6. fejezet

A várható érték becslése

6.1. A legjobb lineáris becslés

$X_1, X_2, \ldots, X_N$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók véges várható értékkel. Erre az átlag $\overline{X}$ a legjobb lineáris, maximum likelihood stb. becslés. Normális eloszlás esetén az összes becslés között is a legjobb, $D^2\overline{X} = \frac{D^2 X_1}{N} = O\left(\frac{1}{N}\right)$. Mi a helyzet stacionárius folyamatra? $X_1, X_2, \ldots$ összefüggők! Legyenek $X_1, \ldots, X_N$ a stacionárius folyamat megfigyelt értékei, és a várható érték $EX_t = \mu$. Tegyük fel, hogy az $R(t)$ autokovariancia függvény ismert $t = 0, 1, \ldots, N-1$-re. Keressük a legjobb lineáris becslést, azaz olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$-t, amelyre a becslésünk

$$\hat{\mu} = \sum_{t=1}^{N} \alpha_t X_t$$

alakú, $E\hat{\mu} = \mu$ (torzítatlan) és $D^2\hat{\mu} \to \min$ (azaz a legjobb). A torzítatlanságból kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{N} \alpha_t = 1$. Mivel

$$D^2\hat{\mu} = D^2\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_t X_t\right) = \sum_{t,s=1}^{N} \alpha_t \alpha_s R(t-s),$$

így elég ezt minimalizálnunk. A Lagrange-féle multiplikátor módszert hívjuk segítségül: $f = \sum_{t,s=1}^{N} \alpha_t \alpha_s R(t-s)$-et kell minimalizálnunk a $\sum_{t=1}^{N} \alpha_t = 1$ feltétel mellett. A szabály szerint

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(f - 2\lambda\left(\sum_{t=1}^{N} \alpha_t - 1\right)\right) = 2\sum_{s=1}^{N} \alpha_s R(t-s) - 2\lambda = 0$$

szükséges feltétel a minimumhoz. Innen

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha_s \cdot R(t-s) = \lambda \quad t = 1, \ldots, N. \tag{6.1.1}$$

Jelölés 6.1.1.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \ldots & R(N-1) \\ R(1) & R(0) & \ldots & R(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(N-1) & R(N-2) & \ldots & R(0) \end{pmatrix}, \ \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \text{ és } \underline{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ezekkel felírva, a torzítatlansági feltétel

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha_s = \underline{1}^\top \cdot \underline{\alpha} = 1, \tag{6.1.2}$$

továbbá ezzel az írásmóddal a 6.1.1 egyenlet

$$\Sigma \cdot \underline{\alpha} = \lambda \cdot \underline{1},$$

Ebből α-t kifejezve majd beírva a feltétel 6.1.2 egyenletébe:

$$\underline{\alpha} = \lambda \cdot \Sigma^{-1} \cdot \underline{1} \Rightarrow \underline{1}^\top \cdot \lambda \cdot \Sigma^{-1} \cdot \underline{1} = 1$$

Ezt λ-ra megoldva kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{1}{\underline{1}^\top \Sigma^{-1} \underline{1}}.$$

Ezek szerint

$$\underline{\alpha} = \frac{\Sigma^{-1}\underline{1}}{\underline{1}^\top \Sigma^{-1} \underline{1}},$$

tehát végül a legjobb lineáris becslés

$$\hat{\mu} = \frac{\underline{1}^\top \Sigma^{-1} \underline{x}}{\underline{1}^\top \Sigma^{-1} \underline{1}}.$$

Ha X normális, akkor $\hat{\mu}_{ML}$-t az $f_{X_1,\dots,X_N}(\underline{x}) = (2\pi)^{-N/2} \cdot |\Sigma|^{-1/2} \cdot \exp\big\{ -\frac{1}{2}(\underline{x} - \mu \cdot \underline{1})^\top \Sigma^{-1} (\underline{x} - \mu \cdot \underline{1}) \big\}$ alapján adjuk meg[1], azaz elég az exponenciális függvény kitevőjét minimalizálni μ-ben (persze $-\frac{1}{2}$ nélkül értve): $\frac{\partial}{\partial \mu}\big((\underline{x} - \mu \cdot \underline{1})^\top \Sigma^{-1} (\underline{x} - \mu \cdot \underline{1})\big) = 2\mu \cdot \underline{1}^\top \Sigma^{-1} \underline{1} - 2 \cdot \underline{1}^\top \Sigma^{-1} \underline{x} = 0$, mivel $(\underline{x}^\top \Sigma^{-1} \underline{1})^\top = \underline{1}^\top \Sigma^{-1} \underline{x}$, és egy szám transzponáltja önmaga. Innen $\hat{\mu}_{ML}$ ugyanazt adja, mint az előbbi legjobb lineáris becslés.

