

# Matematikus és alkalmazott matematikus MSc

## Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

### Szakkolgozati témajavaslatok

2016/2017

Az alábbiakban a szakkolgozati témajavaslatokat tanszékenkénti bontásban soroljuk föl. Természetesen nemcsak a felsorolt témákról lehet szakkolgozatot írni: a témavezetővel való személyes egyeztetés után egyéb témakörök is szóba jöhetnek.

---

#### Algebra és Számelmélet Tanszék

---

##### 1. *Téma: Algebrák reprezentációdimenziója*

*Témavezető:* Ágoston István

*Rövid leírás:* Auslander az 1970-es évek elején vezette be az algebrák reprezentációdimenziójának fogalmát: ez a dimenzió homologikus eszközökkel méri azt, hogy egy algebra milyen messze van a reprezentációvégeességtől. Auslander bizonyította, hogy egy algebra pontosan akkor reprezentációvéges, ha  $\text{rep.dim } A \leq 2$ . Sokáig nem volt ismeretes, hogy  $\text{rep.dim } A$  mindig véges-e; ezt Iyama bizonyította egy 2003-as cikkében. Igusa és Todorov 2005-ben megmutatták, hogy ha egy algebra reprezentációdimenziója legföljebb 3, akkor a finitisztikus dimenziója véges (általános véges dimenziós algebrákra ez a homologikus algebra egyik legismertebb megoldatlan sejtése). Sajnos, ezzel lényegében egyidőben (2006-ban) Rouquier mutatott példát olyan algebrákra, melyek reprezentációdimenziója 4 (ezt megelőzően ilyen példa sem volt ismeretes). Azóta számos eljárás született nagy dimenziójú algebrák konstruálására, de a finitisztikus dimenzióval való kapcsolat még számos kiderítenivalót rejt, s a fogalom kutatása meglehetősen nyitott.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] M. Auslander: Representation dimension of Artin algebras. *Queen Mary College Mathematics Notes, London.* (1971)
- [2] O. Iyama: Finiteness of representation dimension. *Proc. Am. Math. Soc.* **131** (2003), 1011–1014.
- [3] K. Igusa, G. Todorov: On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras. *Repr. of Algebras and Related Topics.* Am. Math. Soc. (2005), 201–204.
- [4] R. Rouquier: Representation dimension of exterior algebras. *Invent. Math.* **165** (2006), 357–367.
- [5] S. Opperman: A lower bound for the representation dimension of  $kC_p^n$ . *Math. Z.* **256** (2007), 481–490.

*Szak:* matematikus

## 2. *Téma: A Sidorenko-sejtés*

*Témavezető:* Frenkel Péter

*Rövid leírás:* A Sidorenko-sejtés azt mondja ki, hogy páros gráfnak tetszőleges gráfba "sok" homomorfizmusa van (legalább annyi, mint amennyit az utóbbi gráf csúcsszáma és élszáma alapján valószínűségi alapon várnánk). Rengeteg részeredmény van, ennek a hatalmas irodalomnak egy részét lehetne feldolgozni a diplomamunkában.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] David Conlon, Jeong Han Kim, Choongbum Lee, Joonkyung Lee: Some advances on Sidorenko's conjecture, arXiv:1510.06533
- [2] Péter Csikvári, Zhicong Lin: Sidorenko's conjecture, colorings and independent sets, arXiv:1603.05888
- [3] Balazs Szegedy: An information theoretic approach to Sidorenko's conjecture, arXiv:1406.6738

*Szak:* matematikus

## 3. *Téma: Pseudovéletlen bináris sorozatok és rácsok*

*Témavezető:* Gyarmati Katalin

*Rövid leírás:* A kriptográfiában meghatározó szerepet játszó pseudovéletlen bináris sorozatok és rácsok konstrukciója és tanulmányozása

*Ajánlott irodalom:*

- [1] A. J. Menezes, P. C. van Oorschot, Scott A. Vanstone, *Handbook of Applied Cryptography*
- [2] C. Mauduit, A. Sárközy, On finite pseudorandom binary sequences. I. Measure of pseudorandomness, the Legendre symbol

*Szak:* matematikus.

## 4. *Téma: Eliminációelmélet*

*Témavezető:* Károlyi Gyula

*Rövid leírás:* Hogyan lehet szisztematikusan megoldani magasabbfokú egyenletrendszereket? A kérdés minőségi vizsgálata a projektív algebrai geometria eszközeivel.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] D.A. Cox, J.B. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms* további fejezetei

*Szak:* matematikus

## 5. *Téma: Általános algebrák, hálók*

*Témavezető:* Kiss Emil

*Rövid leírás:* Az általános algebráknak az utóbbi évtizedekben mély elmélete alakult ki. Az alapok elsajátítása mellett szabadon lehet választani olyan témákból, mint teljességi kérdések, kommutátorelmélet, kongruenciaszelídítés, a szubdirekt irreducibilis algebrák viselkedése.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Kiss: Bevezetés az algebrába, 8. fejezet
- [2] Hobby–McKenzie: The structure of finite algebras

*Szak:* matematikus

## 6. *Téma: Öröklődő kongruenciahálók*

*Témavezető:* Pálffy Péter Pál

*Rövid leírás:* Az univerzális algebra talán legnevezetesebb megoldatlan problémája a véges algebra kongruenciahálóinak jellemzése. Még egyetlen véges hálóról sem sikerült bizonyítani, hogy ne lehetne egy véges algebra kongruenciahálója, bár vélhetően a hálók nagy része nem áll így elő. Snow a legkisebb moduláris de nem disztributív hálóvarietás véges tagjairól mutatta meg, hogy előállíthatók véges algebra kongruenciahálóiaként. Ezt Hegedűs és Pálffy általánosították és bevezették az öröklődő kongruenciaháló fogalmát. A szakdolgozat célja ezeknek az eredményeknek a feldolgozása és esetleg további öröklődő kongruenciahálók konstruálása.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Hegedűs Pál és Pálffy Péter Pál, Modular congruence lattices, *Algebra Universalis* **54** (2005), 105–120.
- [2] John Snow, Every lattice in  $V(M_3)$  is representable, *Algebra Universalis* **50** (2003), 75–81.

*Szak:* matematikus.

## 7. *Téma: Homogén struktúrák*

*Témavezető:* Szabó Csaba

*Rövid leírás:* A véletlen gráf mintájára létezik véletlen részbenrendezett halmaz, véletlen lánc és véletlen Abel-csoport is. Ezek az úgynevezett homogén struktúrák modellelméleti és csoportelméleti (végtelen permutációcsoportok) eszközökkel vizsgálhatók.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] H.D. Macpherson, A survey of homogeneous structures. *Discrete Mathematics* **311** (2011), 1599–1634
- [2] <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~jberger/mac.pdf>

*Szak:* matematikus

## 8. *Téma: A $p$ -adikus Langlands-program*

*Témavezető:* Zábrádi Gergely

*Rövid leírás:* A  $p$ -adikus csoportok  $p$ -adikus reprezentációelmélete a matematika egy viszonylag új, dinamikusan fejlődő ága, melynek komoly alkalmazásai vannak az algebrai számelméletben. A Langlands program arról szól, hogy bizonyos Galois reprezentációknak próbálunk (viszonylag jól meghatározható szisztematikus módon) megfeleltetni bizonyos automorf reprezentációkat. Az úgynevezett  $p$ -adikus Langlands-programban az automorf oldalon a  $GL_n(\mathbb{Q}_p)$  csoport (és további, ennél általánosabb csoportok)  $p$ -adikus Banach-tér reprezentációi, a Galois oldalon pedig a  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  abszolút Galois csoportnak  $p$ -adikus reprezentációi állnak, ahol  $\mathbb{Q}_p$  a  $p$ -adikus számok teste,  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  pedig annak algebrai lezártja. A szakdolgozat a hallgató érdeklődésétől függően szólhat vagy csak a Galois-oldalról, vagy csak az automorf oldalról, vagy akár ezek kapcsolatáról.

*Ajánlott irodalom:* angol, ill. francia nyelvű szakcikkek, előadásjegyzetek a szakdolgozó érdeklődésétől függően, többek között:

- [1] Pierre Colmez: Représentations de  $GL_2(Q_p)$  et  $(\varphi, \Gamma)$ -modules
- [2] Peter Schneider és Jeremy Teitelbaum: Banach space representations and Iwasawa theory

[3] Laurent Berger: Galois representations and  $(\varphi, \Gamma)$ -modules  
*Szak:* matematikus.

---

## Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

---

### 1. *Téma:* **Exponenciális integrátorok**

*Témavezető:* Csomós Petra

*Rövid leírás:* Az exponenciális integrátorok hatékonyan alkalmazhatók olyan merev (stiff) feladatok numerikus megoldása során, melyek esetében a merevséget okozó rész elkülöníthető és egzaktul (vagy numerikusan elég pontosan) megoldható – más szóval a megfelelő Banach-téren felírt inhomogén (esetleg nemlineáris) absztrakt Cauchy-problémában szereplő lineáris operátor egy operátor-félcsoportot generál. Ekkor az eredeti feladat numerikus megoldása a konstans variációs formulában megjelenő integrál közelítésével adható meg. A szakdolgozat célja ezen módszerek megismerése, konvergenciájuk bizonyításának feldolgozása, valamint egy tesztfeladatra való alkalmazásuk.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] M. Hochbruck, A. Ostermann: Exponential integrators, *Acta Numerica* **19**, 209-286 (2010)
- [2] M. Hochbruck, A. Ostermann: Exponential Runge-Kutta methods for parabolic problems, *Applied Numerical Math.* **53**, 323-339 (2005)

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

### 2. *Téma:* **A Magnus-integrátor alkalmazása a sekélyfolyadék-egyenletek megoldására** (a téma már foglalt)

*Témavezető:* Csomós Petra és Havasi Ágnes

*Rövid leírás:* -

*Szak:* földtudomány MSc

### 3. *Téma:* **Az Ebola járvány tér- és időbeli modellezése, valamint annak numerikus vizsgálata különböző operátor szeletelési technikák segítségével** (a téma már foglalt)

*Témavezető:* Faragó István

*Rövid leírás:* Az Ebola vírus súlyos, akut megbetegedést okoz, ami gyakran végzetes lehet megfelelő kezelés hiányában. Ezért fontos, hogy egy tér- és időfüggő matematikai modell segítségével le tudjuk írni a betegség terjedését, és meg tudjunk határozni egy megfelelő ellenszeri/karanténózási ütemrendszert a vírus kezelésére. A szakdolgozat célja létrehozni egy olyan modellt, amely az ismert járványterjedési SIR modell kiterjesztése további, a vírus terjedését befolyásoló tényezőkkel. A modellt ezek után numerikus módszerek segítségével vizsgáljuk és az operátor szeletelése technikákkal közelítjük numerikusan.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Vincenzo Capasso, Mathematical Structures of Epidemic Systems (Lecture Notes in Biomathematics), Springer, Milan (1993)
- [2] Legrand J. et al., Understanding the dynamics of ebola epidemics, *Epidemiology and Infection* **135** (2007) 610-621.

*Szak:* alkalmazott matematikus

4. **Téma: Járványterjedés vizsgálata a numerikus analízis eszközeivel** (a téma már foglalt)

*Témavezető:* Faragó István

*Rövid leírás:* A járványterjedés jelensége jól leírható differenciálegyenlet rendszerrel. A dolgozat a Gonorrhoea, közismertebb nevén kankó terjedésével foglalkozik, mely egy SIS járványterjedési modell. A legtöbb folytonos modell analitikus megoldása nem lehetséges, ezért a megoldás közelítő előállítására különböző numerikus módszereket kell alkalmazni. A dolgozat vizsgálja az egyes numerikus modelleket, többek között, hogy megőrzik-e az egyes modellek a diszkrét modell kvalitatív tulajdonságait, illetve a szakdolgozó a megoldás szemléltetése céljából numerikus szimulációkat készít.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] (Lecture Notes in Biomathematics), Vincenzo Capasso: Mathematical Structures of Epidemic Systems-Springer (1993)
- [2] Hethcote-Yorke: Gonorrhoea Transmission Dynamics and Control
- [3] R.Ramakishore: Mathematical model of gonorrhoea in a hetero sexuals with time dependent population

*Szak:* alkalmazott matematikus

5. **Téma: Egy zárt inváziós faj modell matematikai vizsgálata (A Húsvét sziget ökológiai katasztrófájának matematikai vizsgálata)** (a téma már foglalt)

*Témavezető:* Horváth Róbert (BME) és Faragó István

*Rövid leírás:* A hallgató feladata egy zárt ökológiai rendszer, esetünkben a Húsvét sziget vizsgálata. A munka során a Basener és társai által felállított modellt bővítjük ki, majd kétdimenzióssá, illetve folytonossá tesszük. Vizsgáljuk a különböző paraméterek hatását a rendszer stabilitására, valamint a különböző kezdeti értékekből elindított megoldásokat is felvázoljuk numerikus modellek segítségével. Az így kapott különböző modelleket különböző szempontok szerint összehasonlítjuk.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] W. Basener, B. Brooks, M. Radin, T. Wiandt, Rat Instigated Human Population Collapse on Easter Island, Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, Vol. 12, No. 3, pp. 227-240, 2008
- [2] W. Basener, B. Brooks, M. Radin, T. Wiandt, Spatial Effects and Turing Instabilities in the Invasive Species Model, Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, Vol. 15, No. 4, pp. 455-464, 2011

*Szak:* alkalmazott matematikus

6. **Téma: Maxwell-egyenletek végeselem-megoldása**

*Témavezető:* Izsák Ferenc

*Rövid leírás:* Az időharmonikus Maxwell-egyenletek numerikus megoldása fontos gyakorlati probléma szép elméleti háttérrel. Ennek elsajátítása és egy megfelelő numerikus módszer implementációja a dolgozat célja.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] P. Monk, Finite Element Methods for Maxwell's Equations, Oxford University Press, 2003

*Szak:* alkalmazott matematikus

**7. Téma: A rugalmas-képlékeny torzió nemlineáris parciális differenciálegyenletének megoldása**

*Témavezető:* Karátson János

*Rövid leírás:* A rugalmas-képlékeny torzió Saint-Venant-modelljét másodrendű nemlineáris parciális differenciálegyenlet írja le. Az elméleti háttér áttekintése után a cél megvizsgálni egyes iterációs módszerek hatékonyságát e feladaton.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Faragó, I., Karátson, J., Numerical solution of nonlinear elliptic problems via preconditioning operators. *Advances in Computation*, Vol. 11, NOVA Science Publishers, New York, 2002.

