Általános lineáris folyamat-modell

General Linear Process Model

Továbbra is a spektrum becslése a célunk, de most már nem a tiszta diszkrét (harmonikus folyamat), hanem az abszolút folytonos esetre vagyunk kíváncsiak (AR, MA, $ARMA$, stb. standard modellek ilyenek).

6.1. Definíció. *Az* $X_t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n \varepsilon_{t-n}$ *folyamatot oksági reprezentációjú lineáris folyamatnak nevezzük, ahol* ε_t *független értékű zaj (purely random process). Ennek kiterjesztése az* $X_t = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} g_n \varepsilon_{t-n}$ ***általános lineáris folyamat****, melyről rögtön jegyezzük meg, hogy jelenlegi értéke a jövőtől is függ.*

Ahhoz, hogy a folyamat stacionárius legyen véges szórással, kell, hogy $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} g_n^2$ véges legyen, és ha még $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |g_n| < \infty$ is teljesül, akkor létezik spektrál-sűrűségfüggvény, és az folytonos minden λ-ra. Tegyük fel, hogy $X(t)$ várható értéke 0. Mivel $X(t)$ valós értékű, így az $R(\tau)$ autokovariancia-függvény páros, tehát a spektrál-sűrűségfüggvény felírásában sin-os tag nem szerepel: $\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{\tau=-\infty}^{+\infty} R(\tau)\cos(\tau\lambda)$. Mivel az autokovarianciára már van becslésünk, így nyilván ezt fogjuk használni:

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{R}(\tau)\cos(\tau\lambda) = \frac{1}{4\pi} \cdot I_N(\lambda)$$

Megjelent a már korábban is látott periodogram, ezért erre inkább bevezetjük az $I_N^*(\lambda) = \frac{1}{4\pi} I_N(\lambda)$ jelölést. Innen rögtön kapjuk $I_N^*(\lambda)$ várható értékét az $R(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\vartheta)\cos(\tau\vartheta)d\vartheta$ behelyettesítésével és a cos-ok szorzatára vonatkozó korábban is használt azonossággal:

$$EI_N^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{-(N-1)}^{N-1} E\hat{R}(\tau)\cos(\tau\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) R(\tau)\cos(\tau\lambda) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\vartheta) \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) \cdot \Big(\cos\left[\tau(\vartheta+\lambda)\right] + \cos\left[\tau(\vartheta-\lambda)\right]\Big) d\vartheta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\vartheta) \cdot \frac{F_N(\vartheta+\lambda) + F_N(\vartheta-\lambda)}{2} d\vartheta = (*)$$

Kettészedve az integrált[1], majd az első tagban ϑ helyett $-\vartheta$ szerint integrálva, és kihasználva a $\varphi(\vartheta)$ és $F_N(\vartheta-\lambda)$ függvények párosságát azt kapjuk, hogy

$$(*) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\vartheta) F_N(\vartheta-\lambda) d\vartheta$$

A Fejér-magok viszont a Dirac-δ-hoz tartanak. Tehát $EI_N^*(\lambda) \to \varphi(\lambda)$ minden λ-ra[2], így aszimptotikusan torzítatlan. A következő állításból láthatjuk, hogy szinte ez az egyetlen jó tulajdonsága. Ha $\varphi(\lambda)$ még Lipschitzes is, akkor $EI_N^*(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\vartheta)F_N(\vartheta-\lambda)d\vartheta = \varphi(\lambda) + O\left(\frac{\log N}{N}\right)$, azaz a torzítás $O\left(\frac{\log N}{N}\right)$ nagyságrendű.

---

[1] a két F_N szerint két integrál összegére

[2] $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-y)dx = f(y)$. Persze ennek így nincs értelme, mivel a δ végtelen súlyt tesz a 0-ba ("úgy", hogy az integrálja 1 legyen), így nem függvény, azonban a disztribúciók nyelvén precízzé lehetne ezt tenni. Nekünk ez most nem feladatunk.

