1. TDK Szakkör

Jankó Zsuzsanna

2011. szeptember 19.

1 Király Tamás feladatai

Tétel 1 (Nash-Williams)**.** *Legyen* $G = (V, E)$ *irányítatlan gráf,* $k \in \mathbb{Z}_+$*. A* G *gráf akkor és csak akkor fedhető le* k *erdővel, ha* $i(X) \le k(|X| - 1)$ *minden* $\emptyset \ne X \subseteq V$*-re.*

Itt $i(X)$ az X csúcshalmaz által feszített élek száma, vagyis amiknek mindkét vége X-ben van. Fedés alatt azt értjük hogy minden gráfbeli él benne van valamelyik erdőben (akár több erdőben is).

Definició 2. A G gráf erdősürüsége (arboricity):

$$arb(G) = \max_{X \subseteq V, |X| \ge 2} \frac{i(X)}{|X| - 1}$$

Legyen k pozitív egész, és $0 < \varepsilon < 1$. Mit tudunk mondani azokról a gráfokról melyek erdősürüsége $k + \varepsilon$? A Nash-Williams tétel miatt $k + 1$ erdővel fedhetők.

Sejtés 3 (Nine Dragon Tree Conjecture)**.** *Ha* $arb(G) \le k + \varepsilon$ *akkor* G *lefedhető* $k + 1$ *erdővel ahol az egyik erdő maximális fokszáma* $\le \lceil \frac{(k+1)\varepsilon}{1-\varepsilon} \rceil$

Ismert esetek: Igaz $\varepsilon = \frac{1}{2}$-re és $k = 1$ esetén $\varepsilon \le \frac{3}{4}$-re.

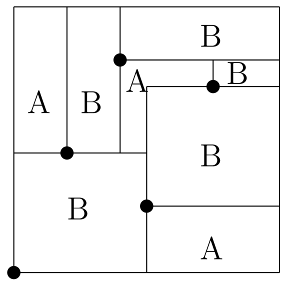
Sejtés 4 (Erősebb változat)**.** *Ha* $arb(G) \le k + \varepsilon$ *akkor* G *lefedhető* $k + 1$ *erdővel ahol az egyik erdő minden komponense* $\le \lceil \frac{(k+1)\varepsilon}{1-\varepsilon} \rceil$ *méretü.*

Gyengébb változat:

Tétel 5 (Király Tamás)**.** *Ha* $arb(G) \le k+\varepsilon$ *akkor* G *lefedhető* k *erdővel és egy (nem feltétlenül erdő) résygráffal, aminek maximális fokszáma* $\le \lceil \frac{(k+1)\varepsilon}{1-\varepsilon} \rceil + 1$*. Ha* $\varepsilon = \frac{1}{2}$*, akkor megadható olyan fedés is, ahol e részgráf max fokszáma* $\le \lceil \frac{(k+1)\varepsilon}{1-\varepsilon} \rceil$*.*

2 Pap Juli feladata

Alice süt egy tortát, ami négyzet alakú és a tetejére Smarties bogyókat rak, úgy hogy a bal alsó sarokba tesz, és ezen kívül még véges sok helyre. Bob csak az olyan tortaszeleteket szereti, amiknek bal alsó sarkában van Smarties de máshol nincs. Bob megeszi ezeket, a többi Alice-é.
Például:



A játék menete:
Alice elhelyez pontokat
Bob választ téglalapokat, hogy a területösszeg maximális legyen.

Pl ha Alice az átlóba rak, el tudja érni tetsz ε-ra, hogy Bobnak csak $\frac{1}{2} + \varepsilon$ jusson.

Kérdések:
Elérhet-e Bob mindig legalább $\frac{1}{2}$-et?
Adott ponthalmaz mellett mit csináljon Bob?
Konstans pontszám melett mi a legjobb amit Alice elérhet?

3 Bérczi Kristóf feladatai

$G = (V, E)$ irányítatlan gráf, pontok száma n, az élek száma m. Az éleket szeretnénk megcímkézni az $1, 2, \ldots m$ számokkat.

Definició 6. Egy számozás *magic* ha a számok összege minden csúcsra ugyanaz.

Definició 7. Egy számozás *antimagic* ha a számok összege minden csúcsra különböző.

K_2-nek nevezzük a kétpontú teljes gráfot.

Sejtés 8. *K_2-től eltekintve minden gráfnak létezik antimagic színezése.*

Sejtés 9. *(gyengébb)*
K_2-től eltekintve minden fának létezik antimagic színezése.

Tétel 10 (N. Alon)**.** *Ha egy (nem K_2) fa legkisebb fokszáma legalább $c \log(n)$ akkor a fának van antimagic szinezése. (Elég nagy c-re)*

Általánosítás: $1, 2, \ldots m$ helyett $0, 1, 2, \ldots m$-ből választunk.
vagy másik $m + 1$ elemü halmazból választunk.

