

A mérgezett csoki játék – új megközelítés

DIPLOMAMUNKA

KÉSZÍTETTE: Horváth Gábor
TÉMAVEZETŐ: Szabó Csaba egyetemi docens



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2004

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Az általános játék	5
1.1. A $2 \times n$ -es játék	6
1.2. Az $n \times n$ -es játék	6
2. Az $n \times 3$-as játék	7
2.1. Nyert mezők	7
2.2. A táblázat	9
2.3. A kezdő nyert mező	11
2.4. A sorok minimuma	13
3. További megjegyzések	15
Felhasznált irodalom	18

Bevezetés

A mérgezett csoki játék évtizedek óta a figyelem középpontjában áll. Ez egy egyszerű szabályokkal rendelkező játék, ám ennek ellenére már több, mint 20 éve dacol az összes próbálkozással, ami az elemzésére irányul. Bizonyos esetekben ismerjük a stratégiát, általában azonban nem.

Csákány Béla könyve alapján a játék a következő: „Számтанfüzetben keretezzünk be egy m és n egység oldalú téglalapot. Mezői megadására ... a nemnegatív egész számokat használhatjuk. A játék kezdete előtt jelöljük meg — ‚ikszeljük ki’ — a délnyugati sarokban álló $(0, 0)$ négyzetet. A játszma abban áll, hogy Anna és Balázs felváltva kiikszelnek egy még üres (i, j) négyzetet, és azzal együtt az összes olyan (s, t) négyzetet is, amelyek (i, j) -ből északra és keletre haladva elérhetők, vagyis az összes olyan (s, t) négyzetet, amelyre $i \leq s, j \leq t$. Aki nem tud ikszelni, az veszít.” [3]

A játékot David Gale [6] találta ki 1982-ben, és GNIM-nek nevezte el. Ám a G betű hozzáadás a jól ismert NIM játékhoz nem volt jogos, ugyanis a játék speciális esete a korábban Fred Schuh [8] által bevezetett ún. osztójátéknak. A játék mégsem GNIM, vagy divisor game néven vált ismertté a világon, hanem CHOMP néven. A „chomp” angol szó jelentése: csámcsog, rágcsál. De mi köze van ennek a szónak a játékhoz? Thomas S. Ferguson [5] cikkében elmeséli, hogy a játékot egy tábla csokoládéval játsszák, melynek bal felső sarka mérgezett. A két játékos felváltva törhet a csokoládéból úgy, hogy kijelöl egy mezőt, s mindent letör, ami ettől a mezőtől jobbra vagy alatta van. Az veszít, aki kénytelen a mérgezett darabot letörni. Ferguson említést tesz egy internetes cikkről is, ahol a játékot ki lehet próbálni. (<http://207.106.82.89/Puzzles/Chomp/Chomp.htm>)

Ismert, hogy mindig a kezdőnek van nyerő stratégiája, valamint ismert egyszerű nyerő stratégia $n \times 2$ -es, valamint $n \times n$ -es csokoládék esetén. Annál meglepőbb, hogy már $n \times 3$ -as csokoládé esetén sem tudunk mondani szinte semmit. David Gale 100 \$-t ajánlott fel az $n \times m \times k$ -as játék teljes elemzéséért.

A problémát a fent említetteken túl vizsgálta J. H. Conway ([2], [1]). Hivatkozik David Gale és Fred Schuh munkáira. Azonban a játékkal kapcsolatban csak néhány nyerő állást említ meg, lényegesen nem jut közelebb a nyerő stratégiához.

Az egyik legutolsó cikket, ami a játékkal kapcsolatban megjelent, Doron Zeilberger [11] írta. Ő is megfogalmaz egy-két szabályt, amelyek speciális elrendezések esetén mondanak valamit, valamint feltérképezte a nyerő állásokat, ha az utolsó oszlopban 115-nél kevesebb mező van. Zeilberger [9] cikkében tárgyalja, hogy hogyan használható fel a számítógép a játék elemzéséért folytatott harcban. Írt is egy programot [10], mely az összes nyerő mezőt kilistázza egy adott táblára.

Az ezzel kapcsolatos kérdéskör Magyarországon is nagy népszerűségnek örvend. Noha Csákány Béla [3] könyvében úgy emlegeti, mint Gale lefedős játéka, a köztudatba inkább téglalapos játékként, vagy mérgezett csoki játékként vonult be. Pósa Lajos a tehetséggondozó táboraiban rendszeresen fel szokta adni általános iskolás gyerekeknek a 2×8 -as, 4×4 -es, valamint a 3×4 -es speciális eseteket. A Dienes Zoltán kéziratát feldolgozó, Dienes Professzor Játékai című könyvben is megtalálható, mint „lefedős játék” [4]. Ő is, mint sokan mások, leírja, hogy miért mindig a kezdőnek van nyerő

stratégiája, megmutatja a $2 \times n$ -es és az $n \times n$ -es táblákra a nyerő stratégiát, illetve beszél a speciális 3×4 -es tábláról. Megmutatja azt is, hogy az osztójáték és a téglalapos játék ugyanaz. Megmutatja még néhány játékállásról is, hogy az nyerő, de ennél többet ő sem ír. A dolgozat a fenti terminológiák közül végig a mérgezett csokoládé verziót fogja használni.

A játék tehát mind a mai napig aktívan foglalkoztatja az embereket, különösen az $n \times 3$ -as eset. Megdöbbentő ugyanis a tény, hogy a játék rendkívül egyszerű, mégsem tudunk hasznos dolgokat mondani a nyerő stratégiáról. Értelmes kérdés például, hogy egyértelmű-e egy adott helyzetben, hogy hova kell lépniünk, hogy biztosan nyerjünk? A válasz azonban nemleges, már $n \times 3$ -as csokoládé esetén is van olyan játékállás, amiből elérhető két nyerő mező is. Akkor vajon egyértelmű-e az első nyerő lépés? A válasz erre a kérdésre is tagadó: 10×8 -as csokoládé esetén két kezdeti nyerő lépés van. Az $n \times 3$ -as esetben nem tudjuk a választ. Valószínűleg egyértelmű a kezdő nyerő lépés, de bizonyítani eddig senki nem tudta.