6.2. Állítás. *$I_N^*(\lambda)$ nem konzisztens*[3]*, és λ függvényeként erősen fluktuál.*

Ennek belátásához első lépésben szeretnénk kapcsolatot teremteni a fehér zaj és a GLIN folyamat periodogramjai között. Egy $X(t)$ általános lineáris folyamatra gondolhatunk úgy, mint egy $\varepsilon(t)$ folyamat szűrt változata: $\sum\limits_{u=-\infty}^{+\infty} g(u)\varepsilon(t-u)$, vagy folytonos esetben $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\varepsilon(t-u)du$ [4]. Az $X(t)$ és $X(t+\tau)$ kovarianciája

$$cov(X(t), X(t+\tau)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)g(v)R(\tau+u-v)dudv.$$

ahol R természetesen ε autokovarianciája. Abszolút folytonos esetben legyen $\Gamma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\lambda u}du$ g Fourier-transzformáltja, illetve diszkrét esetben $\Gamma(\lambda) = \sum\limits_{u=-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-i\lambda u}$. Legyen $\varphi_\varepsilon(\lambda)$ az ε spektrálsűrűségfüggvénye, ebből adódóan X-é $\varphi_X(\lambda) = \varphi_\varepsilon(\lambda)\cdot|\Gamma(\lambda)|^2$ (persze csak akkor létezik, ha $\int_{-\infty}^{\infty} g^2(u)du$ véges)[5]. Ha ε-nak véletlen ortogonális spektrálmérték szerinti reprezentációját tekintjük, azaz $\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}d\Phi_\varepsilon(\lambda)$, ahol $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ az ε-hoz tartozó véletlen ortogonális spektrálmértéket jelöli, akkor

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-u)}d\Phi_\varepsilon(\lambda)du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Gamma(\lambda)d\Phi_\varepsilon(\lambda),$$

(vagy diszkrét esetben ugyanígy, csak összegzést használva). Ekkor persze $d\Phi_X(\lambda) = \Gamma(\lambda)d\Phi_\varepsilon(\lambda)$-val éppen X véletlen ortogonális spektrálmérték szerinti reprezentációját kapjuk meg[6]. A spektrálelméletben már megemlítettük, hogy a spektrál-sűrűségfüggvény $E\frac{|d\Phi(\lambda)|^2}{d\lambda}$-ként is felírható, így már az is látszik, hogy miért négyzetesen emelhető ki a $\Gamma(\lambda)$: $\varphi_X(\lambda) = |\Gamma(\lambda)|^2\cdot\varphi_\varepsilon(\lambda)$. Mivel a periodogramok tartanak a spektrálsűrűségekhez, ezért aszimptotikusan a periodogramok között is ilyen kapcsolat áll fenn $I_{N,X}^*(\lambda) \sim |\Gamma(\lambda)|^2\cdot I_{N,\varepsilon}^*(\lambda)$. Mivel $\varepsilon(t)$ fehér zaj, így $\varphi_\varepsilon(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$, ezt behelyettesítve $\varphi_X(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}|\Gamma(\lambda)|^2$, azaz $|\Gamma(\lambda)|^2 = \frac{2\pi\varphi_X(\lambda)}{\sigma_\varepsilon^2}$. Ebből a periodogramok közötti kapcsolatra

$$I_{N,X}^*(\lambda) \sim \frac{2\pi\varphi_X(\lambda)}{\sigma_\varepsilon^2}\cdot I_{N,\varepsilon}^*(\lambda)$$

adódik.

A mi heurisztikus levezetésünkből nem látszik, hogy mennyire pontos ez az aszimptotika. A most következő tétel már a hiba nagysagrendjére is rámutat.

6.3. Tétel. *Legyen $X(t)$ GLIN folyamat, ahol $\varepsilon(t)$-k (szokás szerint) függetlenek 0 várható értékkel, σ_ε^2 szórásnégyzettel, véges negyedik momentummal, és $X(t)$-re teljesül még, hogy $\sum\limits_{u=-\infty}^{+\infty}|g(u)|\cdot|u|^\alpha < \infty$ ($\alpha > 0$-ra). Ekkor $I_{N,X}^*(\lambda) = \frac{2\pi\varphi(\lambda)}{\sigma_\varepsilon^2}\cdot I_{N,\varepsilon}^*(\lambda) + R_N(\lambda)$, ahol $ER_N(\lambda) = O\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right)$ λ szerint egyenletesen.*

6.4. Következmény. *Ha $I_{N,\varepsilon}^*$-t már ismerjük ($\varepsilon(t)$ fehér zaj), akkor az $\frac{I_{N,X}(\lambda_p)}{2\pi\varphi(\lambda_p)}$ változók*[7] *aszimptotikusan függetlenek és χ^2 eloszlásúak, tehát $I_{N,X}(\lambda_p) \sim \begin{cases} 2\pi\cdot\varphi(\lambda_p)\cdot\chi_2^2, & ha\ p \neq 0, \frac{N}{2}\ (N\ ps.) \\ 4\pi\cdot\varphi(\lambda_p)\cdot\chi_1^2, & ha\ p = 0\ vagy\ \frac{N}{2}\ (N\ ps.)\end{cases}$, és így $D^2 I_{N,X}^*(\lambda_p) \sim \varphi^2(\lambda_p)$, ami nem tart 0-hoz. Ez utóbbi bizonyítja fenti állításunkat, miszerint a periodogram nem konzisztens becslése a spektrál-sűrűségfüggvénynek.*