*Szak:* alkalmazott matematikus

**8. Téma: \*-algebrák és normált algebrák ábrázolásai, lokálisan kompakt csoportok ábrázolásai**

*Témavezető:* Szűcs Zsolt

*Rövid leírás:* 1. Komplex és \*-algebrák ábrázolásai normált és Hilbert-terekben: szimmetrikus Banach \*-algebrák -  $C^*$ -ekvivalens Banach \*-algebrák;

2. Absztrakt harmonikus analízis: lokálisan kompakt csoport mértékalgebrájának szimmetriája és  $C^*$ -ekvivalenssége.

A cél fenti témákhoz kapcsolódó eddigi eredmények bemutatása (a két említett téma összefügg), illetve ezek kapcsolatának tisztázása. (De a fenti általános elméletek bármely részelméletéről lehet szó).

*Ajánlott irodalom:*

- [1] <http://www.cs.elte.hu/~krja/analyse/tvt-na.pdf>  
[2] <http://www.cs.elte.hu/~krja/analyse/ha.pdf>  
[3] F. F. Bonsall, J. Duncan: *Complete Normed Algebras*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973  
[4] J. Dixmier:  *$C^*$ -algebras*. North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1977  
[5] G. K. Pedersen:  *$C^*$ -Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, London, New York, San Francisco, 1979  
[6] T. W. Palmer: *Banach Algebras and the General Theory of \*-Algebras*, Vol I-II

*Szak:* matematikus

**9. Téma: Operátoregyenletek megoldhatósága Hilbert-téren**

*Témavezető:* Tarcsay Zsigmond

*Rövid leírás:* Számos matematikai, fizikai, vagy éppen mérnöki probléma vezethető vissza egy  $A(x) = y$  alakú egyenlet megoldására/megoldhatóságára, ahol  $A$  lineáris, vagy éppen nemlineáris operátor. A hallgató feladata a megoldhatóság, egyértelműség, illetve a megoldás folytonos függésének vizsgálata néhány speciális típusú operátor (kompakt, Fredholm, nemkorlátos, stb.) esetében, illetve az absztrakt eredmények alkalmazása a közönséges, illetve parciális differenciálegyenletek körében.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2013

[2] P. D. Lax, Functional analysis, Wiley-Interscience, New York, 2002

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

## 10. *Téma: Lebesgue-felbontás a funkcionálanalízisben*

*Témavezető:* Tarcsay Zsigmond

*Rövid leírás:* A matematika számos területén találkozhatunk olyan objektumokkal, amelyek közt kijelölhető két szélsőséges osztály: a valamilyen értelemben "szépen" viselkedők (ún. regulárisak) és a kevésbé kezelhetők (azaz szingulárisak). Ilyen esetekben természetes kérdés lehet, hogy az egyes objektumok felbonthatók-e reguláris, illetve szinguláris részekre. Az ilyen előállításokat nevezzük Lebesgue-felbontásoknak. A cél néhány ide vonatkozó eredmény összegyűjtése és bemutatása a funkcionálanalízis eszközeivel.

*Ajánlott irodalom:*

[1] S. Hassi, Z. Sebestyén and H.S.V. de Snoo, A canonical decomposition for linear operators and linear relations, Acta Math. Hungar., 115 (2007), 281-307

[2] Hassi, S., Sebestyén, Z., de Snoo, H., Lebesgue type decompositions for nonnegative forms, J. Funct. Anal. 257 (2009), 3858-3894.

*Szak:* matematikus

## 11. *Téma: Reprezentációs és felbontási tételek pozitív elemekre*

*Témavezető:* Titkos Tamás

*Rövid leírás:* A matematika számos területén találkozhatunk olyan leképezésekkel, amelyek bizonyos értelemben vett pozitivitási tulajdonsággal rendelkeznek. Gondolhatunk itt akár pozitív szemidefinit mátrixokra, korlátos pozitív operátorokra, (végesen additív) nemnegatív mértékekre, pozitív definit operátorfüggvényekre, és így tovább.

Azon tételeket, amelyek egy pozitív elem (egy másakra vonatkozóan) reguláris és szinguláris részekre bonthatóságát garantálják, a mértékelméleti klasszikusra utalva Lebesgue típusú felbontásoknak, a reguláris rész alkalmas reprezentációját pedig Radon-Nikodym típusú tételeknek nevezik.

A cél a témához kapcsolódó egy-egy eredmény bemutatása (legyen szó akár valamelyik Lebesgue-Radon-Nikodym tételről, vagy a felbukkanó regularitási és szingularitási fogalmak összehasonlításáról) a megfelelő szakirodalom feldolgozásával.

*Ajánlott irodalom:*

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, Principles of Real Analysis, Academic Press Inc. (San Diego, 1998).

[2] T. Ando, Lebesgue-type decomposition of positive operators, Acta. Sci. Math. (Szeged), 38 (1976), 253-260.

[3] T. Ando, W. Szymanski, Order Structure and Lebesgue Decomposition of Positive Definite Operator Functions, Indiana Univ. Math. J., 35 (1986), 157-173.

[4] S. Bochner and R. S. Phillips, Additive set functions and vector lattices, Ann. of Math., 42 (1941), 316-324.

[5] R. B. Darst, A decomposition of finitely additive set functions, J. Reine Angew. Math., 210 (1962), 31-37.

[6] C. Fefferman, A Radon-Nikodym theorem for finitely additive set functions, Pacific J. Math., 23(1) (1967), 35-45.

[7] S. Gudder, A Radon-Nikodym theorem for  $*$ -algebras, Pacific J. Math., 80 (1) (1979), 141-149.

- [8] S. Hassi, Z. Sebestyén and H. de Snoo, Lebesgue type decompositions for nonnegative forms, *J. Funct. Anal.*, 257(12) (2009), 3858-3894.
- [9] H. König, The Lebesgue decomposition theorem for arbitrary contents, *Positivity*, 10 (2006), 779-793.
- [10] K. P. S. B. Rao, M. B. Rao, *Theory of charges*, Academic Press, 1983.
- [11] Z. Sebestyén, Zs. Tarcsay, T. Titkos, Lebesgue decomposition theorems, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 79 (1-2) (2013), 219-233.
- [12] B. Simon, A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorems, *J. Funct. Anal.*, 28 (1978), 377-385.
- [13] W. Szymanski, Positive forms and dilations, *Trans Amer. Math.*, 301(2) (1987), 761-780.
- [14] Zs. Tarcsay, Lebesgue decomposition for representable functionals on  $*$ -algebras, *Glasgow Math. Journal*, 58 (2016), 491-501.
- [15] Zs. Tarcsay Radon-Nikodym theorems for nonnegative forms, measures and representable functionals, *Complex Analysis and Operator Theory*, 10 (2016), 479-494.
- [16] T. Titkos, A simple proof of the Lebesgue decomposition theorem, *Amer. Math Monthly*, 122 (8) (2015), 793-794.

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

## Analízis Tanszék

### 1. *Téma:* **Fraktálok, geometriai mértékelmélet, multifraktálok**

*Témavezető:* Buczolicz Zoltán

*Rövid leírás:* A fenti nagy témakör valamelyik érdekes, modern alfejezetének feldolgozása esetleg bekapcsolódás a témakörben folyó kutatómunkába. A lehetséges részterületek például a következők: dimenziófogalmak, sűrűségi tételek, irreguláris halmazok, multifraktál analízis, tangens mértékek, mértékek dimenziói, rektifikálhatóság, korlátos változású (BV) halmazok, topologikus Hausdorff-dimenzió.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Falconer, K. J.: *The geometry of fractal sets*. Cambridge Tracts in Mathematics, 85. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. xiv+162 pp.
- [2] Falconer, Kenneth: *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997. xviii+256
- [3] Falconer, Kenneth: *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2003. xxviii+337 pp.
- [4] Mattila, Pertti: *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] Ambrosio, Luigi; Fusco, Nicola; Pallara, Diego: *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.



- [6] Z. Buczolich: Non- $L^1$  functions with rotation sets of Hausdorff dimension one, *Acta Mathematica Hungarica* **126:(1-2)** (2010) 23–50
- [7] Z. Buczolich and A. Máthé: Where are typical  $C^1$  functions one-to-one?, *Math. Bohem.* **131** (2006), no. 3, 291–303.
- [8] Z. Buczolich: Occupation measure and level sets of the Weierstrass-Cellerier function. *Recent developments in fractals and related fields*, 3–18, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.
- [9] R. Balka, Z. Buczolich and M. Elekes: A new fractal dimension: The topological Hausdorff dimension. <http://www.cs.elte.hu/~buczo/papers/BBE.pdf>
- [10] R. Balka, Z. Buczolich and M. Elekes: Topological Hausdorff dimension and level sets of generic continuous functions on fractals, <http://www.cs.elte.hu/~buczo/papers/levelset110828.pdf>

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

## 2. Téma: Dinamikus rendszerek, ergodelmélet

*Témavezető:* Buczolich Zoltán

*Rövid leírás:* A fenti nagy témakörök valamelyik érdekes, modern alfejezetének feldolgozása esetleg bekapcsolódás a témakörben folyó kutatómunkába. A lehetséges részterületek például a következők: Entrópia fogalmak, topologikus dinamika, szimbolikus dinamika, ergodtételek, maximális egyenlőtlenségek, nem konvencionális ergodikus közepek, ergodikus optimalizáció.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Petersen, Karl: *Ergodic theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [2] Walters, Peter: *An introduction to ergodic theory*. Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [3] B. Hasselblatt, A. Katok: *A first course in dynamics. With a panorama of recent developments*. Cambridge University Press, New York, 2003.
- [4] A. Katok, B.Hasselblatt: *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] Robert L. Devaney: *An introduction to chaotic dynamical systems. Second edition*. Addison Wesley Studies in Nonlinearity. Addison Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.
- [6] D. Lind, B. Marcus: *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [7] Jenkinson, Oliver: Ergodic optimization. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **15** (2006), no. 1, 197–224.
- [8] Z. Buczolich and D. Mauldin: Divergent Square Averages, *Annals of Mathematics*, **171**, 1479–1530,
- [9] I. Assani and Z. Buczolich: The  $(L^1, L^1)$  bilinear Hardy-Littlewood function and Fürstenberg averages, *Rev. Mat. Iberoamericana* Volume **26**, Number 3 (2010), 861–890,
- [10] Z. Buczolich: Almost everywhere convergence of ergodic averages, *Real Anal. Exchange* **34** (2009), no. 1, 1–15.

