1. Fejezet

ALAPOK

E jegyzet célja, hogy a gráfelméletnek a kombinatorikus optimalizálás szempontjából legfontosabb eredményeit és módszereit bemutassa. Ebből adódóan nem érintjük a Ramsey elméletet, az extremális, a véletlen, vagy a végtelen gráfok elméletét, melyek mindegyikével egy teljes könyvet meg lehet tölteni. Az itt áttekintett anyag megalapozza a Matroidelmélet, a Kombinatorikus Algoritmusok, a Poliéderes Kombinatorika, és a Kombinatorikus Optimalizálási Struktúrák című előadások anyagát.

1.1 Fogalmak, jelölések

Legyen V egy alaphalmaz és u, v két eleme V-nek. Egy $X \subseteq V$ halmazról azt mondjuk, hogy **v-halmaz,** ha $v \in X$, hogy **$\bar{u}$-halmaz,** ha $u \notin X$, és végül, hogy **$v\bar{u}$-halmaz,** ha $v \in X, u \notin X$.

Irányítatlan (irányított) gráfon egy (V, E, φ) hármast értünk, ahol V, E véges halmazok, φ pedig E-nek egy leképezése a V elemeiből álló rendezetlen (rendezett) párok halmazára. V elemei a gráf csúcsai vagy pontjai (node, vertex) E elemei a gráf élei (edge). Ha e egy él és $\varphi(e) = \{a, b\}$ akkor irányítatlan esetben a és b az e él két végpontja, míg irányított gráfban a az e kezdőpontja (vagy töve) és b a végpontja (vagy feje). Azt mondjuk, hogy az e él összeköti a végpontjait, vagy hogy a-ból b-be vezet. Továbbá az e irányított él az a pontból kilép a b pontba belép.

A továbbiakban a fenti pontos definíció helyett egy kissé pontatlanabb jelölést fogunk használni, azonban ez zavart nem okoz és kényelmesebb vele dolgozni. Azt mondjuk, hogy a (V, E) pár irányítatlan gráf, ha E a V halmaz bizonyos párjaiból álló halmaz. Ez a definíció formálisan azért nem jó, mert párhuzamos éleket nem enged meg. Mi mégis úgy képzeljük, hogy a (V, E) gráfban lehetnek párhuzamos élek. Egy élt, amelynek végpontjai a és b egyszerűen ab vagy ba-val jelölünk. Irányítatlan gráfban tehát $ab = ba$, de irányítottban ab és ba két különböző (egymással szemben irányított) élt jelöl.

Gráfokat úgy lehet szemléltetni, hogy a csúcsokat egy-egy ponttal ábrázoljuk, egy a, b végpontú $e = ab$ élt pedig az a és b pontokat összekötő vonallal. (Természetesen a vonal alakja érdektelen). Irányított gráfnál az élt ábrázoló vonalra nyilacskát teszünk, amely az él kezdőpontjától a végpontjának irányába mutat.

Általában gráfon irányítatlan gráfot értünk. Irányított gráfra használjuk a digráf kifejezést is. Ritkán dolgozni fogunk ,,vegyes" (mixed) gráfokkal is, melyekben mind irányított, mind irányítatlan élek előfordulhatnak.

Hurok (loop): olyan él, amelynek két végpontja ugyanaz.
Párhuzamos (parallel) él: Két irányítatlan él párhuzamos, ha a végpontjaik megegyeznek. Két irányított él párhuzamos, ha kezdőpontjaik megegyeznek és végpontjaik megegyeznek.
Izolált (isolated) pont: nem szomszédos éllel.

Két csúcs szomszédos, ha van köztük él.
Egy v csúcs és egy e él szomszédos, ha e egyik végpontja v.
$Z \subseteq V$ ponthalmaz elhagyása: a Z elemeinek valamint a Z-ben lévő pontok akármelyikével szomszédos élek törlésével keletkező gráf. Jelölése $G - Z$.
F élhalmaz elhagyása: a $(V, E - F)$ gráf.
Egyszerű (simple) gráf: nincsenek sem hurkok, sem párhuzamos élek.
Részgráf (subgraph): a gráf bizonyos pontjainak és bizonyos éleinek törlésével keletkező pontjainak gráf. Feszítő (spanning) részgráf, ha a ponthalmaza ugyanaz, mint az eredeti gráfé.
Feszített (induced subgraph) részgráf: gráf egy X ponthalmaza által meghatározott azon részgráf, amelyben az összes olyan eredeti él szerepel, amelynek mindkét végpontja X-ben van. Másszóval, a gráf bizonyos pontjainak törlésével keletkező gráf.

Él felosztás: Az élt helyettesítjük egy végpontjait összekötő úttal, melynek belső pontjai új pontok. (Szemléletesen, az élre új pontokat teszünk.)
uv él összehúzása: az u és v pontok helyett beveszünk egy új x pontot, minden uw él helyett veszünk egy xw élt és minden vw él helyett veszünk egy xw élt. (Speciálisan egy uv élből xx hurok lesz.)
Minor: Egy G gráf bizonyos éleinek elhagyásával illetve összehúzásával keletkező gráfot G egy minorjának nevezünk.
Két pont szomszédos (adjacent), ha van őket összekötő él.
$G = (V, E)$ egyszerű gráf $\bar{G} = (V, \bar{E})$ komplementerében az $u, v \in V$ csúcsokra uv pontosan akkor él, ha uv nem éle G-nek.
Egy pont szomszédos vagy érintkezik a belőle induló élekkel. Ezek száma a pont foka (degree) (vagy fokszáma). (Megállapodás: hurokél a fokszámhoz kettővel járul). Általánosabban, pontok egy X részhalmazának $d(X)$ foka az X és $V - X$ között vezető élek száma.
Reguláris gráf: minden pont foka ugyanaz.

Irányított gráfban egy v pontba lépő élek $\varrho(v)$ száma a v befoka (in-degree). A v-ből kilépő élek $\delta(v)$ száma a v kifoka. Általánosabban, egy $X \subseteq V$ ponthalmaz $\varrho(X)$ befoka az X-be lépő élek száma, azaz azon éleké, melyek feje X-ban, töve pedig X-en kívül van.
Irányítatlan Euler gráf: minden pont foka páros (nem tesszük fel, hogy összefüggő).
Irányított Euler gráf, minden pontnak a kifoka egyenlő a befokával. Egy digráf közel-Euler, ha minden pontnak a befoka és a kifoka legfeljebb eggyel tér el.
Vonal: egy $v_0, e_1, v_1, e_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sorozat, amely felváltva (nem feltétlenül különböző) pontokból és élekből áll úgy, hogy minden e_i éle a v_{i-1} pontból vezet a v_i pontba. A szereplő élek száma a vonal hossza (így az egyetlen pontból álló vonal hossza 0).
Zárt vonal: olyan vonal, ahol $v_1 = v_n$.
v_0 a vonal kezdőpontja, v_n a végpontja. Azt mondjuk, hogy a vonal összeköti a v_0 és v_n pontokat, vagy hogy a vonal v_0-ból megy v_n-be.
Séta: Olyan vonal, amelyben minden él különböző.
Út (path): Olyan vonal, amelyben minden pont (és így persze minden él is) különböző.
Kör (circuit): Olyan vonal, amelyben a kezdőpont megegyezik a végponttal, de ettől eltekintve minden pont különböző. Digráf esetén irányított körről beszélünk.
Hamilton kör: a gráf minden pontját tartalmazó kör.
Hamilton út: a gráf minden pontját tartalmazó út.
Ciklus (cycle): élidegen körök egyesítése (irányított és irányítatlan esetben is).
Aciklikus vagy körmentes (acyclic) digráf: irányított kör nélküli digráf.
Forráspont (source): Digráfban olyan pont, amelybe nem lép be él.
Nyelőpont (sink): Digráfban olyan pont, amelyből nem lép ki él.
Eszerint egy izolált pont egyszerre forrás és nyelő.
Gráf összefüggő (connected), ha bármely két pontja között van út.
Komponens: gráfnak maximális összefüggő része.
Digráf erősen összefüggő (strongly connected), ha bármely pontjából bármely másik pontjába vezet irányított út.
Digráf gyökeresen összefüggő (root-connected), ha van olyen s pontja, amelyből bármely másik pontjába vezet irányított út. Azt is mondjuk, hogy a digráf s-ből gyökeresen összefüggő.
Elvágó él: melynek elhagyása megszünteti a gráf összefüggőségét.
Elvágó pont: melynek elhagyása megszünteti a gráf összefüggőségét.
Gráf k-élösszefüggő, ha legfeljebb $k - 1$ élének elhagyása után is összefüggő marad.
Gráf k-összefüggő (k-szor pontösszefüggő), ha legalább $k+1$ pontja van és legfeljebb $k-1$ pontjának elhagyása után is összefüggő marad.

Összefüggő gráfban egy $\emptyset \subset X \subset V$ ponthalmazra az X és $V - X$ komplementere között vezető élek halmazát vágásnak (cut) (néha: ko-ciklus) nevezzük. X és $V - X$ a vágás két partja. Egy vágás elemi (bond), ha nem tartalmaz valódi részhalmazként másik vágást.

Ha egy digráfban az X ponthalmazba nem lép be él, akkor az X-ből kilépő élek halmazát egyirányú vagy irányított vágásnak (one-way cut, directed cut) nevezzük.
Fa (tree): olyan összefüggő gráf, amelynek bármely élét elhagyva a keletkező gráf már nem összefüggő.
Csillag: olyan fa, amelynek egy pontjából indul ki minden éle.
Erdő (forest): gráf, melynek komponensei fák.
Fenyő (arborescence): irányított fa, amelyben van egy speciális, gyökérnek nevezett s pont, amelyből minden pontba vezet irányított út. s a fenyő gyökere. Röviden azt is mondjuk, hogy a fenyő s-fenyő.
Fenyves (branching): Diszjunkt fenyőkből álló digráf, másszóval olyan irányított erdő, amelyben minden pont befoka legfeljebb 1.
Teljes (complete) gráf: minden pontpár össze van egy éllel kötve.
Turnament (tournament): irányított teljes gráf.

Klikk (clique): olyan részgráf, amelyben minden pontpár éllel össze van kötve.
Stabil vagy független ponthalmaz (stable): él nélküli feszített részgráf. $\alpha(G)$ vagy α_G jelöli G független pontjainak maximális számát, azaz a maximális stabil halmaz elemszámát.
Párosítás: olyan részgráf, amelyben minden pont foka legfeljebb 1. Másik neve: független élhalmaz. $\nu(G)$ vagy ν_G jelöli a G független éleinek maximális számát, azaz a maximális elemszámú párosítás elemszámát.
Teljes párosítás: miden pont foka pontosan 1.
Élszínezés: Gráf élhalmazát párosításokra bontjuk, egy párosítás egy színosztály.
Gráf kromatikus indexe, $\chi'(G)$: élszínezésben a szükséges színek minimális száma (mindig legalább a legnagyobb fokszám).
Pontszínezés: Gráf pontjait stabil halmazokra bontjuk, egy rész egy színosztály.
Gráf kromatikus száma, $\chi(G)$: pontszínezésnél a szükséges színek minimális száma.
Páros (bipartite) gráf: 2-kromatikus gráf.
Síkbarajzolható gráf: olyan gráf, amelyet le lehet a síkba úgy rajzolni, hogy az éleket reprezentáló görbéknek a végpontjaiktól eltekintve nem lehet közös pontjuk. (Fáry tétele: egyszerű síbarajzolható gráfnak mindig létezik olyan beágyazása, ahol a görbék egyenes szakaszok).
Síkbarajzolt gráf (röviden síkgráf): egy síkbarajzolható gráf konkrét lerajzolása a síkba.

A $G = (V, E)$ irányított vagy irányítatlan gráfra $I(X)$, vagy specifikusabban $I_G(X)$, jelöli az $X \subseteq V$ ponthalmaz által feszített élek halmazát, míg $E(X)$ (ill. $E_G(X)$) jelölje azon élek halmazát, melyeknek legalább egyik vége X-ben van. Általában, ha a szövegösszefüggésből világos, hogy melyik gráfról van szó, nem írjuk ki az indexet. Legyen $i(X) := |I(X)|$ és $e(X) := |E(X)|$. Legyen továbbá $d(X, Y)$ az $X - Y$ és $Y - X$ között vezető élek száma (irányított esetben mindegy, melyik irányban). Legyen $\bar{d}(X, Y)$ az $X \cap Y$ és a $V - (X \cup Y)$ között vezető élek száma, azaz $\bar{d}(X, Y) = d(\bar{X}, Y) = d(X, \bar{Y})$. Irányítatlan esetben $d(X) := d(X, V - X)$ jelöli a G **fokszám függvény**ét. Irányított esetben $\varrho(X)$ az X-be $V - X$-ből belépő élek száma és $\delta(X) := \varrho(V - X)$. ϱ a **befok függvény**, δ a **kifok függvény**.

Jelölje $\varphi(G)$ vagy φ_G az izolált pont nélküli G gráf pontjait fedő élek minimális számát, $\tau(G)$ vagy τ_G pedig a G éleit lefogó pontok minimális számát.

1.2 Egyszerűbb tulajdonságok

Lemma 1.2.1 (Gallai) *Ha egy n pontú $G = (V, E)$ gráfban minden pont foka pozitív, akkor $\nu + \varphi = n$, és $\alpha + \tau = n$.*

Biz. Az első részhez legyen M maximális, ν elemű párosítás. Minden M által fedetlen pontból egy szomszédos élt kiválasztva G pontjainak egy $|M| + (n - 2|M|) = n - \nu$ elemű fedését kapjuk, és így $\varphi \leq n - \nu$. Megfordítva, legyen F egy minimális, azaz φ elemű fedés, amely k komponensből áll. Egy minimális fedésben a komponensek csillagok. Mivel egy csillag az élszámánál eggyel több pontot fed, az F által fedett pontok n száma $|F| + k$. Mindegyik csillagból kiválasztva egy élt egy k élű párosítást kapunk, tehát $\nu \geq k = n - |F| = n - \varphi$,, azaz $\nu + \varphi \geq n$ és így $\nu + \varphi = n$.

A másik azonosság rögtön következik abból a megfigyelésből, hogy egy X ponthalmaz akkor és csak akkor stabil, ha komplementere lefogó. •

1.2.1 Fokszámok

Gráfban a fokszámok összege az élszám kétszerese, így páros. Digráfban a befokok összege is és a kifokok összege is az élek száma, tehát a befok összeg egyenlő a kifok összeggel.

Gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.

Legalább kétpontú egyszerű gráfban létezik két azonos fokszámú pont.

Euler gráfban minden ponthalmaz foka páros. Irányított Euler gráfban minden ponthalmaz befoka egyenlő a kifokával.

Egy gráf (digráf) akkor és csak akkor Euler gráf (digráf), ha ciklus, azaz felbomlik (irányított) élidegen körök egyesítésére.

Irányítatlan Euler gráf éleit lehet úgy irányítani, hogy Euler digráfot kapjunk. Általánosabban, irányítatlan gráf éleit lehet úgy irányítani, hogy közel-Euler digráfot kapjunk (Euler-gráf közel-Euler irányítása szükségképpen Euler.)

$d(X)$ ugyanolyan paritású, mint az X-ben levő páratlan fokú pontok száma.

Digráfban $\varrho(X) - \delta(X) = \sum[\varrho(v) - \delta(v) : v \in X]$.

$d_1, \ldots, d_n$ nemnegatív egészek akkor és csak akkor alkotják egy n pontú gráf fokszám sorozatát, ha összegük páros (mind hurok, mind párhuzamos élek megengedettek). Ha hurok nem megengedett, akkor még további feltétel, hogy a legnagyobb fokszám ne legyen nagyobb a többiek összegénél.

1.2.2 Körök, vágások

Gráfban, ha minden pont foka legalább 2, akkor van kör. Digráfban, ha minden pont kifoka legalább 1, akkor van irányított kör.

Összefüggő gráfban egy vágás akkor és csak akkor elemi, ha mindkét oldala összefüggő.

Minden vágás felbomlik elemi vágások diszjunkt uniójára

Vágásnak és körnek páros sok közös éle van.

Turnamentnek van Hamilton útja. Erősen összefüggő turnamentnek van Hamilton köre.

Digráf akkor és csak akkor aciklikus, ha pontjait sorba lehet úgy rakni, hogy minden él visszafelé mutasson.

1.2.3 Utak, fák, fenyők

Ha van x-ből y-ba vonal, akkor van út is.

Gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszúságú kör.

Gráfban, a „létezik út x és y között" reláció ekvivalencia reláció. (Egy osztály neve : komponens).

Digráf ponthalmazán a „létezik irányított út x-ből y-ba és létezik irányított út y-ból x-be" reláció ekvivalencia reláció. Egy osztály neve: erős komponens.

Digráfban, ha mindegyik erős komponenst egy ponttá húzzuk össze, aciklikus digráfot kapunk.

Digráfban van olyan erős komponens, amelybe nem lép be él: forráskomponens, és olyan is, amelyből nem lép ki: nyelő komponens.

Gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha minden $\emptyset \subset X \subset V$ részhalmazra $d(X) > 0$.

G hurokmentes gráfra a következő tulajdonságok ekvivalensek. (1) G fa. (2) G bármely két pontja között pontosan egy út vezet. (3) G összefüggő és körmentes. (4) G összefüggő és eggyel kevesebb pontja van mint éle. (5) G felépíthető tetszőleges pontjából kiindulva élek egyenkénti hozzávételével úgy, hogy az aktuálisan hozzávett új él egyik végpontja új pont, a másik végpontja pedig a már megkonstruált fához tartozik.

D hurokmentes digráfra, amelyben az s pont befoka 0, a következő tulajdonságok ekvivalensek. (1) D s-fenyő. (2) D irányított fa, amelyben s-ből D minden pontjába vezet irányított út. (3) D irányított fa, amelyben az s-től eltekintve minden pontba egy él lép be. (4) D az s pontból kiindulva felépíthető élek egyenkénti hozzávételével úgy, hogy az aktuálisan hozzávett új él töve a már megkonstruált fenyőhöz tartozik, a feje pedig új pont.

Ekvivalensek: (a) digráf gyökeresen összefüggő s-ből, (b) létezik s-gyökerű feszítő fenyője, (c) minden $\emptyset \subset X \subseteq V - s$ részhalmazra $\varrho(X) > 0$.

Digráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha minden $\emptyset \subset X \subset V$ részhalmazra $\varrho(X) > 0$.

Digráfban akkor és csak akkor van s-ből t-be vezető út, ha $\varrho(X) > 0$ minden X $t\bar{s}$-halmazra.

A jegyzetben néha nem teszünk különbséget az egyelemű halmaz (singleton) és annak egyetlen eleme között. Egy $f : S \to \mathbf{R}$ függvényt gyakran a természetes módon kiterjesztünk az S részhalmazaira az $f(X) := \sum[f(v) : v \in X]$ definícióval.

1.2.4 Hasznos azonosságok és egyenlőtlenségek

Közismertek az alábbi azonosságok.

$$d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2d(X,Y) \tag{1.1}$$

$$i(X) + i(Y) = i(X \cap Y) + i(X \cup Y) - d(X,Y) \tag{1.2}$$

$$e(X) + e(Y) = e(X \cap Y) + e(X \cup Y) + d(X,Y). \tag{1.3}$$

$$\varrho(X) + \varrho(Y) = \varrho(X \cap Y) + \varrho(X \cup Y) + d(X,Y). \tag{1.4}$$

$$\delta(X) + \delta(Y) = \delta(X \cap Y) + \delta(X \cup Y) + d(X,Y). \tag{1.5}$$

$$\varrho(X) + \varrho(Y) = \varrho(X - Y) + \varrho(Y - X) + \bar{d}(X,Y) + [\varrho(X \cap Y) - \delta(X \cup Y)]. \tag{1.6}$$

$D = (V, A)$ digráfban az $f : A \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $g : A \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ függvényekre legyen $b(X) := \delta_g(X) - \varrho_f(X)$. Ekkor

$$b(X) + b(Y) = b(X \cap Y) + b(X \cup Y) + d_{g-f}(X,Y), \tag{1.7}$$

amiből adódik, hogy $f \le g$ esetén b szubmoduláris.

Gyakorlat 1.2.1 *Igazoljuk, hogy ha minden $v \in X \cap Y$ pontra, $\varrho(v) \ge \delta(v)$, akkor $\varrho(X) + \varrho(Y) \ge \varrho(X - Y) + \varrho(Y - X) + \bar{d}(X,Y)$. Ha minden $v \in V - (X \cup Y)$ pontra $\varrho(v) \ge \delta(v)$, akkor $\delta(X) + \delta(Y) \ge \delta(X - Y) + \delta(Y - X) + \bar{d}(X,Y)$. Ha $\delta(X \cup Y) = \varrho(X \cup Y)$, akkor $\varrho(X) + \varrho(Y) = \delta(X - Y) + \delta(Y - X) + \bar{d}(X,Y)$.*

Legyen $H := (V, \mathcal{A})$ hipergráf, (ahol $\mathcal{A}$ a V nemüres, nem feltétlenül különböző részhalmazainak egy rendszere). Tetszőleges $X \subseteq V$ részhalmazra jelölje $p_H(X)$ az X-től diszjunkt hiperélek számát.

Lemma 1.2.2 *A p_H függvény szupermoduláris, sőt minden $X, Y \subseteq V$ részhalmazra fennáll az alábbi azonosság*

$$p_H(X) + p_H(Y) = p_H(X \cup Y) + p_H(X \cap Y) - d_H(X, Y), \tag{1.8}$$

ahol $d_H(X, Y)$ jelöli azon hiperélek számát, amelyek tartalmaznak pontot mind $X - Y$-ból, mind $Y - X$-ből, de diszjunktak $X \cap Y$-tól. •

$G = (S, T; E)$ páros gráfban az S részhalmazain definiáljuk a γ halmazfüggvényt: $\gamma(X)$ jelölje az X szomszédainak számát, azaz $\gamma(X) = |\Gamma(X)|$. Ekkor

$$\gamma(X) + \gamma(Y) \geq \gamma(X \cap Y) + \gamma(X \cup Y). \tag{1.9}$$

Használni fogjuk a $c(X) = c_G(X)$ függvényt, amely a G-ből az $X \subseteq V$ ponthalmaz eltörlésével keletkező gráf komponenseinek számát jelöli, ha $X \neq \emptyset$ és $c(\emptyset) := 0$. Hasznosnak fog bizonyulni az alábbi kis lemma.

Lemma 1.2.3 *A c függvény metsző G-szupermoduláris, azaz $X \cap Y \neq \emptyset$ esetén*

$$c(X) + c(Y) \leq c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + d_G(X, Y). \tag{1.10}$$

Biz. Élszám szerinti indukció. Ha a gráfnak nincs éle, akkor $c(X) = |V - X|$ miatt (1.10) egyenlőséggel teljesül. Legyen $e = uv$ tetszőleges él. Amennyiben X és Y egyikébe sem lép be, úgy összehúzása az (1.10)-ben szereplő mennyiségeket nem változtatja meg, így indukcióval készen vagyunk. Hasonlóan, ha e egyik vége $X \cap Y$-ban van, akkor elhagyása nem változtatja meg a szóbanforgó mennyiségeket.

Ha e mind X-be, mind Y-ba belép, akkor az elhagyásával keletkező G' gráfra $d_{G'}(X, Y) = d_G(X, Y) - 1$. Továbbá $c(X) = c'(X), c(Y) = c'(Y), c(X \cup Y) = c'(X \cup Y), c'(X \cup Y) \leq c(X \cap Y) + 1$, amiből indukcióval megint készen vagyunk.