[3] $N \to \infty$ esetén a szórás nem tart nullához

[4] a mérnöki szakzsargonban g-t impulzus válaszfüggvénynek szokták nevezni

[5] e tulajdonság miatt $\Gamma(\lambda)$-t transzferfüggvénynek nevezzük, hisz ez adja meg az átmenetet X és ε spektrálsűrűségfüggvényei között

[6] heurisztikusan, ha $d\Phi_\varepsilon(\lambda)$-ra mint $Y(t)$ Fourier transzformáltjára gondolunk, akkor - felhasználva, hogy X a g és Y konvolúciója - rögtön megkapjuk a $d\Phi_X(\lambda) = \Gamma(\lambda)d\Phi_\varepsilon(\lambda)$ szorzatot

[7] vegyük észre, hogy már nem $I_{N,X}^*$ szerepel, λ_p-k pedig Fourier frekvenciák

6.5. Tétel. *Legyen $X(t)$ GLIN, és teljesüljenek az előző tétel feltételei.*

$$cov(I^*_{N,X}(\lambda_1), I^*_{N,X}(\lambda_2)) = \left[\frac{c}{N} + \frac{2\pi}{N} \cdot \Big(F_N(\lambda_1+\lambda_2) + F_N(\lambda_1-\lambda_2)\Big)\right] \varphi(\lambda_1)\cdot\varphi(\lambda_2) + O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right),$$

ahol $c = \frac{\kappa_4(\varepsilon)}{\sigma_\varepsilon^4}$. Ebből következik, hogy $D^2 I^*_{N,X}(\lambda) = \varphi^2(\lambda)\left(1+\frac{c}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right) \to \varphi^2(\lambda)$, így $I_{N,X}(\lambda)$-k aszimptotikusan korrelálatlanok.

A periodogram inkonzisztenciája igen meglepő, hiszen konzisztens becslések lineáris kombinációjától - ti. $\hat{R}(\tau)$-któl - azt várnánk, hogy konzisztens becslést kapunk. A hiba a gondolatmenetben ott van, hogy ugyan minden egyes $\hat{R}(\tau)$-nak $O(\frac{1}{N})$ a szórásnégyzete, de az összegzésben ezek mégiscsak kumulálódnak, ami $O(1)$ nagyságrendű hibát eredményez. A következő technikával ezt próbáljuk meg kiküszöbölni: az összegben a végső tagokat elhagyjuk, és reménykedünk, hogy így konzisztens becsléshez jutunk. Legyen $M < N-1$-re $\hat{\varphi}_0(\lambda) = \sum_{\tau=-M}^{M} \hat{R}(\tau)\cdot\cos(\tau\lambda)$. Mivel ez $M+1$ darab becsült autokovarianciát tartalmaz[8] - $I^*_{N,X}(\lambda)$ pedig N-et -, így a szórásnégyzet durván $O\left(\frac{M}{N}\right)$ lesz. Továbbá

$$E\hat{\varphi}_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{\tau=-M}^{M}\left(1-\frac{|\tau|}{N}\right)\cdot R(\tau)\cdot\cos(\tau\lambda) \stackrel{M\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(\lambda).$$ [9]

Olyan M-et kell választanunk, amelyre $N\to\infty$ és $M\to\infty$ esetén az $\frac{M}{N}\to 0$ is teljesül (például $M = N^c \quad 0<c<1$), így konzisztens és aszimptotikusan torzítatlan becslést kaphatunk. A fenti $\hat{\varphi}_0$ becslés a következő

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1}\alpha(\tau)\cdot\hat{R}(\tau)\cdot\cos(\lambda\tau)$$

általánosabb felírás speciális eseteként is felfogható, ahol $\alpha(\tau) = \begin{cases} 1, & ha\ |\tau|\le M \\ 0, & ha\ |\tau|>M\end{cases}$. Ezt a módszert ablakolásnak hívják, $\alpha(\tau)$-t pedig ablakfüggvénynek[10] ($[-M,M]$ "ablakon" keresztül nézünk rá a függvényre). Ez átírható alternatív alakba úgy, mint a periodogram egy súlyozott integrálja. Most ezt fogjuk megnézni.