A legjobb lineáris becslés helyett szokás átlagot venni, ami szintén torzítatlan - azaz $E\overline{X} = \mu$ -, és $D^2\overline{X} = \frac{1}{N^2} \sum\limits_{t,s=0}^{N-1} R(t-s)$ (megj.: $EX_1X_N = R(N-1)$). Az összegzés a "négyzetben" függőleges módszer helyett átlósan történik [ÁBRA] a főátlóval párhuzamos diagonálisok mentén, hiszen ott $t - s = \tau$ állandó. Ezzel $D^2\overline{X} = \frac{1}{N^2} \sum\limits_{\tau=-(N-1)}^{N-1} (N - |\tau|) \cdot$

[1] itt $|\Sigma|$ a Σ determinánsát jelöli

$R(\tau) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) \cdot R(\tau) = (*)$. Most álljunk meg egy percre, és emlékezzünk a Cesaro-féle összegre: $\sum_{\tau=1}^{\infty} a_\tau < \infty$ biztosítja, hogy a $\lim_{T\to\infty} \sum_{\tau=1}^{T-1} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) a_\tau = \sum_{\tau=1}^{\infty} a_\tau$ határérték létezik és véges. Alkalmazzuk ezt $D^2\overline{X}$-ra: $\lim_{N\to\infty} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) R(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R(\tau)$, tehát ha ez utóbbi összeg létezik és véges, akkor $\lim_{N\to\infty} N \cdot D^2\overline{X} = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R(\tau)$. Mivel $\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} R(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau} R(\tau)$, így $2\pi \cdot \varphi(0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)$. Ezzel a következő állításhoz jutottunk:

Állítás 6.1.2. $\lim_{N\to\infty} N \cdot D^2\overline{X} = 2\pi\varphi(0)$, *azaz az átlag szórásnégyzetére fennáll*

$$D^2\overline{X} \sim \frac{2\pi\varphi(0)}{N}.$$

Példa 6.1.3. Egy $AR(1)$ folyamatra $2\pi\varphi(0) = \sigma^2 \cdot \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$ (2.4-ben számoltunk ilyet általánosabban, amiből látszik, hogy $|\alpha| < 1$ szükséges), azaz $D^2\overline{X} \sim \frac{\sigma^2}{N} \cdot \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$. Tehát a független megfigyelésekkel megegyező pontosságú becsléshez $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$-szor annyi megfigyelésre van szükség. ($\alpha = 0$ esetén fehér zaj, $\alpha = 1$-re pedig felrobban a folyamat)

A spektrálreprezentációhoz visszatérve: mi van akkor, ha nincs spektrálsűrűség-függvény? Spektrálmérték ekkor is van és ezzel írhatjuk, hogy

$$D^2\overline{X} = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{t,s=1}^{N} R(t-s) =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{t,s=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \cdot \overline{e^{i\lambda s}} dF(\lambda) = \frac{1}{N^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{t=1}^{N} e^{i\lambda t} \right|^2 dF(\lambda) = (*)$$

Az abszolútérték jelen belül vizsgálódva írjuk fel a szummát

$$\sum_{t=1}^{N} e^{i\lambda t} = e^{i\lambda} \cdot \frac{1 - e^{i\lambda N}}{1 - e^{i\lambda}} =$$

$$= e^{i\lambda} \cdot \frac{e^{i\lambda \frac{N}{2}} \left(e^{-i\lambda \frac{N}{2}} - e^{i\lambda \frac{N}{2}} \right)}{e^{i\lambda \frac{1}{2}} \left(e^{-i\lambda \frac{1}{2}} - e^{i\lambda \frac{1}{2}} \right)} = e^{i\lambda \cdot \frac{N-1}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\lambda N}{2}}{\sin \frac{\lambda}{2}}$$

alakban. Ezzel a fenti tovább folytatható:

$$(*) = \frac{1}{N^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{N\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} dF(\lambda) = (**).$$

$\lambda = 0$-ban N^2-ként értelmezzük a függvényt[2]. Hová tart ez, ha N-nel tartunk végtelenbe? Mivel $\frac{1}{N^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} \longrightarrow 0$, ha $\lambda \neq 0$, de $\lambda = 0$ esetén ez a határérték 1. Az integrandus tehát pontonként tart a $\mathbf{1}_{\{0\}}$ függvényhez. Tehát $D^2\overline{X} = (**) \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{\{0\}} dF(\lambda) = F(\{0\})$, azaz a $\{0\}$ spektrálmértékhez. Persze fontos még látnunk, hogy az integrandus korlátos[3], amit a $\Theta = \frac{N\lambda}{2}$ jelölés mellett könnyen ellenőrizhetünk, tudniillik

$$\frac{1}{N^2} \frac{\sin^2 \Theta}{\sin^2 \left(\frac{\Theta}{N}\right)} = \frac{\sin^2 \Theta}{\Theta^2} : \frac{\sin^2 \left(\frac{\Theta}{N}\right)}{\left(\frac{\Theta}{N}\right)^2} \sim \frac{\sin^2 \Theta}{\Theta^2} \xrightarrow{\Theta \to 0} 1.$$

Tehát a 0 körül korlátos, egyébként pedig nyilvánvaló, hiszen $\frac{\lambda}{2}$ csak $\frac{\pi}{2}$-ig megy. Ezzel

[2] Hiszen határátmenettel is ezt kapjuk.

[3] Ez elegendő a Lebesgue-tétel alkalmazhatóságához, ti. korlátos függvény valószínűségi mérték szerint integrálható, így van integrálható majoráns.

Állítás 6.1.4. *$\overline{X}$ pontosan akkor lesz a μ (várható érték) konzisztens becslése, ha $F(\{0\}) = 0$, azaz a spektrális eloszlásfüggvény folytonos a 0-ban.*[4]

Vajon miért csak a spektrum origó körüli viselkedésétől függ $\overline{X}$ konvergenciája?