Végül e egyik vége $V - (X \cup Y)$-ban van, a másik pedig $X - Y$-ban vagy $Y - X$-ben, mondjuk $X - Y$-ban. Most $d_{G'}(X, Y) = d_G(X, Y)$, $c(X) = c'(X), c(X \cup Y) = c'(X \cup Y)$ és mivel $X \cap Y \subseteq Y$, így $c_{G'}(X \cap Y) - c_G(X \cap Y) \leq c_{G'}(Y) - c_G(Y)$, amiket összetéve a lemma indukcióval következik. (Az utolsó egyenlőtlenség azért érvényes, mert egyrészt nyilván $0 \leq c' - c$, másrészt, ha $c_{G'}(X \cap Y) - c_G(X \cap Y)$ pozitív, akkor 1 és az e él a $G' - (X \cap Y)$ gráf két komponensét köti össze. De ekkor persze a $G' - Y$ gráfnak is két komponensét köti össze, és így $c_{G'}(Y) - c_G(Y) = 1$). •

1.3 NP-teljes problémák

Felsorolunk néhány alapvető gráfelméleti feladatot, melyekről igazolták, hogy NP-teljesek.

Maximális stabil: gráfban keressünk maximális méretű stabil halmazt.

Maximális klikk: gráfban keressünk maximális méretű klikket. A feladat ekvivalens a komplementer gráf maximális stiljának megkeresésével. Páros gráfban mindkét feladat súlyozott változata is polinomiálisan megoldható.

Halmaz lefogás vagy fedés: adott H halmazrendszerről döntsük el, hogy tagjai k ponttal lefoghatók-e. Ekvivalens alakban: k halmazzal lefedhető-e az alaphalmaz. NP-teljes már $k = 2$-re is. NP-teljes azt eldönteni, hogy egy gráf élhalmaza lefedhető-e 2 Euler-gráffal. (A négyszín tétel azzal ekvivalens, hogy 2-élösszefüggő síkgráfban ez mindig megteheő.)

Pontszínezés: határozzuk meg egy gráf kromatikus számát. Döntsük el, hogy a gráf pontjai k színnel megszínezhetők-e úgy, hogy minden színosztály stabil. Már $k = 3$-ra is NP-teljes. A $k = 2$ esetben van egyszerű algoritmus és karakterizáció. Hipergráf esetén már $k = 2$-re is NP-teljes azt eldönteni, hogy létezik a pontoknak olyan k-színezése, amelyre nincsen egyszínű hiperél.

Élszínezés: határozzuk meg egy gráf kromatikus indexét, vagyis azt, hogy hány párosítással lehet az élhalmazt lefedni. Már 3-reguláris egyszerű gráfban is NP-teljes azt eldönteni, hogy a kromatikus index három-e, azaz, hogy az élhalmaz felbontható-e 3 teljes párosításra. (A négyszín tétel azzal ekvivalens, hogy 3-reguláris egyszerű síkgráfban ez mindig megtehető.)

Leghosszabb út, Hamilton út, Hamilton kör: mind irányított, mind irányítatlan gráfban NP-teljes, már 3-reguláris síkgráfban is.

Diszjunkt út probléma: döntsük el, hogy irányított vagy irányítatlan gráfban adott $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ pontpárokra léteznek-e $P_1, \ldots, P_k$ utak úgy, hogy P_i az s_i-ből vezet t_i-be és az utak páronként él- vagy pontidegenek. Mindkét változat NP-teljes. Rögzített k-ra irányítatlan gráfban vagy aciklikus irányított gráfban van polinomiális algoritmus. Az általános irányított esetben mindkét változat már $k = 2$-re is NP-teljes!

1.4 Halmazrendszerek, gráfok, hipergráfok

Általában egy halmazrendszeren egy adott halmaz bizonyos részhalmazainak halmazát értik. Gyakran szükség van arra, hogy ugyanaz a részhalmaz több példányban is szerepelhessen. Ennek leírására való a hipergráf fogalma. A H (véges) hipergráf egy $(V, \mathcal{E}, \varphi)$ hármasból áll, ahol V a pontok vagy csúcsok halmaza, $\mathcal{E}$ a hiperélek vagy röviden élek halmaza, $\varphi : \mathcal{E} \to V$ pedig egy leképezés, amely azt mondja meg, hogy egy hiperél mely pontokból áll. Rövidség kedvéért, kis pontatlansággal, a hipergráfot $H = (V, \mathcal{E})$-vel jelöljük. Ekkor a hiperéleket részhalmazoknak képzeljük, de egy részhalmaz szerepelhet több példányban, mely példányokat párhuzamos hiperéleknek nevezünk. Amennyiben minden hiperél legfeljebb két elemű, gráfról beszélünk. Ilyenkor egy hiperél neve mindig él. Egy gráf egyszerű, ha minden éle kételemű és nincsenek párhuzamos élek.

Uniform a hipergráf, ha minden hiperélének ugyanannyi az elemszáma, és **reguláris**, ha minden pont ugyanannyi hiperélben van. Egy pont **foka** azt mondja meg, hogy a pontot hány hiperél tartalmazza.

Tetszőleges H hipergráf incidencia mátrixa egy olyan $0-1$-es mátrix, amelynek sora a csúcsoknak felelnek meg, míg oszlopai a hiperéleknek, és az u csúcsnak és F hiperélnek megfelelő mátrixelem akkor 1, ha $u \in F$.

Tetszőleges $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfnak megfeleltethetünk egy egyszerű $G = (V, U; F)$ páros gráfot, ahol U és $\mathcal{E}$ között egy-egy értelmű kapcsolat van, és a $v \in V$ és $u \in U$ pontok pontosan akkor vannak összekötve, ha v benne van az u-nak megfelelő hiperélben. Azt fogjuk mondani, hogy G a **hipergráfhoz tartozó páros gráf**.

Hasonlóképp egy egyszerű $G = (V, U; F)$ páros gráfhoz hozzárendelhetünk egy hipergráfot. Ha most felcseréljük V és U szerepét, akkor a $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfhoz egy másikat rendelhetünk, amelynek csúcsai H hiperéleinek felelnek meg, hiperélei pedig H csúcsainak. Az így nyert hipergráfot a H **transzponált hipergráfjának** nevezzük. Az elnevezés összhangban áll azzal, hogy egy hipergráf incidencia mátrixának transzponáltja a hipergráf transzpontáltjának incidencia mátrixa. Nyilván egy hipergráf pontosan akkor uniform, ha a transzponáltja reguláris.

Gyakorlat 1.4.1 *Ha egy hipergráf két partíció uniójn, akkor transzpontáltja egy páros gráf. Két halmazlánc uniójának transzpontáltja egy út részút-rendszere.*

A V nem feltétlenül különböző nemüres halmazokból álló $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq V$ halmazlánchoz hozzárendelhetjük azt a $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$ függvényt, ahol a $v \in V$ elemre $\pi(v)$ a v foka. Tetszőleges $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$ nemnegatív egészértékű függvény előáll ilyen alakban. Legyenek ugyanis π különböző értékei $p_1 < p_2 < \ldots < p_h$ és tekintsük azt a hipergráfot, amelyben az $X_1 := \{v : \pi(v) \geq p_1\}$ halmaz p_1 példányban szerepel (tehát nem szerepel, ha $p_1 = 0$, míg $i = 2, \ldots, h$-ra az $X_i := \{v : \pi(v) \geq p_i\}$ halmaz $p_i - p_{i-1}$ példányban szerepel. Könnyű ellenőrizni, hogy így halmazláncot kapunk, amelynek fokszámfüggvénye éppen π.

A V alaphalmaz részhalmazainak egy $\mathcal{R}$ rendszeréről azt mondjuk, hogy **gyűrű-család**, ha zárt a metszetre és unióra. Ha egy gyűrű-családhoz hozzávesszük az alaphalmazt és az üres halmazt, továbbra is gyűrű-családot kapunk.

Feladat 1.4.2 *Igazoljuk a következő tételt.*

TÉTEL 1.4.1 *Legyen $\mathcal{R}$ olyan halmaz-rendszer, amely tartalmazza $\emptyset$-t és V-t. A következők ekvivalensek :*

(a) *$\mathcal{R}$ gyűrű-család,*
(b) *Létezik egy $D = (V, A)$ digráf, amelynek a 0 befokú részhalmazai alkotják $\mathcal{R}$-t,*
(c) *Létezik egy egyértelmű $D = (V, A)$ tranzitívan zárt digráf, amelynek a 0 befokú rézhalmazai $\mathcal{R}$-t.*

Egy részbenrendezett halmaz ideáljai gyűrűt alkotnak. Ezek pontosan azok a gyűrűk, melyekben bármely két elem elválasztható, azaz van olyan halmaz a gyűrűben, amely a két elem közül pontosan egyet tartalmaz. ez ugyanaz, minthogy aciklikus tranzitív digráffal reprezentálható.

1.4.1 Lamináris és keresztezés-mentes hipergráfok reprezentálása

Egy H hipergráfot akkor nevezünk **teljesen unimoduláris**nak, ha H incidencia mátrixa teljesen unimoduláris. Ez egy olyan $0-1$ értékű mátrix, amelyben a soroknak a V elemei felelnek meg, az oszlopoknak az $\mathcal{F}$ elemei, és a mátrix egy eleme pontosan akkor egy, ha az oszlopának megfelelő hiperél tartalmazza a mátrix-elem sorának megfelelő V-beli elemet. A gráfok speciális hipergráfok, ahol minden hiperél kételemű. Ezek közül már láttuk, hogy a páros gráfok teljesen unimodulárisak. Más gráfok viszont sohasem azok, hiszen egy páratlan kör incidencia mátrixának determinánsa ± 2.

Korábban tanultuk, hogy hálózati mátrix mindig teljesen unimoduláris. Ebből kapjuk:

Következmény 1.4.2 *Legyen H egy olyan hipergráf, amely egy irányított fa élhalmazán van definiálva és a hiperélek bizonyos irányított utak. Ekkor H incidencia mátrixának transzponáltja hálózati mátrix (és így teljesen unimoduláris).* •

A TU-mátrixokról tanult egyenletes színezési tétel speciális esete az alábbi eredmény, amire most direkt bizonyítást is adunk.

Lemma 1.4.3 *Egy irányított fa éleit meg lehet úgy k színnel színezni, hogy a fa minden legfeljebb k élű irányított útjában a színek különbözők.*

Biz. Rendezzük el a fa pontjait $V_1, V_2, \dots, V_t$ szintekbe úgy, hogy minden él feje egy szinttel magasabban van mint a töve. Egy él színe legyen i (mod k) ha az él feje V_i-ben van. Ez a színezés jó lesz, mert egy legfeljebb k élű irányított útba nem kerülhet két azonos színű él. • **

Adott V alaphalmaz részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszerét **laminárisnak** mondjuk, ha bármely két tagja vagy diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat. Például, ha $H = (V, F)$ egy s gyökerű fenyő és minden $e = uv$ éléhez tekintjük a v-ből a fenyőben elérhető pontok halmazát, akkor ezen halmazok lamináris rendszert alkotnak. Valójában, érvényes ezen állítás egyfajta megfordítása is, hogy minden lamináris halmazrendszer lényegében ilyen alakban áll elő.

TÉTEL 1.4.4 *A V részhalmazaiból álló tetszőleges $\mathcal{F}$ lamináris rendszerhez létezik egy $H = (U, F)$ fenyő valamint egy $\varphi : V \to U$ leképezés úgy, hogy $\mathcal{F}$ tagjai és a fenyő élei 1-1 értelműen megfelelnek egymásnak, éspedig olymódon, hogy tetszőleges $e \in F$ élre $\varphi^{-1}(V_e)$ az e-nek megfelelő halmaz, ahol V_e jelöli a H fenyőből az e kihagyásával keletkező két komponens közül azt, amelybe e belép.*

Biz. Feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ tagjai különbözőek, ugyanis, ha egy ilyen lamináris rendszernek már létezik a kívánt fenyő-ábrázolása és $\mathcal{F}$ egy X tagjának még egy példányát bevesszük, akkor a keletkező lamináris rendszernek úgy kaphatjuk meg a kívánt reprezentálását, hogy X-nek megfeleltetett fenyő élt egy új ponttal felosztjuk.

Azt is feltehetjük, hogy V minden v eleme benne van $\mathcal{F}$ valamelyik tagjában. Ezek közül a legszűkebbet jelölje $\sigma(v)$. Minden $X \in \mathcal{F}$ halmaznak feleltessünk meg egy új $f(X)$ pontot és legyen s még egy extra pont. A keletkező pontok U halmaza lesz a fenyő ponthalmaza (U-nak tehát eggyel több eleme van, mint $\mathcal{F}$-nek).

Készítsük el az F fenyőt az U halmazon a következőképpen. Az $\mathcal{F}$ minden maximális X tagjára vezessünk egy élt s-ből $f(X)$-be. Amennyiben X az $\mathcal{F}$-nek nem maximális tagja, úgy létezik egy egyértelmű legszűkebb $Y \in \mathcal{F}$ halmaz, amely tartalmazza X-et. Ebben az esetben vezessünk $f(Y)$-ból $f(X)$-be élt. Így egy H fenyőt kapunk, melynek gyökere a speciális s pont. Végül minden $v \in V$ pontra legyen $\varphi(v) := f(\sigma(v))$. Könnyen ellenűrizhető, hogy az így definiált H fenyő és φ leképezés kielégíti a tételbeli kívánságokat. •

**

Legyen $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ két lamináris hipergráf az S alaphalmazon. Jelölje A_i $(i = 1, 2)$ az incidencia mátrixukat, amelyben az oszlopok S elemeinek felelnek meg, míg a sorok $\mathcal{F}_i$ elemeinek, és legyen $M := \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$.

TÉTEL 1.4.5 *M hálózati mátrix (ís így teljesen unimoduláris).*

Biz. Legyen $F_i = (V_i, E_i)$ illetve φ_i az $\mathcal{F}_i$ lamináris rendszert ábrázoló fenyő illetve leképezés $(i = 1, 2)$, melyek létezését a 1.4.4 tételben igazoltuk és legyen s_i az F_i fenyő gyökere. Tegyük fel, hogy a fenyők diszjunktak. Egyesítsük az s_1 és az s_2 gyökeret egyetlen s ponttá és fordítsuk meg az F_2 fenyő éleinek irányítását. Ekkor egy F irányított fát kapunk, amelyben az S alaphalmaz egy $v \in S$ eleméhez rendelt $\varphi_2(v)$ és $\varphi_1(v)$ pontok között vezető $P(v)$ út irányított. A konstrukcióból könnyen látható, hogy a v elemet az $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ hipergráfnak pontosan azon hiperélei tartalmazzák, melyek a P út éleinek felelnek meg. A 1.4.2 következmény maga után vonja a tételt. •

Gyakorlat 1.4.3 *Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{F}$ az S két partíciójának egyesítése, akkor az $\mathcal{F}$ incidencia mátrixa éppen egy páros gráf incidencia mátrixának transzponáltja.*

Egy alaphalmaz két részhalmazát **keresztezés-mentes**nek (vagy **nemkeresztező**nek) mondjuk, ha vagy diszjunktak, vagy az egyik tartalmazza a másikat, vagy az uniójuk az alaphalmaz. Egy $\mathcal{F}$ halmazcsaládot **keresztezés-mentes** (cross-free) mondunk, ha nincs két keresztező tagja.

Például, ha adott egy F irányított fa (nem feltétlenül fenyő), és minden e élhez tekintjük a V_e halmazt, amely a fának az e elhagyásával keletkező azon komponensét jelöli, amelybe e belép, akkor az így keletkezett rendszer keresztezés-mentes. Ismét érvényes egyfajta megfordítás.

TÉTEL 1.4.6 *A V részhalmazaiból álló tetszőleges $\mathcal{F}$ keresztezés-mentes rendszerhez létezik egy $H = (U, F)$ irányított fa valamint V pontjainak egy φ leképezése U-ba úgy, hogy $\mathcal{F}$ tagjai és a fa élei 1-1 értelműen megfelelnek egymásnak, éspedig olymódon, hogy tetszőleges e élre $\varphi^{-1}(V_e)$ az e-nek megfelelő halmaz $\mathcal{F}$-ben.*

Biz. Legyen z az alaphalmaz tetszőleges pontja. $\mathcal{F}$ minden z-t tartalmazó tagját helyettesítsük a komplementerével. A keletkező $\mathcal{F}'$ halmazrendszer lamináris. Alkalmazhatjuk a 1.4.4 tételt. A kapott fenyőben fordítsunk meg minden olyan élt, amely az eredeti $\mathcal{F}$ egy z elemet tartalmazó tagja komplementerének felel meg. Ekkor a kívánt reprezentációt kapjuk. • **

Legyen adott a $D = (V, A)$ irányított gráf ponthalmazán egy $\mathcal{F}$ keresztező halmaz-rendszer. Készítsük el a $B_{\mathcal{F}}$ $(0, \pm 1)$-értékű mátrixot, melynek sorai az $\mathcal{F}$ tagjainak, míg oszlopai a D éleinek felelnek meg. Egy elem akkor 1 (illetve -1), ha az oszlopnak megfelelő él belép (illetve kilép) a sornak megfelelő halmazba (halmazból). Minden egyéb elem 0.

Lemma 1.4.7 *A $B_{\mathcal{F}}$ mátrix hálózati mátrix (és így teljesen unimoduláris).*

Biz. Az állítás közvetlenül adódik a 1.4.6 tételből. •

Gyakorlat 1.4.4 *Egy $\mathcal{F}$ keresztezés-mentes halmazrendszerhez és $D = (V, A)$ digráfhoz hozzárendelhetünk egy $0 - 1$ mátrixot, amelyben a soroknak az $\mathcal{F}$ tagjai, az oszlopoknak D élei felelnek meg, és a mátrix egy $a_{Z,e}$ eleme ($Z \in \mathcal{F}$, $e \in A$) akkor 1, ha e belép Z-be, (minden más esetben 0). Példával mutassuk meg, hogy ez a mátrix nem feltétlenül teljesen unimoduláris.*

Gyakorlat 1.4.5 *Ha $\mathcal{F}$ olyan keresztezés-mentes halmazrendszer, amelyben nincs két egymást tartalmazó tag, akkor $\mathcal{F}$ részpartíció vagy ko-részpartíció.*

Feladat 1.4.6 *Egy reguláris keresztezés-mentes hipergráf felbomlik partíciók és ko-partíciók egyesítésére.*

file: halmaz 2007. május 6.

2. Fejezet

ALAPEREDMÉNYEK ÉS BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

Ebben a fejezetben áttekintünk néhány standard bizonyítási technikát és segítségükkel belátjuk a gráfelméletnek a kombinatorikus optimalizálás szempontjából legfontosabb alaperedményeit is.

Egy tipikus gráfelméleti eredmény valamilyen előírt tulajdonságú részgráf (teljes párosítás, Hamilton kör, k súlyú feszítő fa) létezését állítja megfelelő feltételek fennállása esetén. A bizonyítások egy része csupán egzisztencia bizonyítás. Számunkra különösen értékesek az olyan konstruktív, algoritmikus bizonyítások, amelyek hatékony algoritmust eredményeznek a szóbanforgó részstruktúra kiszámítására. Ebben és a következő részben egy-egy tipikus algoritmikus elvet tárgyalunk.

2.1 Algoritmikus bizonyítások I: a mohó megközelítés

Ha egy matematikai állítást be akarunk bizonyítani, természetes első próbálkozás ,,toronyiránt" elindulni, bár többnyire a mohó megközelítés nem segít. Például Kőnig 2.2.1 tételét nem tudjuk úgy bizonyítani, hogy egymás után választunk diszjunkt éleket, mert így egy olyan nem bővíthető párosításhoz juthatunk, amely nem maximális elemszámú. Vannak esetek azonban, amikor a mohó hozzáállás eredményes. Ezek közül a legismertebb Kruskal eljárása maximális súlyú fa megkeresésére. Valójában egy teljes elmélet épült ki (a matroidelmélet) annak feltérképezésére, hogy a Kruskal típusú mohó algoritmus milyen körülmények között működik helyesen. De vannak másféle mohó megközelítések is, és most ezekre mutatunk példákat.

TÉTEL 2.1.1 *Ha egy $H = (V, F)$ digráfban az s és t pontokra $\varrho_H(s) = 0 = \delta_H(t)$ és $\varrho_H(v) = \delta_H(v)$ minden $v \in V - \{s, t\}$ pontra, akkor D-ben létezik $\delta(s)$ élidegen út s-ből t-be.*

Biz. Az s-ből kiindulva mohó módon építsünk egy sétát. A fokszám feltételek miatt egyrészt s-be sohasem érhetünk vissza, másrészt bármely $v \in V - \{s, t\}$ pontból mindig tovább tudunk haladni addig még nem használt élen. Így a végül kapott séta t-ben végződik. A séta magában foglal egy P utat s-ből t-be. A P éleinek kihagyásával keletkező H' digráfban s kifoka eggyel kisebb, mint H-ban, és a fokszám feltételek H'-re is fennállnak. Az eljárást iterálva megkapjuk a keresett $\delta(s)$ élidegen utat. •

Bár egy tetszőleges D digráfban ez a mohó megközelítés nem alkalmas k élidegen s-ből t-be vezető út megkeresésére, a 2.1.1 tétel azonban mégis elvi lehetőséget teremt erre. A tétel alapján ugyanis nem kell az utakat közvetlenül keresnünk, hanem elég D-nek egy olyan H részgráfját megkonstruálnunk, amelyben $\delta(s) = k$ és teljesülnek a 2.1.1 tétel fokszám feltételei. Megjegyezzük, hogy ez az egyszerű megfigyelés inspirálta a folyamok fogalmának megszületését.

TÉTEL 2.1.2 (poláris Dilworth) *A P részbenrendezett halmazt fedő antiláncok minimális száma egyenlő a leghosszabb lánc elemszámával.*

Biz. Világos, hogy max $\leq$ min. Az egyenlőség igazolásához legyen A_1 a P minimális elemeinek halmaza. Ez nyilván antilánc. Legyen A_2 az A_1 elhagyása után a minimális elemek halmaza. Ezt folytatva megkonstruáljuk az $A_1, A_2, \ldots, A_c$ antiláncokból álló felbontását P-nek. Ezután visszafelé haladva előállítunk egy c elemből álló láncot. Legyen a_c az A_c antilánc tetszőleges eleme. Az a_c elem nem került bele A_{c-1}-be, ezért van A_{c-1}-nek egy a_c-nél kisebb a_{c-1} eleme. Ez az elem nem került A_{c-2}-be, tehát van A_{c-2}-ben egy a_{c-2} elem, amely kisebb, mint a_{c-1}. Ezt az eljárást folytatva, megkapunk egy c elemű láncot. •

A fenti bizonyítás egy kétfázisú mohó eljárásnak tekinthető. Az első fázisban mohó módon megkonstruáltuk az antilánc felbontást, a másodikban pedig szintén mohó módon, de már az első fázis által szolgáltatott antilánc felbontás ismeretében, megkonstruáltuk a maximális láncot.

A poláris Dilworth tételt egyszerű fogással kiterjeszthetjük a súlyozott esetre is.

TÉTEL 2.1.3 (súlyozott poláris Dilworth) *Legyen adott a P elemein egy nemnegatív egész s súlyozás. A maximális súlyú lánc súlya egyenlő a súlyokat fedő (nem feltétlenül különböző) antiláncok minimális számával.*

Biz. Töröljük ki a nulla súlyú elemeket, majd minden p elemet helyettesítsünk egy $s(p)$ elemű lánccal, melynek tagjai pontosan ugyanazon elemekkel legyenek összehasonlíthatók, mint p. A kiterjesztett részbenrendezett halmazra megfogalmazott poláris Dilworth tétel éppen a súlyozott esetet adja. •

Feladat 2.1.1 *A fenti kétfázisú eljárás átalakításával adjunk direkt bizonyítást a súlyozott poláris Dilworth tételre.*

2.1.1 Részfák, részutak

TÉTEL 2.1.4 (Dirac) *Adott az F fa részfáinak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Az $\mathcal{F}$-ből kiválasztható diszjunkt fák maximális ν száma egyenlő az $\mathcal{F}$-t lefogó csúcsok minimális τ számával.*

Biz. Nyilván $\nu \leq \tau$, így csak a fordított irányú egyenlőtlenség igazolásával foglalkozunk. Válasszuk ki F-nek egy tetszőleges r pontját. Egy részfa talppontján az r-hez legközelebbi pontját értjük, és ennek távolságát r-től a részfa r-től való távolságának hívjuk.

