# TDK kutatási feladatok

TDK szemináriumi összefoglaló* 2014. május 5. és 12.

## 1 Gráfok lista-színezése bőség és kizárt teljes minor feltételekkel (kitűző: Barát János)

**Tétel 1 (Grötzsch)** *A háromszög-mentes síkgráfok 3 színnel kiszínezhetők.*

**Definíció** *Listaszínezésnek* nevezzük, ha a gráf minden csúcsához meg van adva színeknek egy listája, és csak abból választhatunk. Egy gráf *listakromatikus száma* $\chi_l$: a legkisebb olyan szám, hogy ha minden csúcshoz egy legalább $\chi_l$ méretű listát adunk meg, a gráf kiszínezhető.

Példa: a $K_{3,3}$ páros gráf 2 színnel színezhető, de nem 2-listaszínezhető. $\chi_l(K_{3,3}) \geq 3$, és $\chi_l(K_{q,q^2}) \geq q+1$.

Egy $G$ síkgráf esetén $3n - 6 \geq |E(G)|$, ezért van olyan csúcsa, aminek fokszáma $\leq 5$. Ismert, hogy $\chi(G) \leq 6$, hasonló módon mohó módszerrel színezve 6 színnel listaszínezhető: $\chi_l(G) \leq 6$.

**Definíció** Egy gráf *k-degenerált*, ha felépíthető úgy, hogy mindig max $k$ fokú csúcsokat veszünk hozzá. Egy síkgráf 5-degenerált.

Ha egy gráf $k$-degenerált, akkor $k+1$-listaszínezhető.

**Tétel 2 (Thomassen)** *Minden $G$ síkgráfra $\chi_l(G) \leq 5$, de a négyszíntétel listaverziója már nem igaz: van $G$ síkgráf, amire $\chi_l(G) > 4$.*

**Tétel 3** *Minden háromszögmentes $G$ síkgráfra $\chi_l(G) \leq 4$, de van háromszögmentes $G$ síkgráf, amire $\chi_l(G) > 3$.*

**Definíció** Egy $H$ gráf a $G$ gráf *minorja*, ha elérhető $G$-ből éltörlésekkel, csúcstörlésekkel és élösszehúzásokkal.

**Tétel 4 (Wagner)** *Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmaz minorként $K_{3,3}$-at és $K_5$-öt*

*A rendezvényt támogatta az NTP TDK-13-085 pályázat, "az ELTE TTK Diákköri Programjai"

**Tétel 5** *Minden $K_5$ minor mentes $G$ gráfra $\chi_l(G) \leq 5$, de van $K_5$ minor mentes $G$ gráf, amire $\chi_l(G) > 4$.*

**Tétel 6 (Mader)** *Ha $G$ $K_6$ minor mentes akkor $|E(G)| \leq 4n - 10$. Ebből következik, hogy 7-degenerált, tehát $\chi_l(G) \leq 8$.*

**Kérdés 1** *Legyen a $G$ gráf $K_6$ minor mentes. Igaz-e hogy*

*1.* $\chi_l(G) \leq 7$*?*

*2.* $G$ *6-degenerált?*

*3.* $\chi_l(G) \leq 6$*?*

Egy általánosabb tétel szerint van olyan $K_6$ minor mentes $G$ amire $\chi_l(G) > 5$, ezért 5-re már nem kérdezzük meg.
**Definíció** Egy $G$ gráf *bősége*, a benne lévő legrövidebb kör hossza.

**Kérdés 2** *Ha a $G$ gráf $K_6$ minor mentes és bősége $\geq 5$, akkor mi a listaszínezési száma? (Biztosan $\chi_l(G) \leq 8$, kérdés hogy lehet-e 7,6,5,4,3 alá szorítani).*

**Tétel 7** *Ha a $G$ gráf $K_5$ minor mentes és bősége $\geq 5$, akkor $|E(G)| \leq \frac{9}{5}n - 4$.*

**Sejtés 8** *Ha a $G$ gráf $K_5$ minor mentes és bősége $\geq 5$, akkor $|E(G)| \leq \frac{2}{n} - c$.*

## 2 Agygráfok (kitűző: Grolmusz Vince)

Alkalmazott matematika, gráfelmélet, idegtudomány
Mi kell hozzá az érdeklődő diák részéről? Programozni tudás (script nyelvek, Python vagy Perl), gráfelmélet, kis számítógépes grafika.

