Név: EHA-kód:

Pontszám: = + + +
Érdemjegy:

---

**1. feladat: Függetlenség és feltételes valószínűség (20 pont)**

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

a) Egészítse ki a definíciót! (5 pont) Az $E_1, E_2, \ldots, E_m$ események *teljesen függetlenek*, ha:

b) New Yorkban holnap 1/10 valószínűséggel esik az eső, Budapesten 1/100 valószínűséggel. Annak valószínűsége, hogy mindkét városban esik az eső, 1/1000. Független-e az alábbi két esemény: holnap New Yorkban esik az eső, holnap Budapesten esik az eső. (Jó válasz: 2 pont, indoklás: 1 pont)

c) Egy szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után. Független-e egymástól az alábbi két esemény: az első dobás hatos, a két dobás összege 8. (Jó válasz: 2 pont)

d) Egészítse ki a definíciót! (3 pont) A $C \in \mathcal{A}$ esemény $D \in \mathcal{A}$-ra vonatkozó *feltételes valószínűsége*:

e) Adja meg a *teljes eseményrendszer* definícióját! (3 pont)

f) Írja le a *teljes valószínűség tételét*! (4 pont)

**2. feladat: Abszolút folytonos valószínűségi változók momentumai (20 pont)**

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

a) Legyen az $X$ abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f$. Definiálja $X$ várható értékét (3 pont) és szórását (2 pont)!

b) Az $X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } |x| < 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

Mennyi $X$ várható értéke? (2 pont)

c) Definiálja két abszolút folytonos valószínűségi változó kovarianciáját! (3 pont)

d) Lehetséges-e, hogy $R(X, Y) = -\frac{1}{2}$ valamely $X, Y$ abszolút folytonos valószínűségi változókra? (1 pont)

e) Legyenek $X \sim U(-1, 1)$, $Y \sim \exp(2)$, $Z \sim N(-1, 4)$ független valószínűségi változók.

Mennyi $E(X - Y + 2Z)$? (3 pont)

Mennyi $D(X + Y)$? (Képlettel: 3 pont)

Mennyi $\operatorname{cov}(Z, X + Z)$? (3 pont)

Név: EHA-kód:

**3. feladat (20 pont)**

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

a) Mit nevezünk valószínűségi változónak? (4 pont)

b) Egészítse ki a definíciót! (2 pont)

$X, X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók. Ha $P\left(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega) \ \ n \to \infty \ \text{ esetén}\}\right) = 1$, akkor

c) Egy szabályos érmével dobunk sokszor egymás után, a dobások teljesen függetlenek. Legyen $X_i = 1$, ha az $i$. dobás fej, és $X_i = 0$, ha az $i$. dobás írás ($i = 1, 2, \ldots$). Mennyi annak valószínűsége, hogy az $\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ sorozat 1/2-hez tart $n \to \infty$ esetén? (3 pont)

d) $X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F$. Lehetséges-e, hogy $F(100) = -1$? (1 pont)

e) A vizsgán 40 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0,2 valószínűséggel kap ötöst. Milyen eloszlású az ötöst szerző hallgatók száma? (2 pont)

Mennyi annak valószínűsége, hogy éppen 10 hallgató kap ötöst? (Képlettel: 2 pont)

Mennyi az ötöst szerzők számának várható értéke? (2 pont)

f) Legyen $X \sim N(1,1)$. Fejezze ki $\Phi$ segítségével annak valószínűségét, hogy $X$ negatív! (2 pont)

g) Egy dobókockával dobunk kétszer. Jelölje $X$ az első dobást, $Y$ a két dobás összegét. Igaz-e, hogy $X$ és $Y$ függetlenek? (2 pont)

**4. feladat: A teljes valószínűség tétele (10 pont)**

Írja le (4 pont) és bizonyítsa be a Csebisev-egyenlőtlenséget (6 pont)!

Ponthatárok: 0-20: elégtelen, 21-31: elégséges, 32-42: közepes, 43-53: jó, 54-70: jeles. Az indoklásért, bizonyításért csak akkor jár pont, ha ez szerepel a feladatban. A megoldásoknak egyértelműeknek kell lenniük.