Ameddig csak lehet, válasszunk ki egymás után $\mathcal{F}$-ből fákat úgy, hogy mindig az r-től legtávolabbi olyan fát választjuk, amely diszjunkt az addig már kiválasztottaktól. Jelölje az így kiválasztott fák halmazát $\mathcal{I}$, talppontjaik halmazát pedig T. Belátjuk, hogy T lefogja az $\mathcal{F}$ minden tagját, amiből $\nu \geq \tau$ már következik. Valóban, ha indirekt volna egy $F' \in \mathcal{F}$ lefogatlan fa, akkor az metszi $\mathcal{I}$ valamely tagját. Jelölje I az $\mathcal{I}$-nek az algoritmus során legkorábban választott azon tagját, amely metszi F'-t. Az F' lefogatlansága miatt I talppontja nincs F'-ben és F' diszjunkt az $\mathcal{I}$ összes I-nél korábban kiválasztott tagjától, vagyis I választásakor nem a kiválasztási szabály szerint jártunk el, ellentmondás. •

TÉTEL 2.1.5 (Gallai) *Adott az S szakasz zárt részintervallumainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Akkor és csak akkor lehet az $\mathcal{F}$ tagjait k páronként diszjunkt intervallumokból álló osztályba sorolni, ha S minden pontját legfeljebb k darab $\mathcal{F}$-beli szakasz fedi.*

Biz. A szükségesség nyilvánvaló. Az elegendőséghez igazolásához S-t vízszintesen képzeljük. Az intervallumokat (baloldali) kezdőpontjuk sorrendjében tekintve egymás után betesszük a k színosztály közül a legkorábbi olyanba, amelybe betehető a diszjunktság megsértése nélkül. Amennyiben egy $F \in \mathcal{F}$ intervallumot nem tudunk elhelyezni, mert semelyik színosztályba nem tehető be a diszjunktság megsértése nélkül, úgy F kezdőpontját a választási szabály miatt mind a k színosztály egyik intervalluma tartalmazza, ellentmondásban a feltevéssel, hogy egy pontot összesen csak k intervallum fedhet. •

Gyakorlat 2.1.2 *Adott az S szakasz zárt részintervallumainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Igazoljuk Gallai másik tételét, miszerint az $\mathcal{F}$-ből kiválasztható diszjunkt intervallumok maximális száma egyenlő az $\mathcal{F}$ tagjait lefogó pontok minimális számával.*

Feladat 2.1.3 *Adott A és B diszjunkt halmaz és egy $m : A \cup B \to \mathbf{Z}_+$ fokszám előírás. Gale és Ryser tétele szerint* akkor és csak akkor létezik olyan egyszerű $G = (A, B; E)$ páros gráf, amelyre $d(v) = m(v)$ minden $v \in A \cup B$ csúcsra, ha $m(A) = m(B)$ és minden $j = 1, \ldots, |A|$ értékre a j legnagyobb A-beli $m(v)$ érték összege legfeljebb $\sum_{u \in B} \min\{j, m(u)\}$. *Igazoljuk a feltétel szükségességét, majd egy alkalmas mohó algoritmus segítségével az elegendőséget is.*

2.1.2 Irányítások

A $G = (V, E)$ irányítatlan gráf éleinek (vagy röviden G-nek) egy **irányításán** egy olyan irányított gráfot értünk, amely G-ből keletkezik azáltal, hogy G minden uv élét helyettesítjük az u-ből v-be és a v-ből u-ba vezető irányított élek egyikével. Kicsit általánosabban beszélhetünk egy vegyes gráf irányításáról, amikor is a vegyes gráf irányított éleit változatlanul hagyjuk, míg az irányítatlan éleket helyettesítjük egy-egy irányítottal.

Gyakorlat 2.1.4 *Egy irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor van olyan irányítása, amelyben minden pont elérhető egy megadott s gyökérpontból, ha G összefüggő.*

TÉTEL 2.1.6 (Robbins) *Egy G irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggő.*

Biz. A szükségesség nyilvánvaló. Az elegendőséghez tetszőleges sorrendben tekintjük a gráf éleit és egyenként megirányítjuk őket, csak arra ügyelve, hogy ne keletkezzék irányított vágás. Azt kell igazolnunk, hogy az eljárás mindig befejezhető. Ennek érdekében tekintsünk egy közbenső állapotot, amikor éleknek egy $F \subset E$ részhalmazát már megirányítottuk és jelölje $\vec{F}$ a megirányított F-t. Legyen $e = uv \in E - F$ a soron következő irányítatlan él. Amennyiben az u-ból v felé történő irányítás egy irányított vágást hozna létre, úgy létezik egy olyan X $v\bar{u}$-halmaz, amelyre az e-től eltekintve az X és $V - X$ közötti valamennyi él irányított (eleme $\vec{F}$-nek) éspedig $V - X$-től X-felé. Hasonlóképp, amennyiben e-nek a v-ből u-felé történő irányítása hozna létre irányított vágást, akkor létezne egy olyan Y $u\bar{v}$-halmaz, amelyre e-től eltekintve az Y és $V - Y$ közötti valamennyi él irányított Y-tól $V - Y$-felé. Ekkor viszont az $X \cap Y$ halmazból nem lép ki sem irányított, sem irányítatlan él, és ugyanez áll az $X \cup Y$ halmazra is. Mivel a feltevés szerint eddig még nem hoztunk létre irányított vágást, így szükségképpen $X \cap Y = \emptyset$ és $X \cup Y = V$, azaz $Y = V - X$. Így az X és $V - X$ között egyedül az e él vezethet, ellentétben a feltevéssel, hogy G 2-élösszefüggő. •

Figyeljük meg, hogy a bizonyítás az alábbi általánosabb eredményt is kiadja:

Következmény 2.1.7 *Egy vegyes gráf akkor és csak akkor irányítható erősen összefüggővé, ha nincs benne tisztán irányított vágás és irányítatlan értelemben 2-élösszefüggő.* •

Az 2.1.6 tétel úgy is megfogalmazható, hogy egy irányított gráf bizonyos éleit át lehet fordítani úgy, hogy erősen összefüggő digráfot kapjunk, feltéve persze, hogy az irányítatlan alapgráf 2-élösszefüggő. Természetesen kínálkozik a kérdés, mennyi az átfordítandó élek minimális száma. Meglepő módon a válasz sokkal mélyebb eszközöket igényel, mint a Robbins tétel, de legalább létezik. Lucchesi és Younger tétele szerint a keresett minimum éppen az élidegen irányított vágások maximális számával egyenlő. (Lásd a 7 fejezet szakaszát.)

Természetesen vetődik fel a Robbins tétel (egy másirányú) általánosításának kérdése: mikor lehet egy gráfot k-élösszefüggőre irányítani. Nyilván ehhez szükséges, hogy a gráf $2k$-élösszefüggő legyen, és Nash-Williams bebizonyította, hogy ez a feltétel elegendő is (lásd a 4.3.1 tételt.) A bizonyítás, amely a fentinél ravaszabb eszközt igényel, a 4. fejezetben szerepel. A nehézséget jelzi, hogy már $k = 2$-re sem igaz az, ami $k = 1$-re, amint azt fentebb láttuk, még érvényes volt; nevezetesen, hogy az éleket mohó módon egymás után, tetszőleges sorrendben irányíthattuk, csupán arra ügyelve, hogy ne hozzunk létre hibás (azaz a $k = 1$ esetben irányított) vágást. Tekintsük például azt a $G = (V, E)$ gráfot, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ és G-nek a következő 11 éle van: v_1v_2, v_3v_4, 3-3 párhuzamos él v_1 és v_4 között, v_1 és v_3 között, valamint v_2 és v_3 között. Ennek a gráfnak az olvasó könnyen találhat 2-élösszefüggő irányítását. Ugyanakkor, ha két párhuzamos v_1v_4 élt v_4 felé irányítunk, a harmadikat v_1 felé; két párhuzamos v_1v_3 élt v_3 felé irányítunk, a harmadikat v_1 felé; végül két párhuzamos v_2v_3 élt v_3 felé irányítunk, a harmadikat v_2 felé, akkor egyrészt, amint azt szimpla eset szétválasztás mutatja, az irányítatlanul maradt v_1v_2, v_3v_4 éleknek már nem tudunk úgy irányítást adni, hogy 2-élösszefüggő digráfot kapjunk, másrészt ennek a ténynek nincs egyszerűen megfogalmazható általános oka.

Az így kapott vegyes gráf tehát azt is mutatja, hogy a Nash-Williams féle irányítási tétel és a 2.1.7 tétel természetesen kínálkozó közös általánosítása $k \geq 2$-re **nem érvényes:** *Egy vegyes $D = (V, A)$ irányított és $G = (V, E)$ irányítatlan gráfból álló vegyes gráfban az E elemei akkor és csak akkor irányíthatók úgy, hogy k-élösszefüggő digráfot kapjunk, ha minden $X \subset V$ halmazra $d_G(X) \geq (k - \varrho_D(X))^+ + (k - \delta_D(X))^+$.* Nyitva marad tehát a kérdés, hogy mikor létezik egy vegyes gráfnak k-élösszefüggő irányítása, és az előbbi kicsiny példa jelzi, hogy a válasz nem ígérkezik egyszerűnek. A szubmoduláris áramok elmélete segítségével azonban az irányíthatóság feltétele megadható.

Feladat 2.1.5 *Igazoljuk Robbins tételét egy mélységi fa segítségével.*

Feladat 2.1.6 *Legyen D olyan digráf, amely irányítatlan értelemben 2-élösszefüggő. Legyen F egy tartalmazásra nézve minimális részhalmaza az éleknek, amelynek elemeit összehúzva erősen összefüggő digráfot kapunk* (azaz F minimális olyan, hogy minden irányított vágást lefog). *Igazoljuk, hogy ha összehúzás helyett F minden elemének megfordítjuk az irányítását, már akkor is erősen összefüggő digráfot kapunk.*

Feladat 2.1.7 *Igazoljuk, hogy egy elvágó élt nem tartalmazó digráf élei két színnel színezhetők úgy, hogy minden irányított vágás mindkét színből tartalmazzon élt.*

Feladat 2.1.8 *Egy irányítatlan G gráfnak adva van két erősen összefüggő irányítása. Igazoljuk, hogy az egyikből el lehet jutni a másikba irányított utak illetve irányított körök egymás utáni megfordításával úgy, hogy minden közbenső irányítás erősen összefüggő!*

Feladat 2.1.9 *Egy $G = (V, E)$ összefüggő gráfnak akkor és csak akkor létezik olyan irányítása, amely egy megadott $T \subseteq V$ halmaz pontjaiban páratlan kívüle meg páros, ha $|E|$ és $|T|$ ugyanolyan paritású.*

Feladat 2.1.10 *Egy 2-élösszefüggő gráfnak létezik közel-Euler erősen összefüggő irányítása.*

2.1.3 Színezések

TÉTEL 2.1.8 *Egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf kromatikus száma legfeljebb a $\Delta + 1$, ahol Δ a G maximális fokszámát jelöli. Ráadásul létezik olyan $\Delta + 1$ színnel történő színezés, ahol a $\Delta + 1$-dik színt legfeljebb csak egy előre meghatározott v_1 pont használja.*

Biz. A v_1 ponttal kezdve konstruáljuk meg a gráf pontjainak egy olyan $v_1, \ldots, v_n$ sorréndjét, ahol a v_1-től eltekintve minden pontból megy kisebb indexű ponthoz él. A gráf összefüggősége folytán ez mindig megtehető.

E sorrendben visszafelé haladva egymás után színezzük meg a csúcsokat a $\Delta+1$ szín közül mindig legkisebb index használva, arra ügyelve csupán, hogy szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak. Mivel minden csúcsnak legfeljebb Δ szomszédja van a gráfban, ezért egy v_i $(i > 2)$ csúcs megszínezésekor, miután van kisebb indexű, még színezetlen szomszédja, legfeljebb csak $\Delta - 1$ tiltott szín van, és így a Δ rendelkezésre álló színből tudunk választani. A $\Delta + 1$-dik színre esetleg a v_1 csúcsnál lehet szükség. •

Kérdés, hogy meg lehet-e szabadulni, a $\Delta + 1$-dik színtől. A páratlan kör mutatja a $\Delta = 2$ esetben és egy teljes $\Delta + 1$ pontú gráf $\Delta \geq 3$-ra, hogy a válasz általában nemleges. Az előbbi mohó színezési eljárás csöppnyi finomítása azonban 3-összefüggő gráfok esetén segít.

TÉTEL 2.1.9 *Legyen $G = (V, E)$ gráf 3-összefüggő nem teljes gráf. Ekkor G pontjai megszínezhetők Δ színnel.*

Biz. [Lovász] Mivel a gráf nem teljes, így van két nem szomszédos pontja. Az ezeket összekötő legrövidebb út első három pontját jelölje rendre v_n, v_1, v_{n-1}. Ekkor v_n és v_{n-1} is szomszédos v_1-gyel, de egymással nem szomszédosak. Mivel a gráf 3-összefüggő, így $G' = G - \{v_n, v_{n-1}\}$ összefüggő, és ezért G' pontjainak létezik egy $v_1, \ldots, v_{n-2}$ sorrendje, amelyben minden v_i $(i \geq 2)$ csúcsból vezet visszafelé él. A v_n-től kezdve e sorrendben visszafelé haladva egymás után színezzük meg a csúcsokat a Δ szín közül mindig legkisebb sorszámút használva, arra ügyelve csupán, hogy szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak. Ekkor tehát v_n és v_{n-1} az egyes színt kapja. Mivel minden csúcsnak legfeljebb Δ szomszédja van a gráfban, ezért a v_i $(i > 2)$ csúcs megszínezésekor, miután van kisebb indexű még színezetlen szomszédja, legfeljebb csak $\Delta - 1$ tiltott szín van, és így a Δ rendelkezésre álló színből tudunk választani. A v_1 csúcsnak viszont a v_n és a v_{n-1} két egyformára színezett szomszédja, így a v_1 szomszédjaira is legfeljebb $\Delta - 1$ színt használtunk fel, tehát ezt is meg tudjuk színezni a Δ szín valamelyikével. •

Feladat 2.1.11 *Igazoljuk Brooks alábbi tételét.*

TÉTEL 2.1.10 (Brooks) *Ha egy egyszerű összefüggő gráf nem a teljes gráf és nem páratlan kör, akkor kromatikus száma legfeljebb a maximális fokszám.*

2.1.4 Forrás telepítés

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf minden csúcsán adott egy $r(v)$ egész szám. Azt mondjuk, hogy az S halmaz forrás, ha S-ből minden $v \in V - S$ pontba vezet $r(v)$ élidegen út. Ezek szerint a V csúcshalmaz maga forrás. A feladat a legkisebb elemszámú forrást meghatározni. Legyen $R(X) := \max\{r(v) : v \in X\}$. A Menger tétel szerint egy S halmaz pontosan akkor forrás, ha minden $X \subseteq V - S$ halmazra $d_G(X) \geq R(X)$. Ennek megfelelően a források azok a részhalmazok, melyek lefognak minden hiányos halmazt, ahol X hiányos, ha $d_G(X) < R(X)$. Természetesen elég lefogni a tartalmazásra nézve minimális hiányos halmazokat.

TÉTEL 2.1.11 *A minimális elemszámú forrás elemszáma egyenlő a diszjunkt hiányos halmazok maximális számával.*

Biz. Világos, hogy min $\geq$ max. Az egyenlőség igazolásához egy mohó algoritmus segítségével megkonstruálunk egy S forráshalmazt valamint minimális hiányos halmazoknak egy $|S|$ tagú diszjunkt rendszerét.

Rendezzük nagyság szerinti növekvő sorrendbe a csúcsokat: $r(v_1) \leq r(v_2) \leq \ldots \leq r(v_n)$. Kezdetben legyen $S = V$ majd az adott sorrendben a pontokan egyenként végighaladva az aktuális S-ből akkor dobjuk ki a soron következő v_i pontot, ha a csökkentés után még mindig forrást kapunk. Ez azt jelenti, hogy ha v_i-t nem lehet kidobni, akkor létezik egy olyan X_i minimális hiányos halmaz, amelynek S-sel az egyetlen közös pontja v_i, és így speciálissan v_i a legnagyobb indexű pontja. A növekvő sorrend miatt $R(X_i) = r(v_i)$.

Jelölje S az algoritmus által szolgáltatott végső forrás halmazt és legyen v_i, v_j két eleme S-nek. A tétel következik az alábbi állításból.

Állítás 2.1.12 $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Biz. Legyen $X'_i = X_i - X_j$ és $X'_j = X_j - X_i$. Ha, indirekt, a metszet nem-üres, akkor X'_i és X'_j nem hiányos, azaz $d(X'_i) \geq R(X'_i)$ és $d(X'_j) \geq R(X'_j)$. Miután $X_i \cap S = \{v_i\}$ és $X_j \cap S = \{v_j\}$, így $v_i \in X'_i$ és $v_j \in X'_j$. Ezért $R(X'_i) = r(v_i)$ és $R(X'_j) = r(v_j)$, amiből $r(v_i) + r(v_j) = R(X_i) + R(X_j) > d(X_i) + d(X_j) \geq d(X'_i) + d(X'_j) \geq R(X'_i) + R(X'_j) = r(v_i) + r(v_j)$, ellentmondás. •

2.2 Algoritmikus bizonyítások II: javító utak

2.2.1 Kőnig és Hall tételei

Most bemutatjuk az egész elmélet alapkövének tekinthető Kőnig tételt és annak javító utas bizonyítását.

TÉTEL 2.2.1 (Kőnig Dénes) *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau = \tau(G)$ elemszámával.*

Biz. Egy ν elemű párosítás lefogásához kell legalább ν csúcs, így az összes élhez is kell, ezért $\nu \leq \tau$.

A nemtriviális $\nu \geq \tau$ irány igazolásához konstruálunk egy M párosítást és egy L lefogást, melyek elemszáma ugyanaz. Az eljárás tetszőleges M párosításból indul ki, ami kezdetben az üres halmaz is lehet. Az általános lépésben vagy találunk egy nagyobb elemszámú párosítást, és ekkor a nagyobb párosításra vonatkozóan iteráljuk az eljárást, vagy pedig egy $|M|$-mel megegyező elemszámú lefogást, amikoris az algoritmus véget ér.

Irányítsuk meg M éleit T-től S felé, míg az összes többi élt fordítva. Jelölje R_S illetve R_T az S-ben illetve a T-ben az M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az R_S pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit például szélességi kereséssel találhatunk meg).

Két eset lehetséges. Amennyiben R_T-nek esik pontja Z-be, akkor megkapunk egy olyan R_S-t és R_T-t összekötő P utat, amely M-ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M-nél eggyel több élből álló M' párosítás. (Technikailag az eljárást könnyű végrehajtani: a megtalált út éleinek irányítását egyszerűen megfordítjuk.)

A másik esetben R_T diszjunkt Z-től. Z definíciója folytán Z-ből nem lép ki irányított él. Érvényes továbbá, hogy Z-be nem lép be megirányított $uv \in M$ párosítás él, hiszen v csak u-n keresztül érhető el, így v csak akkor lehetett irányított úton elérhető R_S-ből, ha u is az volt.

Következik, hogy az $L := (T \cap Z) \cup (S - Z)$ halmaz egyrészt lefogja az összes élt, másrészt minden M-beli élnek pontosan az egyik végpontját tartalmazza, tehát $|M| = |L|$. •

A fenti bizonyítás egyúttal egy $O(nm)$ lépésszámú algoritmust is jelent a szóbanforgó optimumok meghatározására. Közvetlen folyományként adódik Hall tétele.

TÉTEL 2.2.2 (Hall) *Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t fedő párosítás, ha A minden X részhalmazára teljesül az ún. Hall féle feltétel, azaz $|\Gamma(X)| \geq |X|$ ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon B-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.*

Biz. A feltétel szükségessége kézenfekvő. Az elegendőséghez azt kell belátnunk, hogy $\nu \geq |A|$. Ha ez nem állna, akkor Kőnig tétel szerint létezik az éleknek egy A-nál kevesebb pontból álló L lefogása. De ekkor az $X := A - L$ halmazra $|B \cap L| < |X|$ és $\Gamma(X) \subseteq B \cap L$, azaz X megsérti a Hall feltételt. •

Irányítások segítségével algoritmikus bizonyítást adunk Lovász egy kapcsolódó tételére.

TÉTEL 2.2.3 (Lovász) *Ha egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik olyan erdő, amelyben minden $s \in S$ pont foka 2, ha minden $X \subseteq S$ nemüres halmazra*

$$|\Gamma(X)| \geq |X| + 1. \tag{2.1}$$

Biz. Az X és $\Gamma(X)$ által feszített részgráfban egy erdőnek egyrészt legfeljebb $|X| + |\Gamma(X)| - 1$ éle van, másrészt $2|X|$, amennyiben teljesíti, hogy S-ben minden pontjának foka kettő. A kettő összevetéséből (2.1) szükségessége adódik.

Mivel a Hall-féle feltétel még szigorúan is teljesül az S minden nemüres részhalmazára, G-nek létezik S-t fedő M párosítása. Jelölje R a T azon pontjainak halmazát, melyeket M nem fed. Húzzuk össze R-t egy r ponttá. Irányítsuk az M elemeit S-felé, míg az összes többi élt T-felé. Állítjuk, hogy az így létrejött D digráfban r-ből S minden eleme elérhető. Valóban, ha az S nem elérhető pontjainak X halmaza nemüres, akkor $\Gamma_G(X) = \Gamma_M(X)$, azaz X megsértené (2.1)-t. Ha viszont S minden pontja elérhető r-ből, akkor a T-nek is minden pontja, és így D-nek van r gyökerű feszítő fenyője, amelynek élei az eredeti G gráfban egy S minden pontjában másodfokú erdőt alkotnak. •

Feladat 2.2.1 *Legyen $S \subseteq V$ a $G = (V, E)$ összefüggő gráf pontjainak egy stabil halmaza. Dolgozzuk ki a szükséges és elegendő feltételét egy olyan feszítő fa létezésének, amely minden S-beli pontban másodfokú. Algoritmikusan hogyan található meg egy ilyen fa?*

2.2.2 Fokszámkorlátos irányítások

Vizsgáljuk meg olyan irányítások létezésének feltételét, amelyeknél a gráf minden csúcsának a befoka előre megadott korlátok közé esik. Kicsit konkrétabban, legyen $f : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f \leq g$. (Egy csúcson a $-\infty$ alsó korlát azt jelenti, hogy ezen a csúcson egyáltalán nincs alsó korlát. Itt nullát is írhatnánk, de jobb a $-\infty$, mert így a feltételben rögtön látni lehet, hogy az ilyen csúcsok nem játszanak szerepet. Analóg a helyzet a $\{\infty\}$ felső korláttal.) Kezdjük egy nagyon egyszerű speciális esettel.

Egy irányítatlan gráfot akkor nevezünk **Euler-gráf**nak, ha minden pont foka páros (függetlenül attól, hogy a gráf összefüggő-e vagy sem). Egy irányított gráfot vagy egy irányítatlan gráf egy irányítását akkor nevezünk **Euler-gráf**nak, ha minden pont befoka egyenlő a kifokával. Kicsit általánosabban, egy gráf irányítását **közel-Euler**nak hívjuk, ha minden pontnak a befoka és a kifoka legfeljebb eggyel tér el. Természetesen egy irányítatlan Euler gráf közel-Euler irányítása Euler irányítás.