- [11] K. M. Brucks and Z. Buczolich: Trajectory of the turning point is dense for a co-*sigma*-porous set of tent maps, *Fund. Math.* **165** (2000), 95–123.
- [12] K. M. Brucks and Z. Buczolich: Universality in inverse limit spaces of the logistic family occurs with positive measure, *Atti. Sem. Univ. Modena*, **48** (2000), no. 2, 335–353.
- [13] J. Bremont and Z. Buczolich: Maximizing points and coboundaries for rotations, <http://www.cs.elte.hu/~buczo/papers/cbdetds.pdf>  
*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

### 3. *Téma: Mikro-tangens halmazok*

*Témavezető:* Buczolich Zoltán

*Rövid leírás:* Irreguláris, fraktál tulajdonságú függvények lokális vizsgálatára szolgál a mikro-tangens halmaz. A témavezetőtől származó definíció és első eredményeket tartalmazó cikk viszonylag új. Számos kérdés vehető fel. A kutatás iránt érdeklődő szakdolgozó szakdolgozatát sikeres problémamegoldások esetén később esetleg TDK-dolgozatban, illetve önálló kutatómunkában is folytathatja.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Z. Buczolich, Micro Tangent Sets of Continuous Functions, *Math. Bohem.* **128** (2003), no. 2, 147–167.
- [2] Z. Buczolich and Cs. Ráti, Micro tangent sets of typical continuous functions, *Atti. Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia* **54** (2006), 135–136

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

### 4. *Téma: Tipikus függvények, mértékek irregularitási tulajdonságai*

*Témavezető:* Buczolich Zoltán

*Rövid leírás:* A tipikus folytonos függvények Hölder spektrumát és momentum összegeit vizsgáló cikk és annak előzményeit tartalmazó cikkek anyagának megértése és átgondolása után esetleg önálló kutatómunkába is kezdhet, mivel számos további kérdés vehető fel. A kutatás iránt érdeklődő szakdolgozó szakdolgozatát sikeres problémamegoldások esetén később esetleg TDK-dolgozatban, illetve önálló kutatómunkában is folytathatja.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] J. Genyuk, A typical measure typically has no local dimension, *Real Anal. Exchange* **23(2)** (1997/8), 525–538.
- [2] T. Zamfirescu, Most monotone functions are singular, *Amer. Math. Monthly* **88** (1) (1981), 47–49.
- [3] T. Zamfirescu, Typical monotone continuous functions, *Arch. Math.* **42** (1984), 151–156.
- [4] Z. Buczolich and J. Nagy, Hölder spectrum of typical monotone continuous functions, *Real Analysis Exchange* **26** (2000/01), no. 1, 133–156.
- [5] Z. Buczolich and S. Seuret, Multifractal spectrum and generic properties of functions monotone in several variables, to appear in *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, <http://www.cs.elte.hu/~buczo/papers/dmoJMAA.pdf>

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

### 5. *Téma: A Haight–Weizsäcker probléma*

*Témavezető:* Buczolich Zoltán

*Rövid leírás:* Alapprobléma: Legyen  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető függvény. Igaz-e, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$  vagy majdnem mindenütt konvergens, vagy majdnem mindenütt divergens? Az alapprobléma nem csak H. v. Weizsäcker diplomamunkájában, hanem J. A. Haight egy cikkében is felmerült. Az alapprobléma megoldásával kapcsolatos eredmények feldolgozásán kívül számos megoldatlan probléma is van a területen így az igényes, kutatás iránt érdeklődő szakdolgozó a szakirodalom (legalábbis) jelentős részének feldolgozása után önálló kutatómunkába is kezdhet.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] N.J. Fine and A.R. Hyde, Solution of a problem proposed by K.L. Chung, *Amer. Math. Monthly* **64** (1957), 119-120.
- [2] J.A. Haight, A linear set of infinite measure with no two points having integral ratio, *Mathematika* **17** (1970), 133-138.
- [3] J.A. Haight, A set of infinite measure whose ratio set does not contain a given sequence, *Mathematika* **22** (1975), 195-201.
- [4] C. G. Lekkerkerker, Lattice points in unbounded point sets, I. *Indag. Math.* **20** (1958), 197-205.
- [5] H. v. Weizsäcker, Zum Konvergenzverhalten der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(nt)$  für lambda-messbare Funktionen  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , *Diplomarbeit*, Universität München, 1970.
- [6] Z. Buczolich, J-P. Kahane and R.D. Mauldin, On series of translates of positive functions, *Acta Math. Hungar.* **93(3)** (2001), 171-188.
- [7] Z. Buczolich and D. Mauldin, On the convergence of  $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$  for measurable functions, *Mathematika* **131** (2001), no. 4, 785-798.
- [8] Z. Buczolich and D. Mauldin, On series of translates of positive functions II., *Indag. Mathem., N. S.* **12 (3)** (2001), 317-327.

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

## 6. Téma: Geometriai mértékelmélet

*Témavezető:* Elekes Márton

*Rövid leírás:* A témát azoknak ajánlom, akik elvégezték a "Geometriai mértékelmélet" kurzust. A szakdolgozó feladata az ott megismert valamelyik anyagrész részletesebb megismerése és feldolgozása, valamint kellő elszántság esetén a kapcsolódó nyitott problémák tanulmányozása lenne.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Megbeszélés szerint

*Szak:* MSc Matematikus

## 7. Téma: Leíró halmazelmélet

*Témavezető:* Elekes Márton

*Rövid leírás:* A témát azoknak ajánlom, akik elvégezték a "Leíró halmazelmélet" kurzust. A szakdolgozó feladata az ott megismert valamelyik anyagrész részletesebb megismerése és feldolgozása, valamint kellő elszántság esetén a kapcsolódó nyitott problémák tanulmányozása lenne.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Megbeszélés szerint

*Szak:* MSc Matematikus

## 8. *Téma: Valós analízis és halmazelmélet*

*Témavezető:* Elekes Márton

*Rövid leírás:* A tágan értelmezett valós analízisben, amelybe beleértjük például a leíró halmazelméletet és a geometriai mértékelméletet is, gyakran bukkan fel a halmazelmélet. Sokszor bizonyítási módszerként, időnként már a kérdésfelvetésben, és néha azért, mert egy kérdés váratlanul függetlennek bizonyul a *ZFC* axiómarendszerrel. A szakdolgozó feladata egy ilyen téma megismerése és feldolgozása, valamint kellő elszántság esetén a kapcsolódó nyitott problémák tanulmányozása lenne.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Megbeszélés szerint

*Szak:* MSc Matematikus

## 9. *Téma: Konkrét univerzális objektumok*

*Témavezető:* Elekes Márton

*Rövid leírás:* A matematika számos területén fontos, hogy objektumok egy osztályában van-e olyan, amelybe minden osztálybeli objektum beágyazható, illetve amelynek minden osztálybeli objektum homomorf képe. Az ilyeneket injektíven illetve projektíven univerzálisoknak nevezzük. Injektíven univerzális például a  $(\mathbb{Q}, <)$  megszámlálható rendezett halmaz, a véletlen gráf, a Hilbert-kocka mint kompakt topologikus tér,  $C[0, 1]$  mint szeparábilis Banach-tér,  $(\mathbb{T})^{\mathbb{N}}$  mint kompakt metrikus Abel csoport, az úgynevezett Uriszon-tér mint szeparábilis metrikus tér, stb. Projektíven univerzális pedig például a szabad csoport, a Cantor-halmaz mint kompakt topologikus tér, az irracionális számok mint lengyel tér, stb. A szakdolgozó feladata az irodalom összegyűjtése és feldolgozása, valamint kellő elszántság esetén ilyen típusú nyitott problémák tanulmányozása lenne.

*Ajánlott irodalom:* Megbeszélés szerint.

*Szak:* matematikus

## 10. *Téma: Hogyan lehetne igazságosabban eldönteni a holtversenyt a sakkolimpián?*

*Témavezető:* Keleti Tamás

*Rövid leírás:* A címben szereplő kérdést vizsgálnánk azzal a céllal, hogy elő tudjunk állni a jelenleg használt rendszernél jobbal. Az álom természetesen az, hogy pár év múlva az általunk javasolt rendszert használják a sakkolimpián.

Sakktudásra nincs szükség, de arra igen, hogy a jelentkező ismerje a problémát, tudja, hogy mi az, hogy svájci rendszer, tudja mi az, hogy Buchholz, hogyan döntenek el jelenleg a holtversenyeket a sakkolimpián, stb.

Többfajta informatikai és statisztikai tudásra is szükség van. Az ötleteinket tesztelni kell az elmúlt egy-két sakkolimpia eredményein, ezért először azokat le kell vadászni az internetről, majd használható formátumba áttenni, majd statisztikai programcsomagokat kell használni, és szükség esetén saját programokat írni, szimulációhoz, teszteléshez, a paraméterek beállításához.

*Ajánlott irodalom:*

*Szak:* MSc alkalmazott matematikus

**11. Téma: Vetítési tételek a geometriai mértékelméletben**

*Témavezető:* Keleti Tamás

*Rövid leírás:* Marstrand 60 éves tétele szerint egy halmaz majdnem minden vetületének Hausdorff dimenziója olyan nagy, amilyen nagy csak lehet. Azóta a tételnek számos alkalmazása és általánosítása született. A cél a legfrissebbek megértése.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Mattila: Geometry of Sets and Measures in Euclidian Spaces

[2] Oberlin-Oberlin: Application of a Fourier restriction theorem to certain families or projections in  $R^3$ , arXiv: 1307.5039

[3] Orponen: Hausdorff dimension estimates for restricted families of projections in  $R^3$ , arXiv:1304.4955

*Szak:* MSc matematikus

**12. Téma: A marginális-probléma** (a téma már foglalt)

*Témavezető:* Laczkovich Miklós

*Rövid leírás:* Az alapkérdés (amelyet G. G. Lorentz már 65 éve megoldott) a következő. Adott egy  $H$  mérhető halmaz az egységnyezetben. Jelölje  $f_H(x)$ , ill.  $g_h(x)$  a  $H_x$  függőleges, ill. a  $H^y$  vízszintes szekció mértékét. Milyen  $f, g$  függvényekhez van olyan  $H$ , amelyre  $f = f_H, g = g_H$ ? Hasonló kérdések felvethetők magasabb dimenzióban, halmazok helyett mértékeket véve stb. A szakdolgozatban át kellene tekinteni a kérdéskör irodalmát, a még megoldatlan problémákat, és esetleg a téma kapcsolatát az alkalmazásokkal (halmazok rekonstrukciója a szekciókból stb.).

*Ajánlott irodalom:*

[1] J. Hoffmann-Jorgensen, The general marginal problem. LNM 1242, 1987

*Szak:* Matematika MSc

**13. Téma: Gyökkeresés iterációval.**

*Témavezető:* Sigray István

*Rövid leírás:* Egyik legegyszerűbb módszer egy polinom egy gyökét (vagy általánosabban függvény zérushelyét) Newton iterációval keresni. A szakdolgozatban konkrét példák kiszámolása illetve elemzése történik; mind a valós, mind a komplex Newton iterációt megvizsgáljuk. A dolgozat írójának jártasnak kell lennie Matlab vagy más matematikai program alkalmazásában.

*Ajánlott irodalom:*

[1] J. Milnor: Dynamics in one complex variable

*Szak:* MSc matematikus, alkalmazott matematikus

**14. Téma: Ideális áramlás Riemann felületeken.**

*Témavezető:* Sigray István

*Rövid leírás:* Konkrétan megadott példák esetén a definiált fizikai mennyiségeket kiszámolni, vagy kutatómunkát végezni.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Halász Gábor: Kis hidrodinamika, kézirat.

*Szak:* MSc matematikus, alkalmazott matematikus

- 15. Téma: Kvázikonform leképezések alkalmazásai.**  
*Témavezető:* Sigray István  
*Rövid leírás:* A kvázikonform leképezések klasszikus alkalmazásainak egyikét kell színvonalasan, jól érthetően leírni.  
*Ajánlott irodalom:*  
[1] Lars V. Ahlfors: Quasiconformal mappings.  
*Szak:* MSc matematikus
- 16. Téma: Többváltozós komplex függvénytan**  
*Témavezető:* Szőke Róbert  
*Rövid leírás:* Ismerkedés a többdimenziós komplex analízis és geometria néha szokatlan világával. A szakdolgozat célja: könyvfejezet, i.e. cikkek feldolgozása. Előismeret a többváltozós komplex függvénytanban nem szükséges.  
*Ajánlott irodalom:* A választott konkrét témától függően angol nyelvű könyvek, cikkek.  
*Szak:* MSc matematikus
- 17. Téma: Balinvariáns metrikák Lie csoportokon**  
*Témavezető:* Szőke Róbert  
*Rövid leírás:* Euler egy pontban rögzített merev testek mozgását leíró eredményét ma így fogalmazhatjuk meg: minden ilyen mozgás a 3-dimenziós speciális ortogonális csoporton egy megfelelően megválasztott balinvariáns metrika geodetikusan felel meg. A balinvariáns metrikákból származó geometriák vizsgálata ma is intenzív kutatások tárgya. A szakdolgozat célja könyvfejezet, ill cikkek feldolgozásával megismerkedni ezzel a területtel.  
*Ajánlott irodalom:* A választott konkrét témától függően angol nyelvű könyvek, cikkek.  
*Szak:* MSc matematikus
- 18. Téma: Holomorf függvények Hilbert terei**  
*Témavezető:* Szőke Róbert  
*Rövid leírás:* Egy tartományban holomorf  $L^2$  függvények egy zárt alteret alkotnak az  $L^2$  térben és így ezek is egy Hilbert teret (az ún Bergman teret) alkotnak. A Bergman terek és általánosításuk a feltalálásuk óta ma is intenzív kutatás tárgyát képezik. A szakdolgozat célja könyvek, cikkek segítségével megismerkedni ezen terekhez kapcsolódó kérdéseken keresztül a komplex függvénytan egy igen aktív és fontos területével.  
*Ajánlott irodalom:* Választott témától függő  
*Szak:* MSc matematikus
- 19. Téma: Kobordizmusok**  
*Témavezető:* Szűcs András  
*Rövid leírás:* Szinguláris leképezések kobordizmuscsoportjai.  
*Ajánlott irodalom:* Thom, Wall, Milnor, Rimányi–Szűcs, Szűcs–Terpai cikkei  
*Szak:* MSc matematikus

**1. Téma: Integráltranszformációk**

*Témavezető:* Csikós Balázs

*Rövid leírás:* Egy  $R^n$ -en értelmezett kompakt tartójú sima  $f$  függvény Radon-transzformáltja egy olyan függvény, mely a tér hipersíkjain van értelmezve, és egy hipersíkhöz az  $f$  függvénynek a hipersíkon vett integrálja értékét rendeli hozzá. Az elmélet fő kérdése, hogy  $f$  miként rekonstruálható a Radon-transzformáltjának ismeretében. A Radon-transzformáció elmélete kulcsfontosságú a modern tomográfiában. A Radon-transzformáció gömbi analogonja a Funk-transzformáció. A Funk-transzformációnak is egy szép elmélete van, mely összefonódik a gömbi harmonikus függvények elméletével. Több konvex geometriai rekonstrukciós probléma hátterében a Funk-transzformáció áll. A szakdolgozat célja a Radon-transzformáció, vagy valamely rokona esetén az alapvető tételek, inverziós formulák és néhány alkalmazás bemutatása.