A dolgozatban (mely [7] kibővített és átdolgozott változata) az $n \times 3$ -as játékot új megközelítésben elemezzük. Előállítjuk a nyerő mezőket egy parciális rekurzív függvény segítségével, majd a továbbiakban ezen függvényt vizsgáljuk tovább. Elsősorban a kezdő nyerő mezőkre koncentrálnak. Csak két kezdő lépés lehet: vagy a középső oszlopba törünk, vagy az utolsóba. Jelölje (A, B, C) azt a játékállást, amikor az első oszlopban A , a második oszlopban B , a harmadik oszlopban pedig C mező van. Ekkor a kezdő lépés (A, B, B) vagy (A, A, C) típusú lehet. Részlet az (A, B, B) nyerő mezők sorozatából: $(3, 1, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(6, 3, 3)$, $(8, 4, 4)$, $(10, 5, 5)$, \dots $(87, 50, 50)$. Idáig minden szám előfordult (1-től 50-ig), valamint a táblák mérete is monoton nőtt, így az sejtethető, hogy ez a két tulajdonság később is megmarad. A sorozat következő eleme azonban $(88, 52, 52)$, vagyis a két sejtés egyike biztosan megdől, konkrétan: a monotonitás. A következő kezdő nyerő lépés ugyanis $(89, 51, 51)$. A 2.17. tételben belátjuk, hogy a második sejtés mindig áll. Az (A, A, C) típusú kezdő nyerő mezőket vizsgálva rájöhettünk, hogy itt nem fog minden C előfordulni, sikerült viszont igazolni a 2.20. tételben, hogy végtelen sok ilyen típusú nyerő kezdő lépés van. Továbbá a 2.26. állításban megfogalmazunk egy elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy csak 1 nyerő kezdő lépés legyen minden $n \times 3$ -as csokoládé esetén.

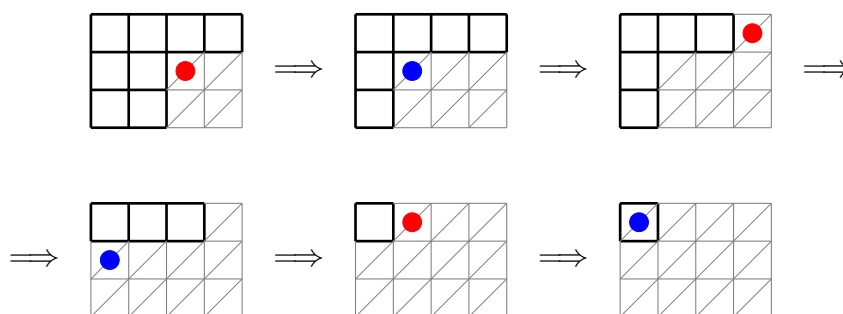
A játék tehát további elemzésre szorul, remélhetőleg ezzel az új megközelítéssel könnyebben meg lehet majd fogni a nyerő stratégiát.

1. Az általános játék

Adott egy $n \times m$ -es csokoládé, melynek bal felső sarka mérgezett. Két játékos felváltva tör a csokoládéból egy darabot úgy, hogy kijelöl egy kockát a még meglévő táblán, majd letöri a kijelölt kockát, valamint mindazokat, melyek tőle jobbra és/vagy lefele esnek. Az a játékos veszít, aki kénytelen a mérgezett darabját letörni a csokoládénak.

Jelöljük az i -edik sor j -edik kockáját (i, j) -vel.

1.1. Példa. *A két játékos egy 3×4 -es táblán játszik. Az **első** játékos letöri a $(2, 3)$ -as mezőt, s vele együtt a $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$ mezőket is. Erre a **második** játékos letöri a $(2, 2)$ -es, s vele együtt a $(3, 2)$ -es mezőket. Erre az **első** játékos az $(1, 4)$ mezőt töri le. A **második** játékos letöri a $(2, 1)$, valamint $(3, 1)$ mezőket, majd az **első** játékos letöri az $(1, 2)$ és $(1, 3)$ mezőket, és ezzel nyert, hisz a **második** játékosnak már csak az $(1, 1)$ (mérgezett) kocka maradt (1. ábra).*



1. ábra. Példajáték

A játék különböző csokoládéméretekre más és más, különböznek a nyerő stratégiák is. A „stratégialopás” módszerével azonban könnyen látható, hogy az első játékosnak mindig van nyerő stratégiája.

1.2. Állítás. *Az első játékosnak tetszőleges $n \times m$ -es csokoládéméret esetén nyerő stratégiája van.*

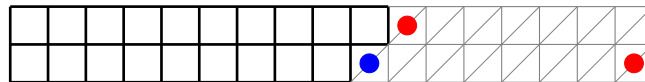
Bizonyítás. A játékról azonnal látszik, hogy véges, hiszen legfeljebb nm lépésben véget ér, és döntetlen nem fordulhat elő. A véges, kétszemélyes játékok esetén mindig van valamelyik játékosnak nyerő stratégiája [12].

Tegyük fel, hogy nem az első, hanem a második játékosnak van nyerő stratégiája. Ez azt jelenti, hogy bármelyik mezőt törje is le kezdetben az első játékos, arra van egy olyan lépése a második játékosnak, melyből biztosan tud nyerni. Vagyis ha az első játékos az (n, m) mezőt töri le, arra is van egy nyerő lépése, mondjuk (i, j) . Azonban ha az első játékos az (i, j) kockát törte volna le kezdésnél, akkor ezzel a lépéssel az előző helyzet állt volna elő, csak most a második játékos következik. Viszont innen a feltételezés miatt az első játékos biztosan nyer, ellentmondásban azzal, hogy a második játékosnak erre is van nyerő válaszlépése. Az ellentmondás bizonyítja az állítást. \square

A játék stratégiája két speciális esetben ismert, ezen esetek elemzése meglehetősen egyszerű [3].

1.1. A $2 \times n$ -es játék

Az első játékos játsszon a következőképpen: kezdetben az $(2, n)$ kockát (a jobb alsó sarkot) törí le, majd a továbbiakban ha a második játékos az $(1, i)$ kockát törí, akkor az első játékos az $(2, i - 1)$ -t, ha pedig a második játékos az $(2, i)$ kockát törí le, akkor válaszul az első játékos az $(1, i + 1)$ -et törí le.