TÉTEL 2.2.4 *Egy G irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor van Euler irányítása, ha G Euler.*

Biz. Irányítatlan Euler-gráf könnyen látható módon mindig felbontható élidegen irányítatalan körök egyesítésére. E körök mindegyikét körbe irányítva egy irányított Euler-gráfot kapunk. •

Következmény 2.2.5 *Tetszőleges G gráfnak van közel-Euler irányítása.*

Biz. Jelölje a páratlan fokú pontok halmazát T. Adjunk a gráfhoz egy új pontot, és kössük össze a T minden elemével. Így Euler-gráfot kaptunk, amelynek az előbbi tétel szerint van Euler irányítása, és ezt az eredeti élekre megszorítva G-nek egy közel-Euler irányítását kapjuk. •

TÉTEL 2.2.6 *Ha egy irányítatlan gráfnak D_1 és D_2 két olyan irányítása, amelyre $\varrho_1(v) = \varrho_2(v)$ minden v csúcsra fennáll, akkor irányított körök egymás utáni megfordításával el lehet jutni D_1-ből D_2-be.*

Biz. Ha egy él irányítása ugyanaz a két irányításban, úgy azt kihagyva indukcióval készen vagyunk. Így minden él fordítva szerepel a két irányításban, és ezért $\varrho_1(v) = \varrho_2(v) = \delta_1(v)$, vagyis D_1 irányított Euler gráf. Emiatt élidegen körök uniójára bomlik, amiket egymás után átforgatva D_2-t kapjuk. •

TÉTEL 2.2.7 *A $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak létezik olyan irányítása,*

(i) *amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$e(X) \geq f(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ -re,} \tag{2.2}$$

(ii) *amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$i(X) \leq g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ -re,} \tag{2.3}$$

(iii) *amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind* (2.2)*, mind* (2.3) *fennáll.*

Biz. (2.2) szükségessége. Tegyük fel, hogy létezik jó irányítás. Ekkor $f(X) \leq \sum[\varrho(v) : v \in X] \leq e(X)$.

(2.2) elegendősége. G egy irányításában nevezzünk egy s pontot **hibás**nak, ha $\varrho(s) < f(s)$. Válasszunk G-nek egy olyan irányítását, amelynek a $\sum[f(v) - \varrho(v)) : v$ hibás] összeggel definiált hibája minimális. Ha ez a hiba 0, vagyis ha nincs hibás csúcs, akkor készen vagyunk.

Legyen most az s csúcs hibás és jelöljük X-szel a megadott irányításban azon pontok halmazát, amelyek s-ből elérhetők. Ekkor X-ből nem lép ki él, és így $\sum[\varrho(v) : v \in X] = e(X)$. Most X szükségképpen tartalmaz egy olyan t pontot, amelyre $\varrho(t) > f(t)$, mert ha nem létezne ilyen pont, akkor $f(X) > \sum[\varrho(v) : v \in X] = e(X)$ volna ellentmondásban (2.2)-gyel. Egy s-ből t-be vezető út éleinek irányítását megfordítva G-nek egy olyan irányítását kapjuk, amelynek hibája kisebb, mint a meglévő irányításé. A módszer ismételt alkalmazásával legfeljebb $f(V)$ út megfordításával egy jó irányítást kapunk.

Analóg módon igazolható a tétel második része (azzal az eltéréssel, hogy most egy t pont akkor hibás, ha a meglévő irányításban $\varrho(t) > g(t)$ és X-szel azon pontok halmazát jelöljük, amelyekből t elérhető). Valójában a második rész formailag is ekvivalens az első azon változatával, amikor olyan irányítást keresünk, amelyben minden v pont kifoka legalább $f(v) := d_G(v) - g(v)$.

Végül a harmadik rész igazolásához induljunk ki egy olyan irányításból, amelyre $(*)$ $\varrho(v) \leq g(v)$ teljesül minden v pontra. Alkalmazzuk az első rész algoritmusát és figyeljük meg, hogy ennek során egy pontnak a befoka csak akkor nő, ha $\varrho(s) < f(v) \leq g(v)$, vagyis $(*)$ automatikusan érvényben marad. •

Feladat 2.2.2 *Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, amikor nem csak a pontok befokára van alsó-felső korlát előírás, hanem a kifokára is.* (A megoldáshoz szabad használni a *2.2.7* tételt.)

Érdemes kiemelni a tétel alábbi, mindenképp meglepőnek minősítendő következményét.

Következmény 2.2.8 *Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra és van olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra, akkor olyan is van, amely egyszerre elégíti ki mindkét kívánságot.*

Az itt megfogalmazott tulajdonságot jobb híján **linking** tulajdonságnak nevezhetjük. Számos helyen feltűnik, hátterében, amint majd látni fogjuk, egy polimatroidokra vonatkozó tétel áll.

Következmény 2.2.9 (Irányítási Lemma) *Adott $G = (V, E)$ gráfra és $m : V \to \mathbf{Z}$ függvényre a következők ekvivalensek.*

$$G \text{ irányítható úgy, hogy minden } v \text{ csúcsra } \varrho(v) = m(v), \tag{2.4}$$

$$e(X) \geq m(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re és } m(V) = |E| \tag{2.5}$$

$$i(Y) \leq m(Y) \text{ minden } Y \subseteq V\text{-re és } m(V) = |E|. \tag{2.6}$$

Biz. Miután $e(X) + i(V - X) = |E| = m(V) = m(X) + m(V - X)$, az (2.5) and (2.6) feltételek ekvivalenciája következik. (2.5) nyilván szükséges (2.4)-hez. Megfigyeljük, hogy $f := m$-re (2.5) és (2.2) ugyanaz, így a 2.2.7 tételből kapjuk, hogy van olyan irányítása G-nek, amelyre $\varrho(v) \geq m(v)$ minden v csúcsra. Mivel $|E| = \sum[\varrho(v) : v \in V] \geq \sum[m(v) : v \in V] = m(V) = |E|$, minden v pontra egyenlőség van, azaz $\varrho(v) = m(v)$. •

Gyakorlat 2.2.3 *Igazoljuk, hogy ha ϱ és ϱ' a G két olyan irányításának befok függvénye, amelyekre $\varrho(v) = m(v) = \varrho' v)$ minden v csúcsra fennáll, akkor $\varrho(X) = \varrho(X')$ minden $X \subseteq V$-re.*

Feladat 2.2.4 *A $G = (V, E)$ gráf csúcsainak legyen U egy részhalmaza. Egy $m' : U \to \mathbf{Z}$ függvényhez akkor és csak akkor létezik G-nek olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) = m'(v)$ minden $v \in U$-ra, ha $i_G(X) \leq m'(X) \leq e_G(X)$ fennáll minden $X \subseteq U$ halmazra.*

Fentebb már említettük, hogy egy irányítatlan Euler gráf mindig irányítható úgy, hogy minden pontnak a befoka egyenlő a kifokával. Az alábbi általánosítás önmagában is csinos, de az élidegen-utakról szóló fejezetben meglepő alkalmazásra is lel majd.

Következmény 2.2.10 (Ford és Fulkerson) *Adott egy $M = (V, A + E)$ vegyes gráf, amely a $G = (V, E)$ irányítatlan és $D = (V, A)$ irányított gráfok összetevésével keletkezett. Akkor és csak akkor lehet úgy irányítani az E elemeit, hogy az előálló irányított gráf Euler-féle legyen (azaz minden pont befoka megegyezzék a kifokával), ha M-ben minden pont páros sok (irányított és irányítatlan) éllel szomszédos azaz*

$$\delta_D(v) + \varrho_D(v) + d_G(v) \text{ páros} \tag{2.7}$$

és

$$d_G(X) \geq \varrho_D(X) - \delta_D(X) \text{ teljesül minden } X \subseteq V\text{-re.} \tag{2.8}$$

Biz. A G egy $\vec{G} = (V, \vec{E})$ irányításának befok illetve kifok függvényét jelölje $\varrho_{\vec{G}}$ és $\delta_{\vec{G}}$. $D + \vec{G}$ akkor Euler-féle, ha minden v csúcsra $\varrho_D(v) + \varrho_{\vec{G}}(v) = \delta_D(v) + \delta_{\vec{G}}(v)$, ami $\varrho_{\vec{G}}(v) + \delta_{\vec{G}}(v) = d_G(v)$ miatt azzal ekvivalens, hogy $\varrho_{\vec{G}}(v) = (\delta_D(v) - \varrho_D(v) - d_G(v))/2$. A jobboldalt jelöljük $m(v)$-vel. Ez (2.7) miatt egész. Alkalmazzuk a 2.2.9 következményt, és figyeljük meg, hogy az m adott választásánál (2.8) ekvivalens az (2.5) feltétellel. •

Feladat 2.2.5 *A 2.2.9 következményt használva vezessük le Hall tételét.* (Segítség: A $G = (S, T; E)$ páros gráf éleinek keressünk olyan irányítását, amelyben minden S-beli pont befoka 1 és minden T-beli t pont befoka $d_G(t) - 1$.)

Feladat 2.2.6 *Mutassuk meg, hogy a 2.2.7 tétel bizonyításában szereplő útátfordítós technika az előbbi feladat megoldása nyomán a Kőnig tételre leírt javító utas bizonyítást adja vissza.*

Feladat 2.2.7 *Bizonyítsuk be a 2.2.9 következményt a Hall tételre támaszkodva.* (Segítség: Készítsünk el egy páros gráfot úgy, hogy G minden élét osszunk fel egy ponttal [ezen osztópontok alkotják a páros gráf pontjainak egyik osztályát], továbbá minden v pontját helyettesítsünk $m(v)$ darab ponttal. Az így kapott páros gráf egy teljes párosítása G egy (2.4)-t teljesítő irányításának felel meg, míg a Hall féle feltétel az (2.5) feltétellel ekvivalens.)

Feladat 2.2.8 *A 2.2.7 tétel segítségével adjuk meg annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy adott páros gráfnak létezzék olyan részgráfja, amelyben minden pont fokszáma előre megadott korlátok közé esik.*

Feladat 2.2.9 *Az előző feladatot felhasználva adjuk meg annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy irányított gráfnak létezzék olyan részgráfja, amelyben minden pont befoka is és kifoka is előre megadott korlátok közé esik.*

Feladat 2.2.10 *A 2.2.8 következmény segítségével igazoljuk az alábbi eredményt, amely a linking tulajdonság egy korai megjelenése.*

Következmény 2.2.11 (Mendelssohn és Dulmage) *Ha egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban létezik párosítás, amely fedi az $X \subseteq S$ halmazt és létezik párosítás, amely fedi az $Y \subseteq T$ halmazt, akkor létezik olyan párosítás is, amely egyszerre fedi X-t és Y-t.* •

Feladat 2.2.11 [Landau tétele] *Legyen $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n$ nem-negatív egészeknek egy sorozata. Akkor és csak akkor létezik olyan turnament, amelyben az i-dik pont befoka m_i, ha $\sum_{i=1}^{n} m_i = n(n-1)/2$ és $\sum_{i=1}^{k} m_i \leq k(k-1)/2 + k(n-k)$ $(k = 1, \ldots, n)$.*

Gyakorlat 2.2.12 *Egy D' digráfban legyen s és t két olyan pont, hogy s-be nem lép be él, t-ből nem jön ki él, továbbá minden más csúcs befoka megegyezik a kifokával. Ekkor D'-ben létezik $\delta'(s)$ élidegen út s-ből t-be.*

Feladat 2.2.13 *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráfban s és t két olyan csúcs, melyekre $\varrho_D(s) = 0 = \delta_D(t)$ és*

$$\varrho(T) \geq k \text{ fennáll minden } t\bar{s}\text{-halmazra.} \tag{2.9}$$

Igazoljuk, hogy D tartalmaz egy olyan D' részgráfot, amelyben $\varrho'(v) = \delta'(v)$ teljesül minden $v \in V - \{s, t\}$ pontra és $\delta'(s) = k = \varrho'(t)$. Vezessük le ebből a Menger tétel élidegen változatát, amely szerint D-ben akkor és csak akkor létezik k élidegen út s-ből t-be, ha (2.9) fennáll. (Segítség: Legyen G az az irányítatlan gráf, amelyet D-ből kapunk az élek irányításának elhagyásával. Keressünk G-nek olyan $\vec{G}$ irányítását, amelyben minden $v \in V - \{s, t\}$ pont befoka az eredeti, s befoka k és t befoka $\varrho_D(t) - k$. D azon élei által alkotott D' részgráf, melyek $\vec{G}$-ben fordítva vannak, jó lesz.)

Irányítások egy alkalmazása

Egy $G = (V, E)$ irányitatlan gráf minden v pontján adott tiltott fokszámok egy $F(v) \subseteq \{0, 1, \ldots, d_G(v)\}$ halmaza, ahol $d_G(v)$ jelöli v pont G-beli fokát. A G egy $G' = (V, E')$ részgráfja F**-elkerülő**, ha $d_{G'}(v) \notin F(v)$ minden v csúcsra.

TÉTEL 2.2.12 *Ha*

$$|F(v)| \leq \lfloor d_G(v)/2 \rfloor \text{ minden } v \text{ csúcsra,} \tag{2.10}$$

akkor G-nek létezik F-elkerülő részgráfja.

Láttuk, hogy minden G gráfnak van $D = (V, \vec{E})$ közel-Euler irányítása. Ebben minden v pontra $\varrho_D(v) \geq \lfloor d_G(v)/2 \rfloor$ és így az alábbi eredményből következik a 2.2.12 tétel.

TÉTEL 2.2.13 *Ha egy G gráfnak van olyan $D = (V, \vec{E})$ irányítása, amelyben minden v pontra $\varrho_D(v) \geq |F(v)|$, akkor G-nek létezik F-elkerülő részgráfja.*

Biz. Élszám szerinti indukció. Egy $e \in E$ élre jelölje $\vec{e}$ a megfelelő irányított élt D-ben. Ha 0 semelyik csúcsban sem tiltott fokszám, akkor a $(V, \emptyset)$ élmentes részgráfja G-nek F-elkerülő. Tegyük fel, hogy $0 \in F(t)$ valamely t csúcsra. Ekkor $\varrho_D(t) \geq |F(t)| \geq 1$ és ezért van olyan $e = st$ él G-ben, amelyre $\vec{e}$ t felé van irányítva.

Legyen $G^- := G - e$ és $D^- := D - \vec{e}$. Definiáljuk F^--t a következőképp. Legyen $F^-(t) := \{i - 1 : i \in F(t) \setminus \{0\}\}$, $F^-(s) := \{i - 1 : i \in F(s) \setminus \{0\}\}$, végül $z \in V - \{s, t\}$ esetén legyen $F^-(z) := F(z)$. Mivel $|F^-(t)| = |F(t)| - 1$, így $\varrho_{D^-}(v) \geq |F^-(v)|$ fennáll minden v csúcsra. Indukció miatt G^--nek létezik egy G'' F^--elkerülő részgráfja. Az F^- konstrukciójából adódóan G-nek a $G' := G'' + e$ részgráfja F-elkerülő. •

A 2.2.7 tétel (i) részét a 2.2.13 tétellel kombinálva kapjuk a következőt.

TÉTEL 2.2.14 *Ha egy G irányítatlan gráfban $e_G(X) \geq \sum[|F(v)| : v \in X]$ minden $X \subseteq V$ részhalmazra fennáll, akkor G-nek létezik F-elkerülő részgráfja.* •

2007. május 6.file:algbiz2

2.3 Algoritmikus bizonyítások III: helyi javítások

A javító utakat használó megfontolások hasznos bizonyítási (és algoritmikus) eszköznek bizonyultak, de hátrányuk, hogy egy lépés viszonylag nagymérvű változtatással jár: a Kőnig tétel bizonyításában egy teljes alternáló út mentén történő cserével, vagy a 2.2.7 irányítási tételben egy egész irányított út egyszerre való átirányításával. A mohó eljárásoknak ehhez képest sokkal jobbak voltak, mert ott valamilyen elv szerint haladtunk a cél felé, javítgatás már nem történt. A kettő között el lehet képzelni egy olyan eljárást, amelyben van ugyan javítgatás, de ezek mindegyike csupán lokális, kis léptékű változtatás. Például az irányítási feladatban egyszerre mindig csak egy él irányítását fordítjuk meg, vagy a párosítási feladatban egyszerre csak egy párosításbeli élt cserélünk fel egy kinti élre. Az alábbiakban egy ilyen jellegű megközelítést adunk meg. Először új bizonyítást adunk a 2.2.7 tétel első részének nemtriviális irányára.

2.3.1 Irányítások

A tétel a következő volt.

TÉTEL 2.3.1 *A $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak létezik olyan irányítása, amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$e(X) \geq f(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re}, \tag{2.11}$$

ahol $e(X)$ jelöli azon élek számát, melyeknek legalább az egyik végpontja X-ben van.

Biz. (Elegendőség) Az eljárás egy tetszőleges irányításból indul. Végig fenntartunk egy $h : V \to \{0, 1, \ldots, n = |V|\}$ szintfüggvényt, amelyről azt követeljük meg, hogy minden túltelített z pont ($\varrho(z) > f(z)$) a 0 szinten van, továbbá, hogy minden uv irányított élre $h(v) \geq h(u) - 1$, azaz minden él legfeljebb egy szintet lép lefelé. Kezdetben $h \equiv 0$.

Készen vagyunk, ha nincs hiányos csúcs, azaz ha minden csúcsra $\varrho(v) \geq f(v)$, így tegyük fel, hogy van hiányos csúcs.

Akkor is készen vagyunk, ha van olyan üres szint amely, felett van hiányos csúcs. Ekkor ugyanis az üres szint felett lévő csúcsok Z halmazából nem léphet ki él (hiszen egy ilyen él legalább két szintet lépne lefelé) és így $e(Z) = \sum_{v \in Z} \varrho(v) < \sum_{v \in Z} f(v) = f(Z)$ azaz Z megsérti a feltételt. Speciálisan, ha van hiányos csúcs az n-dik szinten, akkor biztosan van üres szint.

Az eljárás egy n-dik szint alatti u hiányos csúcsnál kétféle lépést használhat. Amennyiben létezik lefelé menő uv él, amelyre tehát $h(v) = h(u) - 1$, úgy ennek fordítsuk meg az irányítását. Ha nem létezik ilyen él, úgy növeljük meg u szintjét eggyel. Mindkét művelet fenntartja a h-ra előírt tulajdonságokat.

Mivel mindig lefelé menő él irányítását fordítjuk meg, így egy uv él két megfordítása között a $h(u) + h(v)$ összeg legalább kettővel nő. Továbbá minden pont szintje legfeljebb n, a $h(u) + h(v)$ összeg legfeljebb $2n$, és ezért minden élt legfeljebb $n = 2n/2$-ször fordítunk meg. Emiatt élfordításból összesen legfeljebb mn lehet, míg szintemelésből legfeljebb n^2, vagyis az eljárás legfeljebb $2mn$ lépés után véget ér. •

2.3.2 Párosítások

Lássunk most egy hasonló elven működő bizonyítást Kőnig tételére.

TÉTEL 2.3.2 (Kőnig) *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a maximális elemszámú párosítás ν elemszáma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális τ számával.*

Biz. Mivel bármely M párosítás éleinek lefogásához kell legalább $|M|$ pont, így a $\nu = \tau$ egyenlőség igazolásához kell találnunk egy M párosítást és egy L lefogó pontrendszert, melyekre $|M| = |L|$. Feltehetjük, hogy nem létezik izolált pont. Élek egy M részhalmazát **félpárosítás**nak nevezzük, ha S-ben minden pont foka pontosan 1, azaz $s \in S$-re $d_M(s) = 1$ (a T-beli fokokra nincs megkötés).

Az eljárás során adott egy $h : T \to \{0, 1, \ldots, n = |T|\}$ szintfüggvény, amelyre

$$\text{minden } M \text{ által fedetlen pont szintje } 0 \tag{2.12}$$

és

$$u \in S, uv \in M, uz \in E - M \text{ esetén } h(z) \geq h(v) - 1. \tag{2.13}$$

Nevezzünk egy T-beli t csúcsot **aktív**nak, ha $d_M(t) \geq 2$. Amíg létezik, tekintsünk egy aktív t pontot az n-dik szint alatt. Ha ehhez vannak $e = st \in M$ és $f = sz \in E - M$ élek, melyekre $h(z) = h(t) - 1$, akkor legyen $M := M - e + f$. Amennyiben ilyen élek nem léteznek, emeljük meg eggyel t szintjét. Mindkét művelet megőrzi a feltételeket.

Az eljárás vagy akkor ér véget, ha nincs több aktív pont, azaz M párosítás, mert ekkor M bizonyosan maximális elemszámú, hiszen $L := S$ lefogja a gráf összes élét. Vagy pedig akkor, ha minden aktív pont a legfelső, n-dik szinten van. Ekkor ugyanis létezik üres szint. Jelölje Z az ennél magasabb szintű pontok halmazát, és legyen Z' azon S-beli pontok halmaza, melyeknek M-beli szomszédja Z-ben van. Ekkor (2.13) feltétel miatt Z'-ből kizárólag Z-be megy él, azaz $L := Z \cup (S - Z')$ az összes élt lefogja. Másrészt minden Z-beli és minden $S - Z'$-beli pontnál kiválasztva egy M-beli élt kapunk egy $|L|$ elemszámú párosítást kapunk.

Az eljárás során a fedetlen pontok száma sohasem nő, és így legfeljebb n-szer csökken. Ha mindig a legalacsonyabb szintű aktív ponttal dolgozunk, akkor legfeljebb n élcsere után vagy a fedetlen pontok száma csökken vagy szintemelés következik, így legfeljebb n^3 lépés után az eljárás véget ér. •

2007. május 6.file:algbiz3

2.4 Szétszedés pontos halmaz mentén

A 2.2.1 részben a Kőnig tételből már levezettük Hall tételét. Most lássunk egy nem konstruktív, direkt bizonyítást.

TÉTEL 2.4.1 (Hall) *Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t fedő párosítás, ha A minden X részhalmazára teljesül az ún. Hall féle feltétel, azaz*

$$|\Gamma(X)| \geq |X|, \tag{2.14}$$

ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon B-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.

Biz. [Halmos és Vaughan] A feltétel szükségessége kézenfekvő. Az elegendőséghez először tegyük fel, hogy az A minden valódi nemüres részhalmazára a (2.14) feltétel szigorú egyenlőtlenséggel teljesül. Ekkor a gráf tetszőleges uv élére ($u \in A$), az u és v kihagyásával keletkező G' gráfban még mindig teljesül a Hall-féle feltétel, így indukció miatt G'-ben létezik $A - u$-t fedő párosítás, amit az uv éllel kiegészítve A-t fedő párosítást kapunk.

Tegyük most fel, hogy létezik A-nak egy A' valódi nemüres részhalmaza, melyre $|\Gamma(A')| = |A'|$. Ekkor egyrészt az $A' \cup \Gamma(A')$ által feszített G' részgráfban teljesül a Hall feltétel, hiszen egy $X \subseteq A'$ halmaz G'-beli szomszédai ugyanazok, mint a G-beli szomszédai. Emiatt indukció folytán létezik G'-ben A'-t fedő M' párosítás. Másrészt állítjuk, hogy az $A' \cup \Gamma(A')$ törlésével keletkező G'' gráfban is az $A'' := A - A'$ halmaz X részhalmazaira teljesül a Hall feltétel, mert $\Gamma''(X) = \Gamma(A' \cup X) - \Gamma(A')$, amiből a Hall feltételt $A' \cup X$-re alkalmazva kapjuk, hogy $|\Gamma''(X)| = |\Gamma(A' \cup X)| - |\Gamma(A')| \geq |A' \cup X| + |A'| = |X|$. •

Következmény 2.4.2 (Kőnig élszínezési tétele) *$G = (A, B; E)$ reguláris páros gráf kromatikus indexe a maximális $\Delta \geq 1$ fokszám. Másszóval, G élhalmaza felbomlik Δ teljes párosításra.*

Biz. Δ szerinti teljes indukciót használva elegendő azt igazolnunk, hogy G-nek létezik teljes párosítása. Az A egy X részhalmazára tekintsük az X és $\Gamma(X)$ által feszített $G' = (X, \Gamma(X); E')$ részgráfot. Kihasználva G regularitását, kapjuk, hogy $\Delta|X| = |E'| \leq \Delta|\Gamma(X)|$, és így a Hall tétel alapján létezik teljes párosítás. •

Azt mondjuk, hogy egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfnak van **reprezentáns rendszere**, ha minden hiperéléhez hozzá lehet rendelni egy elemét úgy, hogy különböző hiperélhez különböző elemet rendelünk.