*Ajánlott irodalom:*

[1] S. Helgason, *Radon Transform*, Birkhäuser, 1999.

[2] R. Schneider, *The use of spherical harmonics in convex geometry*.

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

**2. Téma: Geometriai szélsőérték-feladatok és geometriai egyenlőtlenségek**

*Témavezető:* Csikós Balázs

*Rövid leírás:* A szakdolgozat célja egy geometriai szélsőérték-feladat megoldása, vagy valamely nevezetes témakör (izoperimetrikus, izodiametrális egyenlőtlenségek, ponthalmaz kontrakcióira nézve monoton geometriai mennyiségek, a Kneser–Poulsen-sejtés stb.) áttekintése.

*Ajánlott irodalom:* A kiválasztott témától függ.

*Szak:* matematikus

**3. Téma: Lineáris algebra indefinit vektortereken**

*Témavezető:* Lakos Gyula

*Szak:* matematikus

**4. Téma: Hőmag konstrukciója kompakt sokaságokon**

*Témavezető:* Lakos Gyula

*Szak:* matematikus

**5. Téma: Coxeter-csoportok a geometriában és a topológiában**

*Témavezető:* Moussong Gábor

*Rövid leírás:* A diszkrét transzformációcsoportok között a tükrözésekkel generált csoportokat, illetve ezek absztrakt megfelelőit, a Coxeter-csoportokat ismerjük a legalaposabban. A szakdolgozat a Coxeter-csoportoknak a geometria és a topológia területén adódó újabb alkalmazásait tárgyalhatja.

*Ajánlott irodalom:*

[1] M. W. Davis: *The geometry and topology of Coxeter groups*

[2] H. Hiller: *The geometry of Coxeter groups*.

*Szak:* matematikus

**6. Téma: Negatív görbületű sokaságok**

*Témavezető:* Moussong Gábor

*Rövid leírás:* A Riemann-sokaságok elméletének klasszikus kérdéscsoportja, hogy egyes görbületi feltételek milyen következményekkel járnak a sokaság topológiájára nézve. A szakdolgozat ilyen irányú eredményeket vizsgálhat nempozitív, illetve negatív előjelű görbület feltételezése mellett.

*Ajánlott irodalom:*

[1] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder: *Manifolds of nonpositive curvature*

[2] M. Bridson, A. Haefliger: *Metric Spaces of Non-positive Curvature*.

*Szak:* matematikus MSc

## 7. *Téma:* **Kombinatorikus geometriai problémák**

*Témavezető:* Naszódi Márton

*Rövid leírás:* A magas dimenziós konvex testek vizsgálatában alkalmazott valószínűségi módszert bemutatása például a Dvoretzky-tétel egy bizonyításán keresztül. E tétel szerint, tetszőleges  $k$  természetes számhoz van egy  $n$  természetes szám, melyre igaz, hogy minden  $n$ -dimenziós konvex testnek van egy  $k$ -dimenziós metszete, amely nagyon hasonlít az euklideszi gömbre.

*Ajánlott irodalom:*

[1] K. Ball: *Introduction to Modern Convex Geometry*

[2] J. Matoušek: *Lectures on Discrete Geometry*

*Szak:* matematikus

## 8. *Téma:* **Algebrai csomók**

*Témavezető:* Némethi András

*Rövid leírás:* Polinomok által meghatározott csomók elmélete, az algebrai sík görbék szingularitásait jellemzik. Nagyon sok terület találkozási pontja: algebrai geometria, topológia (homológia), kombinatorika (Newton diagrammok), gráfelmélet (feloldási gráfok), félcsoportelmélet. Pár éve a klasszikus elmélet új lendületet kapott az algebrai görbék szingularitásaihoz rendelt csomók HOMFLY polinomjainak és a görbék Hilbert sémáinak kapcsolatával.

*Ajánlott irodalom:*

[1] könyvek, cikkek

*Szak:* mindegyik

## 9. *Téma:* **Hirzebruch-Riemann-Roch tétel**

*Témavezető:* Némethi András

*Rövid leírás:* Klasszikus index tételek általánosítása, a sima és algebrai sokaságok indexeit (Euler karakterisztika, szignatúra, Todd osztály, vektornyalábok analitikus Euler karakterisztikái, stb) adja meg karakterisztikus osztályok (Chern, Todd, Euler, Pontrjagin) segítségével. Differenciáltopológia, algebrai geometria alaptétele. A globális geometria szinte minden tétele ehhez kötődik, ennek alkalmazása.

*Ajánlott irodalom:*

[1] könyvek, cikkek

*Szak:* matematikus

## 10. *Téma:* **Komplex hiperfelület-szingularitások**

*Témavezető:* Némethi András



*Rövid leírás:* Egy egyenlettel megadott terek szingularitásainak lokális leírása, Milnor klasszikus könyve alapján (Milnor fibrum, Milnor fibrálás, monodrómia, a lokális csomó és a vele való kapcsolat). Kiindulási pont az algebrai geometria és differenciátopológia felé.

*Ajánlott irodalom:*

[1] könyvek, cikkek

*Szak:* matematikus

### 11. *Téma: Komplex sokaságok kohomológiacsoportjai*

*Témavezető:* Némethi András

*Rövid leírás:* A sima komplex projektív sokaságok kohomológiacsoportjainak szerkezete nagyon különleges. Egyik legfontosabb klasszikus tulajdonság a Lefschetz-felbontás (kiindulási tételek: Lefschetz hipersík metszet tétele, és a Hard Lefschetz Theorem).

*Ajánlott irodalom:*

[1] könyvek, cikkek

*Szak:* matematikus

### 12. *Téma: Komplex felületszingularitások*

*Témavezető:* Némethi András

*Rövid leírás:* Topológiai szempontból a felületszingularitások csomóit tanulmányozza, ezek 3 dimenziós gráf sokaságok. Analitikus (algebrai geometriai) szempontból analitikus invariánsokat tárgyal (kévekohomológia, geometriai génusz). Konkrétabb téma lehet a Seiberg Witten Invariáns Sejtés, ami a csomó Seiberg Witten invariánsát köti össze a geometriai génusszal.

*Ajánlott irodalom:*

[1] könyvek, cikkek

*Szak:* matematikus

### 13. *Téma: Algebrai görbék*

*Témavezető:* Némethi András

*Rövid leírás:* A (komplex) affin vagy projektív tér görbéit egy polinom zérushelyeként definiáljuk. A polinom algebrai merevsége és a görbe alakja között érdekes összefüggések vannak, összekötve az algebrát a topológiával. Ez az algebrai geometria születési helye, elementárisan megfogalmazható százéves nyílt kérdésekkel. Magába foglalja a lokális algebrai csomók elméletét, de már az algebrai geometria globális invariánsaira (kohomógiaelmélet) is támaszkodik.

*Ajánlott irodalom:*

[1] könyvek, cikkek

*Szak:* matematikus

### 14. *Téma: Geometriai jelenségek Lorentz-sokaságokban*

*Témavezető:* Szeghy Dávid

*Szak:* matematikus

### 15. *Téma: Fénykép-rekonstrukciók*

*Témavezető:* Szeghy Dávid

*Szak:* alkalmazott matematikus

**16. Téma: Speciális részsokaságok konstans görbületű Riemann-terekben**

*Témavezető:* Verhóczy László

*Rövid leírás:* Amennyiben a Riemann-sokaságban vett részsokaság nem hiperfelület, illetve nem görbe, akkor a normális vektornyalábja általában nem lapos. A szakdolgozó feladata olyan részsokaságok konstrukciója konstans görbületű Riemann-terekben, melyeknél a normális vektornyaláb görbületi tenzora eltűnik. Egy ilyen részsokaság esetében a párhuzamos normális vektormezőket által értelmezni lehet az ún. parallel részsokaságokat. További feladat a parallel részsokaságok görbületi jellemzőinek a meghatározása.

*Ajánlott irodalom:*

[1] M. P. do Carmo: *Riemannian geometry*

[2] B.-Y. Chen: *Geometry of submanifolds*

*Szak:* matematikus MSc

**17. Téma: Kivételes kompakt Lie-csoportok szimmetrikus részcsoportjai**

*Témavezető:* Verhóczy László

*Rövid leírás:* Az irreducibilis szimmetrikus Riemann-terek osztályozása az egyszerű Lie-csoportok ún. szimmetrikus részcsoportjainak a meghatározásán alapul. A szimmetrikus Lie-részcsoportokhoz el lehet jutni oly módon, hogy vesszük a megfelelő Lie-algebrák involutív automorfizmusait és azoknál a fixen hagyott elemekből álló részalgebrákat. A szakdolgozó feladata a kivételes kompakt Lie-csoportok szimmetrikus részcsoportjainak a meghatározása és jellemzése.

*Ajánlott irodalom:*

[1] S. Helgason: *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.*

*Szak:* matematikus MSc

---

## Matematikatanítási és Módszertani Központ

---

**1. Téma: Additív kombinatorika**

*Témavezető:* Hegyvári Norbert

*Rövid leírás:* Az additív kombinatorika az utóbbi évtizedben került a kutatások előterébe. Sok szép tétel és közöttük levő összefüggések feltárása olyan kutatókat foglalkoztattak, mint Bourgain, Gowers, Tao, Green, Ruzsa, Sárközy. A leendő szakdolgozót ebbe a témakörbe kívánjuk bevezetni. A témakörhöz jegyzetet is készítettem (lásd <http://hegyvari.web.elte.hu/AC2.pdf>), amit frissítek és melynek fejezetcímei egyben a témaköröket is jelentik. Ezekből lehetne választani: 1. Néhány egyszerű megjegyzés a Minkowski-összeg elemszámára  $\mathbb{Z}$ -ben. 2. Az  $r_{A+B}(x)$ ,  $r_{A-B}(x)$  függvényekről és az  $E_+(A, B)$  additív energiáról. 3. Ruzsa távolságtételei. 4. Plünnecke tétele. 5. A Cauchy–Davenport-tétel; Kneser tétele. 6. Nemkommutatív Kneser-tétel. 7. Fedési tételek 8. Megszorított összegek. 9. Algebrai módszerek. 10. Az Erdős–Heilbronn-sejtés, a Cauchy–Davenport- és az Erdős–Ginzburg–Ziv-tételek (újabb) bizonyításai. 11. A Gowers–Balog–Szemerédi-tétel és alkalmazásai. 12. Additív-multiplikatív kombinatorika véges testekben.

*Szak:* matematikus

### 1. *Téma: Fokszámsorozatok realizációja*

*Témavezető:* Bérczi Kristóf

*Rövid leírás:* A Gale-Ryser tétel karakterizálja azon fokszámsorozatokat, melyek realizálhatóak egyszerű páros gráffal. Ha azonban a realizáló gráfra további megkötéseket teszünk (pl. rendelkezzen teljes párosítással, legyen síkbarajzolható, stb), a kérdés sokkal nehezebbé válik.

A szakdolgozó elsődleges feladata az ilyen realizációkhoz kapcsolódó eredmények felkutatása és összefoglalása, MSc-s szakdolgozó esetén nagyobb hangsúlyt fektetve a nyitott kérdések vizsgálatára.

*Ajánlott irodalom:*

[1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Gale-Ryser\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Gale-Ryser_theorem)

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

### 2. *Téma: Gráfok és szerkezetek merevségének kombinatorikus vizsgálata*

*Témavezető:* Jordán Tibor

*Rövid leírás:* Rúdszerkezetek merevségével kapcsolatos kérdések egyrészt érdekes elméleti problémákhoz vezetnek, melyek geometriai, algebrai és kombinatorikus módszerekkel vizsgálhatók, másrészt az eredmények számos, látszólag távoli területen alkalmazhatók (pl. molekulák stabil és mozgó részeinek meghatározása, kinyitható antennák tervezése, vezető nélküli járművek alakzatainak kialakítása, stb).

A szakdolgozó feladata a terület egy meghatározott részének áttekintése, lehetőleg érdemben hozzájárulva néhány nyitott kérdés háttérének megvilágításához. A vizsgálandó szakirodalom legnagyobb része angol nyelvű.

Néhány aktuális témakör: matroidok a diszkrét geometriában, a kombinatorikus merevség alkalmazási területei, globálisan merev gráfok és szerkezetek jellemzése, tensegrity szerkezetek, poliéderek merevségének vizsgálata, algebrai módszerek a merevségelméletben, kombinatorikus algoritmusok és előállítási tételek merev gráfok osztályaira.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Jordán Tibor, Recski András, Szeszlér Dávid, Rendszeroptimalizálás, Typotex, 2004.

[2] Frank András, Jordán Tibor, Diszkrét optimalizálás, Typotex, 2014.

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

### 3. *Téma: Hálózatoptimalizálási feladatok*

*Témavezető:* Jordán Tibor

*Rövid leírás:* A szakdolgozó feladata különböző diszkrét optimalizálási feladatok vizsgálata hálózat optimalizálási és tervezési (network design) problémákban. A cél az ismert módszerek, algoritmusok áttekintése, a még megoldatlan kérdések felderítése, esetleg algoritmusok implementálása, tesztelése. A vizsgálandó szakirodalom legnagyobb része angol nyelvű.