Az agyban a sejtek axonokkal és dentritekkel kapcsolódnak, így olyan mint egy irányított gráf. Hogy melyik szinapszis épül ki, az idővel változik. A 80-as években a C. elegans teljes idegrendszerét leírták. Az ecetmuslica (Drosophila melanogaster) idegrendszerét is fel akarták térképezni, de neki már pár százezer idegsejtje van, ezért nem sikerült.

A Human Connectome Project az ember agyát szeretné feltérképezni, már 6 terrányi adat áll rendelkezésre. Erre több módszer van

- Mélyhűtött agyat vékonyra szeletelnek
- diffúziós MRI
- funkcionális MRI

A diffúziós MRI-ben azt nézik, hogy a vízmolekulák merre mozognak, ennek a valószínűségi elipszoidra alapján az axonok kirajzolhatók. Ezer csúcsú agygráfot kapunk. A csúcsok a ROI-k (region of interest): 60 érdekes agyi terület és ezek részei. Ezek a gráfok interneten elérhetőek, érdekes lenne megnézni rajtuk néhány matematikai gráftulajdonságot.

Funkcionális MRI: 1,5 Tesla mágneses térbe teszik az ember fejét, és eközben próbál megoldani rejtvényeket. Ha egy hemoglobin oxigénnel vagy anélkül közlekedik az agyban, mások lesznek a mágneses tulajdonságai. Egerek, patkányok esetében 9 Teslát használnak és pszihoaktív gyógyszereket is adnak nekik.

Ha az így kapott nagy gráfokat vizsgálni szeretnénk, érdemes Scriptben, Pythonban programozni tudni.
infók: pitgroup.org

További témák:

**Webkeresők**
webgraph.org, Erdős webgráf szerver: webgráfot bányásznak le és elérhetővé teszik. (Bánky Dániel, Ördög Rafael)

**Biológiai adatbányászat**
Metagenonika. Az ember 90%-a baktériumsejt. 2004-ben felfedezték, hogy a gyomorfekélyt is baktérium okozza. Autista gyerekeknek más a bélflórája mint az átlagos gyereknek. A mi célunk az lenne, hogy olyan gráf tulajdonságokat találjunk ami a biológiában, orvostudományban hasznos. Pl: Parkinsonos agygráfja máshogy néz ki.

## 3 Gráfok élfelbontása azonos méretű összefüggő részgráfokra (kitűző: Barát János)

Gráf alatt most mindig egyszerű gráfokat fogunk érteni. A három élű összefüggő részgráfok a 3 hosszú út ($P_4$), a 3 ágú csillag ($K_{1,3}$) és a háromszög ($C_3$). Egy Petersen-gráf felbontható $P_4$-ek diszjunkt uniójára.

**Állítás 9** *Ha egy gráf összefüggő és páros sok éle van, akkor felbontható 2 hosszú utakra.*

**Definíció** Azt mondjuk egy gráfnak van $\{k, k, k, \ldots\}$-felbontása, ha az élei particionálhatók $k$ élű összefüggő részgráfokra. Az ilyen kérdéseknél eleve feltesszük hogy $k$ osztja az élek számát.