Definíció 6.1.5. Az $X(t) = \sum_{i=1}^{K} A_i \cos(\lambda_i t + \phi_i)$ folyamatot **harmonikus folyamat**nak nevezzük, ahol $\phi_i \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ minden i-re független valószínűségi változó (ún. véletlen fázis), K, A_i-k, λ_i-k pedig konstansok.

Ezen folyamat autokorreláció-függvénye

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{K} \left(\frac{1}{2}A_i^2\right) \cdot \cos(\lambda_i \tau)}{\sum_{i=1}^{K} \left(\frac{1}{2}A_i^2\right)}.$$

A harmonikus folyamatok arról nevezetesek, hogy tiszta diszkrét spektrummal rendelkeznek. Ha λ_i-k összemérhetőek, akkor a trajektóriák ráadásul periodikus függvények. Ha a 0 is spektrumpont, akkor valamelyik $\lambda_i = 0$, és így

$$X(t) = A \cdot \cos\phi + Y(t),$$

ahol $Y(t)$ a szumma többi tagja. Az első tag tehát időben konstans! Itt

$$EX(t) = E(A\cos\phi) + EY(t) = EY(t),$$

mivel $E(A\cos\phi) = A \cdot (E\cos\phi)$, és az utóbbi kiintegrálva láthatóan 0. Ugyanakkor minden trajektóriára $\phi(\omega)$ konstans, tehát $A\cos\phi(\omega) \neq 0$.

[4] Abszolút folytonos esetben (tehát, ha létezik spektrálsűrűség-függvény) ez nyilván teljesül.

Mivel ez is konstans az időben, ezért

$$\overline{X}(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} X(t,\omega) = A\cos\phi(\omega) + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} Y(t,\omega),$$

és így

$$D^2\overline{X} = D^2(A\cos\phi) + D^2\overline{Y} \nrightarrow 0.$$

7. fejezet

A kovarianciafüggvény becslése

7.1. A tapasztalati autokovariancia

A kovarianciafüggvényre a következő becslést adhatjuk:

$$\hat{R}^*(\tau) = \frac{1}{N - |\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} (X_t - \overline{X})(X_{t+|\tau|} - \overline{X}).$$

Természetesen ha a μ várható érték ismert, akkor az átlagot lecserélhetjük erre, azaz a becslés

$$\hat{R}^*_\mu(\tau) = \frac{1}{N - |\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} (X_t - \mu)(X_{t+|\tau|} - \mu).$$

Megjegyzés 7.1.1.

1. Nyilván $|\tau| \geq N - 1$-re nem tudunk becslést adni.
2. Térátlagok helyett most is időátlagokat nézünk.
3. $\hat{R}^*$ nyilván páros függvény.

Ha μ ismert, akkor $\hat{R}^*_\mu$ torzítatlan becslés, azaz

$$E\hat{R}^*_\mu(\tau) = \frac{1}{N-|\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} E\left[(X_t-\mu)(X_{t+|\tau|}-\mu)\right] =$$

$$= \frac{1}{N-|\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} R(\tau) = R(\tau).$$

Ha pedig μ nem ismert, akkor a becslés torzít, ellenben aszimptotikusan torzítatlan. Számítsuk ki a torzítást:

$$\hat{R}^*_\mu(\tau) = \frac{1}{N-|\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} \big((X_t-\overline{X})+(\overline{X}-\mu)\big)\big((X_{t+|\tau|}-\overline{X})+(\overline{X}-\mu)\big) \approx$$

$$\approx \frac{1}{N-|\tau|}\Big\{ \sum_{t=1}^{N-|\tau|} \left[(X_t-\overline{X})(X_{t+|\tau|}-\overline{X})\right] + (N-|\tau|)(\overline{X}-\mu)^2 \Big\},$$

ahol ez utóbbi ($\approx$) lépésben elhanyagoltuk az úgynevezett véghatást, vagyis "kihasználtuk", hogy $\sum_{t=1}^{N-|\tau|}(X_t-\overline{X}) \sim \sum_{t=1}^{N}(X_t-\overline{X}) = 0.$[1] Ezt átrendezve kapjuk, hogy $\hat{R}^*_\mu(\tau)-(\overline{X}-\mu)^2 \approx \hat{R}^*(\tau)$. Vegyünk várható értéket mindkét oldalon és használjuk ki $\hat{R}^*_\mu$ torzítatlanságát, ezzel $R(\tau)-D^2\overline{X} \approx E\hat{R}^*(\tau)$. Ha az $N\to\infty$ határértéket nézzük, akkor már egyenlőség is írható (ehhez csak azt kell megmutatni, hogy a véghatás várható értéke tart 0-hoz). Így a $D^2\overline{X}$-ra kapott konvergenciasebesség szerint – ha például létezik spektrálsűrűségfüggvény –

$$\lim_{N\to\infty} E\hat{R}^*(\tau) = R(\tau)$$

és

$$\lim_{N\to\infty} N\cdot E(\hat{R}^*(\tau)-R(\tau)) = -2\pi\cdot\varphi(0),$$

[1]Ez akkor lesz igaz, ha $N >> |\tau|$.