TÉTEL 2.4.3 *Egy hipergráfnak akkor és csak akkor van reprezentáns rendszere, ha bármely j élének egyesítése legalább j elemű.*

Biz. Alkalmazzuk a Hall tételt a hipergráfhoz tartozó páros gráfra. •

A pontos halmaz mentén történő szétszedés módszere olyan esetekben használható, amikor bizonyos feltételek fennállása esetén valamely konfiguráció létezését akarjuk igazolni. A lényege abban áll, hogy vagy valami egyszerű redukciót végre tudunk hajtani a feltételek megsértése nélkül és ekkor indukcióval készen vagyunk, vagy pedig egy „kritikus" (másszóval pontos) halmaz mentén két (esetleg több) kisebb részre bontjuk a feladatot, és az azokra induktívan nyert megoldások összeragasztásával az eredeti feladat megoldását kapjuk. Gyakran ez a megközelítés a teljes bizonyításhoz elegendő, de ha nem, akkor is jelentősen egyszerűsítést tesz lehetővé. Lássuk a módszer néhány további alkalmazását.

TÉTEL 2.4.4 (Dilworth) *Egy P részbenrendezett halmazban a fedő láncok minimális száma egyenlő a maximális antilánc méretével. Ekvivalensen, P akkor és csak akkor fedhető le k lánccal, ha nincs k-nál nagyobb antilánc.*

Biz. [Bollobás] Mivel láncnak és antiláncnak legfeljebb egy közös eleme lehet, a feltétel szükséges. Az elegendőség igazolásához jelölje k a maximális antilánc méretét. A tétel triviális, ha nincs két összehasonlítható elem, így tegyük fel nem ez a helyzet.

Legyen u egy minimális elem és v egy u-nál nagyobb maximális. Amennyiben az u és v kihagyása után már nincs k elemű antilánc, úgy indukcióval a maradék halmaz $k - 1$ lánccal lefedhető. Ehhez hozzávéve az $\{u, v\}$ (kételemű) láncot, az egész P-nek egy k-láncból álló fedését kapjuk.

Feltehetjük tehát, hogy van egy k-elemű A antilánc, amely sem u-t, sem v-t nem tartalmazza. Jelölje A^+ azon x elemek halmazát, melyekre $x > a$ valamely $a \in A$ elemre. Mivel A antilánc, $A \cap A^+ = \emptyset$, továbbá $A \cup A^+$-ban a minimális elemek halmaza éppen A. A v maximalitása miatt $v \in A^+$, míg u minimalitása miatt $u \notin A \cup A^+$. Indukcióval kapjuk, hogy $A \cup A^+$ fedhető k lánccal.

Analóg módon definiálva A^--t, indukcióval kapjuk, hogy $A \cup A^-$-ban a maximális elemek halmaza A és $A \cup A^-$ is fedhető k lánccal.

Miután A antilánc, kapjuk, hogy $A^+ \cap A^- = \emptyset$ és a két k tagú lánc-család a k elemű A mentén összeilleszthető P-nek egy k láncból álló fedésévé. •

TÉTEL 2.4.5 *Ha egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban minden pont foka pozitív, akkor a pontokat fedő élek minimális száma egyenlő G független pontjainak maximális számával.*

Biz. Tekintsük azt a részbenrendezést $S \cup T$-n, amelyben egy $s \in S$ elem pontosan akkor nagyobb egy $t \in T$ elemnél, ha $st \in E$. Alkalmazzuk a Dilworth tételt, és figyeljük meg, hogy minden egyelemű lánc kiterjeszthető kételeművé, hiszen G-ben minden pontnak van szomszédja. •

Az 1.2.1 Gallai lemmából rögtön Kőnignek a bevezetőben már algoritmikusan bebizonyított 2.2.1 tétele.

Feladat 2.4.1 *Tetszőleges gráfban egy M párosítás akkor és csak akkor maximális elemszámú, ha nincs olyan út, amely két fedetlen pontot köt össze és minden második éle M-beli.*

Feladat 2.4.2 *Tetszőleges gráfban ha egy halmazt fed párosítás, akkor fed maximális elemszámú párosítás is.*

TÉTEL 2.4.6 (Irányított él-Menger) *Egy irányított gráfban akkor és csak akkor vezet s-ből t-be $k \geq 1$ élidegen út, ha minden S $s\bar{t}$-halmaz kifoka legalább k.*

Biz. A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Amennyiben létezik s-ből t-be egyélű vagy kétélű P út, úgy ennek éleit kihagyva minden $s\bar{t}$-halmaz kifoka pontosan eggyel csökken. A keletkező D'-ben indukcióval létezik $k-1$ élidegen út, melyekhez P-t hozzávéve megkapjuk az eredeti digráf k élidegen útját.

Létezik tehát $e = uv$ olyan él, amely sem s-sel, sem t-vel nem szomszédos. Ha e-t törölve továbbra is minden $s\bar{t}$-halmaz befoka legalább k, akkor indukcióval készen vagyunk, így feltehetjük, hogy e kilép egy S pontosan k kifokú $s\bar{t}$-halmazból.

Az S összehúzásával keletkező D' digráfban indukció miatt van k élidegen út az S-ből keletkező s' pontból t-be. Analóg, D-ből a $T := V - S$ összehúzásával keletkező D'' digráfban indukció miatt létezik s-ből kiinduló k élidegen út a T-ből keletkező t'-be. Miután D-ben az S-ből pontosan k él megy ki, ez a két (k útból álló) útrendszer összeilleszthető, és így D-ben kapunk k élidegen utat s-ből t-be. •

TÉTEL 2.4.7 (Irányítatlan él-Menger) *Egy irányítatlan gráfban akkor és csak akkor létezik s és t között $k \geq 1$ élidegen út, ha minden S $s\bar{t}$-halmaz foka legalább k.*

Az irányítatlan él-Menger tétel bizonyítása teljesen analóg a fenti irányított bizonyítással.

Gyakorlat 2.4.3 *Mind az irányított, mind az irányítatlan esetben adott $S, T \subseteq V$ diszjunkt részhalmazokra az élidegen S-ből T-be vezető utak maximális $\lambda(S, T)$ egyenlő az X-be lépő élek számának minimumával az összes $T \subseteq X \subseteq V - S$ részhalmazra.*

Feladat 2.4.4 *Igazoljuk, hogy egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf éleinek akkor és csak akkor létezik olyan irányítása, amelyben minden v pont befoka egy előírt $m(v)$ egész, ha $m(V) = |E|$ és $m(X) \geq i(X)$ minden $X \subseteq V$-re, ahol $i(X)$ az X által feszített élek számát jelöli.*

Az eddigi tételek egy szinten vannak abban az értelemben, hogy egyszerű elemi konstrukciók segítségével egymásra visszavezethetők. Most viszont az előbbieknél mélyebb tétel következik.

TÉTEL 2.4.8 (Tutte) *Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha teljesül a Tutte-féle feltétel, azaz minden $X \subseteq V$ halmazra az X eltörlésével keletkező páratlan pontszámú* (röviden páratlan) *komponensek $q(X)$ számára $q(X) \leq |X|$.*

Biz. Szükségesség. Ha M egy teljes párosítás és $C \subset V$ a csúcsoknak egy páratlan részhalmaza, akkor C-ből lép ki M-beli él. Ezért $X \subseteq V$-re a $G - X$-ben lévő $q(X)$ darab páratlan komponens mindegyikéből lép ki M-beli él, amelyek másik végpontja szükségképpen X-ben van. Így a $q(X) \leq |X|$ feltétel valóban szükséges.

Elegendőség. Pontszám szerinti indukcióval dolgozunk. A 0 pontú gráfra a tétel semmitmondó, ezért feltesszük, hogy $|V| \geq 1$. Az $X = \emptyset$ halmazra a Tutte feltétel azt adja, hogy G minden komponense páros, és emiatt $|V|$ páros.

Nevezzünk egy $X \subseteq V$ halmazt **pontos**nak, ha $q(X) = |X|$. Egy egyelemű $X := \{v\}$ halmaz bizonyosan pontos, hiszen egyrészt $|V - v|$ páratlansága miatt $q(\{v\}) \geq 1 = |\{v\}|$, másrészt a Tutte feltétel miatt $q(\{v\}) \leq |\{v\}|$, vagyis valóban $q(\{v\}) = |\{v\}|$. Legyen X_0 egy maximális elemszámú pontos halmaz.

Állítás 2.4.9 *$G - X_0$ minden komponense páratlan.*

Biz. Indirekt, legyen K a $G - X_0$ egy páros komponense. Legyen $v \in K$ tetszőleges elem és $X' := X_0 + v$. Mivel K páros elemszámú, így $q(X') \geq q(X_0) + 1$. Ezt, az X_0 pontosságát valamint a Tutte feltételt X'-re használva kapjuk, hogy $q(X') \leq |X'| = |X_0| + 1 = q(X_0) + 1 \leq q(X')$. Emiatt végig egyenlőség áll, speciálisan $q(X') = |X'|$, vagyis X' is pontos, ellentmondásban X_0 maximális választásával. •

Nevezzünk egy összefüggő gráfot **faktorkritikus**nak, ha bármely pontját kihagyva létezik teljes párosítása.

Állítás 2.4.10 *$G - X_0$ minden C komponense faktorkritikus.*

Biz. A C halmaz egy v elemére legyen $V' := C - v$ és $G' = (V', E')$ jelölje a G gráfnak a V' által feszített részgráfját. $X \subseteq V'$-re jelölje $q'(X)$ a $G' - X$ páratlan komponenseinek számát.

Tegyük fel indirekt, hogy G'-nek nincs teljes párosítása. Indukció alapján létezik egy $X_0' \subseteq V'$ halmaz, amelyre $q'(X_0') \geq |X_0'| + 1$, és ráadásul itt nem állhat egyenlőség hiszen $|V'|$ párossága miatt az $|X_0'|$ és $q'(X_0')$ ugyanolyan paritású.

Ekkor az $X_1 := X_0 \cup X_0' + v$ halmazra egyrészt $q(X_1) = [q(X_0) - 1] + q'(X_0') \geq [|X_0| - 1] + |X_0'| + 2 = |X_1|$, másrészt a Tutte feltétel miatt $q(X_1) \leq |X_1|$, vagyis X_1 pontos halmaz, ellentmondásban X_0 maximális választásával. •

Töröljük ki az X_0 által feszített éleket és a $G - X_0$ komponenseink mindegyikét húzzuk össze egy-egy pontra. A keletkező páros gráfot jelölje $G_0 = (X_0, Y_0; E_0)$, ahol Y_0 az összehúzott pontok halmaza (és ezért $|X_0| = q(X_0) = |Y_0|$).

Állítás 2.4.11 *G_0-ban van teljes párosítás.*

Biz. A Hall tétel alapján elég azt kimutatni, hogy Y_0 részhalmazaira teljesül a Hall feltétel. Tegyük fel indirekt, hogy Y_0-ban létezik j pont, amelyre az X_0-beli szomszédok X' halmaza j-nél kevesebb pontból áll. Ez azt jelenti, hogy G-ből az X' kihagyásával keletkező komponensek között ott lesz a j pontnak G-ben megfelelő j páratlan komponens, azaz $q(X') \geq j > |X'|$, ellentmondásban a Tutte feltétellel. •

A G_0 egy teljes párosítása G-ben egy olyan M' párosításnak felel meg, amely minden X_0-beli pontot egy $G - X_0$-beli páratlan komponenssel köt össze és ezek mindegyikéből egyetlen pontot fed. Mivel a páratlan komponensek mind faktorkritikusak az M' párosítás kiegészíthető G teljes párosításává. • •

Még a XIX. században tűzték ki a négyszín sejtést, amely azt állítja, hogy minden síkgráfban lehetséges a tartományokat négy színnel színezni úgy, hogy szomszédos tartományok színe különbözzék (és amelyre mindmáig csak számítógépes bizonyítás ismeretes). Nem túl nehéz igazolni, hogy a négyszín sejtés ekvivalens azzal, hogy egy 2-élösszefüggő 3-reguláris síkgráf éleit meg lehet színezni három színnel úgy, hogy azonos színű élek végpontjai különbözőek legyenek. Másként fogalmazva, a gráf élhalmaza felbontható három teljes párosításra. Petersen példával megmutatta, hogy a feltételek közül a síkbeliség nem hagyható ki. Azt azonban sikerült belátnia (jóval a Tutte tétel előtt), hogy egyetlen teljes párosítás létezéséhez a fenti feltételek már tetszőleges gráfban elegendőek.

Következmény 2.4.12 (Petersen) *Minden 2-élösszefüggő 3-reguláris $G = (V, E)$ gráfban van teljes párosítás.*

Biz. Tutte tétele alapján elég a Tutte feltétel fennállását igazolnunk. Figyeljük meg először, hogy minden C páratlan halmazból legalább 3 él lép ki, hiszen a 3-regularitás miatt páratlan sok, míg a 2-élösszefüggőség miatt legalább kettő.

Legyen $X \subseteq V$ a pontok egy részhalmaza. Tekintsük a gráf azon éleinek F részhalmazát, melyek X és az X elhagyásával keletkező $q(X)$ páratlan komponens között vezetnek. Ekkor F egyrészt e páratlan komponensekből kilépő élek halmaza és így $|F| \geq 3q(X)$, másrészt F minden elemének egyik végpontja X-ben van és így 3-regularitás miatt $|F| \leq 3|X|$, amiből $q(X) \leq |X|$, tehát a Tutte feltétel tényleg teljesül. •

file: pontos, 2007. május 6.

2.5 Elemi konstrukciók

Ebben a részben bemutatunk néhány egyszerű fogást („elemi konstrukciót”), melyek segítségével meglévő tételeket átalakíthatunk vagy általánosíthatunk. Először mutassuk meg, hogy a Hall tételből miképp vezethető le annak általánosabb, deficites alakja.

TÉTEL 2.5.1 (Ore) *Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban egy párosítás által fedetlen A-beli pontok minimális száma egyenlő az A-beli X részhalmazok $h(X) := |X| - |\Gamma(X)|$ hiányának μ maximumával.*

Biz. Egy párosítás az X elemei közül legfeljebb $|\Gamma(X)|$-t tud fedni, így legalább $h(X)$ pont fedetlen marad. A fordított irányhoz azt kell kimutatnuk, hogy létezik egy olyan párosítás, amely legfeljebb μ A-beli pontot nem fed. Ennek érdekében egészítsük ki a B halmazt egy μ pontból álló új halmazzal, és ennek minden elemét kössük össze A minden elemével. Az így nyert G' gráfban minden $X \subseteq A$ halmaznak μ új szomszédja van, és ezért G'-re már teljesül a Hall féle feltétel. Ebből a Hall tétel alapján adódik, hogy G'-ben létezik egy M' párosítás, amely fedi A-t. M'-nek legfeljebb μ új éle van, amiket kihagyva G-nek egy olyan párosítását kapjuk, melynek legalább $|A| - \mu$ éle van, azaz amely A-nak legfeljebb μ élét nem fedi. •

Gyakorlat 2.5.1 *Mutassuk meg, hogy Kőnig és Ore tételei ekvivalensek.*

Ugyanez a megközelítés használható a Tutte tétel esetén is.

TÉTEL 2.5.2 (Berge-Tutte formula) *Egy $G = (V, E)$ gráfban egy párosítás által fedetlen pontok minimális száma egyenlő az $X \subseteq V$ részhalmazok $q(X) - |X|$ hiányának μ maximumával. Ekvivalens alakban, a független élek maximális ν száma, másszóval a maximális párosítás elemszáma egyenlő a*

$$\min_{X \subseteq V} \{|V| - (q(X) - |X|)\}/2 \tag{2.15}$$

értékkel.

Biz. Az X elhagyásával $q(X)$ páratlan komponens keletkezik. Ha egy párosítás e páratlan komponensek valamelyikének minden pontját fedi, akkor tartalmaz az X és a komponens között vezető élt. Emiatt legfeljebb $|X|$ teljesen fedett páratlan komponens létezhet, vagyis legalább $q(X) - |X|$ páratlan komponensnek van fedetlen pontja, azaz tetszőleges párosítás legalább $q(X) - |X|$ pontot hagy fedetlenül és így legalább μ-t.

A megfordításhoz azt kell kimutatnuk, hogy létezik olyan párosítás, amely legfeljebb μ pontot nem fed. Ennek érdekében egészítsük ki V-t egy μ új pontból álló U halmazzal, és ennek minden elemét kössük össze egymással és V minden elemével. Az így kapott G' gráfban ha egy X' halmaz megsérti a Tutte féle feltételt, akkor X' nem lehet üres, hiszen $q(X) - |X|$ és $|V|$ mindig megegyező paritású és ezért $\mu + |V|$ páros. Emiatt X'-nek tartalmaznia kell mind a μ új pontot (hiszen azok minden más ponttal össze vannak kötve). Legyen $X := X' - U$. Ekkor $G' - X' = G - X$, és mivel $G' - X'$ az $|X'|$-nél több páratlan komponenst tartalmaz, X hiánya nagyobb, mint $\mu = |U|$, ellentétben μ definíciójával.

A Tutte tétel alapján adódik, hogy G'-ben létezik egy M' teljes párosítás. M'-nek legfeljebb μ új éle van, amiket kihagyva G-nek egy olyan párosítását kapjuk, amely legfeljebb μ pontot hagy fedetlenül. •

2.5.1 Pontszétnyitás

Kézenfekvő elemi művelet a pontszétnyitás, amelynél egy irányított gráf pontjait helyettesítjük kettővel szétosztva közöttük az eredeti pontba be- és kimenő éleket. Több variáns is lehet aszerint, hogy a szétnyitott pont két példánya között vezetünk-e élt vagy nem, megtartjuk-e az élek irányítását vagy nem.

TÉTEL 2.5.3 (Menger, irányított pont változat) *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban, amelyben nincs él s-ből t-be, akkor és csak akkor létezik s-ből t-be k belsőleg diszjunkt út, ha az st utakat nem lehet k-nál kevesebb $V - \{s, t\}$-beli ponttal lefogni.*

Biz. [Az él-Mengerből] A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőség igazolásához készítsünk egy új D' digráfot. Minden u pontot helyettesítsünk két új csúccsal, melyeket jelöljön u' és u'', de töröljük az s'' és t' csúcsokat. Minden $uv \in A$ élre vegyük D'-be az $u'v''$ élnek $k + 1$ párhuzamos példányát, továbbá minden $u \in V - \{s, t\}$ csúcsra tegyük D'-be az $u''u'$ élt. Amennyiben D'-ben van s'-ből t''-be k élidegen út, úgy a konstrukció miatt ezek k pontidegen útnak felelnek meg az eredeti D-ben. Ha viszont D'-ben nincs k élidegen út, akkor az irányított él-Menger tétel szerint (2.4.6) létezik $k - 1$ él, amely lefogja az összes s'-ből t''-be vezető utat. Ismét csak a konstrukció miatt ezen élek szükségképpen $u''u'$ típusúak, és így $k - 1$ $V - \{s, t\}$-beli csúcsnak felelnek meg, melyek lefogják az összes s-ből t-be vezető utat, ellentmondásban a tétel feltevésével. •

Gyakorlat 2.5.2 *Vezessük le a Menger tétel (eredeti) irányítatlan pont változatát.*

TÉTEL 2.5.4 (Menger, irányítatlan pont változat) *Egy $G = (V, E)$ irányítlan gráfban, amelyben nincs él s és t között, akkor és csak akkor létezik s-ből t-be k belsőleg diszjunkt út, ha az st utakat nem lehet k-nál kevesebb $V - \{s, t\}$-beli ponttal lefogni.*

Gyakorlat 2.5.3 *Vezessük le Hall tételét az irányítatlan pont-Menger tételből.*

A Menger tétel egyéb ekvivalens alakokban is megfogalmazható. Például:

TÉTEL 2.5.5 *Egy $D = (V, A)$ digráfban legyen S és T a csúcsoknak két k elemű diszjunkt részhalmaza. Akkor és csak akkor létezik S-ből T-be k diszjunkt út, ha az S-ből T-be vezető utakat nem lehet k-nál kevesebb ponttal lefogni.*

Biz. A tétel rögtön következik a 2.5.3 tételből: Adjunk D-hez egy új s pontot és minden $v \in S$-re egy sv élt, továbbá egy új t pontot és minden $v \in T$-re egy vt-élt. Most azonban egy direkt bizonyítást is bemutatunk, amely a Hall tételt használja.

Készítsünk egy $G = (A', B''; E)$ páros gráfot a következőképpen. Minden u pontot helyettesítsünk két új csúccsal, melyeket jelöljön u' és u'', de S minden s elemére töröljük az s'' csúcsokat és T minden t elemére töröljük a t' csúcsokat. Az egy vesszős pontok halmazát jelölje A', a kétvesszősökét B''. Minden $uv \in A$ élre vegyük G-be az $u'v''$ irányítatlan élt, továbbá minden $u \in V - S - T$ csúcsra tegyük G-be az $u''u'$ élt.

Amennyiben G-ben van M teljes párosítás, akkor ez meghatároz k diszjunkt utat S-ből T-be. Ugyanis bármely $s \in S$-beli pontra legyen $s'u_1'' \in M, u_1'u_2'' \in M, \ldots, u_j't'' \in M$, ekkor $s, u_1, u_2, \ldots, u_j, t$ egy D-beli irányított út, és ezek az utak szükségképpen diszjunktak. Ha viszont nincs teljes párosítás G-ben, úgy a Hall tétel szerint létezik egy $X' \subseteq A'$ halmaz, melynek $|X'|$-nél kevesebb szomszédja van. Legyen $Y' := S' - X'$ és $Z'' := \Gamma(X') - (X - S)''$. Ekkor $|\Gamma(X')| < |X'|$ azt jelenti, hogy $|Y'| + |Z''| < k$. A konstrukció miatt $Y \cup Z$ D-beli halmaz lefogja az összes S-ből T-be vezető utat, ellentmondásban a feltevéssel. •

Feladat 2.5.4 *Vezessük le a* 2.5.3 *tételt a* 2.5.5 *tételből.*

Az előbbihez hasonló pontszétnyitásos konstrukcióval levezethetjük Dilworth 2.4.4 tételét is.

TÉTEL 2.5.6 (Dilworth) *A P-t fedő láncok minimális száma egyenlő a legnagyobb antilánc elemszámával, vagyis P szélességével.*

Biz. A max $\leq$ min egyenlőtlenség ismét nyilvánvaló. A fordított irány igazolásához készítsünk el egy $G = (X, Y; E)$ páros gráfot, melynek mindkét osztálya a P halmaznak felel meg, és valamely x_i elem y_j-vel akkor van összekötve, ha $p_i > p_j$. (x_i NINCS összekötve y_i-vel.) P elemszámát jelölje n.