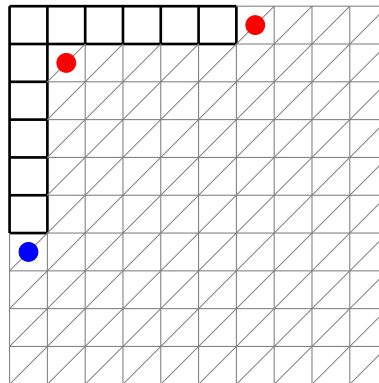


2. ábra. Stratégia a $2 \times n$ -es csokoládén

Könnyű látni, hogy a fenti módon az első játékos mindig nyer, mert a játék folyamán végig fenn tudja tartani azt az állapotot, hogy a lépése után az első sorban 1-el több mező legyen, mint a másodikban.

1.2. Az $n \times n$ -es játék

Az első játékos letörí a $(2, 2)$ mezőt, majd ha a második játékos az $(i, 1)$ mezőt törí le, akkor ő az $(1, i)$ mezőt, ellenkező esetben pedig pont fordítva.



3. ábra. Stratégia az $n \times n$ -es csokoládén

Ez a módszer is egy szimmetrikus helyzet fenntartásán alapszik, amivel végül az első játékos nyer.

A továbbiakban csak az $n \times 3$ -as esetet fogjuk vizsgálni, ám ott már sajnos nem fogunk tudni hasonlóan szép elvet mutatni, mely egy szimmetrikus struktúra megőrzésén alapszik.

2. Az $n \times 3$ -as játék

2.1. Nyerő mezők

Mostantól a játéknak csak azzal a speciális esetével foglalkozunk, melyben a csokoládének 3 oszlopa van.

2.1. Jelölés. Jelöljünk (A, B, C) -vel egy olyan játékállást, melyben a csokoládé első oszlopában A , a második oszlopban B , míg a harmadik oszlopban C mező van még meg. Továbbá ha az egyik játékos törése után az (A, B, C) játékállás állt elő, akkor azt mondjuk, hogy a játékos (A, B, C) -t lépte.

A játék szabályaiból azonnal adódik, hogy egy (A, B, C) játékállásra $A \geq B \geq C$.

2.2. Definíció. Nevezzük (A, B, C) -t *nyerő mezőnek*, ha az egyik játékos ezt lépve képes ezután nyerni, bárhogyan játsszon is a másik játékos. A többi játékállást nevezzük *vesztő mezőnek*.

Nyilván $(1, 0, 0)$ nyerő mező, hiszen ekkor a másik már csak a bal felső sarkot törheti. A definícióból az is világos, hogy nyerő mezőről csak vesztő mezőre léphetünk, viszont minden vesztő mezőről tudunk legalább egy nyerő mezőre lépni. Ez lehetőséget ad a nyerő- és vesztő mezők rekurzív megállapítására.

2.3. Következmény. Ha (A, B, C) nyerő mező, akkor az alábbiak vesztő mezők:

1. (A, B, C_1) , ha $C > C_1$,
2. (A, C_1, C_1) , ha $C > C_1$,
3. (C_1, C_1, C_1) , ha $C > C_1$,
4. (A, B_1, C) , ha $B > B_1 \geq C$,
5. (B_1, B_1, C) , ha $B > B_1 \geq C$,
6. (A_1, B, C) , ha $A > A_1 \geq B$.

Bizonyítás. Az (A, B, C) állásból csak a fent felsorolt állásokba léphetünk. \square

Világos, hogy egy nyerő stratégia ismeretéhez a nyerő mezőket kell ismernünk, egy nyerő stratégia ugyanis abból áll, hogy minden egyes lépésünkkel nyerő mezőkre lépünk. A nyerő mezők felderítését segítik az alábbi függvények.

2.4. Definíció. Legyen $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ az alábbi kétváltozós parciális függvény: $f(0, 0) = 1$. $B < C$ esetén f nem értelmezett, $B \geq C$ -re akkor értelmes, ha nincs B -nél kisebb B_1 , melyre $f(B_1, C) = B_1$, valamint nincs C -nél kisebb C_1 , melyre $f(C_1, C_1) = C_1$, ekkor az értéke legyen

$$f(B, C) = \min \left\{ A \geq B : \begin{array}{l} A \neq f(B_1, C), \text{ ha } C \leq B_1 < B \\ A \neq f(B, C_1), \text{ ha } C_1 < C \\ A \neq f(C_1, C_1), \text{ ha } C_1 < C \end{array} \right\}.$$

A fenti definícióból kiviláglik, hogy f parciális *rekurzív* függvény, aminek a legnagyobb előnye, hogy kiszámolható (a későbbiekben látni fogjuk, hogy a bonyolultnak tűnő definíció ellenére meglehetősen egyszerűen).

2.5. Definíció. Legyen $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ az a kétváltozós parciális függvény, melyre $g(B, C) = A$ pontosan akkor, ha (A, B, C) nyerő mező. Amennyiben (B, C) -hez nincs megfelelő A , úgy f nem értelmezett.

$B < C$ esetén tehát g nincs értelmezve, valamint a 2.3. következmény 6. pontja miatt nem fordulhat elő, hogy egy (B, C) párhoz legyen A és A_1 is, melyre (A, B, C) is és (A_1, B, C) is nyerő mezők lennének, vagyis g definíciója értelmes.

Világos, hogy g ismeretében ki tudunk alakítani nyerő stratégiát, hiszen g valamilyen értelemben „elkódolja” a nyerő lépéseket.

Az alábbi tétel megadja a fenti két függvény közötti kapcsolatot.

2.6. Tétel. *A fent definiált f és g függvények ugyanott vannak értelmezve, és ha egy (B, C) páron értelmesek, akkor $f(B, C) = g(B, C)$.*

Bizonyítás. A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk. Tudjuk, hogy $f(0, 0) = g(0, 0) = 1$. Világos továbbá, hogy $B < C$ esetén $f(B, C)$ és $g(B, C)$ egyike sincs definiálva.