vagyis a torzítás $\frac{2\pi\varphi(0)}{N}$ nagyságrendű. Később látni fogjuk, hogy ez a torzítás kisebb, mint a becslés fluktuációja, tehát első közelítésben elhanyagolható. Létezik másik, kedvezőbb tulajdonságú becslés, amely ismeretlen μ esetén

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} (X_t - \overline{X})(X_{t+|\tau|} - \overline{X})$$

alakú, ismertre pedig

$$\hat{R}_\mu(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} (X_t - \mu)(X_{t+|\tau|} - \mu).$$

Két dolog indokolja $\hat{R}(\tau)$ bevezetését. Egyrészt egy kovarianciafüggvénytől elvárjuk, hogy pozitív szemidefinit legyen, és $\hat{R}(\tau)$-ról ez be is látható, szemben $\hat{R}^*(\tau)$-val, amelyre ez a tulajdonság nem feltétlenül teljesül. Másrészt látni fogjuk, hogy míg $\hat{R}(\tau)$ szórásnégyzete $\frac{1}{N}$ nagyságrendű minden τ-ra, addig $\hat{R}^*(\tau)$-é $\frac{1}{N-|\tau|}$, vagyis az autokovariancia függvény végét mindig csak bizonytalanul becsülhetjük $\hat{R}^*$-gal[2]. Márpedig az autokovariancia függvényt általában nem τ-nként akarjuk becsülni, hanem az összes τ-ra 0-tól $N-1$-ig egyszerre, azaz: mi magára az $R(\tau)$ függvényre vagyunk kíváncsiak (nem az egyes értékeire).

Most lássuk $\hat{R}_\mu(\tau)$ torzítását: mivel

$$E(\hat{R}_\mu(\tau)) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} R(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) \cdot R(\tau),$$

így

$$E(\hat{R}_\mu(\tau) - R(\tau)) = -\frac{|\tau|}{N} \cdot R(\tau)$$

[2]Nagyobb τ esetén nagyobb lesz a szórás.

a torzítás. Ennek nagyságrendje $|\tau|$ és N relatív nagyságától, és $R(\tau)$-tól függ. Ha $|\tau|$ relatíve kicsi N-hez képest, akkor a torzítás ezért kicsi, míg ha $|\tau|$ és N közeli, akkor $R(\tau)$ nagyságrendű, ami folytonos spektrum esetén 0-hoz tart ($\tau \to \infty$), így ezért kicsi.
$\hat{R}(\tau)$ torzítására spektrálsűrűségfüggvény léte mellett

$$E(\hat{R}(\tau) - R(\tau)) \sim -\frac{|\tau|}{N}R(\tau) - \frac{2\pi(N-|\tau|)}{N^2}\varphi(0)$$

adódik[3].

7.2. A becslés varianciája és kovarianciája

Csak $\hat{R}_\mu$, tehát ismert várható érték mellett van esélyünk számolni, és még ez sem túl szép. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $\mu = 0$, azaz $\hat{R}_0$ kovarianciáját keressük. Tegyük fel továbbá, hogy X_t negyedrendig stacionárius[4].

$$cov(\hat{R}_0(\tau), \hat{R}_0(\tau+\vartheta)) = E\left(\hat{R}_0(\tau)\cdot\hat{R}_0(\tau+\vartheta)\right) - E\hat{R}_0(\tau)E\hat{R}_0(\tau+\vartheta) = (*)$$

Mivel $E\hat{R}_0(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right)R(\tau)$ és $\hat{R}_0(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-|\tau|} X_t X_{t+|\tau|}$, így, ha τ, $\vartheta \geq 0$, akkor

$$(*) = \frac{1}{N^2}\cdot E\left(\sum_{t=1}^{N-\tau}\sum_{s=1}^{N-\tau-\vartheta} X_t \cdot X_{t+\tau}\cdot X_s \cdot X_{s+\tau+\vartheta}\right) -$$

$$-\left(1-\frac{\tau}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{\tau+\vartheta}{N}\right)\cdot R(\tau)\cdot R(\tau+\vartheta)$$

[3] $\hat{R}^*$-nál levő számoláshoz teljesen hasonló.

[4] ez azt jelenti, hogy egy $E\left[X_t X_{t+u} X_{t+v} X_{t+w}\right]$ alakú kifejezés csak u, v, w-től függ (t-től nem).

A négyes szorzat várható értéke csak $t-s,\tau,\vartheta$-tól függ a negyedrendű stacionaritás miatt. Egy négyes szorzat várható értéke pedig kifejezhető a kumulánsával.

Definíció 7.2.1. $X_1,\ldots,X_k$ valószínűségi változók együttes karakterisztikus függvénye legyen
$\varphi(t_1,\ldots,t_k)$. A $\log\varphi$ létezik a 0 egy környezetében és sorbafejthető:

$$\log\varphi(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k\le n}\frac{i^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\nu_1!\cdot\ldots\cdot\nu_k!}s^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)}t_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot t_k^{\nu_k}+o(|t|^n).$$

Ezen $s^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)}$-kat (vegyes) **szemiinvariáns**oknak, más néven kumulánsoknak nevezzük.