**Tétel 10 (Jünger, Reinelt, Pulleyblank)** *Ha a gráf 2-élösszefüggő, akkor van* $\{3, 3, 3, \ldots\}$*-felbontása.*
*Ha a gráf 3-élösszefüggő, akkor van* $\{4, 4, 4, \ldots\}$*-felbontása.*

**Tétel 11** *Ha a gráf 4-élösszefüggő, és* $m_1 + m_2 + \ldots m_k = |E(G)|$ *akkor van* $\{m_1, m_2, \ldots m_k\}$*-felbontása.*

**Kérdés 3** *Igaz-e, hogy ha a gráf 3-élösszefüggő, akkor van* $\{5, 5, 5, \ldots\}$*-felbontása?*

**Sejtés 12 (Barát, Thomassen)** *Ha* $T$ *tetszőleges fa, akkor létezik* $k_T$ *konstans, hogy minden* $k_T$*-szeresen élösszefüggő gráfnak van* $T$*-felbontása? (azaz az élei felbonthatók a* $T$ *fával egybevágó részekre)*

**Tétel 13 (Thomassen)** *Ha a gráf 200-élösszefüggő, akkor van* $P_4$*-felbontása. Ha a gráf* $10^{71}$*-élösszefüggő, akkor van* $P_5$*-felbontása.*

**Kérdés 4** *Konstruáljunk gráfot, ami sokszorosan (3-4-5?) élösszefüggő, de nincs* $T$*-belbontása valami kis* $T$ *gráfra. (Alsó korlát keresése a sejtéshez.)*

# 4 Stabil elemek hálókban (kitűző: Jankó Zsuzsanna)

Legyen $L = (A, \leq)$ egy háló. Teljesnek nevezzünk ha $A$ minden részhalmazának van supremuma és infimuma. $L$ végtelen disztributív, ha

$$a \wedge \bigvee B = \bigvee \{a \wedge b : b \in B\}$$

Legyen a háló négyzete $L^2 = (A \times A, \leq)$ ahol $(a, b) \leq (c, d)$ az új hálóban ha $a \leq c$ és $b \leq d$ az eredeti hálóban. Legyen a háló csavart négyzete $\widetilde{\mathcal{L}} = (A \times A, \widetilde{\leq})$ ahol $(a, b) \widetilde{\leq} (c, d)$ az új hálóban ha $a \leq c$ és $b \geq d$ az eredeti hálóban.

Két függvényt használunk, $C : A \times A \to A \times A$ és $D : A \times A \to A \times A$, amik a következőket tudják:

- $C(x) = x \wedge D(x)$
- Ha $C(x) \leq y \leq x$ akkor $C(x) = C(y)$
- Ha $x \widetilde{\leq} y$ akkor $D(x) \widetilde{\geq} D(y)$

Legyen a stabilak halmaza $S = \{s \in A : \exists x, y$ hogy $x \wedge y = s$ és $D(x, y) = (y, x)\}$. A maximális stabilak halmaza $M = \{s \in S : \nexists\, s' \in S$ amire $s' \geq s\}$.

**Sejtés 14** *Ha* $L$ *teljes és végtelen disztributív, akkor a maximális stabil elemekhez pontosan egy* $(x, y)$ *pár tartozik, és ezek a párok hálót alkotnak a* $\widetilde{\leq}$ *rendezésre nézve.*

# 5 Párhuzamos párosítások (kitűző: Jankó Zsuzsanna)

A következő problémát és sejtést Sebő András vetette fel:

Adott egy körön $2n$ pont, $n$ db-hoz $+$, $n$-hez - jelet írunk. Keressünk olyan $M$ "párhuzamos" párosítást, melyben $+$ jelet csak - jellel köthetünk össze, és van olyan pontja a körnek, hogyha ott "szétvágjuk" és ott kezdve számozzuk meg a kör pontjait $1, 2, \ldots 2n$-nel, akkor a párosítás $M = \{a_1b_1, a_2b_2, \ldots a_kb_k\}$, ahol $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots a_k \leq b_k \leq b_{k-1} \leq \ldots b_2 \leq b_1 \leq 2n$.