Lemma 2.5.7 *G tetszőleges M párosításának megfelel P-nek egy $n - |M|$ láncból álló felbontása.*

Biz. Tekintsük a B halmaz M által fedetlen pontjait. Ezek száma $n - |M|$. Legyen x_i olyan pont, amelyet M nem fed. Mindegyik ilyen x_i elemhez megkonstruálunk egy C_i láncot, a következőképpen. Ha y_i fedetlen, akkor C_i álljon az egyetlen p_i elemből. Ha y_i-t fedi valamely M-beli x_jy_i él, akkor $p_j > p_i$, és legyen p_j a lánc következő eleme. Ha y_j-t fedi valamely M-beli x_ky_j él, akkor legyen p_k a lánc következő eleme. Így folytatva, a láncot addig növeljük, amig a lánchoz utolsónak vett p_m elemhez tartozó y_m csúcsot már nem fedi M-beli él.

Íly módon az M által nem fedett $n - |M|$ darab X-beli csúcs mindegyikéhez definiáltunk egy láncot P-ben. A lemma következik abból, hogy az így kapott láncok páronként diszjunktak és lefedik P-t. •

Lemma 2.5.8 *Legyen $L \subseteq X \cup Y$ a páros gráf éleinek minimális lefogása. Ekkor P-ben van olyan A antilánc, amelyre $|L| + |A| = n$.*

Biz. Először belátjuk, hogy ha $x_i \in L$, akkor $y_i \notin L$. Ha indirekt mindkét csúcs L-ben volna, akkor L minimalitása miatt a gráfnak létezne olyan x_iy_j illetve x_ky_i éle, melyekre $y_j, x_k \notin L$. Ekkor tehát $p_k > p_i > p_j$, amiből $p_k > p_j$, és így x_ky_j éle a gráfnak. Ezt az élt viszont nem fogja le L, amely ellentmondás azt bizonyítja, hogy valóban nem lehet x_i és y_i mindegyike L-ben.

Legyen most $A := \{p_i : x_i \notin L, y_i \notin L\}$. Rögtön látszik, hogy az A halmaz kielégíti a lemma követelményeit. •

A két lemmát felhasználva Dilworth tétele rögtön következik a Kőnig tételből, ami szerint egy páros gráfban a független élek maximális száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális számával. • •

Az irányított pont-Menger tételnek illetve a Dilworth tételnek a Hall illetve Kőnig tételre történő fenti visszavezetése egyúttal algoritmust is biztosít a szóbanforgó max és min értékek meghatározására, hiszen a Kőnig tételre adott javító utas bizonyítás konstruktív.

file: elemi, 2007. május 6.

2.6 Szub- és szupermoduláris függvények használata

A szubmoduláris függvények hatékony bizonyítási módszereket kínálnak. Ezt először Hall tételén szemléltetjük.

2.6.1 Hall tétel újra

TÉTEL 2.6.1 (Hall) *Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t fedő párosítás, ha A minden X részhalmazára*

$$|\Gamma(X)| \geq |X|, \tag{2.16}$$

ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon B-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.

Biz. (elegendőség) Nevezzünk egy $X \subseteq A$ halmazt pontosnak, ha $|\Gamma(X)| = |X|$, és a rövidség kedvéért jelöljük $|\Gamma(X)|$-t $\gamma(X)$-szel.

Lemma 2.6.2 *Két pontos halmaz metszete és uniója is pontos.*

Biz. Legyen X és Y pontos. A Hall-féle feltétel miatt $\gamma(X \cap Y) \geq |X \cap Y|$ és $\gamma(X \cup Y) \geq |X \cup Y|$. Így a γ szubmodularitása, valamint X és Y pontossága folytán $|X|+|Y| = \gamma(X)+\gamma(Y) \geq \gamma(X\cap Y)+\gamma(X\cup Y) \geq |X\cap Y|+|X\cup Y| = |X|+|Y|$. Emiatt minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, speciálisan $\gamma(X\cap Y) = |X\cap Y|$ és $\gamma(X \cup Y) = |X \cup Y|$. •

A lemma ismételt alkalmazásával következik, hogy egy z megadott pontot tartalmazó pontos halmazok $B(z)$ metszete is pontos.

A bizonyításra térve feltehető, hogy G minimális abban az értelemben, hogy bármely él elhagyása után már megsérül (2.16). Állítjuk, hogy A-ban minden pont első fokú. Tegyük fel ugyanis, hogy egy $z \in A$ csúcsból kiindul két él: $e = zu$ és $f = zv$ ($u \neq v$). Mivel az e kihagyása már elrontja (2.16)-t, így létezik egy z-t tartalmazó olyan X pontos halmaz, amelyben z az egyetlen u-val szomszédos pont. $B(z) \subseteq X$ miatt feltehető, hogy $X = B(z)$. Ugyanígy kapjuk, hogy $B(z)$-ben z az egyetlen v-vel szomszédos pont. Ekkor viszont $B(z)-z$-nek sem u, sem v nem szomszédja, és ezért $|B(z)| - 1 = |B(z) - z| \leq \gamma(B(z) - z) = \gamma(B(z)) - 2 = |B(z)| - 2$, ellentmondás.

Tehát valóban minden A-beli pont foka egy, és ekkor E maga egy A-t fedő párosítás, hiszen (2.16) miatt bármely két A-beli pontnak van két szomszédja. • •

Most megmutatjuk, hogy ugyanez a bizonyítási ötlet szinte változtatás nélkül használható Lovász 2.2.3 tételében az elegendőség igazolására.

TÉTEL 2.6.3 (Lovász) *A $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik olyan erdő, amelyben minden $s \in S$ pont foka 2, ha minden $X \subseteq S$ nemüres halmazra*

$$|\Gamma(X)| \geq |X| + 1. \tag{2.17}$$

Biz. Elegendőség. Az X és $\Gamma(X)$ által feszített részgráfban egy erdőnek egyrészt legfeljebb $|X| + |\Gamma(X)| - 1$ éle van, másrészt $2|X|$, amennyiben teljesíti, hogy S-ben minden pontjának foka kettő. A kettő összevetéséből (2.17) szükségessége adódik.

Használjuk ismét a $\gamma(X) := |\Gamma(X)|$ jelölést. Nevezzünk egy nemüres halmazt pontosnak, ha a (2.17)-t egyenlőséggel teljesíti, azaz $\gamma(X) = |X| + 1$.

Lemma 2.6.4 *Két pontos halmaz metszete és uniója is pontos, amennyiben a metszet nem üres.*

Biz. Legyen X és Y pontos. A (2.17) feltétel miatt $\gamma(X \cup Y) \geq |X \cup Y| + 1$ és $\gamma(X \cap Y) \geq |X \cap Y| + 2$ (itt használjuk, hogy $X\cap Y \neq \emptyset$). Így a γ szubmodularitása, valamint X és Y pontossága folytán $|X|+1+|Y|+1 = p(Y) = \gamma(X) + \gamma(Y) \geq \gamma(X \cap Y) + \gamma(X \cup Y) \geq |X \cap Y| + 1 + |X \cup Y| + 1 = |X| + 1 + |Y| + 1$. Emiatt minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, speciálisan $\gamma(X \cap Y) = |X \cap Y| + 1$ és $\gamma(X \cup Y) = |X \cup Y|$. •

A lemma ismételt alkamazásával következik, hogy egy megadott z pontot tartalmazó pontos halmazok $B(z)$ metszete is pontos.

A bizonyítására térve feltehető, hogy G minimális abban az értelemben, hogy bármely él elhagyása után (2.17) már megsérül. Állítjuk, hogy minden $s \in S$ pont foka kettő, azaz $\{s\}$ pontos. Ha ugyanis $d(s) > 2$, akkor $\{s\} \subset B(s)$. G minimalitása miatt az su_i élre ($i = 1, 2$) létezik egy olyan s-t tartalmazó pontos X_i halmaz, amelyben s az egyetlen u_i-val szomszédos pont. $B(s) \subseteq X_i$ miatt feltehető, hogy $X_i = B(s)$. Ekkor viszont $B(s) - s$-nek kettővel kevesebb szomszédja van, mint $B(s)$-nek, azaz $\gamma(B(s) - s) = \gamma(B(s)) - 2 = |B(s)| + 1 - 2 = |B(s) - s|$ vagyis $B(s) - s$ megsérti a (2.17) feltételt.

Tehát valóban minden $s \in S$ pont foka 2. Kimutatjuk, hogy G maga erdő. Ha ugyanis tartalmazna egy C kört, akkor ennek S-beli pontjai X halmazának csak $|X|$ darab szomszédja lenne. •

Nevezzünk egy hipergráfot erdő-reprezentálhatónak, vagy röviden **erdősnek**, ha minden hiperéléből kiválasztható két elem úgy, hogy a kiválasztott párok mint gráfélek erdőt alkotnak. Egy hipergráfról azt mondjuk, hogy erősen teljesíti a Hall feltételt, ha bármely $j > 0$ hiperélének az egyesítése legalább $j + 1$ elemű.

Következmény 2.6.5 *Egy hipergráf akkor és csak akkor erdős, ha erősen teljesíti a Hall feltételt.*

Biz. Alkalmazzuk Lovász tételét a hipergráfhoz tartozó páros gráfra. •

Következmény 2.6.6 *Ha egy hipergráf erősen teljesíti a Hall feltételt, akkor csúcsait két színnel lehet úgy színezni, hogy ne legyen egyszínű hiperél.*

Biz. Mivel a hipergráf erősen teljesíti a Hall feltételt, így erdős. Márpedig egy erdő pontjainak létezik két-színezése. •

2.6.2 Él-Menger újra

Hasonló trükkel lássuk be az irányított el-Menger tételt.

TÉTEL 2.6.7 (Irányított él-Menger) *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban akkor és csak akkor vezet s-ből t-be $k \geq 1$ élidegen út, ha minden S $s\bar{t}$-halmaz kifoka legalább k, azaz*

$$\delta(S) \geq k. \tag{2.18}$$

Biz. (elegendőség) Nevezzünk egy X $s\bar{t}$-halmaz pontosnak, ha $\delta(X) = k$.

Lemma 2.6.8 *Két pontos halmaz metszete és uniója is pontos.*

Biz. Legyen X és Y pontos. (2.18) miatt $\delta(X \cap Y) \geq k$ és $\delta(X \cup Y) \geq k$. Így a δ szubmodularitása, valamint X és Y pontossága folytán $|k| + |k| = \delta(X) + \delta(Y) \geq \delta(X \cap Y) + \delta(X \cup Y) \geq k + k$. Emiatt minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, speciálisan $\delta(X \cap Y) = k$ és $\delta(X \cup Y) = k$. •

A lemma ismételt alkamazásával következik, hogy egy megadott z pontot tartalmazó pontos halmazok $B(z)$ metszete is pontos.

A bizonyításra térve feltehető, hogy D minimális abban az értelemben, hogy bármely él elhagyása után már megsérül (2.18). Állítjuk, hogy minden $z \in V - \{s, t\}$ pont befoka és kifoka egyenlő. Valóban, ha mondjuk $\delta(z) > \varrho(z)$, akkor a minimalitás miatt bármely z-ből kilépő él kilép egy pontos halmazból és így kilép $B(z)$-ből is. De ekkor $\delta(B(z) - z) \leq \delta(B(z)) - \delta(z) + \varrho(z) < \delta(B(z)) = k$, ellentétben a (2.18) feltétellel. (A $\delta(z) < \varrho(z)$ eset analóg).

Tehát valóban minden $V - \{s, t\}$-beli pontra $\delta(z) = \varrho(z)$ és persze a minimalitás miatt $\varrho(s) = 0$. De egy ilyen digráfban létezik $\delta(s) \geq k$ élidegen út, hiszen s-ből kiindulva és csatlakozó élek mentén haladva $\delta(z) = \varrho(z)$ miatt megkapunk egy t-be vezető utat, és ezt $\delta(s)$-szer megismételhetjük, mert a maradékra $\delta'(z) = \varrho'(z)$ fennmarad. •

2.6.3 Irányítási lemma újra

Szubmodularitást használva belátjuk a 2.2.9 következményben megfogalmazott irányítási lemma nemtriviális irányát. Tegyük fel tehát, hogy adott $G = (V, E)$ gráfra és $m : V \to \mathbf{Z}$ függvényre $m(V) = |E|$ és teljesül (2.5), azaz $m(X) \leq e(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra fennáll, ahol $e(X)$ jelöli azon G-beli élek számát melyeknek legalább egyik végpontja X-ben van. Emlékezzünk rá, hogy az e függvény szubmoduláris. Nevezzünk egy halmazt pontosnak, ha $m(X) = e(X)$. Eszerint az üres halmaz pontos.

Állítás 2.6.9 *Lemma Két pontos halmaz metszete és uniója is pontos.*

Biz. $m(X) + m(Y) = e(X) + e(Y) \geq e(X \cap Y) + e(X \cup Y) \geq m(X \cap Y) + m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$, amiből az állítás következik. •

Az irányítási lemma bizonyításához $m(V)$ szerinti indukciót használunk. Az állítás semmitmondó, ha $m(V) = |E| = 0$, így feltehetjük, hogy van olyan s pont, melyre $m(s) > 0$. A lemma miatt létezik egy egyértelmű legbővebb s-t nem tartalmazó Z pontos halmaz. Van olyan $f = us$ él, melyre $u \notin Z$, mert különben $e(Z + s) = e(Z) = m(Z) = m(Z + s) - m(s) < m(Z + s)$, azaz $Z + s$ megsértené a feltételt. Hagyjuk ki az f élt és csökkentsük eggyel $m(s)$ értékét. A keletkező G' gráfra és m' befokszám előírásra teljesül a (2.5) feltétel, mert ha egy X halmaz megsértené, akkor X eredetileg egy pontos $u\bar{s}$-halmaz volt. De a Z választása folytán $u \in X \subseteq Z$, ellentétben az $u \notin Z$ feltevéssel.

Indukcióval G'-nek létezik m' befokú irányítása, amihez az us irányított élt hozzávéve a G-nek m befokú irányítását kapjuk. • •

2.6.4 Megengedett áramok: Hoffman tétel

Jelöljön $D = (V, A)$ egy irányított gráfot. Legyen $f : A \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g : A \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Valamely $x : A \to \mathbf{R}$ vektorra és $S \subseteq V$ részhalmazra legyen $\varrho_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in A, uv$ belép S-be) és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$. Az x vektort **áramnak** (circulation) nevezzük, ha teljesül rá a **megmaradási szabály** (conservation rule), azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. (Figyelem: az f-ben megengedünk $-\infty$ komponenst, ami persze csak annyit jelent, hogy az illető élen az áram értéke nincs alulról korlátozva. Ez azt is jelenti, hogy csak az olyan e élen rendelünk majd az $f(e) \leq x(e)$ egyenlőtlenséghez duál változót, amelyen az $f(e)$ korlát véges. Analóg módon a g-nek lehetnek $+\infty$ komponensei, de az x áram komponensei mindig valósak. Az f alsó korlátban $+\infty$-t, a g felső korlátban pedig $-\infty$-t nem engedünk meg. Néha előírjuk, hogy az f vagy a g komponensei egészértékűek legyenek; ebbe beleértjük a $\pm\infty$-t is.)

Gyakorlat 2.6.1 *(a) Igazoljuk, hogy x akkor és csak akkor áram, ha $\varrho_x(v) \leq \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. (b) Ha x áram, akkor $\varrho_x(Z) = \delta_x(Z)$ minden $Z \subseteq V$ részhalmazra is fennáll.*

Az x áramot **megengedett**nek (feasible) mondjuk, ha $f \leq x \leq g$.

TÉTEL 2.6.10 (Hoffman) *Akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{2.19}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (2.19) *fennáll, akkor létezik egészértékű megengedett áram is.*

Biz. A szükségesség igazolásához, tegyük fel, hogy x megengedett áram. Ekkor $\delta_g(X) - \varrho_f(X) \geq \delta_x(X) - \varrho_x(X) = 0$, amiből (2.19) következik.

Tekintsük a következő függvényt. $\beta(X) := \delta_g(X) - \varrho_f(X)$. Most (2.19) azzal ekvivalens, hogy β nemnegatív. Az $X, Y \subseteq V$ halmazokra jelölje $d_x(X, Y)$ az $x(e)$ értékek összegét mindazon e élekre, melyek $X - Y$ és $Y - X$ egy-egy pontját kötik össze (mindegy melyik irányban). A bizonyítás kulcsa a következő lemma.

Lemma 2.6.11 $\beta(X) + \beta(Y) = \beta(X \cap Y) + \beta(X \cup Y) + d_{g-f}(X, Y)$.

Biz. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy minden lehetséges él hozzájárulása a két oldalhoz ugyanannyi. •

A Hoffman tétel bizonyításához visszatérve nevezzünk egy e élt **pontos**nak, ha $f(e) = g(e)$. Nevezzünk csúcsok egy Z részhalmazát **pontos**nak, ha $\beta(Z) = 0$. Tegyük fel indirekt, hogy a D digráfra nem igaz a tétel, és válasszunk egy olyan ellenpéldát (adott D), amelyben a pontos élek és a pontos halmazok együttes száma maximális. Az nem lehet, hogy minden él pontos, mert akkor $x := f \ (= g)$, (2.19) miatt, megengedett áram volna. Legyen $a = st$ olyan él, amelyre $f(a) < g(a)$.

Állítjuk, hogy a belép egy pontos T halmazba. Valóban, ha nem lépne be, akkor $f(a)$-t meg tudnánk úgy növelni, hogy a módosított f' alsó korlátra továbbra is fennállna $f' \leq g$ és $\varrho_{f'}(Z) \leq \delta_g(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re, továbbá vagy az a él válna pontossá, vagy pedig egy olyan halmaz, amelybe az a él belép. Ez a lehetőség azonban ellentmondana a pontos élek és halmazok maximális együttes számára tett feltevésünknek. Tehát az a él valóban belép egy T pontos halmazba. Analóg módon látható, hogy a kilép egy S pontos halmazból.

Az a él létezése folytán tudjuk, hogy a $d_{g-f}(S, T)$ érték szigorúan pozitív. A lemmát és (2.19)-t alkalmazva kapjuk, hogy $0 + 0 = \beta(S) + \beta(T) > \beta(S \cap T) + \beta(S \cup T) \geq 0 + 0$, amely ellentmondás mutatja, hogy nem létezhet ellenpélda, és így a tétel következik. Ugyanez a gondolatmenet azt is mutatja, hogy ha f és g egészértékű, akkor van egészértékű megengedett áram is. • •

Megjegyezzük, hogy Hoffman tételéből közvetlenül kiolvasható a Maximális-folyam Minimális-vágás (MFMC: max-flow min-cut) tétel.

TÉTEL 2.6.12 (Ford és Fulkerson, MFMC) *Egy $D = (V, A)$ digráfban adott $g : A \to \mathbf{R}_+$ kapacitásra nézve a megengedett st-folyamok maximális nagysága egyenlő a $\min\{\delta_g(S) : s \in S \subseteq V - t\}$ minimummal. Amennyiben g egészértékű, létezik egészértékű maximális folyam is.* •

Feladat 2.6.2 *Vezessük le az MFMC tételből a Menger tétel alábbi ,,vegyes" változatát.*

TÉTEL 2.6.13 (Menger: vegyes pont-él változat) *Legyen $D = (V, A)$ digráf és legyenek k, l pozitív egészek. Akkor és csak akkor létezik D-ben kl élidegen út s-ből t-be úgy, hogy minden csúcson legfeljebb l darab út halad keresztül, ha bárhogy kihagyva egy $X \subseteq V - \{s, t\}$ halmazt $(0 \leq |X| \leq k - 1)$, a maradékban minden $s\bar{t}$-halmazból legalább $(k - |X|)l$ él lép ki.*

2.7 Konstruktív karakterizációk

Közismert és könnyű, hogy egy gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha egy pontból felépíthető új élek egymást követő hozzáadásával, ahol azt követeljük meg, hogy az új élnek legalább az egyik végpontja meglévő pont legyen. Nem sokkal nehezebb igazolni a 2-élösszefüggő gráfok úgynevezett fülfelbontási tételét:

TÉTEL 2.7.1 *Egy gráf akkor és csak akkor 2-élösszefüggő, ha előállítható egyetlen pontból kiindulva két meglévő pont közötti új él hozzáadásával és egy meglévő él új ponttal történő felosztásával.* (A két műveletet egybe is foglalhatjuk: adjunk a gráfhoz egy utat, amely két meglévő pontot köt össze, de belső pontjai újak.)

Biz. Rögtön látszik, hogy sem az élhozzáadás, sem az élfelosztás a 2-élöszefüggőséget nem rontja el. A megfordításhoz tegyük fel, hogy egy $H = (U, F)$ részgráfot már sikerült utak hozzáadásával felépítenünk. Ha $U = V$, akkor a kimaradt éleket, mint egyélű utakat egyenként a gráfhoz vehetjük. Ha $U \subset V$, úgy létezik egy $e = uv$ él, amelyre $u \in U, v \in V - U$. Mivel G 2-élösszefüggő , létezik $G - e$-ben út v-ből u-ba. Ezen út U-ig tartó kezdő szakasza az e éllel együtt olyan utat ad, amellyel a H-t tovább építhetjük. •

Az ilyen jellegű ,,konstruktív karakterizációk" hasznosak lehetnek tételek bizonyításában. Például ezen fülfelbontós tétel segítségével rögtön látszik Robbins 2.1.6 tétele:

TÉTEL 2.7.2 (Robbins) *Egy G irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggő.*

Biz. A G fülfelbontásában szereplő valamennyi utat irányított úttal helyettesítve erősen összefüggő digráfot kapunk. •

Feladat 2.7.1 *Igazoljuk, hogy egy irányítatlan gráf akkor és csak akkor 2-összefüggő, ha előáll egy háromszögből utak (,,fülek") hozzáadásával, ahol a hozzáadott útról megköveteljük, hogy a végpontjai különböző meglévő pontok.*

Feladat 2.7.2 *Igazoljuk, hogy egy 2-összefüggő gráf bármely két éle rajta van egy körön.*

Feladat 2.7.3 *Igazoljuk, hogy egy legalább négypontú 2-összefüggő gráfnak van olyan éle, amelyet összehúzva 2-összefüggő gráfot kapunk.*

Az alábbiakban ezen megközelítésnek egy sokkal izgalmasabb alkalmazását mutatjuk be.

2.7.1 3-összefüggő gráfok előállítása

Ebben a szakaszban az él összehúzásának műveletébe beleértjük, hogy a keletkező hurkokat kitöröljük, és a keletkező párhuzamos éleknek csak egy példányát tartjuk meg. Tehát egy egyszerű gráf egy élének összehúzása egyszerű gráfot eredményez. Egy irányítatlan gráfot akkor neveznek **3-összefüggő**nek, ha legalább négy pontja van és legfeljebb 2 csúcsának kitörlése után mindig összefüggő gráf marad.

Feladat 2.7.4 *Menger tételét használva igazoljuk, hogy egy gráf pontosan akkor 3-összefüggő, ha bármely két pontja között vezet* 3 *belsőleg pontidegen út.*

Lemma 2.7.3 (Tutte) *Legyen $G = (V, E)$ egy legalább öt pontú 3-összefüggő irányítatlan gráf. Ekkor G-nek létezik olyan éle, amelyet összehúzva 3-összefüggő gráfot kapunk.*

Biz. (Thomassen) Amennyiben egy xy él összehúzása elrontja a 3-összefüggőséget, úgy létezik egy olyan z pont, hogy $G - \{x, y, z\}$ nem összefüggő. Tegyük fel indirekt, hogy minden xy élhez van ilyen z pont, és válasszuk az $\{x, y, z\}$ hármast úgy, hogy xy él, $G' := G - \{x, y, z\}$ nem összefüggő és legnagyobb K komponense a lehető legnagyobb.