A fenti szorzat várható értéke $s^{(1,1,1,1)}$-ben fordul elő. A k-adrendű (vegyes) szemiinvariánsok kifejezhetők a legfeljebb k-adrendű kevert momentumokkal[5]. Mivel a kevert momentumok rendje legfeljebb 4 - egyezően s rendjével -, ha abban elsőrendű tag is fellép, akkor az a tag $EX_t=0$ miatt 0 lesz. Így az általános formulában csak a negyed- és másodfokú tagok adnak nullától különbözőt. Tehát

$$\kappa=s^{(1,1,1,1)}=$$

$$E(X_tX_{t+\tau}X_sX_{s+\tau+\vartheta})-E(X_tX_{t+\tau})\cdot E(X_sX_{s+\tau+\vartheta})-$$

$$-E(X_tX_s)\cdot E(X_{t+\tau}X_{s+\tau+\vartheta})-E(X_tX_{s+\tau+\vartheta})\cdot E(X_{t+\tau}X_s)$$

Használjuk ki a negyedrendű stacionaritást, így a várható értékek csak $m=s-t$-től függnek.

[5]Többek között ez az állítás is megtalálható A. N. Shiryaev - Probability című könyvének második kiadásában (a 290. oldal).

Még előbb: az első kivonandó κ-ban $= R(\tau) \cdot R(\tau + \vartheta)$ független t-től és s-től, így $(*)$-ban kiejti a szummázás utáni (levont) tagot. Továbbá κ-ban a másik két kivonandó $R(s-t) \cdot R(s-t+\vartheta)$, illetve $R(s-t+\tau+\vartheta) \cdot R(s-t-\tau)$, így

$$(*) = \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^{N-\tau} \sum_{s=1}^{N-\tau-\vartheta} \big\{ R(s-t) \cdot R(s-t+\vartheta) +$$

$$+ R(s-t+\tau+\vartheta) \cdot R(s-t+\tau) + \kappa(s-t, \tau, \vartheta) \big\} = (**)$$

Használjuk ki, hogy minden csak $s-t$-től függ, és összegezzünk $s - t = m$ szerint (a diagonális mentén):

$$(**) = \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-\tau)+1}^{N-\tau-\vartheta-1} \left\{ 1 - \frac{\eta(m) + \tau + \vartheta}{N} \right\} \times$$

$$\times \{ R(m) \cdot R(m+\vartheta) + R(m+\tau+\vartheta) \cdot R(m-\tau) + \kappa(m, \tau, \vartheta) \},$$

ahol $\eta(m) = \begin{cases} m, & m > 0 \\ 0, & -\vartheta \le m \le 0 \\ -m-\vartheta, & -(N-\tau)+1 \le m < -\vartheta \end{cases}$.

Ha $X(t)$ Gauss-folyamat, akkor $\kappa = 0$. Ugyanis $\log \varphi(t_i) = -\frac{t_i^2 \sigma^2}{2}$, hiszen a folyamat várható értéke 0, így az együttes karakterisztikus függvény Taylor-sorában nem lesznek t_i-ket elsőfokon tartalmazó tagok, más szóval az $s^{(1,1,1,1)}$ szemiinvariáns értéke 0. Ez pedig pont azt eredményezi, hogy $\kappa = 0$ minden m, τ, ϑ-ra.

$\vartheta = 0$-ra $D^2 \hat{R}_0(\tau)$-t kapjuk:

$$D^2 \hat{R}_0(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-\tau)+1}^{N-\tau-1} \left(1 - \frac{|m| + \tau}{N} \right) \cdot \left(R^2(m) + R(m+\tau) \cdot R(m-\tau) \right).$$

Ez újra egy Cesaro-típusú összeg, aminek a határértéke $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \big(R^2(m) + R(m+\tau) \cdot R(m-\tau)\big)$ feltéve, hogy ez véges. Továbbá $\vartheta \neq 0$ és nagy N esetén

$$cov\left(\hat{R}_0(\tau), \hat{R}_0(\tau+\vartheta)\right) \sim \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \big\{R(m) \cdot R(m+\vartheta) + R(m+\tau+\vartheta) \cdot R(m-\tau)\big\},$$

és ugyanígy $\vartheta = 0$-ra

$$D^2 \hat{R}_0(\tau) \sim \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \big(R^2(m) + R(m+\tau) \cdot R(m-\tau)\big)\,,$$

ami Bartlett eredménye 1946-ból. Innen speciálisan $X(t)$ szórásnégyzetének becslésére $\hat{\sigma}^2 = \hat{R}_0(0)$ és ennek szórásnégyzetére

$$D^2(\hat{\sigma}^2) \sim \frac{2}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R^2(m) = \frac{2\sigma^4}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varrho^2(m)$$

adódik, ahol ϱ az autokorreláció-függvény. Fehér zajra pedig visszakapjuk a tapasztalati szórásnégyzetre vonatkozó $D^2 S_n^2 \sim \frac{2\sigma^4}{N}$ nagyságrendet (független mintavétel stb.).

Vegyük észre, hogy az aszimptotikus kifejezésben diszkrét konvolúciók állnak[6]. Az első tag $R(\tau)$ konvolúciója önmagával a ϑ helyen, a második ugyanez a $2\tau + \vartheta$ helyen (például bevezethetjük az $l = m - \tau - t$ futóindexet, és eszerint összegezhetünk). Tegyük fel, hogy létezik spektrál-sűrűségfüggvény. Ekkor az R önmagával vett konvolúciója nem más, mint $\varphi^2(\lambda)$-nak, azaz a spektrál-sűrűségfüggvénynek a Fourier-transzformáltja[7].

