2. TDK Szakkör

2011. október 17.

Ezen az órán a már Tdk-zó diákok számoltak be arról, hogy milyen témával foglalkoznak.

1 Horváth Markó

Antimagic címkézés

Definíció: Legyen a $G = (V, E)$ egyszerű, izolált pont nélküli gráfnak n csúcsa és m éle. G éleinek egy $f : E \to \{1, \ldots, m\}$ bijektív címkézését *antimagic* címkézésnek hívjuk, ha a csúcsokra illeszkedő éleken a címkék összege csúcsonként (páronként) különböző, azaz az $f^+ : V \to \mathbb{N}$, $f^+(u) = \sum\limits_{\underline{uv} \in E} f(uv)$ függvény injektív. G-t antimagic-nek nevezzük, ha létezik antimagic cimkézése.

Sejtés: Bármely összefüggő gráf (K_2 kivételével) antimagic.
Sejtés: Bármely fa (K_2 kivételével) antimagic.

Hartsfield és Ringel [1] megmutatta, hogy az utak, körök, legalább 3 csúcsú teljes gráfok antimagic-ek.

Alon és társai [2] megmutatták, hogy a sejtés sűrű gráfokra igaz. Azt is megmutatták, hogy azok a legalább 4 csúcsú gráfok, melyeknek legkisebb fokszáma $\Omega(\log n)$ antimagicek. Egy másik eredményük szerint ha egy legalább 4 csúcsú gráfban a maximális fokszám legalább $4n - 2$, akkor létezik antimagic cimkézése.

Wang és Hsiao [3] a gráfok egy újabb speciális osztályára bizonyították az antimagic cimkézés létezését. Ők gráfok Descartes-szorzatát (*Cartesian product*) vizsgálták. Például két út (P_k, P_l: $k \geq l \geq 2$) Descartes-szorzata (azaz egy rács) antimagic. Ha pedig egy d-reguláris gráf és egy legalább 2 hosszú út Descartes-szorzatát vesszük, akkor az így kapott prizma (*Prism grid*) antimagic.

Az antimagic címkézésnek számos változata van. A k-antimagic címkézés ($k > 0$) esetén f az $\{1, \ldots, m + k\}$ halmazba képez. Az (ω, k)-antimagic címkézés esetén pedig minden csúcson már létezik egy kezdeti érték, amelyet az $\omega : V \to \mathbb{N}$ függvény határoz meg. Persze olyan változatot is vizsgálhatunk, melyben f egy tetszőleges, m elemű, egészeket tartalmazó halmazba képez.

Az előbb említett speciális eseteket vizsgálta Hefetz [4]. Többek között a kombinatorikus nullstellensatz-t alkalmazva a problémára.

[1] N. Hartsfield, G. Ringel: *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, Boston, 1990.

[2] N. Alon, G. Kaplan, A. Lev, Y. Roditty, R. Yuster, *Dense graphs are anti-magic*, J. Graph Theory 47 (4) (2004) 297-309.
[3] T-M. Wang, C-C. Hsiao: *On anti-magic labeling for graph product*, Discrete of Mathematics 308 (2008) 3624-3633.
[4] D. Hefetz: *Anti-magic graphs via the Combinatorical NullStellenSatz*, J. Graph Theory 50 (4) (2005) 263-272.

2 Kis-Benedek Ágnes

Gilberto Calvillo-Vives 1978-as tézisével foglalkozom, melynek címe Optimum branching systems.

A súlyozatlan esetben adott $G = (V, A)$ irányított gráfban adott r gyökérpont mellett kell találni k-fenyőt, azaz olyan részgráfot, amely k darab fenyő uniója. Ehhez bevezetésre kerül egy "flame"-nek nevezett fogalom, amely olyan gráfot takar, aminek minden v pontjának ugyanannyi a befoka, mint az r-ből v-be menő maximális folyam értéke. A k-fenyő és a minden ponton k befokú "flame" ekvivalens fogalmak. Erre épül egy algoritmus, amely G-ben talál egy k-fenyőt olyan módon, hogy kiindul az üres F "flame"-ből, és ha van még v k-nál kisebb befokú hiányos pont, akkor egy segédgráfban (amely F éleit megfordítva tartalmazza, a többi G-beli élt pedig az eredeti irányítás szerint) egy r-ből v-be vezető olyan irányított utat kell keresni, amely a lehető legtöbb F-beli élt tartalmazza, és egy ilyen tulajdonságú út F-en kívüli éleit F-hez véve egy jobb "flame"-et kapunk. A végén pedig vagy találunk egy F "flame"-et, aminek minden pontjának k a befoka, tehát ez egyszersmind k-fenyő is, vagy találunk egy S sértő halmazt, aminek a létezése azt mutatja, hogy G-ben nem létezik k-fenyő.