Állítás 2.7.4 *A $K \cup \{x, y\}$ ponthalmaz által feszített G_1 gráf 2-összefüggő.*

Biz. Mivel x-ből is és y-ból is vezet él K-ba, így G_1 összefüggő, sőt $G_1 - x$ és $G_1 - y$ is. Így ha t elvágó pontja G_1-nek, akkor $t \neq x, t \neq y$. Mivel xy él, így x és y a $G_1 - t$ gráfnak ugyanahhoz a komponenséhez tartozik. De ekkor a $G_1 - t$ egy másik komponenséből G-ben csak z-hez vagy t-hez vezethet él, vagyis $\{t, z\}$ elvágná a G gráfot, ellentmondásban G 3-összefüggő voltával. •

Legyen K' a G'-nek egy másik komponense. Mivel G 3-összefüggő, z-ből vezet egy uz él K'-be, (hiszen ha nem vezetne, úgy már az x és y pontok elhagyásával is létrejönne a K' komponens). Mivel uz-t összehúzva a 3-összefüggőség elromlik, létezik egy olyan v pont, amelyre $G'' = G - \{u, v, z\}$ nem összefüggő. Tekintsük G''-nek azt a K'' komponensét, amely metszi $K \cup \{x, y\}$-t. Az Állítás szerint $K \cup \{x, y\} - \{v\}$ összefüggő gráfot feszít és teljesen benne van K''-ben, ellentmondásban a K-ra tett maximalitási feltevéssel. • •

TÉTEL 2.7.5 *Egy gráf akkor és csak akkor 3-összefüggő, ha előáll a teljes négyesből kiindulva az alábbi két művelet alkalmazásával:*

(i) *egy meglévő élnek húzzuk be egy párhuzamos példányát.*

(ii) *Vegyünk egy legalább negyedfokú z pontot. A z-be futó éleket osszuk fel két legalább kételemű csoportba úgy, hogy egyik csoport se csak párhuzamos élből álljon. Helyettesítsük a z pontot két összekötött z' és z'' csúccsal. Az egyik csoport z-ben végződő élt helyettesítsük z'-ben végződő élekkel, míg a másik csoportot z''-ben végződőekkel.*

Biz. Könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott műveletek megőrzik a 3-összefüggőséget. A megfordítás a 2.7.3 lemma közvetlen folyománya. •

2.7.2 Egy alkalmazás: gráfok síkbarajzolása

Alkalmazásként levezetjük Kuratowski tételét, illetve annak Tutte-tól származó élesítését. Egy gráfot nevezzünk felosztott K_5-nek, ha a teljes ötpontú gráf éleinek pontokkal történő felosztásával keletkezik, azaz ha a K_5 éleinek legalább egy élű belsőleg diszjunkt utakkal történő helyettesítésével jön létre. Hasonló értelemben beszélhetünk felosztott $K_{3,3}$-ról, amely a teljes $3 \cdot 3$-as páros gráf élfelosztásából keletkezik.

Gyakorlat 2.7.5 *Mutassunk olyen gráfot, amely nem tartalmaz felosztott K_5-t, de egy alkalmas élét összehúzva már tartalmaz.*

Gyakorlat 2.7.6 *Legyen H egy 3-reguláris gráf. Igazoljuk, hogy ha G nem tartalmaz felosztott H-t, akkor egy élének összehúzása után sem tartalmaz.*

Lemma 2.7.6 *Ha egy gráf nem tartalmaz felosztott K_5-t és $K_{3,3}$-t, akkor egy élének összehúzása után sem tartalmaz.*

Biz. (vázlat) Az előző gyakorlat szerint élösszehúzással $K_{3,3}$ nem jöhet létre. Tegyük fel, hogy G-nek az $e = uv$ élét összehúzva egy felosztott K_5 keletkezik. Eset szétválasztással ellenőrizhető, hogy G tartalmazott $K_{3,3}$-t. •

TÉTEL 2.7.7 (Tutte) *Ha $G = (V, E)$ olyan 3-összefüggő egyszerű gráf, amely nem tartalmaz felosztott K_5-t és felosztott $K_{3,3}$-t, akkor beágyazható a síkba úgy, hogy minden élt egyenes szakasz reprezentál, két élnek csak a végpontja lehet közös, és a tartományok konvexek.*

Biz. Amennyiben $|V| = 4$, úgy a gráf a teljes négyes, amelynek létezik a kívánt beágyazása. Tegyük most fel, hogy $|V| \geq 5$. A 2.7.3 lemma szerint létezik olyan $x'x''$ él, amelyet összehúzva egy G_1 3-összefüggő gráfot kapunk, amely a lemma szerint nem tartalmaz felosztott K_5-t és $K_{3,3}$-t. Az összehúzott pontot jelölje x. Indukció folytán G_1-nek létezik a kívánt beágyazása. Mivel $G_1 - x$ 2-összefüggő, így $G_1 - x$ minden tartományát a gráf egy köre határolja. Ezek közül jelölje K azon (esetleg végtelen) tartomány határát, amelyik az x-t belsejében tartalmazza.

Állítjuk hogy az x' és x'' egyikének, van olyan (a másiktól különböző) szomszédja, amely nem szomszédja a másiknak. Ha ugyanis nem ez volna a helyzet, akkor a 3-összefüggőség miatt léteznek u, v, z pontok melyek mind az x'-nek mind az x''-nek szomszédai. Ekkor viszont az x', x'', u, v, z pontok a K kör segítségével egy felosztott teljes ötöst határoznak meg.

Legyen tehát u mondjuk az x'-nek egy olyan szomszédja, amely nem szomszédos x''-vel. Az u-tól indulva a K körön haladva mindkét irányban lesz egy első pont, amely szomszédja x''-nek. Jelöljük ezt a két pontot s-sel illetve t-vel. Mivel x'' legalább harmadfokú, s és t különböző. Azt állítjuk, hogy x' valamennyi szomszédja a körnek ugyanazon az s és t közötti ívén van, mint az u pont, mert ha mondjuk a v pont az átellenes íven volna, akkor az x', x'', u, v, s, t a körrel egy felosztott $K_{3,3}$-t határoznának meg. Emiatt az x pontot szét lehet „nyitni" úgy, hogy a G gráf kívánt síkba rajzolását kapjuk. • •

Nevezzünk egy felosztott K_5-t vagy $K_{3,3}$-t tiltott részgráfnak.

TÉTEL 2.7.8 (Kuratowski) *Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz tiltott részgráfot.*

Biz. Az Euler formula szerint $t + n = m + 2$, ahol t a tartományok száma, n a csúcsoké, m pedig az éleké. A teljes ötös nem síkbarajzolható, mert ha indirekt az lenne, akkor $t = 10 + 2 - 5 = 7$. Mivel pedig minden tartományt legalább három él határol, az élek száma legalább $7 \cdot 3/2$, és így legalább 11 lenne, holott csak 10. A $K_{3,3}$ sem síkbarajzolható, mert különben $t = 9 + 2 - 6 = 5$ lenne. Mivel pedig minden kör legalább négyélű, így az élek száma legalább $4t/2 = 10$ volna, holott csak 9. Következik, hogy a felosztott K_5 vagy $K_{3,3}$ sem síkbarajzolható, és így egy ilyeneket tartalmazó gráf sem az.

A megfordításhoz tegyük fel indirekt, hogy G egy ilyen részgráfokat nem tartalmazó gráf, amely nem rajzolható síkba. Feltehető, hogy G minimális. Nyilván G összefüggő, hiszen ha nem az, akkor a komponensei már síkba rajzolhatók, és így G maga is az volna. Hasonlóképp látható, hogy G-ben nincsenek hurkok és párhuzamos élek, azaz G egyszerű.

Állítjuk, hogy G 2-összefüggő. Ha ugyanis t elvágó pont volna, akkor létezne V-nek két X, Y részhalmaza, melyekre $t \in X \cap Y, V = X \cup Y, |X| \geq 2, |Y| \geq 2$, nincs él $X - Y$ és $Y - X$ között, továbbá az X illetve az Y által feszített G_1 és G_2 részgráfok összefüggőek. Ekkor mind G_1, mind G_2 síkbarajzolható, amelyeket t-nél történő összeillesztésével G egy síkbarajzolását kapnánk.

Most belátjuk, hogy G 3-összefüggő. Mivel a teljes négyes síkbarajzolható, így a legfeljebb négypontú gráfok is azok, így $|V| \geq 5$. Tegyük fel indirekt, hogy $\{x, y\}$ elvágja a gráfot. Ekkor létezik V-nek két X, Y részhalmaza, melyekre $X \cap Y = \{x, y\}, V = X \cup Y, |X| \geq 3, |Y| \geq 3$, nincs él $X - Y$ és $Y - X$ között, továbbá X illetve az Y által feszített G_1 és G_2 részgráfok összefüggőek. Legyen G_X az X által feszített gráf plusz az $e = xy$ él, míg G_Y az Y által feszített gráf plusz a e. Állítjuk, hogy G_X nem tartalmaz tiltott részgráfot. Valóban, ha tartalmazna, akkor az szükségképpen használná az új e élt, hiszen G-ben nincs tiltott részgráf. Ugyanakkor G_Y-ban létezik út x és y között, és akkor az e élt ezen útra cserélve egy G-beli tiltott részgráfot kapnánk.

Analóg kapjuk, hogy G_Y sem tartalmaz tiltott részgráfot. Indukcióval adódik, hogy mind G_X, mind G_Y síkbarajzolható. Ráadásul mindkettőnek létezik olyan síkbarajzolása is, amelyben a szóbanforgó e él a végtelen tartomány határán van. (Ugyanis egy síkgráf a gömbre is felrajzolható, és akkor az e által határolt egyik T tartomány egy belső pontjából a gömböt egy tőle diszjunkt síkra vetítve a kívánt síkbarajzolást kapjuk.) emiatt a két síkbarajzolás összeilleszthető e mentén úgy, hogy a $G + e$ egy síkbarajzolását kapjuk.

Végül 3-összefüggő gráfokra a tétel következik a 2.7.7 tételből. •

Azt mondjuk, hogy egy G gráf **minorként tartalmaz** egy H gráfot (vagy hogy a H G-nek minorja), ha G-ből kiindulva élek összehúzásával és elhagyásával elő lehet állítani egy H-val izomorf gráfot. Például az erdők pontosan azok az egyszerű gráfok, amelyek semmilyen háromszöget nem tartalmaznak minorként.

Feladat 2.7.7 Vezessük le Wagner tételét: *Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz minorként K_5-t vagy $K_{3,3}$-t.*

file: konkar 2007. május 6.

3. Fejezet

IRÁNYÍTÁSOK

Az eddigi irányítási eredményeket vizsgálva joggal támad kedvünk közös általánosítások után nézni. Mikor létezik például fokszám korlátokat kielégítő erősen összefüggő irányítás? Avagy mikor létezik olyan erősen összefüggő irányítás, amelyben egy megadott halmaz befoka minimális?

3.1 Erősen összefüggő irányítás fokszám megkötésekkel

A kérdések megválaszolásához segítségünkre lesz a $c_G(X)$ vagy röviden $c(X)$ függvény, amelyet a bevezetőben már definiáltunk és az 1.2.3 lemmában metsző X, Y halmazokra igazoltuk a

$$c(X) + c(Y) \leq c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + d_G(X, Y)$$

egyenlőtlenséget. Fontos megfigyelés, hogy G egy erősen összefüggő irányításában minden $X \subseteq V$ halmaz kifoka is és befoka is legalább $c(X)$.

TÉTEL 3.1.1 *Adott $f : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f \leq g \leq d_G$. A $G = (V, E)$ 2-élösszefüggő irányítatlan gráfnak akkor és csak létezik olyan erősen összefüggő irányítása,*
(i) *amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$e(X) \geq f(X) + c(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re}, \tag{3.1}$$

(ii) *amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$i(X) \leq g(X) - c(X) \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq V\text{-re}, \tag{3.2}$$

(iii) *amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind (3.1), mind (3.2) fennáll.*

Biz. Tegyük fel először, hogy létezik erősen összefüggő irányítás, amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll. Ekkor X-ből legalább $c(X)$ él kilép, így $f(X) \leq \sum[\varrho(v) : v \in X] = e(X) - \delta(X) \leq e(X) - c(X)$, azaz (3.1) következik.

Tegyük most fel, hogy (3.1) teljesül. Induljunk ki G-nek egy olyan erősen összefüggő irányításából, amelyre a $H := \sum[(f(v) - \varrho(v))^+ : v \in V]$ „hibaösszeg” minimális. (Itt $x^+ := \max\{0, x\}$.) Amennyiben $H = 0$, azaz $\varrho(v) \geq f(v)$ teljesül minden pontra, úgy készen vagyunk, így tegyük fel, hogy $H > 0$, azaz van olyan s pont, amelyre $\varrho(s) < f(s)$.

Ha X és Y két metsző, 1 befokú részhalmaza $V - s$-nek, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is 1 befokú (ugyanis $1 + 1 = \varrho(X) + \varrho(Y) \geq \varrho(X \cup Y) + \varrho(X \cap Y) \geq 1 + 1$-ből $\varrho(X \cup Y) = 1 = \varrho(X \cap Y)$ adódik). Így az s-t nem tartalmazó maximális $C_1, \ldots, C_l$ 1-befokú halmazok páronként diszjunktak. Igaz továbbá, hogy két ilyen C_i között nem vezethet él, mert ha mondjuk C_1-ből vezetne C_2-be, akkor $C_1 \cup C_2$ is 1 befokú volna, ellentétben a maximalitással. Legyen $X = V - \cup_i C_i$ (illetve $X = V$, ha nem létezik s-t nem tartalmazó 1 befokú.) Kapjuk, hogy $\delta(X) \leq l \leq c(X) \leq \delta(X)$, amiből $\delta(X) = c(X)$.

Állítjuk, hogy X-nek van „túltelített” t pontja, azaz olyan, amelyre $\varrho(t) > f(t)$. Valóban, ha nem így lenne, akkor $f(X) > \sum[\varrho(v) : v \in X] = e(X) - \delta(X) = e(X) - c(X)$, ellentétben a (3.1) feltevéssel.

Legyen P egy tetszőleges s-ből t-be vezető út. Állítjuk, hogy ennek irányítását megfordítva erősen összefüggő irányítást kapunk. Valóban, ha az átirányítás után egy Z halmazba nem lépne be él, akkor szükségképpen $t \in Z$, $s \notin Z$, továbbá a P út egyetlen egyszer lépne Z-be és nem volna más Z-be lépő él, azaz $\varrho(Z) = 1$. Ilyen Z halmaz létezése azonban ellentmondana a C_i halmazok maximális választásának.

A P út megfordítása ráadásul olyan erősen összefüggő irányítást eredményez, amelynek a hibája eggyel kisebb, mint a kiindulási irányításé, ellentmondásban annak minimális hibájú választásával.

A második rész analóg módon bizonyítható, de könnyen le is vezethető az első részből, hiszen a kikötés, hogy egy v pont befoka legfeljebb $g(v)$ azzal ekvivalens, hogy v kifoka legalább $f'(v) := d_G(v) - g(v)$. Könnyen látszik, hogy az f'-re felírt (3.1) éppen a (3.2) feltétellel ekvivalens, így van olyan erősen összefüggő irányítás, amelyben minden v pont befoka legalább $f'(v)$. Ezt átfordítva olyan erősen összefüggő irányítást kapunk, amelyben minden v pont kifoka legalább $f'(v)$, azaz befoka legfeljebb $g(v)$.

A harmadik részhez induljunk ki G-nek egy olyan erősen összefüggő irányításából, amelyben v minden pont befoka legfeljebb $g(v)$ és erre alkalmazzuk az első rész bizonyítását. Csak azt kell megfigyelni, hogy ott egy s pont befoka csak akkor nőhet, ha $\varrho(s) < f(s)$. Így az $f \leq g$ feltevés miatt a $\varrho(v) \leq g(v)$ tulajdonság nem tud elromolni. •

Feladat 3.1.1 *Igazoljuk, hogy az első rész bizonyításában definiált X halmaz éppen azon pontokból áll, amelyekbe vezet s-ből 2 élidegen irányított út. Ennek alapján tervezzünk hatékony algoritmust a keresett irányítás megtalálására.*

Feladat 3.1.2 *Igazoljuk, hogy egy irányítatlan gráf valamely erősen összefüggő irányításából át lehet jutni bármely másik erősen összefüggő irányításába irányított utak és/vagy körök egymás után történő megfordításával úgy, hogy minden közbenső irányítás erősen összefüggő.*

A 3.1.1 tétel egy újabb megnyilvánulása a linking tulajdonságnak. A tétel tekinthető a Robbins tétel fokszámkorlátos kiterjesztésének, és így joggal kérdezhetjük meg, hogy vajon a 2.1.7 következménynek is van-e hasonló fokszámkorlátos alakja. Meglepő módon a linking tulajdonság itt már érvényét veszti, azaz a következő állítás **nem érvényes**: *Ha egy vegyes gráfnak van olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v pont befoka legalább $f(v)$, és van olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v pont befoka legfeljebb $g(v)$, akkor létezik olyan erősen összefüggő irányítása is, amelyben minden pont befoka legalább $f(v)$ és legfeljebb $g(v)$.* Az állítást cáfoló vegyes gráf négy pontból áll, v_1v_4 és v_2v_3 irányítatlan élek, v_3 és v_4 között van két ellentétesen irányított párhuzamos él, és v_1 és v_2 között van két ellentétesen irányított párhuzamos él. Az f alsó korlát a négy ponton rendre $1, 0, 0, 0$, míg a g felső korlát rendre $1, 1, 0, 1$.

A linking tulajdonság időnkénti meglétének illetve hiányának tényszerű konstatálásán túl, jó volna megérteni mi van háttérben. Magyarázatul most csak egy ködös mondattal szolgálhatunk: g-polimatroidokra (melyek egy speciális poliéder osztályt alkotnak) érvényes a linking tulajdonság, míg két g-polimatroid metszetére már nem. Márpedig egy irányítatlan gráf erősen összefüggő irányításaihoz tartozó befok vektorok g-polimatroidot feszítenek, míg egy vegyes gráf esetében a megfelelő poliéder már két g-polimatroid metszete.

Legyen ismét G 2-élösszefüggő irányítatlan gráf. A $c(X)$ függvény alsó becslésül szolgált G egy erősen összefüggő irányításában az X-be belépő élek minimális $c^*(X) = c^*_G(X)$ számára. Mennyi ez a minimum pontosan? Ha G egy $2n$ pontú útból keletkezik az élek párhuzamos megduplázásával, és X a páratlan sorszámú pontokból áll, akkor egyrészt $c(X) = |X| = n$, másrészt minden erősen összefüggő irányításban X-be $2n - 1$ él lép be; mutatva, hogy a $c(X)$ elég rossz alsó becslés tud lenni.

Lemma 3.1.2 *Jelölje G' azt a páros gráfot, amely úgy áll elő G-ből, hogy az X által feszített komponensek és a $V - X$ által feszített komponensek mindegyikét egy-egy ponttá húzzuk össze. Jelölje X' az X-ből keletkező halmazt (amely a páros gráf egyik osztálya). Ekkor $c^*_{G'}(X') = c_G(X)$.*

Biz. G egy erősen összefüggő irányítása az összehúzáskor nyilván G' egy erősen összefüggő irányítását adja, így $c^*_{G'}(X') \leq c_G(X)$. Megfordítva, G' egy erősen összefüggő irányítása a 2.1.7 következmény alapján kiegészíthető G egy erősen összefüggő irányításává, és így $c^*_{G'}(X') \geq c_G(X)$. •

A lemma alapján elég a problémát páros gráfokra megoldani.

TÉTEL 3.1.3 *Legyen $G = (S, T; E)$ 2-élösszefüggő páros gráf. G erősen összefüggő irányításaiban a T-be lépő élek minimális $c^*(T)$ száma egyenlő:*

$$\max\{\textstyle\sum_i c(X_i) : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ partícionálja } T\text{-t}\}. \tag{3.3}$$

Biz. (max $\leq$ min) Tetszőleges erősen összefüggő irányítás esetén $\varrho(X) \geq c(X)$, amiből $\varrho(T) = \sum_i \varrho(X_i) \geq \sum_i c(X_i)$.

(max $\geq$ min) Megadunk egy algoritmust, amely tetszőleges ϱ befok függvényű erősen összefüggő irányításból kiindulva vagy talál egy jobb erősen összefüggő irányítást, azaz olyant, amelyben T-be kevesebb él megy be, vagy pedig talál T-nek egy $\{X_1, \ldots, X_t\}$ partícióját, amelyre $\varrho(X_i) = c(X_i)$ minden $i = 1, \ldots, t$-re. Miután az első lehetőség legfeljebb csak $|E|$-szer fordulhat elő, a második biztosan bekövetkezik, és ilyenkor $c^*(T) \leq \varrho(T) = \sum_i c(X_i)$, azaz valóban min $\leq$ max fog adódni.

Nevezzünk egy X halmazt **pontos**nak (az adott erősen összefüggő irányításra nézve), ha $\varrho(X) = c(X)$. (Speciálisan $S \cup T$ mindig pontos.)

Lemma 3.1.4 *Ha A és B metsző pontos halmazok, akkor $A \cup B$ és $A \cap B$ is pontosak.*

Biz. Felhasználva az 1.2.3 lemmát, kapjuk: $\varrho(A) + \varrho(B) = c(A) + c(B) \leq c(A \cap B) + c(A \cup B) + d(A, B) \leq \varrho(A \cap B) + \varrho(A \cup B) + d(A, B) = \varrho(A) + \varrho(B)$, amiből $c(A \cup B) = \varrho(A \cup B)$ és $c(A \cap B) = \varrho(A \cap B)$. •

Ebből közvetlenül adódik:

Lemma 3.1.5 *Ha pontos halmazok egy rendszere összefüggő hipergráfot alkot, akkor e halmazok uniója is pontos. Egy v pontot tartalmazó pontos halmazok $P(v)$ metszete pontos.* •

Legyen tehát ϱ egy erősen összefüggő irányítás befok függvénye. Két eset lehetséges.

1. Eset *Minden $v \in T$ csúcsra $P(v) \subseteq T$.* Jelölje $X_1, \ldots, X_t$ a $\{P(v) : v \in T\}$ hipergráf komponenseit. Ekkor $\{X_i\}$ a T egy partícióját alkotja és a 3.1.5 lemma szerint mindegyik X_i pontos. Vagyis az adott irányítás kielégíti a megkívánt $\varrho(T) = \sum_i \varrho(X_i) = \sum_i c(X_i)$ egyenlőséget.

2. Eset *Léteznek olyan $t \in T$ és $s \in S$ csúcsok, amelyekre $s \in P(t)$.* Legyen P egy s-ből t-be vezető irányított út és fordítsuk meg P éleinek az irányítását. Az új irányításban nyilván eggyel kevesebb él lép be T-be, mint eddig. Állítjuk továbbá, hogy az új irányítás is erősen összefüggő. Valóban, ha nem az volna, úgy létezne egy olyan Z $t\bar{s}$-halmaz, amelyre $\varrho(Z) = 1$, ellentmondásban a feltevéssel, hogy $s \in P(t)$. • •

Felvetődik a kérdés, hogy a fenti eredmények átvihetők-e arra az esetre, amikor az irányítás erősen összefüggősége helyett egy s gyökérből való elérhetőséget írunk elő. A válasz igen, sőt kiderül, hogy ez a probléma még könnyebb is és rögtön mód nyílik az általánosabb gyökeres k-élösszefüggőség kezelésére.

3.2 Gyökeres k-élösszefüggővé irányítás

Azonnal látszik, hogy egy G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van olyan irányítása, amelyben egy megadott s pontból minden más pont irányított úton elérhető, ha a gráf összefüggő. Adott $k \geq 1$ egészre mikor létezik a G-nek egy s-ből k-élösszefüggő irányítása, azaz olyan, amelyben minden nemüres $\bar{s}$-halmaz befoka legalább k? Az alábbi tétel nemcsak ezt a tulajdonságot karakterizálja, hanem rögtön megadja az ún. deficites alakot is, amely azt mondja meg, hogy legkevesebb hány új él hozzáadásával létezik a keresett irányítás.