---

[6] Konvolúciót úgy lehet könnyen felismerni, ha észrevesszük, hogy az argumentumok különbsége állandó.

[7] $f * g = \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$

Ezzel

$$cov\left(\hat{R}_0(\tau), \hat{R}_0(\tau+\vartheta)\right) \sim \frac{2\pi}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i\lambda\vartheta} + e^{i\lambda(2\tau+\vartheta)}\right)\cdot\varphi^2(\lambda)d\lambda$$

és

$$D^2\left(\hat{R}_0(\tau)\right) \sim \frac{2\pi}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+e^{2i\lambda\tau}\right)\varphi^2(\lambda)d\lambda$$

Speciálisan standard normális fehér zajra $\varphi^2(\lambda) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2$, ezzel

$$N\cdot cov\left(\hat{R}_0(\tau), \hat{R}_0(\tau+\vartheta)\right) \longrightarrow \begin{cases} 0, & ha\ \vartheta \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi}, & ha\ \vartheta = 0 \end{cases}$$

Megjegyzés 7.2.2. Mivel τ és ϑ egészek, ezért például $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau}d\lambda = 0.$ [8]

$AR(1)$ esetén $\varrho(m) = \alpha^{|m|}$ [9], így a fentebbiek alapján $D^2\left(\hat{R}_0(0)\right) = D^2(\hat{\sigma}) \sim \frac{2\sigma^4}{N}\cdot\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)$. Tehát ez esetben $\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$-szer annyi megfigyelésre van szükség azonos "bizonyosság" eléréséhez σ^2 becslésében, mint független megfigyelések esetén.

Mi lesz a torzítatlan becsléssel $\hat{R}_0^*$ esetén? (Legyen $\tau > 0$.) Mivel $\hat{R}_0^* = \frac{N}{N-\tau}\hat{R}_0$, így csupán a szummán kívül a nevezőt kell változtatnunk $\frac{1}{N}$-ről $\frac{1}{N-\tau}$-ra. Ez bizonyítja, amit az elején állítottunk, hogy míg $D^2\hat{R}_0(\tau) = O\left(\frac{1}{N}\right)$, addig $D^2\hat{R}_0^*(\tau) = O\left(\frac{1}{N-\tau}\right)$.

Most foglalkozzunk az autokorreláció-függvény becslésével. Mivel $\varrho(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)}$, ezért egészen természetes gondolat ϱ becslésének $\hat{\varrho} = \frac{\hat{R}(\tau)}{\hat{R}(0)}$-t elfogadnunk (illetve ugyanez indexszel és/vagy $*$-gal ellátva). $\hat{\varrho}_0^*(\tau)$ további ked-

[8] e^{it} ugye 2π-nként periodikus

[9] 2.2 után számoltuk ki, $0 < \alpha < 1$

vezőtlen tulajdonsága lesz, hogy míg $|\varrho(\tau)| \leq 1$, addig ez $\hat{\varrho}_0^*$-ra nem teljesül, ám $\hat{\varrho}_0$ teljesíti (a pozitív szemidefinitségnél is ugyanaz a probléma lép fel, mint amit az autokovariancia-függvény becslésénél is láttunk). Mivel $\hat{\varrho}$ kvadratikus alakok hányadosa, így érthető, hogy a becslések pontos eloszlása, illetve tulajdonságai nagyon bonyolultak. Approximációs technikával határeloszlásra egy ismert eredmény Lomnickitől és Zarembától származik 1957-ből, amit most nem részletezünk. 1946-ban Bartlett a következőt bizonyította:

$$D^2\left(\hat{\varrho}_0(\tau)\right) \sim \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\varrho^2(m) + \varrho(m+\tau)\cdot\varrho(m-\tau) + \right.$$
$$\left. + 2\varrho^2(\tau)\cdot\varrho^2(m) - 4\cdot\varrho(\tau)\cdot\varrho(m)\cdot\varrho(m-\tau)\right].$$

A korábban $\hat{R}_0(\tau)$-nál látott, kumulánst is felhasználó bizonyításhoz teljesen hasonló technikával dolgozik, azonban érdemes megjegyezni, hogy itt $\kappa(m,\tau,\vartheta)$ nemcsak akkor lesz 0, ha Gauss-folyamatról van szó, hanem már az is elegendő, hogy az $X(t)$ folyamat lineáris legyen, emellett pedig az $\varepsilon(t)$ zaj független értékű legyen, ne csak korrelálatlan. Általában elég nagy korreláció lesz az autokorreláció-függvény szomszédos pontjaiban becsült értékek között (hasonló a helyzet az autokovariancia-függvény esetén). Ezért a becsült autokorreláció-függvény nem cseng le olyan gyorsan, mint az eredeti.