**Sejtés 15** *Mindig van párhuzamos párosítás, aminek mérete* $|M| \geq \frac{2}{3}n$.

# 6 Abszolút merev gráfok a síkban (kitűző: Jordán Tibor)

Legyen $G = (V, E)$ egyszerű irányítatlan gráf és legyen $p : V \to \mathbb{R}^d$ a gráf pontjaihoz a $d$ dimenziós Euklideszi tér pontjait rendelő függvény. Ekkor a $(G, p)$ párt *szerkezetnek* nevezzük. A $(G, p)$ szerkezetet a $G$ gráf egy ($d$ dimenziós) *realizációjának* is hívjuk, melyben egy $v \in V$ pont képe a $p(v)$ pont, egy $uv \in E$ él pedig a $p(u)p(v)$ egyenes szakasznak felel meg. Az $uv$ él *hossza* tehát a $||p(u) - p(v)||$ távolság, melyet a realizáció egyértelműen meghatároz. (A szerkezet (framework) elnevezés a statikai alkalmazásoknak köszönhető: a gráf egy realizációjára olyan rúdszerkezetként is tekinthetünk, melyben a pontok csuklóknak felelnek meg, az élek pedig merev (azaz rögzített hosszúságú) rudaknak.)

A gráf $(G, p)$ és $(G, q)$ realizációi *ekvivalensek*, ha minden $uv \in E$ élre $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$. Ha ez az egyenlőség minden $u, v \in V$ pontpárra fennáll, akkor a két realizácó *kongruens.* A $(G, p)$ *merev*, ha létezik olyan $\epsilon > 0$, melyre, ha $(G, q)$ ekvivalens $(G, p)$-vel és $||p(v) - q(v)|| < \epsilon$ minden $v \in V$-re, akkor $(G, q)$ kongruens $(G, p)$-vel. Egy talán szemléletesebb, ekvivalens definíció a következő.

A $(G, p)$ egy *mozgása* $(G, q)$-ba egy olyan $P : [0, 1] \times V \to \mathbb{R}^d$ függvény, amelyre

(M1) $P(0, v) = p(v)$ és $P(1, v) = q(v)$ minden $v$-re,

(M2) $|P(t, u) - P(t, v)| = |p(u) - p(v)|$ minden $t \in [0, 1]$-re és minden $uv$ élre,

(M3) $P(t, v)$ folytonos $t$-ben minden $v$-re.

Megmutatható, hogy $(G, p)$ pontosan akkor merev, ha minden mozgása egy vele kongruens szerkezethez vezet, azaz folytonosan nem deformálható. Egy adott szerkezet esetén a merevség eldöntése nehéz ($d \geq 2$ esetben). Ugyanakkor kellően általános helyzetű szerkezetek esetén a $d$-dimenziós merevség csak a szerkezet gráfjától függ. Ezen gráfosztályokkal kapcsolatban számos érdekes kombinatorikus jellemzés ismert és sok a nyitott kérdés is.

Itt egy keveset vizsgált nyitott kérdést említünk:

**Kérdés 5** *Melyek azok a $G$ gráfok, melyeknek minden 2-dimenziós realizációja merev?*

Nevezzük az ilyen gráfokat *abszolút merevnek* (a síkban). Itt minden olyan $(G, p)$ realizációt megengedünk, amelyben nincsenek olyan $u, v$ pontjai $G$-nek, melyekre $p(u) = p(v)$. Ilyen gráfok például azok, amelyek egy háromszögből kaphatók másodfokú pontok ismételt hozzávételével. Azt is tudni lehet, hogy ilyen $G = (V, E)$ gráfnak legalább $2|V| - 3$ éle van. Egy korábbi sejtés szerint a pontosan $2|V| - 3$ élű abszolút merev gráfok éppen azok, amelyek a fenti módon előállnak egy háromszögből. Erre nemrég sikerült (egy igen egyszerű) ellenpéldát találni. A kérdés továbbra is nyitott.

## A problémafelvetők elérhetősége

Ezt az összefoglalót Jankó Zsuzsanna TDK titkár és Jordán Tibor, a matematikus TDK vezetője készítette. A fenti kutatási feladatok kitűzőit a következő email címeken lehet elérni:

Barát János `barat@cs.elte.hu`
Grolmusz Vince `grolmusz@pitgroup.org`
Jankó Zsuzsanna `zsuzsy@gmail.com`
Jordán Tibor `jordan@cs.elte.hu`