$\hat{R}$ és cos egyaránt páros függvények, ezért válasszuk $\alpha(\tau)$-t is annak. Ekkor

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1}\alpha(\tau)\cdot\hat{R}\cdot e^{i\tau\lambda}$$

alakban is írható. Hasonlóan $I^*_{N,X}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1}\hat{R}(\tau)\cdot e^{-i\lambda\tau}$, amely az inverz Fourier-transzformációval az $\hat{R}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} I^*_{N,X}(\vartheta)\cdot e^{i\tau\vartheta}d\vartheta$-t adja. Ezt behelyettesítve az új $\hat{\varphi}$-ba

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} I^*_{N,X}(\vartheta)\Big\{\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1}\alpha(\tau)\cdot e^{-i\tau(\lambda-\vartheta)}\Big\}d\vartheta,$$

azaz

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} I^*_{N,X}(\vartheta)\cdot W(\lambda-\vartheta)d\vartheta,$$

[8] azért "csak" ennyit, mert $\hat{R}(\tau)$ ugye páros függvény
[9] nyilván ha $M\to\infty$, akkor N is
[10] lag window

ahol $W(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \alpha(\tau) \cdot e^{-i\tau\vartheta}$. Tehát $W(\vartheta)$ az $\alpha(\tau)$ ablakfüggvény Fourier-transzformáltja[11], ezért spektrális ablakfüggvénynek hívjuk. Vegyük észre, hogy a jobb oldalon $I^*_{N,X}(\vartheta)$ értékeinek egy súlyozott átlagát kaptuk, ahol a legnagyobb súlyok a $\lambda = \vartheta$ közelében vannak. A periodogram egyik legnagyobb hibája, hogy kiszámíthatlan, egyenetlen a viselkedése (vadul fluktuál), így ha mégis ezzel szeretnénk becsülni $\varphi(\lambda)$-t, akkor természetes ötletnek tűnik, hogy megpróbáljuk "kisimítani" a függvényt az adott λ frekvencia egy kis környezetében. Éppen ezt csináltuk a W-vel való súlyozáskor. Az eddigi gondolatmenetünkből még az is látható, hogy a becsült autokovariancia-függvény farkának redukálása ugyanazt a hatást adja[12], mint a fluktuáló periodogram simítása egy súlyozott integrálátlaggal.

A legtöbb $\alpha(\tau)$ sorozatra $W(\vartheta)$ erősen koncentrált a $\vartheta = 0$-ra. És fordítva is: minél koncentráltabb, annál több farokkovarianciát veszünk figyelembe, így nagyobb a fluktuáció. (Hasonlít a Tauber-típusú tételekre: a Fourier transzformált 0-beli viselkedése meghatározza az eredeti függvény végtelenbeli viselkedését, és fordítva)

Ha most a spektrális ablakfüggvényes felírásból indulunk ki, akkor könnyedén visszajuthatunk a sima ablakfüggvényes alakhoz. Csupán a fenti $\hat{\varphi}(\lambda)$-ba kell a periodogram $I^*_{N,X}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}(\tau) \cdot e^{-i\vartheta\tau}$ alakját behelyettesítenünk (ezután a trükk csak annyi, hogy két részre vágjuk az exponenciális függvényt):

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} e^{-i\tau\lambda} \cdot \hat{R}(\tau) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau(\lambda-\vartheta)} W(\lambda - \vartheta) d\vartheta \;\; =^{13} \;\; \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \alpha(\tau) \cdot \hat{R}(\tau) \cdot e^{-i\tau\lambda},$$

így a Fourier-együtthatók

$$\alpha(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau(\lambda-\vartheta)} W(\lambda - \vartheta) d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau\vartheta} W(\vartheta) d\vartheta,$$

az utóbbi helyettesítésnél a periodicitás miatt nem változnak az integrációs határok.

6.6. Megjegyzés. *Csak a $|\tau| < N - 1$ Fourier-együtthatók szólnak bele a becslésbe, így ha $W(\vartheta)$ és $W^*(\vartheta)$ eddig megegyeznek, akkor ugyanazt a becslést adják, mivel $I^*_{N,X}(\lambda)$ egy $(N-1)$-edrendű trigonometrikus polinom.*

6.7. Megjegyzés. *Ha $\alpha(\tau)$ valós és páros függvény, akkor $W(\vartheta)$ is az, és így átírható $W(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \alpha(\tau) \cdot \cos(\vartheta\tau)$ alakba.*

A későbbiek során szükségünk lesz még egy tételre, ami gyakorlatilag a 6.5 tétel egyenes következménye:

6.8. Tétel. *Legyen $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$ két $[-\pi, \pi]$-n értelmezett valós értékű függvény, melyeknek legfeljebb véges sok szakadási pontjuk van, ezen kívül mindkettő abszolút illetve négyzetesen integrálható, azaz $\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_i(\lambda)| d\lambda < \infty$ és $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_i^2(\lambda) d\lambda < \infty$. Legyen $X(t)$ GLIN folyamat, $\varepsilon(t)$ mint 6.3-ban, és $g(u) = O\left(\frac{1}{|u|^k}\right)$ valamilyen $k > 2$-re. Továbbá legyen*

$$\hat{\psi}_i = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_i(\lambda) I^*_{N,X}(\lambda) d\lambda \qquad \psi_i = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_i(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda$$

[11] persze csak diszkrét Fourier transzformáltról van szó, hisz az $\alpha(\tau)$-ban a τ csak egészeken fut

[12] az egészet innen kezdtük: $\alpha(\tau)$ súlyokkal kiiktattuk $\hat{R}(\tau)$ farkának hozzájárulását az összeghez

[13] $W(\vartheta)$-t periodikusan terjesztjük ki $(-\pi, \pi)$-n túlra.

Ekkor

1. $\lim\limits_{N\to\infty} E(\hat{\psi}_i) = \psi_i$

2. $\lim\limits_{N\to\infty} N \cdot cov(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2) = c \cdot \psi_1\psi_2 + 4\pi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \phi_1(\lambda)\bar{\phi}_2(\lambda)\varphi^2(\lambda)d\lambda$, *ahol c ugyanaz, mint* 6.5*-ben, és* $\bar{\phi}_2(\lambda) = \frac{\phi_2(\lambda)+\phi_2(-\lambda)}{2}$

BIZONYÍTÁS.

$$E(\hat{\psi}_i) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \phi_i(\lambda)E\big(I^*_{N,X}(\lambda)\big)d\lambda \quad \text{és} \quad cov(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \phi_1(\lambda)\bar{\phi}_2(\lambda')cov\big(I^*_{N,X}(\lambda), I^*_{N,X}(\lambda')\big)d\lambda d\lambda'$$

Az első résszel azonnal készen vagyunk, hisz $E\big(I^*_{N,X}(\lambda)\big)$ egyenletesen tart $\varphi(\lambda)$-hoz (a periodogram aszimptotikusan torzítatlan).

A másodikhoz vegyük észre, hogy ha $g(u) = O\left(\frac{1}{|u|^k}\right)$ valamely $k > 2$-re, akkor van olyan $1 < \alpha < k - 1$, amire $\sum\limits_{u=-\infty}^{+\infty} |g(u)| \cdot |u|^\alpha < \infty$. Így a 6.5 tételben szereplő maradéktag $o\left(\frac{1}{N}\right)$ nagyságrendű lesz (λ-kban egyenletesen), ezért

$$cov(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2) =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda')\left\{\varphi(\lambda)\varphi(\lambda') \cdot \left[\frac{c}{N} + \frac{2\pi}{N} \cdot \Big(F_N(\lambda+\lambda') + F_N(\lambda-\lambda')\Big)\right] + o\left(\frac{1}{N}\right)\right\} d\lambda d\lambda' =$$

$$= \frac{c}{N} \cdot \psi_1\psi_2 + \frac{2\pi}{N}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda')\varphi(\lambda)\varphi(\lambda') \cdot \Big(F_N(\lambda+\lambda') + F_N(\lambda-\lambda')\Big)d\lambda d\lambda' + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

Ha $N \to \infty$, akkor $F_N(\vartheta) \to \delta(\vartheta)$ és

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \phi_2(\lambda')\varphi(\lambda')\Big(F_N(\lambda+\lambda') + F_N(\lambda-\lambda')\Big)d\lambda' \to \varphi(\lambda)\big(\phi_2(\lambda) + \phi_2(-\lambda)\big)$$

a $\phi_2(\lambda)$ folytonossági pontjaiban (azaz majdnem mindenütt). Innen már következik a második rész. ■
Megjegyezzük, hogy (2) speciális eseteként a szórásnégyzetre vonatkozó aszimptotika is adódik:

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot D^2(\hat{\psi}) = c \cdot \psi^2 + 4\pi\int\limits_{-\pi}^{\pi} \phi(\lambda)\bar{\phi}(\lambda)\varphi^2(\lambda)d\lambda$$

Azt is vegyük észre, hogy $cov(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$-nak nyilvánvalóan szimmetrikusnak kell lennie ϕ_1, ϕ_2-ben.

