \cdot \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$

Tétel 4.4.14. *Legyen $X(t)$ $ARCH(1)$, $\alpha_0 > 0$, $0 < \alpha_1 < 2e^C$, $\varepsilon(t)$ GWN és κ a $h(\kappa) = 1$ egyenlet megoldása. Ekkor $P(X(t) > x) \sim \frac{d}{2} \cdot x^{-2\kappa}$, ha $x \to \infty$.* [18]

Az $ARCH$-$GARCH$ folyamat néhány jellemzője:

- Az adatok nem korreláltak, és a szórás változik az idővel.
- Az eloszlás vastag farkú.
- A négyzetek és az abszolútértékek erősen korreláltak.
- A nagy értékek meghaladása klaszterekben történik (a kiugró értékek klaszterekben jelennek meg).

4.5. További nemlineáris modellek

4.5.1. Véletlen együtthatós autoregresszió

Definíció 4.5.1. Véletlen együtthatós $AR(p)$ modellt definiál a következő:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{p} A_i X(t-i) + \varepsilon(t),$$

ahol A_i-k valószínűségi változók.

Példa 4.5.2. Elsőrendű véletlen együtthatós autoregressziós modell:

$$X(t) = (\alpha + A_t)X(t-1) + \varepsilon(t),$$

ahol $A(t)$ i.i.d. 0 várható értékkel és σ_A^2 szórásnégyzettel, továbbá A_t és $\varepsilon(t)$ függetlenek, $\varepsilon(t) \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ i.i.d., α pedig valós konstans. A stacionárius (ergodikus) oksági megoldás létezéséhez elégséges feltétel, hogy $\alpha^2 + \sigma_A^2 < 1$.

[18] d kiszámolható pozitív konstans

4.5.2. Küszöb modellek

Definíció 4.5.3. Küszöb modellek: osszuk fel $\mathbb{R}^p$-t k db diszjunkt részre, azaz hozzunk létre egy partíciót, így $\bigcup_{i=1}^{k}{}^{\star} R_i = \mathbb{R}^p$. Ha $X(t-1), \dots, X(t-p) \in R_i$ akkor az i-edik autoregressziós $AR(p)$ modell legyen érvényes rá.

Ilyen például a SETAR (Self Exciting Threshold AR) modell, ahol a partíciót különböző, a megoldás folyamat által elért küszöbszintek hozzák létre.

Példa 4.5.4. SETAR(2,1,1):

$$X(t) = \begin{cases} \alpha_1 X(t-1) + \varepsilon(t) & ha\ X(t-1) > 0 \\ \alpha_2 X(t-1) + \varepsilon(t) & ha\ X(t-1) \leq 0 \end{cases}$$

Erre $X(t)$ geometrikusan ergodikus, ha $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ és $\alpha_1 \cdot \alpha_2 < 1$. Petrucelli és Woolford 1984-ben megmutatták, hogy az ergodicitásnak ez szükséges és elégséges feltétele.

Definíció 4.5.5. EXPAR: $X(t) = \sum_{j=1}^{p} \left[\alpha_j + \beta_j \cdot e^{-\delta X^2(t-1)}\right] X(t-j) + \varepsilon(t)$

Ezt pl. vibrációs jelenségek leírására használták.

4.5.3. Multiplikatív autoregresszió

Definíció 4.5.6. Product AR(p):

$$X(t) = \varepsilon(t) \cdot \prod_{i=1}^{p} \mu_i \cdot X(t-i),$$

ahol $\varepsilon(t)$ i.i.d.

Pl. viharkárok modellezésére bizonyult hasznosnak.

Definíció 4.5.7. Nemlineáris $AR(p)$:

$$X(t) = f(X(t-1), \ldots, X(t-p)) + \varepsilon(t)$$

Megjegyzés 4.5.8. A bilineáris modellnél spektrálsugár-feltétel van a stacionaritásra, méghozzá egy bonyolult operátor spektrálsugarának kell 1-nél kisebbnek lennie.

Definíció 4.5.9. Nemlineáris Wold-felbontás.

$$X(t) = f(\varepsilon(t), \varepsilon(t-1), \ldots)$$

végtelen mozgóátlag helyett egy tetszőleges, akár végtelen sok változós függvény van (végtelen sok ε-os taggal).

4.6. Egyéb kiegészítések

Tétel 4.6.1 (Herglotz)**.** *Az $R(\tau)$ $(\tau \in \mathbb{Z})$ sorozat pontosan akkor lesz egy stacionárius Gauss-folyamat kovarianciafüggvénye, ha létezik szimmetrikus véges F mérték $[-\pi, \pi]$-n, amelyre*

$$(i) \quad R(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda).$$

Ha még F abszolút folytonos is a Λ Lebesgue-mértékre, akkor

$$(ii) \quad R(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda$$

alakban írható, ahol (i) a kovariancia spektrálelőállítása, F a spektrálmérték, $\varphi(\lambda)$ pedig a spektrál-sűrűségfüggvény. (ii)-nek megfelelően létezik olyan $\phi(d\lambda)$ véletlen spektrálmérték, hogy

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \phi(d\lambda).$$

Tétel 4.6.2. *A stacionárius $AR(p)$ folyamatnak létezik spektrálsűrűségfüggvénye, és az*

$$\varphi(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi|P(e^{i\lambda})|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi \cdot P(e^{i\lambda}) \cdot P(e^{-i\lambda})}.$$

Állítás 4.6.3. *A fehér zaj spektrálsűrűsége $\varphi = \frac{1}{2\pi}$, azaz konstans a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.*

Tétel 4.6.4. *A stacionárius $MA(q)$ folyamat spektrálsűrűsége $\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|Q(e^{i\lambda})|^2$.*

Tétel 4.6.5. *Az ARMA folyamat spektrálsűrűsége $\frac{1}{2\pi} \cdot \left|\frac{Q(e^{i\lambda})}{P(e^{i\lambda})}\right|^2$.*

Speciálisan $AR(1)$-re $R(0) = \sigma_X^2$, a spektrálsűrűség pedig

$$\varphi(\lambda) = \frac{R(0)}{2\pi}\Big\{1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) \cdot e^{ik\lambda}\Big\} =$$

Itt a szimmetria miatt $e^{ik\lambda}$-ban és $e^{i(-k)\lambda}$-ban a szinuszos tagok kiesnek, így ez tovább

$$= \frac{\sigma_X^2}{2\pi} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(k\lambda)\right) = \frac{\sigma_X^2}{2\pi} \cdot Re\left(1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha e^{i\lambda})^k\right) =$$

$$= \frac{\sigma_X^2}{2\pi} \cdot \left(1 + 2Re\left(\frac{\alpha \cdot e^{i\lambda}}{1 - \alpha \cdot e^{i\lambda}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi(1 - 2\alpha\cos\lambda + \alpha^2)} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi|1 - \alpha e^{i\lambda}|^2}.$$