Néhány aktuális témakör: közelítő algoritmusok a Steiner network feladat különböző változataira, gráfok összefüggőségének optimális növelése.

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

#### 4. *Téma: Többszörösen merev és globálisan merev gráfok*

*Témavezető:* Király Csaba

*Rövid leírás:* Egy gráfot  $d$ -dimenzióban merevnek hívunk, ha minden generikus (azaz kellően általános helyzetű) realizációja a  $d$ -dimenziós térben merev, azaz nincs folytonos deformációja. Amennyiben a gráf minden generikus realizációja a  $d$ -dimenziós térben olyan, hogy adott élhosszokkal csak az adott realizáció létezik (egybevágósági transzformáció erejéig), akkor a gráfot globálisan merevnek mondjuk  $d$ -dimenzióban. A fenti két fogalom a többszörös él- illetve pontösszefüggőség mintájára tovább általánosítható.

A szakdolgozó feladata minimálisan többszörösen él- és pontmerev illetve globálisan merev gráfok vizsgálata. A korábbi (főként többszörösen merev gráfokra adott) élszámbecslések összefoglalása, illetve ezen módszerek felhasználásával új (lehetőleg éles) élszámbecslések konstruálása.

*Ajánlott irodalom:*

[1] <http://bolyai.cs.elte.hu/egres/tr/egres-14-12.pdf>

[2] <http://www.cs.elte.hu/egres/tr/egres-14-08.pdf>

[3] <https://arxiv.org/abs/1403.3742>

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

#### 5. *Téma: Paritásjátékok*

*Témavezető:* Király Tamás

*Rövid leírás:* A paritásjáték egy kétszemélyes, véges gráfon játszott, de végtelen hosszú játék. Adott egy irányított gráf egy kijelölt kezdőponttal, ahol minden csúcs valamelyik játékoshoz tartozik, és minden csúcsra rá van írva egy pozitív egész szám. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy nincs nyelő. Egy zsetont indítunk a kezdőpontból; mindig az a játékos tolhatja át a zsetont egy általa választott kimenő élen, akihez a csúcs tartozik. Ha a legkisebb olyan szám, ami végtelen sokszor szerepelt az út során, páros, akkor az első játékos nyer, egyébként pedig a második. Valamelyik játékosnak mindig van nyerő stratégiája, azonban régóta nyitott kérdés, hogy polinom időben eldönthető-e, hogy melyiknek. A feladat a témában ismert eredmények feldolgozása, és algoritmus keresése valamilyen speciális gráfosztályra.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Dietmar Berwanger, Olivier Serre, Parity games on undirected graphs

[2] Christoph Dittmann, Stephan Kreutzer, Alexandru I. Tomescu, Graph Operations on Parity Games and Polynomial-Time Algorithms

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

#### 6. *Téma: Online algoritmusok kombinatorikus optimalizálási feladatokra (a téma már foglalt)*

*Témavezető:* Király Tamás

*Rövid leírás:* A kombinatorikus optimalizálás olyan feladatokkal foglalkozik, ahol valamilyen kombinatorikus struktúraként leírható megoldáshalmazból (például egy hálózat útjai, tárgyak lehetséges sorrendjei, stb.) kell az optimálisat vagy közel optimálisat kiválasztani. Alkalmazásoknál gyakran előfordul, hogy a struktúra nem előre adott, hanem csak lépésenként, menet közben ismerjük meg – ilyenkor beszélünk online feladatról. A szakdolgozó feladata hálózattervezési és ütemezési online feladatok megoldására szolgáló algoritmusok feldolgozása és továbbfejlesztése.

*Ajánlott irodalom:*

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

## 7. **Téma: Ütemezési problémák LP-alapú megoldása és approximációja**

*Témavezető:* Kis Tamás, kis.tamas@sztaki.mta.hu

*Rövid leírás:* Gépütemezési problémák egyik lehetséges megoldási stratégiája, hogy lineáris programmal modellezzük a problémát, és az LP tulajdonságait kihasználva kapunk optimális, vagy garantáltan jó megoldásokat.

A szakdolgozat célja az LP alapú technikák áttekintése, azok összevetése. A téma feldolgozása során akár ki is lehet próbálni egy-egy módszert a gyakorlatban, ami programozási ismereteket igényel.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] J.R. Correa, A.S. Schulz, Single-Machine Scheduling with Precedence Constraints, *Mathematics of Operations Research*, 30 (2005) 1005-1021.

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

## 8. **Téma: Lift-and- project operátorok kiterjesztett probléma felírásokon**

*Témavezető:* Kis Tamás, kis.tamas@sztaki.mta.hu

*Rövid leírás:* A lift-and- project operátorokat 0-1 egészértékű programokhoz Sherali és Adams vezette be [1]. Lényegük, hogy egy magasabb dimenziós térbe emelik az LP relaxációt egy nem lineáris transzformációval, az eredmény linearizálják, majd az így kapott poliédert visszavetítik a kiinduló térbe. Az eljárás eredménye egy erősebb LP relaxáció. A közelmúltban Bodur és szerzőtársai [2] felfedezték, hogy az eljárás hatékonyságát tovább lehet növelni, ha nem az eredeti, hanem egy kiterjesztett probléma felírásra alkalmazzuk a lift-and- projekt operátort.

A szakdolgozat célja a fenti elméletek áttekintése, és új alkalmazás kidolgozása. A téma feldolgozásához szükség van C++ nyelvű programozásra is, hogy az eljárás hatékonyságát tesztelni lehessen.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Sherali, H.D., Adams, W.P.: A hierarchy of relaxations between the continuous and convex hull representations for zero-one programming problems. *SIAM J. Discrete Math.* 3, (1990), 411-430.
- [2] M. Bodur, S. Dash, O. Günlük, Cutting planes from extended LP formulations, *Mathematical Programming*, 2016, DOI 10.1007/s10107-016- 1005-7.

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

## 9. **Téma: Elektromos járművek okos töltése**

*Témavezető:* Mádi-Nagy Gergely

*Rövid leírás:* Az elektromos járművek elterjedésével párhuzamosan számolni kell a hozzájuk tartozó gyorstöltő hálózat bővülésével. A járművek üzemanyag ellátása komoly kihívások elé állítja az elektromos rendszert mind terhelési mind egyensúlyi szempontból. A felmerülő problémák megoldásárára több tervezett szabályozási modell létezik. Szinte mindegyik esetben szükség van a járművek töltésének optimális ütemezésére, amely mögött valamilyen optimalizálási feladat áll.

A szakdolgozat célja a témakör bemutatása, kapcsolódó cikkek feldolgozása. Legalább egy ütemezési modell részletes vizsgálata. Ezen felül szóba jöhet a modell implementációja, numerikus tesztelése, kiértékelése.

*Ajánlott irodalom:*

[1] [http://www.winmec.ucla.edu/electric\\_vehicle\\_smart\\_charging\\_and\\_vehicle-to-grid\\_operation.pdf](http://www.winmec.ucla.edu/electric_vehicle_smart_charging_and_vehicle-to-grid_operation.pdf)

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

## 10. *Téma:* **Európa árampiacainak összekapcsolása**

*Témavezető:* Mádi-Nagy Gergely

*Rövid leírás:* Európában cél egy egységes áramkereskedelmi rendszer kiépítése. Ez eddig részben meg is valósult az egyes országok áramtőzsdéinek összekapcsolásával. Magyarország például jelenleg a cseh, szlovák és román tőzsdével van összekapcsolva. A használt tőzsdéi aukciós algoritmus figyelembe veszi mind az áram speciális tulajdonságait (pl. nem tárolható), mind azt a tényt, hogy az egyes országok közti szállítási kapacitás szűkös. Az aukció (termékektől függően) felírható egy primál-duál LP (MILP, MIQP) feladatpárként. Ezekben mind a változóknak, mind a feltételeknek konkrét gazdasági jelentése van, így a modell önmagában is szép illusztrációját adja a matematikai dualitás elméletének.

A szakdolgozat célja a témakör bemutatása, kapcsolódó cikkek feldolgozása. Ezen felül szóba jöhet a modell implementációja, tesztelése.

*Ajánlott irodalom:*

[1] [http://static.epexspot.com/document/20015/COSMOS\\_public\\_description.pdf](http://static.epexspot.com/document/20015/COSMOS_public_description.pdf)

[2] <https://www.belpex.be/wp-content/uploads/EuphemiaPublicDocumentation201508121.pdf>

*Szak:* alkalmazott matematikus és matematikus

## 11. *Téma:* **Energiapiaci portfólió optimalizálása**

*Témavezető:* Mádi-Nagy Gergely

*Rövid leírás:* Egy energiakereskedő portfóliója a fogyasztóival, ügyfeleivel kötött üzletekből adódó kitétségből illetve az ezt lefedezni szándékozó származékos termékekből áll. A bemutatott alkalmazás minimalizálja a portfólió árkockázatát egy adott időperiódusra, úgy hogy figyelembe veszi a piacokon elérhető termékek körét, illetve az egyes termékek likviditását.

A kockázatot a Conditional-Value-at-Risk mutatóval mérjük. A likviditást kezelését a piaci ármodellbe építjük be.

A szakdolgozat célja: az üzleti környezet bemutatása, a modell leírása, az adódó nemlineáris programozási feladat implementációja, hatékony megoldása, tesztelése.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Paravan, D., G. B. Sheble, and R. Golob. "Price and volume risk management for power producers." Probabilistic Methods Applied to Power Systems, 2004 International Conference on. IEEE, 2004.

*Szak:* alkalmazott matematikus és matematikus

### 1. *Téma: Gráfok lista-színezése*

*Témavezető:* Barát János

*Rövid leírás:* Gráfok csúcsainak színezése egy alapvető elméleti probléma, ami még jól alkalmazható is. Sokat népszerűsített eredmény, hogy minden síkbarajzolt gráf tartományai kiszínezhetők 4 színnel úgy, hogy szomszédos tartományok különböző színt kapjanak. Tegyük most fel, hogy a csúcsokhoz előre rendelt listák vannak, abból kell színt választanunk. Thomassen bizonyította, hogy síkgráfokra ekkor elegendő, ha minden lista legalább 5 elemű. Ehhez hasonló állításokat szeretnénk bizonyítani.

*Ajánlott irodalom:*

[1] C. Thomassen: Every planar graph is 5-choosable

[2] J.Barát, G.Joret, D.R.Wood: Disproof of the List Hadwiger Conjecture

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

### 2. *Téma: Gráfok élfelbontásai*

*Témavezető:* Barát János

*Rövid leírás:* Adott egy  $G$  gráf és szeretnénk az éleit szétosztani adott módon. Tipikusan olyan kérdéseket vizsgálunk, hogy milyen él-összefüggőségi feltétel teljesüljön  $G$ -re ahhoz, hogy biztosan legyen élfelbontása előre megadott gráfokra. Itt a megadott osztály lehet a háromélű gráfok halmaza vagy egy adott  $H$  gráf. Szükséges és elégséges feltételek is érdekesek. Az előbbi azt jelenti, hogy ellenpéldákat keresünk.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Barát J: Karmok és útfelbontások

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

### 3. *Téma: Extremális kérdések uniform hipergráfokra*

*Témavezető:* Barát János

*Rövid leírás:* Egy adott  $n$  elemű csúcshalmazon tekintsünk  $r$ -elemű részhalmazokat, melyeket éleknek nevezünk. A csúcsok és az élek együtt egy  $r$ -uniform hipergráfot alkotnak. Két él metszi egymást, ha van közös csúcuk. Ha bármely két él metszi egymást, akkor a hipergráf metsző. Egy csúcshalmaz lefogó, ha minden élet metsz. Világos, hogy egy metsző  $r$ -uniform hipergráfban a legkisebb lefogó mérete legfeljebb  $r$ . Erdős és Lovász kérdezte, hogy legalább hány éle van egy  $r$ -uniform metsző hipergráfnak, ha a legkisebb lefogó mérete  $r$ . Az  $r$ -uniform hipergráfok között speciálisak az  $r$ -osztályúak. Ryser egyik sejtésének alesete metsző hipergráfokra azt mondja, hogy mindig van legfeljebb  $r - 1$  elemű lefogó. Ezen kérdéseket vizsgálánk.

*Ajánlott irodalom:*

[1] P. Erdős and L. Lovász: Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions.

[2] T. Mansour, C. Song, R. Yuster: A comment on Ryser's conjecture for intersecting hypergraphs.