Tegyük most fel, hogy $f(B_1, C_1) = g(B_1, C_1)$ minden olyan $B_1 \leq B$, $C_1 \leq C$ esetén, ahol $(B, C) \neq (B_1, C_1)$. Belátjuk, hogy ekkor $f(B, C) = g(B, C)$ is teljesül.

Ha $f(B, C)$ nincs értelmezve valamilyen $B \geq C$ esetén, akkor a definíció alapján van $B_1 < B$, hogy $f(B_1, C) = B_1$, vagy van $C_1 < C$, melyre $f(C_1, C_1) = C_1$. Az első esetben az indukció miatt (B_1, B_1, C) nyerő mező, ahova léphetünk az (A, B, C) játékállásból, vagyis (A, B, C) semmilyen A esetén nem lehet nyerő mező, tehát $g(B, C)$ sincs definiálva. A másik esetben (C_1, C_1, C_1) nyerő mező az indukció miatt, és az (A, B, C) játékállásból szintén tudunk mindig ide lépni, vagyis (A, B, C) szintén nem lehet nyerő mező, így $g(B, C)$ ekkor sincs értelmezve.

Tegyük most fel, hogy $f(B, C) = A$. Belátjuk, hogy (A, B, C) nyerő mező, így $g(B, C) = f(B, C)$. Az (A, B, C) játékállásból csak a 2.3. következményben leírt játékállásokba léphetünk: (ha mindegyik vesztes mező, akkor (A, B, C) valóban nyerő mező)

1. (A, B, C_1) , ahol $C > C_1$, de $A \neq f(B, C_1) = g(B, C_1)$, így (A, B, C_1) vesztes mező.
2. (A, C_1, C_1) , ahol $C > C_1$, de $A \neq f(C_1, C_1) = g(C_1, C_1)$, így (A, C_1, C_1) vesztes mező.
3. (C_1, C_1, C_1) , ahol $C > C_1$, de $C_1 \neq f(C_1, C_1) = g(C_1, C_1)$, így (C_1, C_1, C_1) vesztes mező.
4. (A, B_1, C) , ahol $B > B_1 \geq C$, de $A \neq f(B_1, C) = g(B_1, C)$, így (A, B_1, C) vesztes mező.
5. (B_1, B_1, C) , ahol $B > B_1 \geq C$, de $A \neq f(B_1, B_1) = g(B_1, B_1)$, így (A, B_1, B_1) vesztes mező.

6. (A_1, B, C) , ahol $A > A_1 \geq B$, de mivel f definíciójában a legkisebb lehetséges A -t választjuk, ezért léteznek $B_1 \leq B, C_1 \leq C$, hogy tudunk lépni az (A_1, B_1, C_1) játékállásra az (A_1, B, C) játékállásból, valamint $A_1 = f(B_1, C_1) = g(B_1, C_1)$, vagyis (A_1, B, C) vesztes mező kell legyen.

Az (A, B, C) játékállásból csak vesztes mezőkre léphetünk, így (A, B, C) nyerő mező. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. \square

2.2. A táblázat

Most már rekurzívan ki tudjuk számítani az f függvényt (a nyerő mezőket), amit ábrázolhatunk egy táblázatban úgy, hogy az oszlopok adják az első koordinátát, a sorok pedig a második koordinátát, vagyis $f(B, C) = A$ azt jelenti, hogy A szerepel a C -edik sor B -edik oszlopában (4. ábra).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		3	2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3				6	7	5	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
4					8	9	10	7	*	*	*	*	*	*	*	*
5						10	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6							11	12	13	9	*	*	*	*	*	*
7								13	14	12	15	16	17	18	19	20
8									15	14	16	17	12	*	*	*
9										16	17	14	18	19	20	21
10											18	19	20	21	14	*
11												20	19	22	17	23
12													21	23	22	24
13														24	23	22
14															25	26
15																27

4. ábra. A táblázat eleje

Lássuk, miként jelentkezik a 2.4. definíció a táblázatban: Ha $f(B, C)$ definiált, akkor $f(B, C)$ a legkisebb olyan természetes szám, ami legalább B , valamint nem szerepel B -edik oszlopban följebb, nem jelenik meg a C -edik sorban korábban, valamint nem szerepel a főátlóban a C -edik sorral bezáróan.

2.7. Példa. $f(13, 11) = 22$, ugyanis $f(13, 11)$ az a legkisebb pozitív egész, mely legalább 13, és nem szerepel a 4. ábrában zöld színnel.

A függvény nincs definiálva a C -edik sor B -nél nagyobb oszlopaiban, ha $f(B, C) = B$, vagy ha valahol is előfordul, hogy $f(A, A) = A$. Belátjuk, hogy az utóbbi eset azonban lehetetlen.

2.8. Lemma. *A főátlóban szereplő elem mindig nagyobb, mint a közvetlen felette levő (amennyiben mindkettő létezik), azaz $f(C, C-1) < f(C, C)$. Továbbá $f(C, C)$ és $f(C, C-1)$ egyszerre értelmezett.*

Bizonyítás. $f(C, C)$ és $f(C, C-1)$ definíciója mindössze annyiban tér el egymástól, hogy az előbbiben eggyel több elemet zárunk ki, konkrétan $f(C, C-1)$ -et. Vagyis $f(C, C)$ pontosan akkor értelmezett, mint $f(C, C-1)$, és $f(C, C) > f(C, C-1)$. \square

2.9. Következmény. *Semmilyen A -ra nem lesz $f(A, A) = A$, vagyis (A, A, A) mindig vesztes mező. Így a kezdő játékosnak van nyereső stratégiája.*

Bizonyítás. Indirekt módon legyen A a legkisebb természetes szám, melyre $f(A, A) = A$. Ekkor $f(A, A-1)$ is definiált, és $f(A-1, A-1) \neq A-1$ a feltevés miatt. Az f függvény definíciójából $A \leq f(A, A-1) < f(A, A) = A$, ellentmondás. \square

A következmény alapján az f függvényt egyszerűbben is definiálhatjuk:

2.10. Definíció. Legyen $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ az alábbi kétváltozós parciális függvény: $f(0, 0) = 1$. $B < C$ esetén f nincs definiálva, $B \geq C$ -re akkor van definiálva, ha nincs B -nél kisebb B_1 , melyre $f(B_1, C) = B_1$, ekkor az értéke legyen

$$f(B, C) = \min \left\{ \begin{array}{l} A \neq f(B_1, C), \text{ ha } C \leq B_1 < B \\ A \geq B : \begin{array}{l} A \neq f(B, C_1), \text{ ha } C_1 < C \\ A \neq f(C_1, C_1), \text{ ha } C_1 < C \end{array} \end{array} \right\}.$$

Látható tehát, hogy a táblázat meglehetősen egyszerűen és gyorsan tölthető ki: Ha fel akarjuk tölteni az első n sor első m oszlopát, akkor $O(nm)$ helyen kell kiszámolnunk az f függvény értékét, egy érték kiszámolása pedig $O(n+m)$ lépésben megtehető, így a táblázat első $n \times m$ -es része $O(nm(n+m))$ időben tölthető ki. Ha $n \times 3$ -as csokoládéval játszunk, akkor a táblázatnak legfeljebb első n sorára és n oszlopára van szükségünk, amit tehát $O(n^3)$ lépésben kiszámíthatunk.

Továbbá, ha már kiszámoltuk előre a táblázatot, és játszani kell a segítségével, akkor sincs nehéz dolgunk. Ha az ellenfél az (A, B, C) mezőre tört, akkor vizsgáljuk meg $f(B, C)$ -t! Ha nincs definiálva, akkor annak az az oka, hogy van $B_1 < B$, melyre $f(B_1, C) = B_1$, vagyis (B_1, B_1, C) nyereső mező, törjünk oda! Ha $A_1 = f(B, C)$, és $A = A_1$, akkor nincs mit tenni, törhetünk bárhova, hiszen az ellenfél nyereső mezőre tört, így mi nem tudunk. Ha $A_1 < A$, akkor (A_1, B, C) nyereső mező, valamint elérhető az aktuális játékállásból, ezért törjünk oda! Ha pedig $A < A_1$, akkor ez azt jelenti, hogy amikor kiszámoltuk $f(B, C)$ -t (a táblázat C -edik sorának és B -edik oszlopának elemét), akkor ott azért szerepel A -nál nagyobb szám, mert A -t kizártuk, vagyis szerepel a B -edik oszlopban korábban, vagy a C -edik sorban korábban, esetleg a főátlóban korábban. A fenti esetek közül bárhol legyen is A , az egy olyan nyereső mezőt jelent, ahova tudunk törni az (A, B, C) játékállásból, így törjünk oda!

Ez világos módon nyereső stratégia, és az is látszik, hogy az (A, B, C) mezőről a következő lépés kiszámítása $O(B+C)$ műveletet igényel.

Ez a táblázat minden információt tartalmaz a játék nyereső stratégiájáról, így a továbbiakban elegendő ezt a táblázatot vizsgálni.

2.3. A kezdő nyerő mező

Az első nyerő lépés szintén egy érdekes kérdés: hova törjünk először? Az (A, A, A) játékalásból 3 féle pozícióba tudunk törni: (A, A, C) -be, (A, B, B) -be és (B, B, B) -be, ám az utóbbiról beláttuk, hogy mindig vesztes mező. Az (A, B, B) típusú nyerő kezdőlépések a táblázat főátlójában találhatóak, míg az (A, A, C) típusúak a véges sorok végén. Az utóbbiak piros színnel lettek megjelölve a 4. ábrában.

Érdekes kérdés, hogy egyértelmű-e mindig a nyerő lépés. Sajnos nem, bizonyos helyekről több nyerő mezőre is törhetünk. Kérdezhetjük azt, hogy egyértelmű-e a nyerő kezdőlépés. Ám erre a kérdésre is nemleges a válasz. Ismert, hogy 8×10 -es csokoládé esetén két nyerő kezdő lépés van. Akkor: egyértelmű-e a nyerő kezdő lépés $n \times 3$ -as csokoládé esetén? Valószínűleg igen, ám még senkinek sem sikerült bizonyítania. Világos azonban a következő:

2.11. Állítás. *Legfeljebb két kezdő nyerő mező létezik az $n \times 3$ csokoládé esetén, és ha valóban kettő van, akkor azok (A, B, B) és (A, A, C) alakúak, ahol $C < B$ (5. ábra).*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		3	2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3				6	7	5	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
4					8	9	10	7	*	*	*	*	*	*	*	*
5						10	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6							11	12	13	9	*	*	*	*	*	*
7								13	14	12	15	16	17	18	19	20
8									15	14	16	17	12	*	*	*
9										16	17	14	18	19	20	21
10											18	19	20	21	14	*
11												20	19	22	17	23
12													21	23	22	24
13														24	23	22
14															25	26
15																27

5. ábra. Két nyerő kezdőlépés lehetséges elhelyezkedése

2.12. Példa. $(14, 14, 10)$ nyerő mező. Ahhoz, hogy legyen egy $(14, B, B)$ típusú nyerő mező is, az kell, hogy a 14-es szám előforduljon a táblázatban a kékkel jelölt helyeken, vagyis $10 < B < 14$ szükséges (5. ábra).

A 2.11. állítás bizonyítása. Ha (A, B, B) nyerő mező, akkor A szerepel a főátlóban. Ha (A, A, C) nyerő mező, akkor A szerepel az A -edik oszlopban. A főátlóban is, valamint egy oszlopban is legfeljebb egyszer fordulhat elő minden szám, így kettőnél több kezdő

nyerő mező nem lehet. Továbbá ha (A, B, B) nyerő mező, akkor az A szám nem fordulhat elő a táblázatban a $B + 1$ -edik sortól kezdődően, vagy akár a B -edik sorban később, így ha (A, A, C) is nyerő mező, akkor $C < B$. \square

2.13. Tétel. Minden (B, C) párra, amelyre $f(B, C)$ értelmezett, fennáll az $f(B, C) \leq B + C + 1$ egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A tételt indukcióval bizonyítjuk. A kezdeti eset: $f(0, 0) = 1 \leq 0 + 0 + 1$. Tegyük fel, hogy a fenti egyenlőtlenség teljesül minden olyan $B_1 \leq B$, $C_1 \leq C$ esetén, ahol $(B_1, C_1) \neq (B, C)$. Amikor kiszámítjuk $f(B, C)$ értékét (ha értelmezve van), bizonyos számokat kizárunk, melyek egyike sem lehet több $B + C$ -nél az indukció szerint, vagyis $f(B, C)$ -nek nem fogunk $B + C + 1$ -nél nagyobb számot választani. Ez pedig éppen a bizonyítandó volt. \square

Hasonlóan igazolhatók az alábbiak:

2.14. Állítás. Ha $2 \leq C$, akkor $f(B, C) \leq B + C$.