A mintavételezési tulajdonságok előtt nézzünk meg pár gyakran használt $\alpha(\tau)$ ablakfüggvényt:

1. Levágott periodogram: legyen $\alpha(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| \le M \\ 0, & |\tau| > M \end{cases}$, ahol M ($< N-1$) az "ablakparaméter", amely a szumma már látott megrövidítését jelöli. Ekkor a spektrális ablakfüggvény a

$$W(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-M}^{M} \cos\tau\vartheta = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\sin\left[(M+\frac{1}{2})\vartheta\right]}{\sin(\vartheta/2)}\right) = D_M(\vartheta)$$

alakot ölti, ahol $D_M(\vartheta)$ a Dirichlet-féle magfüggvény, melynek $\vartheta = 0$-ban magas csúcsa van [ÁBRA]. Ez persze felvehet negatív értékeket is. Ennek nem örülünk túlzottan, ugyanis ha a spektrális ablakfüggvény negatív értéket is fölvesz, akkor a(z $I^*_{N,X}(\vartheta)$ periodogram nemnegativitásából adódóan) a $\hat{\varphi}(\lambda)$ is felvesz negatív értékeket. Ez azért kellemetlen, mert az eredeti $\varphi(\lambda)$ nemnegatív. A következő Bartlett-féle ablakfüggvény megoldja ezt a problémát, hisz a hozzátartozó spektrális ablakfüggvény éppen a Fejér-mag, amely köztudottan sehol sem negatív.

2. Bartlett-féle ablakfüggvény ("háromszög függvény") (1950.): legyen $\alpha(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{M}, & |\tau| \leq M \\ 0 &, |\tau| > M \end{cases}$,

   és erre
$$W(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-M}^{M} \left(1 - \frac{|\tau|}{M}\right) \cdot \cos\tau\vartheta = \frac{1}{2\pi M} \cdot \left(\frac{\sin\left[M\vartheta/2\right]}{\sin(\vartheta/2)}\right) = F_M(\vartheta),$$
   ahol $F_M(\vartheta)$ a Fejér-féle magfüggvény.

3. Daniell-féle ("téglalap alakú") ablakfüggvény: itt a spektrális ablakfüggvény meghatározásával kezdünk
$$W(\vartheta) = \begin{cases} \frac{M}{2\pi}, & \frac{-\pi}{M} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{M} \\ 0 &, \textit{egyébként} \end{cases}$$
   Látjuk, hogy a spektrális ablakfüggvény nemnegatív, emiatt a $\varphi(\lambda)$ Daniell-féle becslése is nemnegatív. A 6.6 megjegyzés szerint $W(\vartheta)$ 0 körüli viselkedése teljesen meghatározza az eredeti ablakfüggvényt:
$$\alpha(\tau) = \frac{M}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} e^{i\tau\vartheta} d\vartheta$$

4. Tukey: itt a spektrális ablakfüggvény Dirichlet-magok lineáris kombinációja lesz

5. Tukey-Hamming: optimalizálja a nagy csúcs - kis csúcs arányt[14]

6. Tukey-Hanning: könnyebb vele számolni (ugye az '50-es években járunk..)

7. Parzen: a Bartlett-féle ablakfüggvényt veszi $\frac{M}{2}$-es határponttal, majd ezt önmagával konvolválja (így még jobban simít). Ebből kapjuk, hogy a spektrális ablakfüggvény lényegében a Fejér-mag négyzete lesz.

8. Bartlett-Priestley: minimalizálja a legkisebb négyzetes hibát

[A fentiek megtalálhatók a könyv szkennelt lapjai között.]

Skálaparaméter-ablakok

6.9. Definíció. *Legyen $\alpha(\tau) = k\left(\frac{\tau}{M}\right)$, ahol M skálaparaméter[15]. A $k(u)$ folytonos, páros függvényt* ***"ablak generátor"****-nak nevezzük, Fourier-transzformáltját, azaz $K(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} k(u) \cdot e^{-iu\vartheta} du$-t pedig* ***"spektrális ablak generátor"****-nak.*

A spektrális ablakfüggvény ezen $k(u)$-val felírva
$$W(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \alpha(\tau) e^{-i\tau\vartheta} = M \cdot \left(\frac{1}{2\pi M} \cdot \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} k\left(\frac{\tau}{M}\right) e^{-i\frac{\tau}{M} \cdot M\vartheta}\right)$$

[14] relatíve csökkenti az első mellékhullám nagyságát a (középső) fő hullámhoz képest
[15] Általában a levágás szélessége, ezért ha ezt változtatjuk, akkor az ablakfüggvényt nyújtjuk vagy zsugorítjuk.