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

4. **Téma: Fehérjehálózatok analízise gráfelméleti eszközökkel**  
*Témavezető:* Grolmusz Vince  
*Szak:* alkalmazott matematikus
5. **Téma: Fehérjemolekulák térbeli szerkezetének összehasonlítása, ezzel fehérje-kölcsönhatások előrejelzése**  
*Témavezető:* Grolmusz Vince  
*Szak:* alkalmazott matematikus
6. **Téma: A Fregatt fehérje-gyógyszermolekula dokkolóprogram továbbfejlesztése javított globális optimalizálási stratégiával**  
*Témavezető:* Grolmusz Vince  
*Szak:* alkalmazott matematikus
7. **Téma: Metabolikus hálózatok fluxusának modellezése differenciálegyenletekkel illetve lineáris programozással**  
*Témavezető:* Grolmusz Vince  
*Szak:* alkalmazott matematikus
8. **Téma: Biológiai adatbázisok adatbányászata kombinatorikus biomarkerek keresésére**  
*Témavezető:* Grolmusz Vince  
*Szak:* alkalmazott matematikus
9. **Téma: Végtelen kombinatorika**  
*Témavezető:* Komjáth Péter  
*Szak:* matematikus
10. **Téma: PCF-elmélet**  
*Témavezető:* Komjáth Péter  
*Szak:* matematikus
11. **Téma: Komplex jelenségek, hálózatok modelljei**  
*Témavezető:* Lukács András  
*Rövid leírás:* A szakdolgozat célja olyan komplex jelenségek modellezésére, hálózatok jellemzésére használható matematikai, algoritmikus módszerek bemutatása és vizsgálata, amelyek az adatbányászat, adattudomány „big data” területén is alkalmazhatók.  
A téma kidolgozása két formában történhet. Az egyik megközelítésben egy kiválasztott rendszert, jelenséget az azt leíró nagyobb mennyiségű adat alapján vizsgálunk, és az adott adathalmazhoz kapcsolódó üzleti vagy tudományos alkalmazás szempontjából fontos kérdések közül egyre vagy kettőre keresünk választ. Ez a megközelítés inkább alkalmazott matematikusok szakdolgozatához illik.  
A másik megközelítés során egy kiválasztott matematikai modell(család) és a hozzá kapcsolódó algoritmusok vizsgálatával foglalkozunk egyrészt elméleti szempontokból, másrészt szimulált és valós adatokon végzett méréseken keresztül.  
A vizsgálható jelenségek, rendszerek: szociális és más hálózatok, info- és telekommunikációs eszközök, a humán viselkedés jelenségei. Az modellezés matematikai módszerei az



algoritmusok, a valószínűség számítás, a lineáris algebra és a kombinatorika (gráfelmélet) területéről jönnek. Előny a C++ és/vagy Python nyelv ismerete.

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

## 12. *Téma: Feladatok a sakktáblán és más gráfokon*

*Témavezető:* Nagy Zoltán

*Rövid leírás:* Számos általános és középiskolai (verseny)feladatban játszik kulcsszerepet a sakktábla. A szakdolgozat célja egy olyan anyagot összeállítani, ami a megoldási megközelítések alapján egy sorban egymásra épülő feladatsort összeállít; bemutatja, hogyan volna lehetséges megközelíteni a témát a felfedezett matematika módszertanával, majd kiterjeszti a feladatok megoldhatósági körét annak meggondolásával, hogy milyen gráfelméleti háttér húzódik meg az egyes feladatok mögött. (Hamilton körök létezése, teljes párosítások páros gráfokban, független halmaz mérete gráfokban, stb.)

*Ajánlott irodalom:* Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből

*Szak:* tanári

## 13. *Téma: Síkgráfok reprezentációi*

*Témavezető:* Nagy Zoltán

*Rövid leírás:* Sokat vizsgált kérdés, hogy különböző gráfcsaládok, különösen a síkgráfok lerajzolása minimális számú (ill. 0 db) élmetszés segítségével hogyan történhet; vagy megtehető-e ha bizonyos feltételeket szabunk, például valamennyi részt már lerajzoltunk a gráfból. Emellett számos reprezentációs tétel ismert síkgráfok reprezentálásáról bizonyos egyszerű halmazok (háromszögek, körök, szakaszok) metszési gráfjaként. A szakdolgozat célja ezeket összegyűjteni és rendszerezni.

*Ajánlott irodalom:* Tutte, Thomassen, Kratochvil cikkei, és a Koebe–Andreev–Thurston-tétel környéke

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

## 14. *Téma: Polinomok és gráfok*

*Témavezető:* Nagy Zoltán

*Rövid leírás:* Számos gráfelméleti kérdésben a struktúra leírásában őket leíró polinomok (eltűnési helyei vagy függetlensége) játszik kulcsszerepet. A szakdolgozat célja körbejárni és ismertetni az alkalmazott módszereket

*Ajánlott irodalom:* N. Alon: The Combinatorial Nullstellensatz; A. Blokhuis cikkei...

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

## 15. *Téma: Véges geometriát használó extrémális gráfelméleti konstrukciók*

*Témavezető:* Nagy Zoltán

*Rövid leírás:* Jól ismert, hogy a véges síkokból eredő gráfok számos Turán-típusú és egyéb extrémális gráfelméleti kérdésben szolgáltatják az extrémális struktúrát. A szakdolgozat célja ezeket áttekinteni.

*Ajánlott irodalom:* Füredi-Simonovits: The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

## 16. *Téma: Legnagyobb és legkisebb elem keresése hazugságokkal*

*Témavezető:* Pálvölgyi Dömötör

*Szak:* matematikus

17. *Téma: Hogyan lehet egy gráfot úgy síkbarajzolni, hogy minden él egy szakasz legyen, és minél kevesebb szakaszt használjunk?*  
*Témavezető: Pálvölgyi Dömötör*  
*Szak: matematikus, alkalmazott matematikus*
18. *Téma: Hogyan rajzoljunk digitálisan egyeneseket, amik csak egyszer metszhetik egymást?*  
*Témavezető: Pálvölgyi Dömötör*  
*Szak: alkalmazott matematikus*
19. *Téma: Kombinatorikus optimalizálási módszerek a villamos hálózatok elméletében*  
*Témavezető: Recski András*  
*Szak: alkalmazott matematikus*
20. *Téma: Matroidelmélet, matroidok összegével kapcsolatos vizsgálatok*  
*Témavezető: Recski András*  
*Szak: matematikus*
21. *Téma: Kombinatorikus optimalizálási módszerek alkalmazása a statikában*  
*Témavezető: Recski András*  
*Szak: alkalmazott matematikus*
22. *Téma: Véges geometria*  
*Témavezető: Szőnyi Tamás*  
*Szak: matematikus*
23. *Téma: Szimmetrikus struktúrák*  
*Témavezető: Szőnyi Tamás*  
*Szak: matematikus*
24. *Téma: Kódelmélet*  
*Témavezető: Szőnyi Tamás*  
*Szak: matematikus*

---

## Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

---

1. *Téma: A rendszerkockázat különböző sztochasztikus modelljei (foglalt)*  
*Témavezető: Backhausz Ágnes*  
*Rövid leírás: Az utóbbi években a figyelem előterébe került a banki rendszerkockázat modellezése, vagyis annak megértése, hogy egy piaci szereplőnél bekövetkező történések (pl. nagyobb veszteség, esetleg csőd) hogyan hatnak a többi szereplőre és a rendszer egészére. A rendszerkockázat mérésére, illetve a bekövetkező hatások terjedésének vizsgálatára különböző matematikai modellek születtek. Vannak sztochasztikus differenciálegyenleteket*

használó, véletlen pontfolyamatokat (például Hawkes-folyamatokat), illetve véletlen gráfokat alkalmazó megközelítések is. A feladat a szakirodalom alapján a különféle matematikai módszerek összehasonlítása, az előnyök és hátrányok bemutatásával, illetve valamelyik megközelítéshez saját számítógépes szimuláció készítése.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] E. Errais, K. Giesecke and L. R. Goldberg: Affine point processes and portfolio credit risk. SIAM Journal on Financial Mathematics 1 (2010), no. 1., 642–665.
- [2] A. Lesniewski, A. Richter: Managing counterparty credit risk via BSDEs. arXiv:1608.03237 [q-fin.RM]

*Szak:* biztosítás- és pénzügyi matematika (mindkét szakirány)

## 2. *Téma: Véletlen gráfok és gráflimeszek*

*Témavezető:* Backhausz Ágnes

*Rövid leírás:* A nagy hálózatok elméleti szempontból történő kutatásának egyik legtöbbet vizsgált területe a gráfsorozatok konvergenciájának vizsgálata lett. Erre több különböző fogalom is született az utóbbi évtizedben. A megfelelő fogalmak megtalálása mellett ebben a témában azt a kérdést is több szempontból vizsgálták, hogy bizonyos módon sorsolt véletlen gráfok sorozata mikor konvergens (például 1 valószínűséggel). Természetesen ez is függ a gráfkonvergencia definíciójától.

A feladat egyrészt a véletlen gráfok konvergenciájáról szóló szakirodalom feldolgozása elsősorban a pozitív élsűrűségű esetre koncentrálva, amikor a sorozat határértéke egy  $[0, 1] \times [0, 1]$ -en értelmezett szimmetrikus, mérhető függvény lehet. A feladat másik része annak vizsgálata (akár elméleti, akár számítógépes szimulációs módszerekkel), hogy a konvergencia sebessége hogyan függ a modell pontos választásától vagy attól, hogy milyen távolságfogalmat használunk a gráfok között. Ez utóbbira két lehetőség például az úgynevezett vágástávolság, illetve a "jumble norm". Kiindulópontként az [1] cikkben szereplő "randomly grown attachment" gráfmodell szolgálna, melyben a gráfhoz az  $n$ . lépésben hozzávetett csúcs  $1 - i/n$  valószínűséggel kötődik hozzá a már létező  $i$ . csúcshoz, majd a régi csúcsok közötti további élek véletlenszerű behúzására is van lehetőség.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V.T. Sós and K. Vesztegombi: Limits of randomly grown graph sequences, Eur. J. Combin. 32 (2011), 985-999.
- [2] L. Lovász: Large networks and graph limits. American Mathematical Society, 2012.
- [3] B. Szegedy and L. Lovász, Limits of dense graph sequences, J. Comb. Theory B 96 (2006), no. 6, 933–957.

*Szak:* alkalmazott matematikus, matematikus

## 3. *Téma: Szenzorhálózatok a síkon*

*Témavezető:* Gerencsér Balázs

*Rövid leírás:* Egy teret szeretnénk úgy megfigyelni, hogy néhány szenzort elhelyezünk rajta. Tudjuk, hogy ezek függetlenül valami  $p$  valószínűséggel meghibásodhatnak. A szenzoroknak a konfigurációját úgy értékeljük, hogy mi az a távolság, amihez a tér minden pontjához van azon távolságon belül szenzor. Szeretnénk ennek a távolságnak a várható értékét minimalizálni, amikor a szenzorok meghibásodhatnak.

Ha a megfigyelendő tér egy szakasz, azt elég jól értjük, illetve nemrég egy MSC dolgozatban a téma további problémái kerültek feldolgozásra. Érdekes lenne az alábbi kérdések alapján tovább kutatni (a továbbiak angolul):

- Many of your computation involve the square grid. This is probably not optimal. It is worth trying the hexagonal/triangular grid as an alternative.
- Some theoretical estimates would be nice here (for the regular grid), and shouldn't be too hard. Roughly what could be done is the following:
  - the distance for the worst point is bounded by distance from the closed grid-point + the worst cost for a grid point.
  - we now compute (for each node) the distribution of a quantity that bounds the cost at that node: suppose the node is in  $(0, 0)$  and replace the grid by an alternative (strictly better/strictly worse) one for which all nodes are on concentric circles centered on  $(0, 0)$ , and whose radius evolve linearly (or nicely). Ex: for an hexagonal grid, you would have 1 node in the center, 6 nodes on the first circle, some more on the second circle (we expect the number of nodes to evolve linearly with the index of the circle). Using this simplified setting and the uniform probability of failure, one can estimate the distribution of the cost.
  - based on the result of (b) one can estimate the worst cost for the whole system. (Maybe this even extends to 3D, but that's a bit far fetched.)
- It could be useful again to have a uniform domain to work on, and use the torus instead of the square.
- Investigation of Monte-Carlo simulations for random placement: there are "rare" cases where a lot of sensors fail, or they are placed in a stupid random way. These have a much higher cost. In some cases, it is possible that these events would significantly affect the average cost while remaining mostly invisible in Monte-Carlo simulations. It should be checked that this does not cause a problem here, that is, the probability of having such a bad setup decays much faster as the cost increases. (formally, this means analyzing the accuracy of the Monte Carlo simulation)
- The gradient method to improve is hard as computing the gradient itself is computationally intensive (to check all the possible subsets of active sensors). One way around could be the "stochastic gradient" method, where the gradient is computed using only 1000 random instances of sensor failures (instead of all the  $2^n$ ) of them. Even more, this would allow to simulate for much more nodes, say 200 or more, and it would be really interesting to see if the square/hexagonal grid would start to appear at least in the central area!
- Convexity: The problem seems not really convex, so this gradient optimization should be restarted several times from different starting positions to have a good setup. Or maybe other non-convex optimization methods?
- Random placement: We were thinking of tweaking a bit the random placement concept, for example, to not make them independent, but make them repel a bit each other. Say, for example that the density of a given setup  $x_1, \dots, x_n$  is proportional to  $\prod_{i \neq j} \|x_i - x_j\|$  (maybe include the distance from the edges too) Of course the first question is how to generate this thingp One way could be to start from a uniform independent placement, then pick one of sensors and rerandomize it according to this

new density. Keep doing this for a while, then it should be pretty close (this has a nice name, maybe Gibbs sampling? not sure. Already in the Markov chain mixing time domain.)

- For square/hex grid, it would be nice to have some simulations.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] P Frasca, F. Garin, B Gerencsér, JM Hendrickx, One-dimensional coverage by unreliable sensors, SICON 2015,
- [2] [http://essay.utwente.nl/66951/1/Broekema\\_AppliedMathematics\\_EWI.pdf](http://essay.utwente.nl/66951/1/Broekema_AppliedMathematics_EWI.pdf)

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

#### 4. *Téma: Permutations preserving convergence of conditionally convergent series*

*Témavezető:* Gerencsér Balázs

*Rövid leírás:* Az alapkérdés az, hogy egy feltételesen konvergens sort mikor tesz divergenné egy permutáció (vagy mikor változtatja meg a limeszt), és itt mi a sorok és kapcsolódó permutációk struktúrája.