2.15. Állítás. Ha $5 < C$, akkor $f(B, C) \leq B + C - 1$.

2.16. Következmény. Ha (A, B, B) nyerő mező (és $5 < B$), akkor $A/B < 2$.

Ha megvizsgáljuk az (A, B, B) -típusú kezdő nyerő mezőket, azt sejtjük, hogy minden B -hez létezik egy megfelelő A , melyre (A, B, B) nyerő mező, valamint $B = 50$ -ig felírva ezeket a nyerő mezőket (ezek éppen a főatlóban megjelenő számok), azt is sejtjük, hogy nagyobb B -hez nagyobb A tartozik, hogy (A, B, B) nyerő mező legyen:

$$\begin{aligned} &(1, 0, 0), (3, 1, 1), (4, 2, 2), (6, 3, 3), (8, 4, 4), (10, 5, 5), (11, 6, 6), \\ &\quad \dots \\ &(72, 41, 41), (73, 42, 42), (74, 43, 43), (76, 44, 44), (78, 45, 45), \\ &(80, 46, 46), (82, 47, 47), (83, 48, 48), (85, 49, 49), (87, 50, 50). \end{aligned}$$

Érdekes módon a következő (A, B, B) típusú nyerő mező $(88, 52, 52)$, így a fent megfogalmazott két sejtés legalább egyike hamis. Vajon melyik marad érvényben a táblázat további részében? A monotonitás, vagy minden lehetséges B érték előfordul? A következő (A, B, B) típusú nyerő mező $(89, 51, 51)$, így a monotonitás megdőlt. A másik sejtés viszont mindig fennáll, precízen:

2.17. Tétel. Minden B -hez létezik egy $A \geq B$, hogy (A, B, B) egy kezdő nyerő mező.

Bizonyítás. Az állítás világos az f függvény definíciójából, ugyanis $f(B, B)$ minden B esetén definiálva van. \square

Vizsgáljuk most az (A, A, C) típusú kezdő nyerő mezőket! Az első szembetűnő tény, hogy $(A, A, 2)$ mindig vesztes mező:

2.18. Állítás. Ha $B \geq 2$, akkor $f(B, 2)$ értelmezett, és $f(B, 2) = B + 2$.

Bizonyítás. Könnyű látni, hogy $f(B, 0) = B + 1$ (ez tulajdonképpen az $n \times 2$ -es játék), valamint $B > 2$ esetén $f(B, 1)$ nincs definiálva. f definíciójából így már világosan adódik, hogy $f(B, 2) = B + 2$. \square

Ez azt jelenti, hogy nem minden C esetén tudunk találni megfelelő A -t, hogy (A, A, C) nyerő mező lenne. Nem világos azonban, hogy mely C -kre tudunk megfelelő A -t mutatni, azt azonban be tudjuk bizonyítani, hogy végtelen sok C -hez van A .

Az alábbi megfigyelés egyszerűen következik a táblázat képzési szabályából:

2.19. Állítás. *Ha (A, A, C) nyerő mező, akkor csak véges sok (pontosan $A - C + 1$ darab) olyan (E, F) pár létezik, melyre (E, F, C) nyerő mező. Továbbá: ha (A, A, C) nyerő mező, és $C \leq F \leq A$, akkor egyértelműen létezik hozzá E , hogy (E, F, C) is nyerő mező legyen.*

2.20. Tétel. *Végtelen sok C esetén található olyan A , hogy (A, A, C) nyerő mező legyen.*

Bizonyítás. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy csak véges sok (A, A, C) típusú nyerő mező van. Ez azt jelenti, hogy van olyan N , hogy ha $A \geq N$, akkor nincs (A, A, C) típusú kezdő nyerő mező, így ezekre a A -kra (A, B, B) típusú nyerő mező kell legyen. Tehát ha $A \geq N$, akkor van hozzá B , hogy $A = f(B, B)$. Legyen M a főátló első N elemének maximuma, azaz $M = \max \{ f(B, B) \mid B \leq N \}$. Legyen továbbá P az a szám, ami legfeljebb M , és ezek közül a legutoljára fordul elő a főátlóban, legyen éppen a D -edik sor D -edik oszlopában. Formálisan $D = \max \{ B \mid f(B, B) \leq M \}$, és legyen $P = f(D, D)$. Ha most $B > D$, akkor $f(B, B) > M$, így $B > N$ is teljesül, amiből $N \leq D$. Vizsgáljuk most az $X = f(D, D - 1)$ elemet. A 2.8. lemma miatt $X = f(D, D - 1) < f(D, D) = P \leq M$, vagyis P definíciója miatt X már nem fordulhat elő a D -edik sor után a főátlóban, a D -edik sor előtt pedig f definíciója miatt nem fordulhat elő. Ám $N \leq D \leq f(D, D - 1) = X$ miatt valamikor fel kellene bukkannia a főátlóban X -nek. Az ellentmondás bizonyítja a tételt. \square

2.4. A sorok minimuma

2.21. Definíció. A továbbiakban a véges sorokat *rövid sornak*, a végtelen hosszú sorokat pedig *hosszú sornak* nevezzük.

Úgy tűnik, hogy a sorok minimumértékeit és minimumhelyeit érdekes vizsgálni, ugyanis rendkívül érdekes sajátosságokat mutatnak. Először is, az összes kiszámolt értékre igaz, hogy a rövid sorok minimumai éppen a sorok végén helyezkednek el. Ez azt jelenti, hogy ha (A, A, C) kezdő nyerő mező, akkor minden $C \leq B < A$ esetén van C_1 , hogy (A, B, C_1) nyerő mező. Másodsor, a minimumok monoton nőnek, a minimumhelyek jobbra tolódnak, valamint a hosszú sorok minimuma éppen a következő rövid sor vége (és egyben minimuma is). A fentiekből már az is következik, hogy csak egyetlen kezdő nyerő mező van $n \times 3$ -as csokoládé esetén, ám sajnos a fentiek közül nem tudjuk mindet bizonyítani.