Nagy M-re az összeg integrállal közelíthető, vagyis $W(\vartheta) \sim M \cdot K(M\vartheta)$. A pontos összefüggést $W(\vartheta)$ és $K(\vartheta)$ között Parzen adta meg (1963), mégpedig

$$W(\vartheta) = M \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} K(M(\vartheta + 2\pi j)).$$

Spektrálbecslések mintavételezési tulajdonságai

A korábbiakkal megegyező alakban írjuk fel a spektrálsűrűség-függvény becslését:

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \alpha_N(\tau)\hat{R}(\tau)e^{-i\tau\lambda}$$

Láttuk, hogy ez átírható a következő formába:

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} I_N^*(\vartheta)W_N(\lambda-\vartheta)d\vartheta,$$

ahol $\alpha_N(\tau)$ és $W_N(\vartheta)$ valós, páros függvények. α_N-et ráadásul úgy válasszuk meg, hogy W_N-re még a következő tulajdonságok is teljesüljenek[16]:

(i) $W_N(\vartheta) \geq 0$ minden N-re és ϑ-ra

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\vartheta)d\vartheta = 1$

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\vartheta)d\vartheta < \infty$

(iv) minden pozitív ε-ra $W_N(\vartheta) \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ egyenletesen, ha $|\vartheta| > \varepsilon$.

Ezekből pedig következik, hogy $W_N(\vartheta) \to \delta$, azaz $W_N(\vartheta)$ tart a Dirac-deltához[17]. Ebből következik, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\vartheta)d\vartheta \to \infty$, hisz a Dirac-$\delta$ L_2 normája ∞.

Szükség van még egy tulajdonságra, mégpedig

(v) $\dfrac{\sum\limits_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \left(\frac{|\tau|}{N}\right)\cdot\alpha_N^2(\tau)}{\sum\limits_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \alpha_N^2(\tau)} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Szeretnénk kiszámolni $\hat{\varphi}(\lambda)$ aszimptotikus várható értékét illetve szórásnégyzetét. Észrevehetjük, hogy $\hat{\varphi}(\lambda)$ a periodogram súlyozott integráljaként van felírva, épp úgy, mint a 6.8 tételben szereplő $\hat{\psi}_i$. Nyilván ezt a tételt szeretnénk alkalmazni $\phi_1(\vartheta) = W_N(\lambda_1 - \vartheta)$ illetve $\phi_2(\vartheta) = W_N(\lambda_2 - \vartheta)$ megfeleltetéssel[18]. A probléma csak az, hogy ϕ_1 és ϕ_2 fix függvények voltak, azaz N-től függetlenek. Ellenőriznünk kell, hogy a bizonyítás lépései ebben az esetben sem romlanak el. Csak a lényegre akarunk koncentrálni, ezért feltesszük, hogy $\varphi(\lambda)$ minden λ-ra konstans, meg azt, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ekkor a bizonyítás végén megjelenő kifejezés a következő alakot ölti

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\vartheta')\left[F_N(\vartheta-\vartheta') + F_N(\vartheta+\vartheta')\right]d\vartheta'$$

Ennek elég csak az egyik tagjával foglalkozni $\int\limits_{-\pi}^{\pi} W_N(\vartheta')F_N(\vartheta-\vartheta')d\vartheta' = \tilde{W}_N(\vartheta)$. Ezt beírva az eredeti helyére (kettős integrálos rész), egy ilyen alakú kifejezést kapunk[19]: $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\vartheta)\cdot\tilde{W}_N(\vartheta)d\vartheta$. Valójában

[16] a spektrális ablakfüggvényre érdemes úgy gondolni, mint egy sűrűségfüggvényre, ezért teszünk ilyen feltételeket

[17] ez fogja biztosítani az aszimptotikus torzítatlanságot

[18] Vegyük észre, hogy a 6.8-ban kapott formulák W_N párossága miatt sokkal egyszerűbb formába írhatóak. (pl. $\bar{\phi}_i(\lambda) = \phi_i(\lambda)$ lesz)

[19] $\frac{2\pi}{N}$-től eltekintve

$\tilde{W}_N$-ot szeretnénk aszimptotikusan W_N-re kiváltani, azaz $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} W_N(\vartheta)\cdot\tilde{W}_N(\vartheta)d\vartheta}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\vartheta)d\vartheta} = 1$-et szeretnénk belátni. Mivel $W_N(\vartheta)$ és $F_N(\vartheta)$ Fourier együtthatói rendre $\alpha_N(\tau)$ illetve $\left(1-\frac{|\tau|}{N}\right)$ ($|\tau| < N-1$), ezért a konvolúciójuknak (ti. $\tilde{W}_N(\vartheta)$-nak) ezek szorzata lesz: $\alpha_N(\tau)\cdot\left(1-\frac{|\tau|}{N}\right)$. A Parseval-formulából kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\vartheta)\cdot\tilde{W}_N(\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|\tau|}{N}\right)\cdot\alpha_N^2(\tau)$$