Itt meg lehetne nézni különböző véletlen permutációk esetét. Pl. elképzelhető olyan, hogy  $X_n \sim N(n, \sigma^n)$  változókkal a permutáció az  $X_n$  értékeinek sorrendjét mutatja, így ez eléggé "lokális" permutáció lesz. Talán 1 valószínűséggel minden sort békén hagy, ha  $\sigma_n$  elég gyorsan lecsengő. Sőt, lehetne a sor is véletlen meg a permutáció is, itt mit mondhatunk?

*Ajánlott irodalom:*

- [1] R P Agnew, Permutations preserving convergence of series, Proceedings of the American Mathematical Society, 1955
- [2] G Tusnády, On rearrangements of infinite series, Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eotvos Nominatae 1966
- [3] B Gerencsér: On convergence sets of conditionally convergent series, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 2011

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

#### 5. *Téma: Relaxed consensus on the line*

*Témavezető:* Gerencsér Balázs

*Rövid leírás:* Nowadays distributed computing systems gain more and more ground. Here we analyze the efficiency of a simple example.

There are  $n$  sensors on a line and we want them to average their measurements. At each time step, every sensor may communicate with its neighbors and update its measurement value based on the acquired information. How much time does it take for them to agree, technically speaking to "reach average consensus"?

It has been shown that if each sensor broadcasts its current value, and update is happening using smooth functions, then the time needed is at least of the order of  $n^2$ .

Is it possible to speed up things if some conditions are relaxed? Or in contrary, can we prove the bound of  $n^2$  for a wider class of algorithms? Possibilities include

- a) Allowing each sensor to store few more bits, or real numbers.
- b) Allow differentiated messages instead of broadcast ones.
- c) Sensors may use the last  $k$  values to determine the current one.
- d) Use non-smooth or non-continuous functions for update.

It is definitely possible to reach average consensus in  $\approx n$  steps for a) + b) or if the update functions can be very weird (say, not even measurable).

Safety questions:

- Try a huge variety of update functions and simulate what they do.
- Check also for certain non-smooth ones to see if they help.
- Prove the mixing time for some simple but nonstandard update functions (say polynomial, piecewise linear).
- Prove the mixing time for linear homogeneous updates when the previous value can also be used.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] A Olshevsky, J N Tsitsiklis, A lower bound for distributed averaging algorithms on the line graph, IEEE CDC 2010
- [2] S Boyd, P Diaconis, L Xiao, Fastest mixing Markov chain on a graph, SIAM review, 2004
- [3] S Boyd, P Diaconis, J Sun, L Xiao, Fastest mixing Markov chain on a path, The American Mathematical Monthly, 2006

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

## 6. *Téma:* **Random lattice point generation**

*Témavezető:* Gerencsér Balázs

*Rövid leírás:* You could either spend your day flipping coins or choose to use some pseudorandom generator. Let's do the latter, and try to do it efficiently.

One may generate a random number modulo  $p$  by starting at some  $X_0 \in \mathbb{Z}_p$ , then iteratively defining

$$X_n = X_{n-1} + \varepsilon_n,$$

where  $\varepsilon = -1, 0, 1$  with probability  $1/3$  for each. This works, but takes  $\approx p^2$  steps to get a near uniform number modulo  $p$ . If we instead do

$$X_n = 2X_{n-1} + \varepsilon_n,$$

the number of steps needed suddenly drops to  $\log p$ .

It would be interesting to extend this results answering the following questions:

- What happens if we change the multiplication factor from 2 to something else?
- How does the analogous process performs on  $\mathbb{Z}_p^d$ ?
- Can we quickly generate a random lattice point of a convex set using a similar idea?

Safety questions:

- Just simulate the process with different constants, different dimensions.
- Get any convex shape such that you can map any outside point to inside, do the process, simulate if it converges, if it converges to uniform, etc.
- Do the survey.
- Fixed  $p$ , fixed 2, play with the  $\varepsilon_n$ . Quantify how it determines speed. E.g. on one end we know it takes  $\log p$  time, on the other end it takes 1 time.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] F R K Chung, P Diaconis, R L Graham, Random walks arising in random number generation, The Annals of Probability, 1987
- [2] P Diaconis, Some things we've learned (about Markov chain Monte Carlo), Bernoulli, 2013

[3] M Hildebrand, A lower bound for the Chung-Diaconis-Graham random process, Proceedings of the American Mathematical Society, 2009

*Szak:* matematikus, alkalmazott matematikus

## 7. *Téma: Atlasz modell*

*Témavezető:* Prokaj Vilmos

*Rövid leírás:* A szakdolgozat célja a vonatkozó irodalom áttekintése.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Ichiba T, Papathanakos V, Banner A, Karatzas I and Fernholz R (2011), "Hybrid Atlas models", Ann. Appl. Probab.. Vol. 21(2), pp. 609-644.

[2] Banner AD, Fernholz R and Karatzas I (2005), "Atlas models of equity markets", Ann. Appl. Probab.. Vol. 15(4), pp. 2296-2330.

[3] Fernholz R (2001), "Equity portfolios generated by functions of ranked market weights", Finance Stoch.. Vol. 5(4), pp. 469-486.

*Szak:* biztosítási és pénzügyi matematika MSc

## 8. *Téma: Érzékenységszámítás Malliavin kalkulussal*

*Témavezető:* Prokaj Vilmos

*Rövid leírás:* Egy származtatott termék árának függése a különböző modell paramétereiktől fontos mennyiség a pénzügyi matematikában. Ezeknek az érzékenységeknek a számítása a legegyszerűbb modellektől eltekintve Monte-Carlo módszerekkel történik. A naív numerikus deriválás helyett bizonyos modellekben lehet ügyesebben is számolni. A szakdolgozat célja a vonatkozó irodalom áttekintése. Lehetőség van a megismert módszerek implementálására, hatékonyságuk numerikus vizsgálatára.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Fournié, E., Lasry, J.-M., Lebuchoux, J., and Lions, P.-L. (2001). Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II. Finance Stoch., 5(2):201–236.

[2] Fournié, E., Lasry, J.-M., Lebuchoux, J., Lions, P.-L., and Touzi, N. (1999). Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. Finance Stoch., 3(4):391–412.

*Szak:* biztosítási és pénzügyi matematika

## 9. *Téma: Belső információ modellezése filtrációbővítéssel*

*Témavezető:* Prokaj Vilmos

*Rövid leírás:* Matematikailag a belső információt, azaz az árfolyam alakulására vonatkozó plusz információt, filtráció bővítéssel lehet modellezni. A filtráció bővítésével az árfolyamat szemimartingál felbontása megváltozhat. Ennek eredményeként belső kereskedő által elérhető utility magasabb lehet, mint a közönséges befektető által elérhető. Bizonyos esetben, de nem mindig, arbitrázs lehetőség is kialakulhat.

A szakdolgozat célja a vonatkozó irodalom áttekintése, az árfolyamat felbontásának kiszámítása egyszerűmodellekben, ill. bizonyos típusú bővítések esetében.

*Ajánlott irodalom:*

[1] Amendinger, J., Imkeller, P., and Schweizer, M. (1998). Additional logarithmic utility of an insider. Stochastic Process. Appl., 75(2):263–286.

- [2] Imkeller, P., Pontier, M., and Weisz, F. (2001). Free lunch and arbitrage possibilities in a financial market model with an insider. *Stochastic Process. Appl.*, 92(1):103–130.
- [3] Imkeller, P. (2003). Malliavin’s calculus in insider models: additional utility and free lunches. *Math. Finance*, 13(1):153–169. Conference on Applications of Malliavin Calculus in Finance (Rocquencourt, 2001).

*Szak:* biztosítási és pénzügyi matematika

## 10. *Téma: Modern statisztikai módszerek, alkalmazások*

*Témavezető:* Próhle Tamás

*Rövid leírás:* A jelentkező hallgatók érdeklődésének megfelelő, szabadon választott statisztikai téma

*Ajánlott irodalom:* Tipikusan angol nyelvű cikkek

*Szak:* alkalmazott matematikus

## 11. *Téma: Az internetes kommunikáció kriptográfiai biztonságának néhány matematikai kérdése*

*Témavezető:* Szabó István

*Rövid leírás:* Az internetes kommunikáció biztonságának erősítése nagyon sokrétű matematikai megközelítést is igényel. A titkosítási algoritmusok az adó és vevo oldalon olyan felek között is közös titkosító kulcsok kialakítását igénylik, akik sohasem találkoztak. Ennek interneten legelterjedtebb megoldása szerepel az [1] cikkben. Ez a módszer nagy rendű véges csoport, ebben primitív elem találasát, valamint megfelelő véletlen elemek generálását és az algoritmus szerinti alkalmazását igényli. Míg az első két problémára kidolgozott módszerek és szabványok vannak (pl. [2], [3], [4]), melyek nem mindegyike teljesíti az elvárt követelményeket (ennek elemzése is feladat), addig a determinisztikus számítógépen történő, (nem pseudo-) véletlenszám generálás, a megfelelő szabadsági fok bizonyítása nem egyszerű feladat. Léteznek gyakorlati eljárások, pl. banki rendszerekben, vagy a LINUX, NOVEL véletlenszám generátora, illetve a problémára elméleti megközelítések (pl. [5]), valamint a kriptográfiai alkalmazásokra kidolgozott statisztikai tesztek (pl. [6], vagy a BSI követelménye [7]). A szakdolgozó feladata néhány elterjedt vagy új módszer elemzése, beleértve ezen kriptográfiai célú véletlenszám generátorok tesztelését is.

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Diffie-Hellmann, New Direction in Cryptography, *IEEE Transactions on Information Theory*, Volume 22 Issue 6, November 1976
- [2] RFC 2631 Diffie-Hellman Key Agreement Method
- [3] RFC 5114 Additional Diffie-Hellman Groups for Use with IETF Standards
- [4] RFC 5246 The Transport Layer Security (TLS) Protocol Version 1.2
- [5] Qing Zhou, Xiaofeng Liao, Kwok-wo Wong, Yue Hu, True random number generator based on mouse movement and chaotic hash function, *Chaos Solitons and Fractals*, 40 (2009), 2286-2293
- [6] NIST, A statistical test suite for random and pseudo-random number generators for cryptographic applications, 2010
- [7] A proposal for: Functionality classes for random number generators. 18 September 2011. AIS 20 / AIS 31. [https://www.bsi.bund.de/SharedDocs/Downloads/DE/BSI/Zertifizierung/Interpretationen/AIS\\_31\\_Functionality\\_classes\\_for\\_](https://www.bsi.bund.de/SharedDocs/Downloads/DE/BSI/Zertifizierung/Interpretationen/AIS_31_Functionality_classes_for_)



## 12. *Téma: Dynamic Collar Strategies under Solvency II*

*Témavezető:* Márkus László (közösen a SolvencyAnalytics cég munkatársaival)

*Rövid leírás:* Equity charges for insurance companies under Solvency II are not only substantial but also linked to a stochastic variable, the so-called symmetric adjustment (SA). The symmetric adjustment varies between +/-10% around standard equity charges of 39% for type 1 equities and 49% for type 2 equities. The SA may not only lead to massive capital charges of up to 49% or 59% but also introduces a source of uncertainty into the financial system as future capital charges become stochastic.

Our intuition tells that in times where equity charges are high due to a positive SA, equity exposure should be lower than in times of negative SA. The aim of this thesis topic is to find trading strategies that exploit this property by achieving long term average returns at lower capital charges.

A way of reducing equity charges is by self financing collar strategies. A "static" collar strategy would keep the put strike in a constant proportion to the equity's price at each rebalancing date and choose the call's strike price to finance the put option. By this, downside risk and thus, equity capital charge would be reduced at the expense of giving up upside participation. In contrast to the above, a dynamic collar strategy would choose the put's strike price as a function of the time dependent symmetric adjustment (published monthly on EIOPA's website and which is calculated by comparing current index level with a moving average level of the index). According to our intuition, such dynamic collar strategies should - in the long run - provide lower average equity capital charges while not changing average portfolio performance significantly compared to a static strategy.

The most simple way of backtesting such dynamic collar strategies is using index options on well known indices. If historical option prices are unknown, you may calculate historical prices with some assumptions on implied volatility and backtest the dynamic collar strategy. The advantage of this method is that for well-known indices, index levels as well as the symmetric adjustments are available (or can be calculated) for over 100 years and that backtests over long periods can be performed.

Note that the results of this thesis have direct practical relevance as the strategy can be easily implemented by some index tracker (ETFs, index funds, index futures etc.) and the corresponding index options.