Fehér zajra $cov\left(\hat{\varrho}_0(\tau), \hat{\varrho}_0(\tau+\vartheta)\right) \sim 0$, ha ϑ pozitív, és $D^2\hat{\varrho}_0(\tau) \sim \frac{1}{N}$, ha τ pozitív. Gyorsan lecsengő autokorreláció-függvényre, ha $\varrho(s) \overset{|s|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, akkor $|s| \geq \tau$-ra $\varrho(s) \sim 0$. Ekkor pedig a becslés redukálódik:

$$cov\left(\hat{\varrho}_0(\tau), \hat{\varrho}_0(\tau+\vartheta)\right) \sim \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varrho(m)\cdot\varrho(m+\vartheta)$$

$$D^2\left(\hat{\varrho}_0(\tau)\right) \sim \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varrho^2(m)$$

Vegyük észre, hogy a becslés kovarianciája csak ϑ-tól függ, ha τ elég "nagy", azaz a becslés egy stacionárius folyamatként viselkedik, amely azonban erősebben autokorrelált, mint az eredeti $X(t)$ folyamat.

7.3. A becslések határeloszlásai

Vajon miért van ilyenre szükségünk? Mivel a centrális határeloszlás-tételnek a legkülönbözőbb általánosításai ismertek, így nem túl meglepő módon megfelelő körülmények között az $\overline{X}$ határeloszlása is normális lesz. Ennek kapcsán a következőt állítjuk.

Tétel 7.3.1 (T. W. Anderson, 1971.). *Legyen $X(t)$ lineáris folyamat, azaz*

$$X(t) = \mu + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g(s) \cdot \varepsilon_{t-s},$$

ahol ε_t-k független, azonos eloszlásúak 0 várható értékkel és véges szórásnégyzettel, továbbá legyen $\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} |g_s| < \infty$. Ekkor

$$\sqrt{N} \cdot \left(\overline{X} - \mu\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R(\tau)\right),$$

ha $N \to \infty$, így ha létezik $\varphi(\lambda)$ spektrál-sűrűségfüggvény, és az korlátos 0-ban, akkor

$$\sqrt{N} \cdot \left(\overline{X} - \mu\right) \xrightarrow{d} N\left(0, 2\pi\varphi(0)\right) \qquad (N \to \infty).$$

Az $\hat{R}_0(\tau)$, illetve $\hat{\varrho}_0(\tau)$ egzakt eloszlása véges N-re nincs meghatározva. Aszimptotikus eredményünk azonban van 1971-ből, ami szintén Anderson nevéhez fűződik. Az alapötlet szerint vezessük be az $Y_t = X_t \cdot X_{t+\tau}$ újabb stacionárius folyamatot, és ekkor $\hat{R}_0(\tau)$ egyszerűen e folyamat átlaga, azaz $\hat{R}_0(\tau) = \frac{Y_1+\ldots+Y_{N-\tau}}{N}$.

Tétel 7.3.2. *Legyen $X(t)$ a fent látott lineáris folyamat, de tegyük még fel, hogy $E\varepsilon^4(t)$ véges. Ekkor*

$$\left[\sqrt{N}\cdot\left[\hat{R}(0)-R(0)\right],\ldots,\sqrt{N}\cdot\left[\hat{R}(n)-R(n)\right]\right]$$

tart egy 0 várható értékű Gauss-vektorhoz, amelynek kovarianciája $X(t)$ Gauss-folyamat esetén (és a τ, illetve ϑ-adik tag esetén) $\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} R(m)R(m+\vartheta)+R(m+\tau+\vartheta)R(m-\tau)$.

7.3.1. Stabilis eloszlások

Definíció 7.3.3. X eloszlása **korlátlanul osztható**, ha minden n-re léteznek olyan $X_{n,1},\ldots,X_{n,n}$ valószínűségi változók, amelyek teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak, és

$$X = X_{n,1}+\ldots+X_{n,n}-A_n,$$

ahol A_n konstans. Ez ekvivalens azzal, hogy X eloszlása határeloszlása a $Z_n = X_{n,1}+\ldots+X_{n,k_n}-A_n$ független, azonos eloszlású szériák összegének.

Definíció 7.3.4. Az X valószínűségi változó eloszlása **stabilis**, ha minden b_1, b_2 valós számhoz léteznek b, a valós számok úgy, hogy az X eloszlásával megegyező eloszlású és egymástól független X_1, X_2 valószínűségi változókra

$$b_1X_1+b_2X_2 \stackrel{d}{=} bX+a,$$

azaz az eloszlások egyenlősége fennáll.

Ezzel a definícióval ekvivalens a következő:

Definíció 7.3.5. Az X valószínűségi változó eloszlása pontosan akkor **stabilis**, ha létezik olyan $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változókból álló sorozat, valamint hozzá $a_n > 0$ és b_n valós számsorozatok, hogy

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} X,$$

ahol $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. [10]

Néhány állítást mondunk ki bizonyítás nélkül.

Állítás 7.3.6. *Minden stabilis eloszlás korlátlanul osztható.*

Állítás 7.3.7. *Korlátlanul osztható eloszlások gyenge - azaz eloszlásbeli - határértéke is korlátlanul osztható.*

Állítás 7.3.8. *A normális eloszlás stabilis (a centrális határeloszlás-tétel miatt), így korlátlanul oszt-ható.*

Állítás 7.3.9. *A normális az egyetlen véges szórású stabilis eloszlás.*

Állítás 7.3.10. *A Cauchy-eloszlás stabilis.* $\left(\varphi(t) = e^{-|t|},\ \frac{X_1+X_2}{2} \sim X_1\right)$

Állítás 7.3.11. *A Poisson-eloszlás korlátlanul osztható, de nem stabilis (van sok véges szórású, korlátlanul osztható eloszlás).*

Állítás 7.3.12. *A G eloszlásfüggvény pontosan akkor egy stabilis eloszlás eloszlásfüggvénye, ha minden $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$-re létezik $a, b \in \mathbb{R}$, hogy $G\left(\frac{x}{b_1}\right) * G\left(\frac{x}{b_2}\right) = G\left(\frac{x-a}{b}\right)$, ahol $*$ a konvolúciót jelöli.*

[10] Ez a centrális határeloszlás-tétel egy általánosítása.