4 Frank András feladatai

Feladat 11. *Legyen G egy n pontú, $n + 1$ élü egyszerü gráf. Van-e szintén n pontú H gráf, aminek ugyanez a fokszámsorozata, nincs benne hurokél, viszont van párhuzamos él?*

Feladat 12. *Legyen G egy n pontú, $n + 1$ élü egyszerü* hipergráf. *Minden hiperél r-elemü. Van-e szintén n pontú H hipergráf, aminek ugyanez a fokszámsorozata, nincs benne hurokél, viszont van párhuzamos él?*

Feladat 13. *Adott egy M matroid, n elemü alaphalmazzal, és benne egy $n+1$ elemü bázis. Válasszunk úgy $n + 1$ bázist, hogy a fokszámsorozat ugyanaz legyen, de az újban szerepeljen 2 egyforma bázis.*

(Az előző két feladat ennek a speciális esete)

Feladat 14 (Nemes Tihamér informatikaverseny, 2011 tavasz, 11.-13. osztály, 2.forduló)**.** *Tekintsük azt az egyszemélyes játékot, amelyet N sorból és M oszlopból álló négyzetrácsos táblán játszanak. A táblán minden mező vagy csapda, vagy valahány gyöngyöt tartalmaz. Egy bábut kell mozgatni a táblán. A bábu kezdetben a tábla bal felső sarkában van, és a jobb alsó sarokba kell eljuttatni az alábbi lépés-szabályt betartva:*
Csak olyan mezőre lehet lépni, ahova még nem lépett a bábu.
Csapda mezőre nem lehet lépni.
Csak a négy szomszédos mező valamelyikére lehet lépni.
Egy lépésben csak jobbra, lefelé, vagy felfelé lehet lépni. Minden olyan mezőn lévő gyöngy a játékosé lesz, amely mezőre lép. A játék célja, hogy a játékos a lehető legtöbb gyöngyöt megszerezze. Készíts programot amely kiszámítja a megszerezhető legtöbb gyöngyök számát, és meg is ad egy olyan lépéssorozatot, amely ezt eredményezi!

Átfogalmazva: Adott egy vegyes gráf, a függőleges élek irányítatlanok, a vízszintes élek irányítottak(jobbra). A csapda csúcsok nem szerepelnek a gráfban, a gyöngyös csúcsokon egy súlyozást kapunk. Cél egy max súlyú st út keresése.

Mi ennek a feladatnak egy jó általánosítása?

Feladat 15. *Vegyes gráf, élein súlyozás. Mikor létezik negatív összsúlyú kör?*

(Erről kiderült hogy NP-teljes)

Kínai Postás probléma

- Irányítatlan gráf, keresünk minimális körsétát az éleken, hogy minden élen járjunk legalább egyszer. Ez a következővel ekvivalens: Adott öszefüggő gráfot tegyünk Eulerrá minimális számú párhuzamos él behúzásával.
- Irányított gráfra ugyanez.
- Vegyes gráfra ugyanez.

Az első két eset polinomiális időben megoldható, a harmadik NP-teljes.

Érdekes szakdolgozati téma:
Elmúlt évek kombinatorikai témájú versenyfeladatait megnézni, ezek mögött absztrakt, általánosabb háttér feltárása.

Egyenletes színezések:

Állítás 16. *Adott egy G irányítatlan gráf, és k egész szám. Éleket meg tudjuk színezni k színnel úgy, hogy ha $d_i(v)$ a v csúcsból induló i színü élek száma, akkor*

$$\left\lfloor \frac{d(v)}{k} \right\rfloor \le d_i(v) \le \left\lceil \frac{d(v)}{k} \right\rceil$$

(Ez szerepelt opkut 1-ben)

Feladat 17 (M. Goemans)**.** *Van egy G irányítatlan gráf, és k egész szám. Legyen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \ge 0$, $\sum \lambda_i = 1$. Van-e olyan színezésre a gráfnak, hogy bármely színosztályra*

$$\lfloor d(v)\lambda_i \rfloor \le d_i(v) \le \lceil d(v)\lambda_i \rceil$$

Ha $k = 2$, egy folyam-feladatra vezethető vissza,
ha $k > 2$ akkor csak a $\lambda_i = \frac{1}{k}$-ra tudjuk a megoldást.

Állítás 18. *Egy 2-élösszefüggő gráfnak mindig létezik erősen összefüggő irányítása.*

(megoldás: fülfelbontással)

Hipergráfot szeretnék megirányítani, olyan módon, hogy minden hiperélnek kiválasztom egy csúcsát, ami a feje lesz. Egy írányitás erősen öf, ha minden $\emptyset \neq Z \subsetneq V$ részhalmazra van e hiperél, hogy e feje Z-ben van, de nem a teljes hiperél van Z-ben. (Azaz e belép Z-be).

Definició 19. Egy H hipergráf (1,1)-összefüggő, ha minden $V = V_1 \cup \cdots \cup V_q$ partícióra azon élek száma, amik q részt metszenek, legalább q.

Tétel 20. *Egy H hipergráfnak akkor és csak akkor van erősen öf irányítása, ha (1,1)-összefüggő.*

Ha egy ir. gráf erősen öf, és minden élt az ellenkező irányba irányítok, továbbra is eöf lesz.

Feladat 21. *Egy 3-uniform hipergráfban keresek*
a, két
b, három
erősen öf irányítást, úgy hogy minden hiperélben különböző legyen hogy egyes irányításokban hol van a feje.