Goals of the thesis

- Review the Solvency II risk model (pillar 1) with focus on equity charges and symmetric adjustment
- Review and categorize option strategies with focus on self financing collars
- Develop a dynamic collar strategy where the put option's strike is a function of the symmetric adjustment
- Calibrate and backtest this strategy with historical data using a) observed index option prices and b) for long-term studies using calculated option prices
- Apply these strategies to major equity indices (e.g. Eurostoxx, S&P 500, DAX)

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Neftci: Principles of Financial Engineering, 2. Edition, Academic Press, 2008, Chapter 7f
- [2] <https://eiopa.europa.eu/>
- [3] <https://eiopa.europa.eu/activities/insurance/solvency-ii/index.html>
- [4] <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=OJ:L:2015:012:FULL&from=EN>
- [5] <https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/symmetric-adjustment-of-the-equity-capital-charge>
- [6] Ahn, D.-H., Boudoukh, J., Richardson, M. and Whitelaw, R. F. (1999), Optimal Risk Management Using Options. The Journal of Finance, 54: 359-375
- [7] Brown, D.-B., Smith J.E.(2011): Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Costs: Heuristics and Dual Bounds. Management Science, Vol 57, No. 10: 1752-1770
- [8] Shreve, S. E., H. M. Soner. 1994. Optimal investment and consumption with transaction costs. Ann. Appl. Probab. 4 (3) 609-692.
- [9] Szado, Kazemi (2008): Collaring the Cube: Protection Options for a QQQ ETF Portfolio. Technical Document.
- [10] Yim, Lee, Yoo, Kim (2011): A Zero-Cost Collar Option Applied to Materials Procurement Contracts to Reduce Price Fluctuation Risks in Construction. World Academy of Science, Engineering and Technology, <http://waset.org/Publication/a-zero-cost-collar-option-applied-to-materials-procurement-contracts-to-reduce-price-fluctuation-risks-in-construction/2482>

*Szak:* alkalmazott matematikus, biztosítási és pénzügyi matematika (kvantitatív pénzügy szakirány)

### 13. *Téma: Convertible Bond Pricing under Solvency II and the Swiss Solvency Test*

*Témavezető:* Prokaj Vilmos (közösen a SolvencyAnalytics cég munkatársaival)

*Rövid leírás:* Convertible Bonds are corporate bonds with an embedded option to convert into a predefined number of company shares. Consequently, the convertible bond is priced similarly as a corporate bond if the equity price is low (i.e. significantly below conversion price). However, if equity price is significantly above conversion price the convertible bond is likely to be converted and its price behaviour is similar to the underlying shares.

The application of convertible bond pricing models to Solvency II is at the core of this thesis.

#### Relevancy for Solvency II

Convertible bonds are a hybrid asset class between corporate bonds and equities. They are characterized by a so-called convex payoff profile: a convertible bond's price reacts more to positive equity shocks than to negative shocks of equal absolute size.

As Solvency II uses Value-at-Risk and expected shortfall as risk measures instead of volatility, financial instruments with convex payoffs are likely to benefit under these regulatory regimes. In order to demonstrate the impact of this complex asset class on an insurance company's solvency coverage ratio, the applied asset pricing model has to be able to incorporate specific risk factors. These are the shocks defined in the market risk module of Solvency II.

Note that asset pricing models that tend to produce "conservative" results may be favoured from regulatory perspective.

Goals of the Thesis:

- Literature review of different convertible bond models
- Review of main Solvency II market risk factors
- Implementation of convertible bond pricing functions in Python
- Compare these with empirical data - and if possible, adjust models to produce conservative results (rather underpricing than overpricing under negative shocks)

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Balazs Mezöfi, Convertible Bond Pricing - An Empirical Study for Solvency II, Master Thesis paper, Corvinus University / ELTE, 2015
- [2] Jan De Spiegeleer, Wim Schoutens and Philippe Jabre: The Handbook of Convertible Bonds: Pricing, Strategies and Risk Management. Wiley 2011
- [3] Daniel Niedermayer: Convertible Bonds - Fundamentals, Asset Allocation, Solvency. Credit Suisse 2014. [https://www.credit-suisse.com/asset\\_management/downloads/marketing/wp\\_broschuere\\_convertibles\\_eng.pdf](https://www.credit-suisse.com/asset_management/downloads/marketing/wp_broschuere_convertibles_eng.pdf)
- [4] Bardhan, I.–Bergier, A.–Derman, E.–Dosembet, C.–Kani, I. (1994): Valuing Convertible Bonds as Derivatives. Technical Report, Goldman Sachs.
- [5] Batten, J. A.–Khaw, K.–Young, M. R. (2014): Convertible Bond Pricing Models. Journal of Economic Surveys, Vol. 28. No. 5, pp. 775-803.
- [6] Chambers, D. R. – Lu, Q. (2007): A Tree Model for Pricing Convertible Bonds with Equity, Interest Rate, and Default Risk. The Journal of Derivatives, Vol. 14, pp. 25-46.
- [7] Tsiveriotis, K.–Fernandes, C. (1998): Valuing Convertible Bonds with Credit Risk. Journal of Fixed Income, Vol. 8. No. 2, pp. 95-102.
- [8] Zabolotnyuk, Y.–Jones, R.–Veld, C. (2010): An Empirical Comparison of Convertible Bond Valuation Models. Financial Management, Vol. 39. No. 2, pp. 675-706.

*Szak:* alkalmazott matematikus, biztosítási és pénzügyi Matematika (kvantitatív pénzügy szakirány)

#### 14. **Téma: Fixed Income Portfolio Optimization under different risk measures (Jointly supervised with SolvencyAnalytics)**

*Témavezető:* Michaletzky György (közösén a SolvencyAnalytics cég munkatársaival)

*Rövid leírás:* The standard approach in portfolio optimization on the equity market is the mean-variance optimization theory which was introduced by Markowitz. This theory was directly applicable to the equity market, and became a standard in that area. However, the majority of the world's investments are held in fixed income securities, where the application of this model is not as straightforward as for equities. Therefore a model extension for fixed income securities has been proposed in the literature by including interest rate term structure models into the mean-variance framework. – The changes in the last decades in the interest rate levels and volatilities, and pressure from financial regulators are further increasing attention to fixed income portfolio optimization methodologies. As the risk estimation by variance was replaced by other risk measures (VaR, ES, etc.) in the market, the classic mean-variance optimization techniques became outdated.

In the context of Solvency II and the Swiss Solvency Test, VaR and ES are the respective measures assessing quantitative risk. Portfolios that are optimized according to the above risk measures are likely to be treated more favorably under the respective regulations. From a portfolio management point of view, note that most portfolios have investment constraints on ratings, sectors, currency, and other characteristics. Including such constraints into the optimization problem is therefore essential.

Goals of the Thesis

- Formulate the portfolio optimization problem with interest rate term structure models (e.g. Vasicek, HW, HJM)
- Apply different types of risk measures in the optimization
- Analyze the differences and connections between these models and model selection effects on the optimal portfolio
- Perform an empirical study on a bond market
- Implement term structure models and fixed income optimizer in Python or Matlab
- Implement and analyze different bond market constraints (linear constraints on duration, sectors, currencies, regions, etc.)
- If possible, assess the impact of the resulting portfolios under Solvency II (i.e. Solvency Capital Requirement)

*Ajánlott irodalom:*

- [1] Fabozzi/Mann: The Handbook of Fixed Income Securities. 8th edition, McGraw-Hill, 2011
  - [2] O Korn, C Koziol (2006): Bond Portfolio Optimization:: A Risk-Return Approach, The Journal of Fixed Income
  - [3] R. Tyrrell Rockafellar, Stanislav Uryasev (2000): Optimization of conditional value-at-risk, Journal of risk
  - [4] Yasuhiro Yamai, Toshinao Yoshida (2002): Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition, and Optimization, Monetary and economic studies
  - [5] Jessica James, Nick Webber (2000): Interest Rate Modelling, John Wiley and Sons
  - [6] Mark Fisher, Douglas Nychka, David Zervos (1994): Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines, FEDS 95-1
  - [7] Jerry Yi Xiao (2001): Term Structure Estimations for U.S. Corporate Bond Yields. RiskMetrics Journal 2(1)
  - [8] Brigo/Mercurio: Interest Rate Models - Theory and Practice. Springer Finance, 2006
- Szak: alkalmazott matematikus, biztosítási és pénzügyi matematika (kvantitatív pénzügy szakirány)*

## 15. **Téma: VaR and ES Optimization of multi-asset-class ETF portfolios under regulatory constraints (Jointly supervised with SolvencyAnalytics)**

*Témavezető:* Michaletzky György (közösen a SolvencyAnalytics cég munkatársaival)

*Rövid leírás:* As the regulatory pressure grows, models which are able to consider the new definitions of risk, and procedures which can handle the related constraints and limits became increasingly important to financial market participants. To handle portfolio construction problems, the Markowitz type mean-variance optimization method is one of the key analytical tools worldwide. However, by the evolution of risk measures the classic

theory became outdated and the extension of the model became inevitable. Today the two most important risk measures accepted and applied by regulations are Value at Risk and Expected Shortfall.

The aim of this thesis topic is to include the above mentioned risk measures in portfolios of Exchange Traded Funds (ETFs). ETFs have been an increasingly popular investment vehicles in the last 20 years, mainly due to their broad diversification, low costs and simple tradability. A portfolio of ETFs benefits from these funds' favourable characteristics while diversifying into different asset classes.

For Solvency II regulated investors a portfolio that is optimized towards VaR or ES is likely to be attractive. Consider investment constraints e.g. on asset classes in the optimization framework and if possible, include Solvency II related aspects such as the various market Solvency Capital Requirements and the equity symmetric adjustment.

Goals of the Thesis

- Formulate the portfolio optimization problem with different risk measures, wherever needed introduce approximation methodologies
- Analyze the set of efficient portfolios under different assumptions on return distribution
- Analyze changes in the efficient frontiers invoked by the different model variations
- Perform an empirical study on ETF markets
- Analyze the differences and connections between these models and model selection effects on the optimal portfolio results
- Implement optimizer in Python or Matlab
- Introduce Solvency II related aspects (e.g. Solvency Capital Requirement and symmetric adjustment)

*Ajánlott irodalom:*

- [1] R. Tyrrell Rockafellar, Stanislav Uryasev (2000): Optimization of conditional value-at-risk, Journal of risk
- [2] Yasuhiro Yamai, Toshinao Yoshida (2002): Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition, and Optimization, Monetary and economic studies
- [3] Pavlo Krokmal, Jonas Palmquist, Stanislav Uryasev (2001): Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints, Journal of risk
- [4] Dimitris Bertsimas, Geoffrey J. Laupreteb, Alexander Samarovc (2004): Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications, Journal of Economic Dynamics and Control

*Szak:* alkalmazott matematikus, biztosítási és pénzügyi matematika (kvantitatív pénzügy szakirány)

## 16. **Téma: Solvency II Market Risk: Does the Calibration of the Standard Formula still hold? (Jointly supervised with SolvencyAnalytics)**

*Témavezető:* Zempléni András (közös a SolvencyAnalytics cég munkatársaival)

*Rövid leírás:* Thesis topic: Solvency II requires assets' and liabilities' valuation under market scenarios defined in the market risk module. By applying these scenarios on an insurance company's balance sheet, the solvency capital requirement (SCR) and eventually,

an insurer's solvency coverage ratio can be calculated. With over 4000 companies with over 7tr EUR assets the regulatory model's calibration has a key practical relevance.

Clearly, the market risk scenarios defined in the Commission Delegated Regulation (EU) 2015/35 describe some average figures and are calibrated on some underlying data sample. Some information on the calibration is given in the paper "The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation (July 2014)" published by EIOPA. As an example, the interest rate risk calibration has been conducted as follows (see page 14f): "The calibration of the interest rate shocks in the standard formula are based on the relative changes of the term structure of interest rates using the following 4 datasets: EUR government zero coupon term structures (1997 to 2009), GBP government zero coupon term structures (1979 to 2009), and both Euro and GBP LIBOR/swap rates (1997 to 2009). For each of the four individual datasets, stress factors were assessed through a Principal Component Analysis (PCA), according to their maturity."

Details of this statistics as well as further analyses would be highly relevant. These include:

- statistics of the shocks (i.e on the dispersion)
- sensitivity to the choice of the estimation time window
- how would shocks look like if they were calibrated at different years as well as with current data

Moreover, using a sample insurance's balance sheet data provided by SolvencyAnalytics, show the impact of the different calibrations on this company's solvency coverage ratio.

Goals of the thesis:

- Review on Solvency II market risk framework
- Review of statistical models used for Solvency II calibration and of alternative models
- Implement the basic Solvency II framework in Python (some help may be provided by SolvencyAnalytics)
- Show the sensitivity of the Solvency II shock calibration to underlying data
- Show the sensitivity of a sample insurance company's solvency coverage ratio to the choice of the underlying data

*Ajánlott irodalom:*

- [1] EIOPA: Commission Delegated Regulation (EU) 2015/35 (esp. pages 104f)  
<http://eur-lex.europa.eu/legalcontent/EN/TXT/PDF/?uri=OJ:L:2015:012:FULL&from=EN>
- [2] EIOPA: The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation (July 2014)  
[https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/EIOPA-14322\\_Underlying\\_Assumptions.pdf](https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/EIOPA-14322_Underlying_Assumptions.pdf)
- [3] <https://eiopa.europa.eu/CEIOPS-Archive/Documents/Advices/CEIOPS-L2Advice-Market-risk-calibration.pdf>
- [4] <https://eiopa.europa.eu/CEIOPS-Archive/Documents/Advices/CEIOPSCalibration-paper-Solvency-II.pdf>
- [5] [http://www.cequra.uni-muenchen.de/download/cequra\\_wp\\_041.pdf](http://www.cequra.uni-muenchen.de/download/cequra_wp_041.pdf)

[6] <http://arxiv.org/pdf/1506.04125v1.pdf>

*Szak:* alkalmazott matematikus, biztosítási és pénzügyi matematika (kvantitatív pénzügy szakirány)