Néhány megoldatlan probléma a Kneser–Poulsen-sejtés körül

Csikós Balázs

Problémafelvető TDK előadás, 2012. február 27.

1. Bevezetés

Legyen M^n az n-dimenziós $\mathbb{E}^n$ euklidészi tér, vagy az $\mathbb{S}^n$ gömbi tér, vagy a $\mathbb{H}^n$ hiperbolikus tér közül az egyik. Jelölje $\mathcal{K}_n$ az M^n kompakt részhalmazainak halmazát.

1.1. Definíció. Az $X \in \mathcal{K}_n$ halmaz egy $f : X \to M^n$ leképezését M^n-be *kontrakciónak* nevezzük, ha $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ minden $x, y \in X$-re.

1.2. Definíció. Egy $\mu : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ függvényt monoton növőnek (illetve csökkenőnek) nevezünk, ha tetszőleges $X \in \mathcal{K}_n$-re és tetszőleges $f : X \to M^n$ kontrakcióra $\mu(f(X)) \leq \mu(X)$ (illetve $\mu(f(X)) \geq \mu(X)$).

Érződik, hogy egy kontrakciónál egy halmaz valamilyen értelemben összemegy. Nyilvánvaló például, hogy a *halmaz átmérője* a kontrakció során nem nőhet. Belátható az is, hogy az $\mathbb{E}^n$ euklidészi térben a λ_n *Lebesgue-mérték*, vagy *a kompakt halmazt tartalmazó legkisebb gömb sugara* szintén monoton a fenti értelemben.

1. Kérdés. A kompakt halmazok milyen további geometriai invariánsai változnak monoton módon? Találjunk nem triviális példákat!

2. A Kneser–Polusen-sejtés

2.1. Definíció. Egy $X \in \mathcal{K}_n$ halmaz $r > 0$ *sugarú nyílt környezetén* a

$$B(X, r) = \{y \in M^n : d(y, X) < r\} = \bigcup_{x \in X} B(x, r)$$

halmazt értjük.

2.2. Kneser–Poulsen-sejtés. *Az X r-sugarú nyílt környezetének* $\mathrm{vol}(B(X,r))$ *térfogata az X monoton növő függvénye.*

Mivel a kompakt halmazok „jól közelíthetők” véges halmazokkal, a sejtés egyenértékű a következő állítással:

2.3. Kneser–Poulsen-sejtés kongruens gömbök uniójára ([9], [10], [8])**.** *Ha*

$$f : \{P_1, \dots, P_N\} \to \{Q_1, \dots, Q_N\}, \qquad f(P_i) = Q_i \tag{1}$$

egy kontrakció, akkor bármely $r > 0$-ra

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{N} B(P_i, r)\right) \geq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{N} B(Q_i, r)\right).$$

Igaznak látszik a következő általánosítás:

2.4. Kneser–Poulsen-sejtés tetszőleges gömbök uniójára. *Ha* (1) *egy kontrakció, akkor bármely $r_1, \dots, r_N > 0$-ra*

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{N} B(P_i, r_i)\right) \geq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{N} B(Q_i, r_i)\right). \tag{2}$$

Szintén igaznak látszik a sejtésnek az a variánsa, ahol a gömbök uniója helyett a metszetük térfogatának monotonitását sejtjük:

2.5. Kneser–Poulsen-sejtés tetszőleges gömbök metszetére ([7])**.** *Ha* (1) *egy kontrakció, akkor bármely $r_1, \dots, r_N > 0$-ra*

$$\mathrm{vol}\left(\bigcap_{i=1}^{N} B(P_i, r_i)\right) \leq \mathrm{vol}\left(\bigcap_{i=1}^{N} B(Q_i, r_i)\right). \tag{3}$$

2.6. Megjegyzés. Mivel a gömbi geometriában egy P középpontú gömb komplementere egy másik gömb a P-vel átellenes pont körül, a de Morgan azonosságok segítségével látható, hogy a gömbi geometriában a 2.4 és 2.5 sejtések egyenértékűek.

A legfontosabb speciális eset, amikor a 2.4 és 2.5 sejtések bizonyítva vannak a következő:

2.7. Tétel ([2], [6])**.** *Ha a $P_1, \dots, P_N; Q_1, \dots, Q_N \in M^n \subset M^{n+2}$ pontokhoz léteznek olyan $\gamma_i : [0,1] \to M^{n+2}$ $(i = 1, ..., N)$ folytonos leképezések, melyekre $\gamma_i(0) = P_i$, $\gamma_i(1) = Q_i$ és $d(\gamma_i(t), \gamma_j(t))$ monoton csökkenő minden $1 \leq i < j \leq N$-re, akkor fennállnak az* (2) *és* (3) *egyenlőtlenségek.*

Mennyire erős az a megszorítás, hogy egy kettővel magasabb dimenziós térbe kilépve létezzen egy folytonos kontrakció egy pontrendszer és a kontraháltja között? Erre vonatkozóan a következőt tudjuk:

2.8. Bakugrás lemma ([2], [5]). *Ha a* $\{Q_1, \ldots, Q_N\} \subset \mathbb{E}^n$ *pontrendszer a* $\{P_1, \ldots, P_N\} \subset \subset \mathbb{E}^n$ *pontrendszer kontrakciója, akkor léteznek olyan* $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{E}^{2n}$ $(i = 1, ..., N)$ *folytonos leképezések, melyekre* $\gamma_i(0) = P_i$, $\gamma_i(1) = Q_i$ *és* $d(\gamma_i(t), \gamma_j(t))$ *monoton csökkenő minden* $1 \leq \leq i < j \leq N$*-re. Ez az állítás nem igaz, ha* $\mathbb{E}^{2n}$*-t kicseréljük* $\mathbb{E}^{2n-1}$*-re.*

A bakugrás lemmát a 2.7 tétellel kombinálva kapjuk, hogy a Kneser–Poulsen-sejtés fentebb megfogalmazott variánsai az euklidészi síkon igazak ([2]).

Az euklidészi bakugrás lemmából azonnal következik, hogy az $\mathbb{S}^n$ egy pontrendszere és kontraháltja között mindig található egy olyan folytonos kontrakció, mely legfeljebb az $\mathbb{S}^{2n+1}$ gömbbe lép ki. Nem tudjuk viszont, hogy a $2n+1$ csökkenthető-e $2n$-re:

2. Kérdés. Igaz-e, hogy ha a $\{Q_1, \ldots, Q_N\} \subset \mathbb{S}^n$ pontrendszer a $\{P_1, \ldots, P_N\} \subset \mathbb{S}^n$ pontrendszer kontrakciója, akkor léteznek olyan $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{S}^{2n}$ $(i=1, ..., N)$ folytonos leképezések, melyekre $\gamma_i(0) = P_i$, $\gamma_i(1) = Q_i$ és $d(\gamma_i(t), \gamma_j(t))$ monoton csökkenő minden $1 \leq i < j \leq N$-re?

A bakugrás lemma hiperbolikus változatáról még ennél is kevesebbet tudunk. A következő sem ismert:

3. Kérdés. Igaz-e, hogy ha a $\{Q_1, \ldots, Q_N\} \subset \mathbb{H}^n$ pontrendszer a $\{P_1, \ldots, P_N\} \subset \mathbb{H}^n$ pontrendszer kontrakciója, akkor van olyan $k > 0$ egész és léteznek olyan $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{H}^{n+k}$ $(i=1, ..., N)$ folytonos leképezések, melyekre $\gamma_i(0) = P_i$, $\gamma_i(1) = Q_i$ és $d(\gamma_i(t), \gamma_j(t))$ monoton csökkenő minden $1 \leq i < j \leq N$-re? Ha ez igaz, akkor mennyi a k legkisebb értéke, melyre ez igaz?

A bakugrás lemmával rokon kérdés az alábbi, melyre szintén nem ismert a válasz:

4. Kérdés. Nevezzük egy $\mathbb{H}^n$-beli szimplex *elemi kontrakciójának* azt olyan kontrakciót, amikor az egyik hiperlapot a másik irányába forgatjuk a közös $(n-2)$-dimenziós lapjuk körül, de csak egy olyan helyzetig, ahol a szimplex csúcsai még nem esnek bele egy hipersíkba. (Elemi kontrakciónál az élek közül pontosan egy rövidül, a többi hossza változatlan.) Igaz-e, hogy ha egy $\mathbb{H}^n$-beli szimplex csúcshalmaza egy másik $\mathbb{H}^n$-beli szimplex csúcshalmazának kontrakciója, akkor a nagyobb szimplexből el lehet jutni a kisebbig véges sok elemi kontrakción keresztül?

3. A konvex burok kerülete

Abból, hogy a Kneser–Poulsen-sejtés igaz az euklidészi síkon, következik, hogy egy $\mathbb{E}^2$-beli kompakt halmaz *konvex burkának kerülete* kontrakcióknál nem nőhet (l. [4]). Véges ponthalmazra ez egy „középiskloás” feladatnak hangzik, így felvetődik az alábbi

5. Kérdés. Hogyan látható be elemi síkgeometriai eszközökkel (az $\mathbb{E}^4$-be való kiugrás nélkül), hogy véges sok pont konvex burkának kerülete nem nőhet, ha a pontokat kontraháljuk?

Ha lenne egy ilyen bizonyítás, akkor érdemes lenne megvizsgálni azt, hogy mennyire támaszkodik a bizonyítás a párhuzamossági axiómára. Ez a kérdés azért fontos, mert nem tudjuk a választ az alábbi kérdésre:

6. Kérdés. Igaz-e, hogy a hiperbolikus sík kompakt halmazain a „konvex burok kerülete” függvény monoton?

3.1. Megjegyzés. A konvex burok területe az euklidészi síkon, a konvex burok felszíne a magasabb dimenziós euklidészi terekben nem monoton. A konvex burok kerületének monoton analogonja magasabb dimenziós euklidészi terekben a kompakt halmazok *átlagszélessége.*

4. A Kneser–Poulsen-sejtés valószínűségi változata

Tegyük fel, hogy a sejtés 2.4 és 2.5 változatában az r_i sugarakat nem tekintjük rögzítettnek, hanem véletlenül választjuk őket valamilyen rögzített eloszlás szerint. Ekkor a gömbök uniójának, illetve metszetének térfogata egy valószínűségi változó, melynek tekinthetjük a várható értékét és vizsgálhatjuk, hogy monotonon változik-e a középpontok összehúzásakor.