és

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1}\alpha_N^2(\tau).$$

Innen már látjuk, hogy mire kellett az (v) feltétel:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\vartheta)\cdot\tilde{W}_N(\vartheta)d\vartheta}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\vartheta)d\vartheta} = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\sum\limits_{\tau=-(N-1)}^{N-1}\left(\frac{|\tau|}{N}\right)\cdot\alpha_N^2(\tau)}{\sum\limits_{\tau=-(N-1)}^{N-1}\alpha_N^2(\tau)}\right) = 1$$

Így már nyugodtan alkalmazhatjuk a 6.8-as tételt:

$$E\hat{\varphi}(\lambda) \sim \int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\vartheta)W_N(\lambda-\vartheta)d\vartheta = \tilde{\varphi}(\lambda)$$

Ráadásul, ha $\varphi(\vartheta)$-nak korlátos az első deriváltja, akkor $E\hat{\varphi}(\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\vartheta)W_N(\lambda-\vartheta)d\vartheta + O\left(\frac{\log N}{N}\right)$. Mivel $\varphi(\vartheta)$ folytonos és $W_N \to \delta$, így $\lim\limits_{N\to\infty} E\hat{\varphi}(\lambda) = \varphi(\lambda)$, azaz aszimptotikusan torzítatlan.

6.8-at most a szórásnégyzetre használva kapjuk, hogy

$$N\cdot D^2\left(\hat{\varphi}(\lambda)\right) \sim c\cdot\left(\tilde{\varphi}(\lambda)\right)^2 + 2\pi\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2(\vartheta)\cdot W_N(\lambda-\vartheta)\cdot\left\{W_N(\lambda-\vartheta)+W_N(\lambda+\vartheta)\right\}d\vartheta$$

6.10. Megjegyzés. *Az első tag $O(1)$ nagyságrendű, de a második tart végtelenbe*[20].

Legyen $X(t)$ Gauss, ekkor az első tag azonnal 0-vá válik, hiszen c gyakorlatilag a negyedik kumuláns. Mivel $W_N(\vartheta)\to\delta(\vartheta)$, így $W_N(\lambda-\vartheta)\to\delta(\lambda-\vartheta)$ és $W_N(\lambda+\vartheta)\to\delta(\lambda+\vartheta)$. Ezek szerint $N\to\infty$ esetén $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2(\vartheta)\cdot W_N(\lambda-\vartheta)\cdot W_N(\lambda+\vartheta)d\vartheta$ határértéke 0, kivéve a $\lambda=0$ vagy $\pm\pi$ esetet, mivel W_N periodikus 2π-vel, és páros.[21] Így a kapcsos zárójelben levő tagok egyenlőek, tehát írhatjuk, hogy

$$D^2\hat{\varphi}(\lambda) \sim (1+\delta_{\lambda,0,\pi})\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2(\vartheta)\cdot W_N^2(\lambda-\vartheta)d\vartheta,\quad \textit{ahol}\ \ \delta_{\lambda,0,\pi} = \begin{cases}1, & \lambda = 0,\pm\pi\\ 0, & \lambda\neq 0,\pm\pi\end{cases}$$

Mivel pedig nagy N-re $W_N^2(\lambda-\vartheta)$ a $\vartheta=\lambda$ köré erősen koncentrált és $\varphi(\vartheta)$ folytonos, így

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi^2(\vartheta)\cdot W_N^2(\lambda-\vartheta)d\vartheta \sim \varphi^2(\lambda)\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}W_N^2(\lambda-\vartheta)d\vartheta = \varphi^2(\lambda)\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}W_N^2(\vartheta)d\vartheta,$$

[20]A W_N-re tett (iv)-es feltétel következményeként kaptuk, hogy négyzetintegrálja végtelenbe tart.
[21]Például $W_N(\pi+\vartheta)\equiv W_N(\vartheta-\pi)\equiv W_N(\pi-\vartheta)$.

ahol az utóbbi helyettesítésnél W_N párossága és periodikussága miatt nem változott az integrációs út. A Parseval-egyenlőség szerint $2\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\vartheta) d\vartheta = \sum\limits_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \alpha_N^2(\tau)$, tehát

$$D^2\left(\hat{\varphi}(\lambda)\right) = (1 + \delta_{\lambda,0,\pi}) \cdot \varphi^2(\lambda) \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \alpha_N^2(\tau).$$