2.22. Definíció. Jelölje M_C a C -edik sor minimumát, valamint B_C azt az oszlopot, amiben M_C fellép. Ekkor $f(B_C, C) = M_C$. A sorok minimumait (ha nem a sor végére esnek) **lila** színnel jelöltük a 4. ábrában.

Először a következőt látjuk be:

2.23. Állítás. *A sorok minimumai növekednek, valamint jobbra tolódnak:*

1. Ha $C_1 < C_2$, akkor $M_{C_1} \leq M_{C_2}$,
2. ha ekkor $M_{C_1} = M_{C_2}$, akkor $B_{C_1} < B_{C_2}$.

Bizonyítás. Jelölje $M = M_{C_1}$ és $B_1 = B_{C_1}$. Tekintsünk egy $C > C_1$ -et, és vizsgáljuk, hogy mi lehet $f(B, C)$!

Ha $f(B, C_1)$ értelmezett, akkor $f(B, C_1) \geq M$ azt jelenti, hogy az összes $B \leq K < M$ számot kizártuk valahol a 2.10. definícióban. Ám mivel a C_1 sor minimuma M , ezért csak az lehet, hogy véve egy fenti K -t, az szerepel a főátlóban, vagy a B -edik oszlopban már valahol a C_1 -edik sor előtt. Mindkét eset azt jelenti, hogy K nem kerülhet be a C -edik sor és a B -edik oszlop metszetébe. Ha még $B < B_1$ is teljesül, akkor $K = M$ -re is elmondható a fenti gondolatmenet, $B = B_1$ esetén pedig $f(B, C) \neq M$, mivel a B -edik oszlopban M már szerepelt egy korábbi sorban.

Ha $f(B, C_1)$ nincs definiálva, akkor van olyan $B > L \geq B_1$, hogy $f(L, C_1) = L \geq M$. Viszont ekkor $f(B, C) \geq B > L \geq M$.

A két részt összetéve kapjuk mindkét állítás bizonyítását. \square

2.24. Következmény. *Ha $M_C = B_C$ (azaz a sor minimuma éppen a sor végén van), akkor $M_C < M_{C+1}$, vagyis M_C többé nem lép fel a táblázatban.*

Bizonyítás. A 2.23. állítás miatt $M_C \leq M_{C+1}$, és ha $M_{C+1} = M_C$ lenne, akkor $M_C = B_C < B_{C+1} \leq f(B_{C+1}, C+1) = M_C$ ellentmondást ad. \square

2.25. Következmény. *Ha $f(C, C) = M_C$ (azaz a sor minimuma a sor legelején van), akkor $M_{C-1} < M_C < M_{C+1}$.*

Bizonyítás. M_C megjelent a főátlóban, vagyis a táblázat további soraiban nem léphet fel, így a 2.23. állítás miatt $M_C < M_{C+1}$. Tudjuk, hogy $M_{C-1} \leq M_C$, és ha $M_{C-1} = M_C$ lenne, akkor $C-1 \leq B_{C-1} < B_C = C$, így $B_{C-1} = C-1$, vagyis $f(C-1, C-1) = M_{C-1}$, de ebben az esetben $M_{C-1} = M_C$ nem léphetne már fel a C -edik sorban. \square

A táblázat ismert részei azt sugallják, hogy a rövid sorok minimumai a sor végén vannak, valamint a rövid sorok hossza nő. Amennyiben ezt tudnánk, úgy az alábbi fontos dolgot bizonyíthatnánk:

2.26. Állítás. *Ha a rövid sorok minimumai éppen a sor végén vannak, akkor $n \times 3$ -as csokoládén játszva egyértelmű a kezdő nyerő mező.*

Bizonyítás. A 2.11. állításban beláttuk, hogy ha (A, A, C) és (A, B, B) egyaránt nyerő mezők, akkor $C < B$ teljesül. Ám ekkor A a C -edik sor végén lenne, vagyis a sor minimuma lenne, és ekkor a 2.24. következmény miatt többet nem lépne fel a táblázatban. \square

A fenti két észrevétel egyébként nem független egymástól, pontosan:

2.27. Állítás. *Tekintsük az alábbi két állítást:*

1. *A rövid sorok minimuma éppen a sor végén van.*
2. *Ha a $C_1 < C_2$ sorok rövidek, a végük a B_1 ill. B_2 oszlopban van, akkor $B_1 < B_2$.*

Ha az első állítás teljesül a C -edik sorig, akkor a második is.

Ha sor minimuma (a harmadik sortól kezdődően) nem lehet a főátlóban, valamint a második állítás teljesül a táblázatban, akkor az első is.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az első állítás teljesül. Ekkor egy $C_1 \leq C$ rövid sor vége egyben a minimuma is (legyen ez M_1), és ekkor a 2.24. következmény miatt a későbbi $C_2 \leq C$ rövid sor M_2 minimuma nagyobb: $M_1 < M_2$, valamint ez a minimum egyben a sor vége is, vagyis az M_2 -edik oszlopban lép fel, vagyis valóban később.

Ha a második állítás teljesül a táblázatban, akkor legyen C_1 az első olyan rövid sor, melyre az M_1 minimuma nem a sor végén van. Legye a sor vége B_1 . M_1 fel kell lépjen a főátlóban, vagy valahol egy sor végén, hiszen a $M_1 \times 3$ -as csokoládé esetén az első játékosnak van egy kezdő nyerő lépése. Viszont a főátlóban nem fordulhat elő: a C_1 -edik sorig azért nem, mert M_1 fellép később a C_1 -edik sorban, később pedig a 2.23. állítás miatt. Ez viszont azt jelenti, hogy M_1 valamikor a C_1 -edik sor után sor végén lép fel, ami viszont $M_1 < B_1$ miatt ellentmond a második állításnak. \square

Látható, hogy a fenti két állítás majdnem ekvivalens a táblázatban, nem világos azonban, hogy a közbeszúrt technikai feltétel (miszerint sor minimuma nem esik a főátlóba) hogyan hagyható el.