Talán a valószínűségi változat azokban az esetekben „támadható” könnyen, amikor a várható értéket expliciten ki tudjuk fejezni a középpontok közt fellépő távolságokkal. Egy ilyen eset az, amikor a sugarakat a *Rayleigh-eloszlással* választjuk. A Rayleigh-eloszlás sűrűségfüggvénye $f(x;m) = 2mxe^{-mx^2}$ ahol $m > 0$ egy paraméter.

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az r_i sugár egy $f(x, m_i)$ sűrűségfüggvényű Rayleigh-eloszlású valószínűségi változó, $P_i \in \mathbb{E}^n$, $(i = 1, \dots, N)$. Ekkor*

$$E\left(\operatorname{vol}\Big(\bigcap_{i=1}^{N} B(P_i, r_i)\Big)\right) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{n/2} e^{-\dfrac{\sum_{1\le i<j\le N} m_i m_j d(P_i,P_j)^2}{M}},$$

ahol $M = m_1 + \dots + m_N$.

A fenti képlet azonnal mutatja, hogy a gömbök metszete térfogatának várható értéke nem csökkenhet, ha a $d(P_i, P_j)$ távolságok csökkennek.

7. Kérdés. Vannak-e más eloszlások, melyekre a gömbök metszetének várható értékét ilyen expliciten ki tudjuk fejezni a középpontok közti távolságokkal, és a képlet azonnal mutatja a várható érték monotonitását?

A metszettérfogatok várható értékeivel az unió térfogatának várható értéke egyszerűen kifejezhető a szitaformula alkalmazásával. Ez a képlet a gömbök uniója térfogatának várható értékét monoton függvények alternáló összegeként állítja elő ezért nem triviális az alábbi:

8. Kérdés. Igaz-e, hogy az

$$E\left(\mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{N} B(P_i, r_i)\right)\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\dots,N\}} (-1)^{|I|+1} \left(\frac{\pi}{M_I}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{\{i,j\}\subset I} m_i m_j d(P_i,P_j)^2}{M_I}}$$

várható érték nem nőhet, ha a $d(P_i, P_j)$ távolságok csökkennek? Az egyenletben az $M_I = \sum_{i\in I} m_i$ jelölést használtuk.

5. Alexander sejtése

Ismertek példák arra, hogy azonos sugarú gömbök uniójának felszíne nőhet, különböző sugarú gömbök metszetének felszíne pedig csökkenhet a középpontok kontrakciójakor. Azonos sugarú gömbök metszete felszínének monotonitására viszont eddig nem ismert ellenpélda.

5.1. Alexander sejtése ([1]). *Ha a* $\{P_1, \dots, P_N\} \subset \mathbb{E}^n$ *pontrendszert kontraháljuk, akkor a* $\bigcap_{i=1}^{N} B(P_i, r)$ *metszet felszíne nem csökken.*

A sejtés még az euklidészi síkon is nyitott (l. [3]), tehát „bemelegítésként” ezzel érdemes kezdeni:

9. Kérdés. Igaz-e, hogy ha a $\{P_1, \dots, P_N\} \subset \mathbb{E}^2$ pontrendszert kontraháljuk, akkor a $B(P_i, r)$ körlapok metszetének kerülete nem csökken?

Hivatkozások

[1] R. Alexander, Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces, no. I, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **288** (2) (1985), 661–678.

[2] K. Bezdek and R. Connelly, Pushing disks apart – the Kneser-Poulsen conjecture in the plane, *J. reine angew. Math.,* **553** (2002), 221–236.

[3] K. Bezdek, R. Connelly, B. Csikós, On the perimeter of the intersection of congruent disks, to appear in *Beiträge zur Algebra und Geometrie*

[4] V. Capoyleas and J. Pach, *On the Perimeter of a Point Set in the Plane,* DIMACS Ser. in Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67–76.

[5] H. Cheng, S.P. Tan, Y. Zheng. On continuous expansions of configurations of points in Euclidean space. *ArXiv:1107.0140v1 [math.MG] 1 Jul 2011.* http://arxiv.org/abs/1107.0140v1

[6] B. Csikós, A Schläfli-type formula for polytopes with curved faces and its application to the Kneser-Poulsen conjecture, to appear in *Monatshefte für Matheamatik*

[7] M. Gromov, *Monotonicity of the Volume of Intersection of Balls,* (Gafa 85-86), Lecture Notes in Math. 1267, Springer, New York, 1987, 1–4.

[8] H. Hadwiger, Ungelöste Probleme No. 11, *Elem. Math.,* **11** (1956), 60–61.

[9] M. Kneser, Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmass, *Arch. Math.* **6** (1955), 382–390.

[10] E.T. Poulsen, Problem 10, *Math. Scand.* **2** (1954), 346.