A súlyozott esetben szintén adott a $G = (V, A)$ digráf, és élein egy c súlyfüggvény, és c-re nézve minimális súlyú k-fenyőt szeretnénk találni. Jelenleg ezt az esetet vizsgálom.

3 Hujter Bálint

Integer Caratheodory Problem

Cunningham 1984-es cikkében vetette fel a következő kérdést: Adott egy M matroidban jó sok bázis. Tekintsük ezen bázisok incidenciavektorainak összegét, ez w vektor. Ilyenkor w vajon előállítható-e viszonylag kevés féle bázisvektor nemnegatív egész kombinációjaként is? Hamar sikerült ezt 2n-1 bázisvektorral megoldani (ahol n a matroid alaphalmazának mérete), ráadásul egy általánosabb halmazon, az ún. Hilbert-bázisokra. [Cook-Fonlupt-Schrijver 1986] Sebő András 1990-es cikkében azt sejti, hogy ez n bázisvektorral is megy (ennél kevesebbel persze már törtkombinációval is lehetetlen). Ebben a formában problémánk már nagyon emlékeztet a mindannyiunk által tanult Caratheodory tételre, innen jön a probléma elnevezése.

Sebő a sejtését Hilbert-bázisokra fogalmazta meg, azonban Bruns-Gubeladze-Henk-Martin-Weismantel 1999-es cikkében sikeresen cáfolja ezt a sejtést. Viszont a szűkebb értelemben vett, csak matroidokra vonatkozó sejtés érvényeben maradt, sőt Gijswijt és Regts 2010-es cikkükben igazolták is ezt. A bizonyítás elég rövid és nem használ semmiféle hatalmas háttérelméletet, sem valami soha-nem-látott ördöngős ötletet, ezért is meglepő, hogy ennyit kellett várni rá. Témavezetőmmel, Frank Tanár Úrral ennek okait, és a bizonyítás valódi lényegét próbáljuk igazán megérteni. Egyes részeken már sikerült egyszerűsíteni a g-polimatroidok nyelvét használva. A bizonyítás algoritmikus szemléletet sugall, ezt úgy tűnik sikerült rendes algoritmussá fejleszteni. Az sem tűnik reménytelennek, hogy a gondolatmenet közeli kérdéskörök hasonló problémáira is ráhúzható (például fenyők pakolása). Gijswijt is javasolt nekünk egy továbblépési irányt, Sebő már említett cikkének egy másik sejtésére utalva.

4 Frank András újabb feladatai

Tétel 1 (Edmonds)**.** *$D = (V, A)$ irányított gráf gyökeresen k-élösszefüggő r gyökérrel (azaz $\rho(X) \geq k$ minden $X \subseteq V - r$-re) $\Leftrightarrow$ létezik k élidegen r gyökerű feszítő fenyő.*

Edmonds diszjunkt fenyő tétele kapacitásokkal: (Schrijver könyv, 907.oldal)

Tétel 2. *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $r \in V$, és $c : A \to \mathbb{Z}_+$ kapacitás függvény. Ha $F_1, F_2, \ldots F_k$ r gyökerű feszítőfenyők melyekre $\sum_{i=1}^{k} \lambda_{F_i} \chi^{F_i} \leq c$, akkor $\sum_{i=1}^{k} \lambda_{F_i}$ maximuma megegyezik a minimális r-vágás értékével.*

Legyen az élek száma m. Célunk minél kevesebb fenyővel megoldani az előbbit, tehát k legyen a lehető legkisebb.

Tétel 3. *$2m$ fenyővel megoldható a pakolás.*

Feladat 4. *Meg lehet-e csinálni m fenyővel?*

Megjegyzés: Ha törtpakolás lehet, akkor m fenyő is elég. (Poliéderes megoldás, Caratheodory tétel)

Feladat 5. *A linking tulajdonság alábbi megjelenesere kellene direkt bizonyitás:*
Ha egy digráf adott befoksorazatú digraf hozzáadasaval erősen összefüggővé tehető és adott kifoksorozatúval is, akkor van olyan növelés is, amely egyszerre teljesiti a be- es a kifok sorozatot, feltéve, hogy ezek összege ugyanaz.

5 További feladatok

G páros gráf, létezik benne teljes párosítás. Minimális számú élet szeretnénk törölni belőle hogy már ne legyen teljes párosítása.

Élkromatikus szám egy általánosítása:
Gráf éleit szeretnénk úgy színezni, hogy ne csak a szomszédos élek legyenek különbözőek, hanem a 2 távolságra levőek is. A színek számára adjunk felső korlátot. (Vizing tétel szerű)