3. További megjegyzések

Mint láttuk, a táblázat minden információt tartalmaz a 3 soros mérgezett csoki játékról, így csak a táblázat tulajdonságait kell vizsgálnunk. Már most is rengeteg információnk van a táblázatról, és még több megfigyelésünk.

Megmaradtak a következők:

3.1. Probléma. Teljesülnek-e az alábbi állítások a teljes táblázatra? (Az első 500 sorig igen.)

1. A rövid sorok minimuma a sor végén van;
2. A rövid sorok hossza nő;
3. Sor minimuma nem esik a főátlóba (ez a 0. és 2. sorra nem teljesül);
4. Egy hosszú sor minimuma éppen a következő rövid sor minimuma.

Ha jobban megfigyeljük a hosszú sorokat, akkor észrevehetjük, hogy egy idő után egy hosszú sorban szereplő számok 1-gyel nőnek, ami azt jelenti, hogy ha a C -edik sor hosszú, akkor van egy α , hogy $(A + \alpha, A, C)$ nyerő mezők, ha A elég nagy.

3.2. Probléma. Ha a C -edik sor hosszú, akkor van-e mindig megfelelő α , hogy ha A elég nagy, akkor $(A + \alpha, A, C)$ nyerő mezők?

Az első 500 sort vizsgálva teljesül, hogy hosszú sor után mindig egy rövid következik. Valószínűleg ez később is fennáll. Ha ez igaz lenne, akkor közelebb lennénk ahhoz, hogy belássuk, hogy a rövid sorok hossza nő (ám ez a feltétel sajnos még nem elegendő).

3.3. Probléma. Van-e két egymást követő hosszú sor a táblázatban?

Vizsgáljuk most közelebbről a főátlót és a fölötte levő átlót! Több érdekes megfigyelést is tehetünk: először is, ha valamikor megtörik a főátlóbeli elemek monotonitása, az azonnal korrigálódik a következő elemmel. Másodszor, az összes természetes szám előfordul a főátlóban vagy a fölötte levő átlóban (ami ekvivalens azzal, hogy ha (A, A, C) nyerő mező, akkor A előfordul valamikor a főátló feletti átlóban). Első ránézésre úgy tűnik, hogy ezen átló elemei növekednek, ám ez nem így van: amikor megtörik a főátló monotonitása, akkor megbomlik a fölötte levő átlóé is.

Tekintsük a kezdő nyerő mezőket, és koncentráljunk elsősorban az A/B és A/C arányokra, ahol (A, B, B) illetve (A, A, C) nyerő mezők. Úgy tűnik, hogy a fenti hányadossorozatok konvergálnak:

3.4. Probléma. Igazoljuk, hogy

1. az A/C sorozat határértéke $\sqrt{2}$,
2. az A/B sorozat határértéke $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$!

Egy másik érdekes észrevétel, hogy ha egy adott A -ra B és C azok a természetes számok, melyekre $\left|A/B - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right|$ és $|A/C - \sqrt{2}|$ minimális, akkor a kezdő nyerő mezők az alábbi hat közül kerülnek ki:

1. $(A, B - 1, B - 1)$,
2. (A, B, B) ,
3. $(A, B + 1, B + 1)$,
4. $(A, A, C - 1)$,
5. (A, A, C) ,
6. $(A, A, C + 1)$.

Ez $A \leq 500$ esetén fennáll, valószínűleg később is. Nyilván rengeteg következménye lenne, ha valóban igaz lenne.

Látható továbbá, hogy az itt megfogalmazott módszer a nyerő mezők kiszámolására használható az általános esetben is. $n \times m$ -es csokoládé esetén a parciálisan rekurzív függvényünknek $m - 1$ argumentuma lesz, és a rekurzió abból fog adódni, hogy csak vesztes mezőkről tudunk nyerő mezőre lépni. Vagyis nyerő mező lesz az első olyan mező, amelyről nem tudunk nyerő mezőre lépni. A 2.4. definíció mintájára tehát definiálható a nyerő mezőket megadó függvény, amivel már a kezünkben lesz a nyerő stratégia is konkrét n, m -ek esetén. Persze a nyerő mezők kiszámítása, valamint a játék közben annak eldöntése, hogy melyik nyerő mezőre tudunk lépni az aktuális játékállásból, jóval több időt vehet igénybe.

Nem világos azonban, hogy mennyivel jutottunk közelebb egy expliciten megfogalmazható nyerő stratégiához. Remélhetőleg a fenti megközelítés hozzá fog majd segíteni valakit ahhoz, hogy megfossza David Gale-t 100 \$-tól.

Felhasznált irodalom

- [1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Academic Press, London, 1982
- [2] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press, London, 1976
- [3] Csákány Béla, *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon Kiadó, 1998, 86-88
- [4] Dienes Zoltán, Varga Tamás, *Dienes Professzor játéka*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989
- [5] Thomas S. Ferguson, *Game Theory*, Class Notes for Math 167, Fall 2000
- [6] D. Gale, *A Curious Nim-type game*, Amer. Math. Monthly 81, 1974, 876-879
- [7] Horváth Gábor, Szabó Csaba, *CHOMP*, Integers, beküldve, 2003
- [8] Fred Schuh, *The game of divisions*, Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 39, 1952, 299-304
- [9] Doron Zeilberger, *Don't ask what can the computer do for Me?, but rather: What Can I do for the Computer?*,
<http://www.math.temple.edu/~zeilberg/Opinion36.html>
- [10] Doron Zeilberger, *Programming Computers to Do Math is at least as much fun as Proving Tetels*, <http://www.math.temple.edu/~zeilberg/Opinion37.html>
- [11] Doron Zeilberger, *Three-Rowed CHOMP*, Advances in Applied Mathematics 26, 2001, no-2, 168-179
- [12] Nagy Sára, Fekete István, Gregorics Tibor *Bevezetés a mesterséges intelligenciába*, LSI Oktató Központ, Budapest 1999