Megemlítünk egy, a stabilis eloszlások karakterisztikus függvényére vonatkozó állítást.

Állítás 7.3.13. *X pontosan akkor stabilis eloszlású, ha karakterisztikus függvénye előállítható, mint*

$$\log \varphi_X(t) = \lambda \left[it\gamma - |t|^\alpha + it\Psi(t,\alpha,\beta) \right],$$

ahol $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $-\infty < \gamma < \infty$, $\lambda > 0$ *és* $\Psi(t,\alpha,\beta) = \begin{cases} |t|^{\alpha-1} \cdot \beta \cdot \operatorname{tg}\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ -\beta \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \log|t|, & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}.$

Megjegyzés 7.3.14. $\alpha = 2, \beta = 0, \lambda = \frac{1}{2}$-re az eloszlás Gauss, $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \lambda = 1$-re pedig Cauchy.

Állítás 7.3.15. *A korlátlanul osztható eloszlások karakterisztikus függvénye a következő alakban írható fel:*

$$\log \varphi_X(t) = ita - bt^2 + \int_{\{x \neq 0\}} \left(e^{itx} - 1 - it \cdot \sin x \right) dH(x),$$

ahol a, b *nemnegatív számok,* $H(x)$ *Lévy-mérték (mag), amely monoton a félegyeneseken,* $|x| \to \infty$ *esetén tart* 0*-hoz, továbbá* $\int\limits_{0<|x|<1} x^2 dH(x)$ *véges.* [11]

Stabilis eloszlások a Gauss, Cauchy és a Lévy $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4x}} \quad (x > 0)$.

7.3.2. Határeloszlás, amikor a CHT nem érvényes

Mit mondhatunk az autokovariancia-függvény (ACVF) becsléséről, ha nemlineáris folyamatokat vizsgálunk? Ha például az eloszlás reguláris változású

[11] Bármely korlátlanul osztható eloszlás az Gaussok és Poissonok konvolúciójának határértéke.

$\kappa_1 < 2$ indexszel, akkor nem létezik második momentum, így az $R(k)$ autokovariancia függvény sem, de $\hat{R}(k)$ természetesen felírható. Nézzük meg $GARCH(p,q)$ folyamatra, hogy milyen tulajdonságú. Tegyük fel, hogy a stacionárius oksági megoldás létezik, és annak reguláris változású eloszlására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek. Ekkor a következő tétel igaz.

Tétel 7.3.16.

1) A fenti feltételek mellett, ha a regularitási index $\kappa_1 \in (0,2)$, akkor nincs véges szórás, és így nem létezik $R(k)$ autokovariancia függvény sem. A becslés azonban számolható, és ekkor

$$\left[n^{\left(1-\frac{2}{\kappa_1}\right)} \cdot \hat{R}(k)\right]_{k=1,\dots,m} \xrightarrow{d} [V_k]_{k=1,\dots,m},$$

ahol V_k $\frac{\kappa_1}{2}$-stabilis $\mathbb{R}^m$-beli vektorváltozó.

Megjegyzés 7.3.17. Ebben az esetben n kitevője negatív, vagyis $\hat{R}(k)$ eleve $n^{\frac{2}{\kappa_1}-1}$ nagyságrendben nő. Még ha ezzel leosztjuk, akkor is erősen fluktuáló eloszláshoz tart (mivel végtelen a szórásnégyzet).

2) A fenti feltételek mellett, ha a regularitási index $\kappa_1 \in (2,4)$ akkor $EX^2(t)$ véges, de $EX^4(t)$ már végtelen, és így $R(k)$ ugyan létezik, de becslésének szórása még nem. Ekkor

$$\left[n^{1-\frac{2}{\kappa_1}} \cdot \left(\hat{R}(k) - R(k)\right)\right]_k \xrightarrow{d} [V]_k,$$

ahol V_k ugyancsak $\frac{\kappa_1}{2}$-stabilis vektorváltozó.

Megjegyzés 7.3.18. Most már végtelenhez tartóval szorzunk, tehát a becslés önmagában is lecsökkenne, azaz van konvergencia, de a sebessége $\frac{1}{\sqrt{n}}$-nél lassabb, mert $0 > \frac{2}{\kappa_1} - 1 > -\frac{1}{2}$.

3) Ha $\kappa_1 \in (4, +\infty)$*, akkor*

$$\left[\sqrt{n}\left(\hat{R}(k) - R(k)\right)\right]_k \xrightarrow{d} [Gauss]_k,$$

vagyis a klasszikus esetet kapjuk vissza.

Megjegyzés 7.3.19. A fentivel összevetve, a stabilis eloszlás paramétere 2-nél nagyobb lenne, de ez csak a Gauss lehet. A tételnek ezen része az erősen keverő sorozatokra érvényes centrális határeloszlás-tétel alkalmazása.