TÉTEL 3.2.1 *Legyen a $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak s egy kijelölt pontja, és legyen γ nemnegatív egész. Akkor és csak akkor lehet G-hez γ új élt úgy hozzáadni, hogy a megnövelt gráfnak létezik s-ből k-élösszefüggő irányítása, ha*

$$e(\mathcal{F}) \geq k(t-1) - \gamma \tag{3.4}$$

teljesül V minden $\mathcal{F} := \{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára. Az új élek mind választhatók s-ből indulónak.

Biz. Egy s-ből k-élösszefüggő irányítást nevezzünk röviden **jó**nak. Ha γ új él hozzáadása után létezik jó irányítás, akkor mindegyik s-t nem tartalmazó V_i részhalmazra $\varrho(V_i) \geq k$, így $e(\mathcal{F}) + \gamma \geq e^+(\mathcal{F}) \geq k(t-1)$, ahol az e^+ jelölés a megnövelt gráfra utal, azaz (3.4) fennáll.

Az elegendőség igazolásához adjunk G-hez minimálisan sok s végpontú új élt úgy, hogy a kiegészített gráfban már létezzék jó irányítás. Jelölje a minimumot γ'. Célunk azt kimutatni, hogy $\gamma' \leq \gamma$.

Jelölje ϱ a megnövelt gráf jó irányításának a befok függvényét. Feltehetjük, hogy $\varrho(s) = 0$. Nevezzünk egy $X \subseteq V - s$ halmazt **pontos**nak, ha $\varrho(X) = k$. Ha X és Y két metsző pontos halmaz, akkor $k + k = \varrho(X) + \varrho(Y) \geq \varrho(X \cap Y) + \varrho(X \cup Y) \geq k + k$ miatt a metszet is és unió is pontos. Ebből az is kiadódik, hogy ha pontos halmazok egy rendszere összefüggő hipergráfot alkot, akkor a halmazok metszete is pontos.

Jelölje T azon pontok halmazát. melyek legalább egy újonnan hozzáadott él végpontjából az adott irányításban elérhetők. Nyilván $s \notin T$ és $\varrho(V - T) = 0$.

Lemma 3.2.2 *Ha Z pontos és $Z \cap T \neq \emptyset$, akkor $Z \subseteq T$.*

Biz. Tegyük fel, hogy $Z \not\subseteq T$. Ekkor $Y := V - T$-re $k = \varrho(Y) + \varrho(Z) = \varrho(Y \cap Z) + \varrho(Y \cup Z) + d^+(Y, Z) \geq k + 0 + d^+(Y, Z) \geq k$. Ebből $\varrho(Y \cup Z) = 0$ és $d^+(Y, Z) = 0$ adódik. Az első egyenlőség miatt van olyan $e = st$ új él, amelyre $t \in Z$-ben van (mert különben $T \cap Z$ pontjai semelyik új él fejéből nem lehetnének elérhetők). Ekkor viszont az e él miatt $d^+(Y, Z) > 0$, amely ellentmondás a lemmát bizonyítja. •

Két eset lehetséges. Ha létezik T-ben olyan v pont, amely nincs benne pontos halmazban, akkor vegyünk egy olyan st új élt, amelyre t-ből vezet v-be egy P irányított út. Fordítsuk meg P éleinek irányítását, és hagyjuk ki az e élt. Mivel v nincs pontos halmazban, az új irányítás továbbra is jó lesz, ellentmondásban az új élek számának minimalitásával.

Nézzük most azt az esetet, amikor T minden pontja benne van pontos halmazban. Jelölje $V_1, \ldots, V_{t-1}$ azon maximális pontos halmazokat, melyek metszik T-t. Fentebb láttuk, hogy ezek páronként diszjunktak és hogy a T partícióját alkotják. Legyen $V_t := V - T$ és $\mathcal{F} := \{V_1, \ldots, V_t\}$. Mivel $\varrho(V_t) = 0$, és minden új él belép

T-be, azt kapjuk, hogy $k(t-1) = \sum[\varrho(V_i) : i = 1, \ldots, (t-1)] = \sum[\varrho(V_i) : i = 1, \ldots, t] = e^+(\mathcal{F}) = e(\mathcal{F}) + \gamma'$, így (3.4)-t használva, $\gamma' = k(t-1) - e(\mathcal{F}) \leq \gamma$ adódik. • •

Adott pozitív egész k-ra és egész l számra egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot akkor nevezünk (k, l)**-partíció összefüggő**nek, ha V pontjainak minden $t \geq 2$ részes partíciójára a köztes élek száma legalább $k(t-1)+l$. A $(k, 0)$-partíció-összefüggőgráfokat röviden k-partíció-összefüggőnek nevezzük. A (3.4) feltétel tehát azt jelenti, hogy a G gráf $(k, -\gamma)$-partíció-összefüggő. Érdemes a $\gamma = 0$ speciális esetet külön megfogalmazni.

Következmény 3.2.3 *Egy G gráfnak akkor és csak akkor létezik s-ből k-élösszefüggő irányítása, ha G k-partíció-összefüggő.* •

Most megmutatjuk, hogy miként lehet a fokszám korlátot és a gyökeres k-élösszefüggőségi előírást az irányítási feladatban ötvözni. Figyeljük meg, hogy ismét felbukkan a linking tulajdonság. A tételben használjuk az ε_k halmazfüggvényt:

$$\varepsilon_k(X) = k, \text{ ha } s \notin X, \text{ míg } \varepsilon_k(X) = 0, \text{ ha } s \in X.$$

TÉTEL 3.2.4 *A $G = (V, E)$ gráfnak legyen s egy kitüntetett gyökérpontja. Legyen továbbá $f : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ két függvény, melyekre $f(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ pontra. G-nek akkor és csak létezik olyan s-ből k-élösszefüggő irányítása,*

(i) amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha

$$e(\mathcal{F}) \geq \sum_i h(V_i) \tag{3.5}$$

teljesül V minden $\mathcal{F} := \{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára, ahol $h(X)$ értéke a legalább kételemű X halmazokon 0 vagy k annak megfelelően, hogy X tartalmazza s-t vagy sem, míg az egyelemű $X = \{v\}$ halmazokon $h(X) := \max\{f(v), \varepsilon_k(v)\}$.

(ii) amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha G k-partíció-összefüggő és

$$g(X) \geq i(X) + \varepsilon_k(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{3.6}$$

(iii) amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind (3.5)*, mind* (3.6) *fennáll.*

(Az (iii) részhez nem kell külön G k-partíció-összefüggőségét kikötni, hiszen a (3.5) feltétel azt már maga után vonja.)

Biz. A feltételek könnyen láthatóan szükségesek, így csak az elegendőségük bizonyításával foglalkozunk. Feltehetjük, hogy $k \leq f(v)$ minden $v \in V - s$ pontra és $g(v) \leq d_G(v)$ minden $v \in V$ pontra. (Miért?)

Tegyük fel először, hogy (3.5) fennáll. A 3.2.3 következmény alapján létezik s-ből k-élösszefüggő irányítás. Vegyünk olyant, amelyben a hiányok $\sum[f(v) - \varrho(v)^+ : v \in V]$ összege minimális. Készen vagyunk, ha ez a szám nulla, azaz minden v pontra $\varrho(v) \geq f(v)$ teljesül, így tegyük fel, hogy létezik hibás r pont, olyan tehát, amelyre $\varrho(r) < f(r)$. (Lehet, hogy $r = s$.) Jelölje T az r-ből elérhető pontok halmazát.

Jelölje $V_1, \ldots, V_l$ azon maximális k befokú s-t és r-t nem tartalmazó halmazokat, melyek metszik T-t (lehet, hogy nincsenek ilyenek). Egyrészt tudjuk, hogy ezek páronként diszjunktak, másrészt a 3.2.2 lemma szerint $V - T$-től is diszjunktak. Legyen most $\mathcal{F}$ az a partíció, amely a $V_1, \ldots, V_l$ halmazokon kívül a $T' := T - \cup_i V_i$ elemeiből mint egyelemű halmazokból áll (ebben $\{r\}$ bizonyosan szerepel), valamint a $V - T$ halmazból, amennyiben ez nemüres (tehát, ha s nem érhető el r-ből).

Állítjuk, hogy T'-ben kell lennie olyan z pontnak, amelyre $\varrho(z) > f(z)$. Ha ugyanis nem volna ilyen, akkor $\sum[\varrho(v) : v \in T'] < \sum[h(\{v\}) : v \in T']$, és így az $\mathcal{F}$ partíció megsértené (3.5)-t: $e(\mathcal{F}) = \sum[\varrho(X) : X \in \mathcal{F}] = kl + \sum[\varrho(v) : v \in T'] < \sum[h(X) : X \in \mathcal{F}]$. Mármost egy r-ből z-be menő út irányítását megfordítva egyrészt az s-ből k-élösszefüggőség nem romolna el, másrészt a hiányok $\sum(f(v) - \varrho(v))^+$ összege csökkenne, ellentmondásban ezen összeg minimális választásával.

Az (ii) rész bizonyításához G-nek ismét egy s-ből k-élösszefüggő irányításából indulunk ki, éspedig olyanból, amelynél a többletek $\sum[\varrho(v) - g(v))^+ : v \in V]$ összege minimális. Készen vagyunk, ha ez a szám nulla, azaz minden v pontra $\varrho(v) \leq g(v)$ teljesül, így tegyük fel, hogy létezik hibás r pont, olyan tehát, amelyre $\varrho(r) > g(r)$.

Jelölje T azon pontok halmazát, melyekből r elérhető. Nyilván $s \in T$. Amennyiben létezik r-t tartalmazó, de s-t nem tartalmazó k-befokú halmaz, úgy ezek Z metszete is ilyen. Nyilván $Z \subset T$. Z-ben van olyan z pont, amelyre $\varrho(z) < g(z)$, mert különben $g(Z) < \sum[\varrho(v) : v \in Z] = \varrho(Z) + i(Z) = k + i(Z) = \varepsilon_k(Z) + i(Z)$, ellentmondásban a (3.6) feltétellel. Mármost egy z-ből r-be menő út irányítását megfordítva továbbra is s-ből k-élösszefüggő irányítást kapnánk, amelynek többlet összege kisebb, mint eredetileg, ellentétben a kiindulási irányítás választásával.

Tegyük most fel, hogy nem létezik r-t tartalmazó, de s-t nem tartalmazó k-befokú halmaz. T-ben van olyan z pont, amelyre $\varrho(z) < g(z)$, mert különben $g(T) < \sum[\varrho(v) : v \in T] = \varrho(T) + i(T) = 0 + i(T) = \varepsilon_k(T) + i(T)$, ellentmondásban a (3.6) feltétellel. Most egy z-ből r-be menő út irányítását megfordítva ismét jobb irányítást kapunk.

Végül az (iii) rész rögvest következik az előbbi bizonyításból, ha az (ii) rész bizonyításánál olyan s-ből k-élösszefüggő irányításból indulunk ki, amely a pontok befokára már teljesíti az alsó korlátot és megfigyeljük, hogy a bizonyításban megadott út irányításának átforgatásnál csak az r pont $g(r)$-nél nagyobb befoka csökken, így tehát a befok $g(r) \geq f(r)$ miatt nem kerülhet $f(r)$ alá. •

Feladat 3.2.1 *Legyen G-nek s és t két különböző pontja. Mutassuk meg, hogy miként nyerhető s-re nézve gyökeresen k-élösszefüggő irányításából egy t-re nézve gyökeresen k-élösszefüggő irányítás.*

Feladat 3.2.2 *Mi a feltétele annak, hogy G-nek létezzék s-re nézve gyökeresen k-élösszefüggő irányítása, amelyben s-ből legfeljebb γ él megy ki?*

$k = 1$-re az alsó korlátos esetben a (3.5) feltétel egyszerűsödik.

TÉTEL 3.2.5 *A $G = (V, E)$ összefüggő gráfnak legyen s egy kitüntetett gyökérpontja. Legyen továbbá $f : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ adott függvény. G-nek akkor és csak létezik olyan irányítása, amelyben minden csúcs elérhető s-ből és $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$e(X) \geq f(X) + c(X) - \varepsilon_1(X) \tag{3.7}$$

teljesül V minden nemüres X részhalmazára, ahol $c(X)$ az X elhagyásával keletkező komponensek száma, míg $\varepsilon_1(X)$ annak megfelelően 0 vagy 1, hogy X tartalmazza s-t vagy sem.

Biz. A feltétel nyilván szükséges. Elegendőségéhez azt kell csak igazolnunk, hogy fennállása esetén (3.5) is fennáll $k = 1$-re. Tegyük fel indirekt hogy az $\mathcal{F}$ partíciója V-nek megsérti a feltételt, és válasszuk $\mathcal{F}$-t olyannak, hogy minimális sok tagja legyen. Legyen $Z := \{v \in V : \{v\} \in \mathcal{F}, h(v) = f(v)\}$. Legyen $\mathcal{F}' := \mathcal{F} - \{\{v\} : v \in Z\}$

Állítjuk, hogy a partíció $\mathcal{F}'$-beli tagja között nem vezet él. Valóban, ha V_i és V_j között vezetne, akkor helyettesítve őket az uniójukkal olyan $\mathcal{F}'$ partíciót kapnánk, amely $k = 1$ miatt szintén megsértené a (3.5) feltételt, ellentétben $|\mathcal{F}|$ minimális választásával. Most $e(Z) = e(\mathcal{F}) < \sum[h(X) : X \in \mathcal{F}] = f(Z) + c(Z) - \varepsilon_1(Z)$ ellentmondásban a (3.7) feltétellel. •

3.3 k-élösszefüggővé irányítás

Most bemutatjuk a Robbins tétel magasabb élösszefüggőségre vonatkozó kiterjesztését.

TÉTEL 3.3.1 (Nash-Williams) *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik k-élösszefüggő irányítása, ha G $(2k)$-élösszefüggő.*

Biz. A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőség igazolásához nevezzük G egy irányítását **jó**nak, ha k-élösszefüggő, **hibás**nak ellenkező esetben, és **közel-jó**nak, ha $(k-1)$-élösszefüggő és létezik s és t csúcs úgy, hogy minden $k-1$ befokú halmaz, $t\bar{s}$-halmaz. Egy közel-jó irányításban egy $k-1$ befokú halmazt nevezzünk **be-hibás**nak, míg egy k befokút **be-pontos**nak. Ezek komplementere **ki-hibás** illetve **ki-pontos**. Indirekt tegyük fel, hogy G-nek nem létezik jó irányítása.

Lemma 3.3.2 *G egy közel-jó (de nem jó) irányításában van olyan út, amelyet megfordítva egy másik közel-jó irányítást kapunk, amelyben a hibás halmazok száma kisebb.*

Biz. Nevezzünk egy partíciót **hibás**nak akkor, ha vagy az egyik tagja be-hibás és a többi be-pontos, vagypedig az egyik tagja ki-hibás és a többi ki-pontos.

Állítás 3.3.3 *Nincs hibás partíció.*

Biz. Valóban, egy r részes partíció keresztéleinek a száma egyrészt a részek be-fokainak (ki-fokainak) összege, másrészt G $(2k)$-élösszefüggősége folytán legalább $r(2k)/2 = rk$. Így hibás partíció valóban nem létezhet, mert annál a szóbanforgó összeg $k(r-1) + (k-1) = rk - 1$. •

Szubmodularitásból kapjuk, hogy a be-hibás halmazok N uniója is be-hibás.

Állítás 3.3.4 *Ha X és Y két keresztező be-pontos halmaz, melyekre $X \cap Y \not\subseteq N$, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is be-pontos.*

Biz. $X \cap Y \not\subseteq N$ miatt a metszet és az unió nem be-hibás, és ezért $k + k = \varrho(X) + \varrho(Y) \geq \varrho(X \cap Y) + \varrho(X \cup Y) \geq k + k$, amiből a metszet és az unió is be-pontos. •

Állítás 3.3.5 *Létezik olyan $b \in V - N$ pont, amelyre minden b-t tartalmazó be-pontos halmaz metszi N-t.*

Biz. A 3.3.4 állítás miatt az N-től diszjunkt maximális be-pontos halmazok páronként diszjunktak. Így ha a szóbanforgó b pont nem létezik, akkor ezek uniója $V - N$, vagyis az N-nel együtt egy hibás partíciót alkotnak. •

Állítás 3.3.6 *Legyen B egy b-t tartalmazó be-pontos halmaz, míg N' egy B-t keresztező be-hibás. Ekkor $B \cap N'$ be-hibás, és így $t \in B \cap N'$.*

Biz. Mivel $B \cup N'$ tartalmazza b-t, így $\varrho(B \cup N') \geq k$, és ezért $k + (k-1) = \varrho(B) + \varrho(N') \geq \varrho(B \cap N') + \varrho(B \cup N') \geq (k-1) + k$, amiből $\varrho(B \cap N') = k - 1$ következik. •

A 3.3.4 állításból következik, hogy a b-t nem tartalmazó, N-t metsző maximális ki-pontos halmazok páronként diszjunktak. Ezek közül jelölje $H_1, H_2, \ldots, H_h$ azokat, amelyek $V - N$-t is metszik, míg $L_1, L_2, \ldots, L_l$ azokat, melyek N-ben fekszenek. Amennyiben létezik olyan $a \in N$ csúcs, amely nincsen benne semelyik H_i vagy L_j halmazban, úgy egy a-ból b-be vezető P úthoz nem létezik be-pontos vagy be-hibás $b\bar{a}$-halmaz, így P kielégíti a lemma kívánalmát.

Tegyük fel indirekt, hogy a H_i és L_j halmazok fedik N-t. Kell lennie H_i halmaznak, mert különben $\{L_1, \ldots, L_l, V - N\}$ hibás partíciót alkotna. Mindegyik $B_i := V - H_i$ halmaz be-pontos, melyek $B_i \not\subseteq V - N$ miatt keresztezik N-t, így a 3.3.6 állítás miatt tartalmazzák t-t. Vagyis semelyik H_i sem tartalmazza t-t, azaz kell lennie L_i halmaznak is.

A 3.3.6 állítás ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $N_1 := B_1 \cap N$ be-hibás, hogy $N_2 := B_2 \cap N_1, \ldots, N_h := B_H \cap N_{h-1}$ mindegyike be-hibás. Mivel $N_h = B_1 \cap \ldots \cap B_h$, így $V - N_h$ az $L_1, \ldots, L_l$ halmazokkal együtt partíciót alkot, amely hibás. Ez ellentmond a 3.3.3 állításnak, ami a lemmát bizonyítja. • •

A lemmából a tétel már könnyen következik. Tegyük fel indirekt, hogy a tétel nem igaz. Egy gráfhoz elegendően sok élt hozzávéve már biztosan létezik jó irányítás, így van olyan G ellenpélda, amelyhez egyetlen élt hozzávéve van jó irányítás. Ebből az új élt kihagyva G-nek egy majdnem jó irányítását kapjuk, amely a lemma ismételt alkalmazásával jóvá tehető. • • •

Most megmutatjuk, hogy a 3.1.1 tétel gond nélkül kiterjeszthető k-élösszefüggő irányításokra.

TÉTEL 3.3.7 *Legyen adott $f : V \to \mathbf{Z}_+$ és $g : V \to \mathbf{Z}_+$ két függvény, melyekre feltesszük, hogy minden v csúcsra $k \leq f(v) \leq g(v) \leq d_G(v)$. Legyen a $G = (V, E)$ gráf $2k$-élösszefüggő. G-nek akkor és csak akkor létezik olyan k-élösszefüggő irányítása,*

(i) amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha V minden $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_r\}$ partíciójára

$$i(V_0) + e(\mathcal{P}) \geq f(V_0) + kr, \tag{3.8}$$

(ii) amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha V minden $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \ldots, V_r\}$ partíciójára

$$e(V_0) - e(\mathcal{P}) \leq g(V_0) - kr, \tag{3.9}$$

(iii) amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind (3.8), mind (3.9) fennáll.

Biz. Tegyük fel először, hogy létezik k-élösszefüggő irányítás, amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll. Ekkor az $i(V_0) + e(\mathcal{P})$ összeg éppen a V_0 pontjaiba valamint a $V_1, \ldots, V_r$ halmazokba belépő éleket számolja, ami viszont legalább $f(V_0) + kr$, azaz (3.8) szükséges.

Tegyük most fel, hogy (3.8) teljesül. Induljunk ki G-nek egy olyan k-élösszefüggő irányításából, amelyre a $H := \sum[(f(v) - \varrho(v))^+ : v \in V]$ „hibaösszeg" minimális. (Itt $x^+ := \max\{0, x\}$.) Amennyiben $H = 0$, azaz $\varrho(v) \geq f(v)$ teljesül minden pontra, úgy készen vagyunk, így tegyük fel, hogy $H > 0$, azaz van olyan s pont, amelyre $\varrho(s) < f(s)$.

Ha X és Y két metsző, k befokú részhalmaza $S - s$-nek, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is k befokú (hiszen $k + k = \varrho(X) + \varrho(Y) \geq \varrho(X \cup Y) + \varrho(X \cap Y) \geq k + k$-ből $\varrho(X \cup Y) = k = \varrho(X \cap Y)$ adódik). Így az s-t nem tartalmazó k befokú maximális $V_1, \ldots, V_r$ halmazok páronként diszjunktak. Legyen $V_0 = V - \cup(V_i : i = 1, \ldots, r)$, ha létezik s-t nem tartalmazó k befokú halmaz, míg $V_0 := V$, ha nem létezik.

Állítjuk, hogy V_0-nak van „túltelített" t pontja, azaz olyan pont, amelyre $\varrho(t) > f(t)$. Valóban, ha nem így lenne, akkor $f(V_0) + kr > \sum[\varrho(v) : v \in V_0] + \sum[\varrho(V_i) : i = 1, \ldots, r] = i(V_0) + e(\mathcal{P})$, ellentétben a (3.1) feltevéssel.

Legyen P egy tetszőleges s-ből t-be vezető út. Állítjuk, hogy ennek irányítását megfordítva k-élösszefüggő irányítást kapunk. Valóban, ha az átirányítás után egy Z halmazba k-nál kevesebb él lépne be, akkor szükségképpen $t \in Z, s \notin Z$, a P út egyetlen egyszer lépne Z-be és $\varrho(Z) = k$. Ilyen Z halmaz létezése azonban ellentmondana a V_i halmazok maximális választásának.

A P út megfordítása ráadásul olyan k-élösszefüggő irányítást eredményez, amelynek a hibája eggyel kisebb, mint a kiindulási irányításé, ellentmondásban annak minimális hibájú választásával.

A második rész analóg módon bizonyítható, de könnyen le is vezethető az első részből, hiszen a kikötés, hogy egy v pont befoka legfeljebb $g(v)$ azzal ekvivalens, hogy v kifoka legalább $f'(v) := d_G(v) - g(v)$. Könnyen látszik, hogy az f'-re felírt (3.1) éppen (3.2)-vel ekvivalens, így van olyan k-élösszefüggő irányítás, amelyben minden v pont befoka legalább $f'(v)$. Ezt átfordítva olyan k-élösszefüggő irányítást kapunk, amelyben minden v pont kifoka legalább $f'(v)$, azaz befoka legfeljebb $g(v)$.

A harmadik részhez induljunk ki G-nek egy olyan k-élösszefüggő irányításából, amelyben v minden pont befoka legfeljebb $g(v)$ és erre alkalmazzuk az első rész bizonyítását. Csak azt kell megfigyelni, hogy ott egy s pont befoka csak akkor nőhet, ha $\varrho(s) < f(s)$. Így az $f \leq g$ feltevés miatt a $\varrho(v) \leq g(v)$ tulajdonság nem tud elromolni. •

Az első rész bizonyításából rögvest adódik az alábbi hasznos megfigyelés.

Következmény 3.3.8 *Ha G-nek létezik egy olyan k-élösszefüggő irányítása, amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra, akkor G-nek tetszőleges k-élösszefüggő irányításból kiindulva megkaphatunk egy ilyen irányítást irányított utak egymás utáni megfordításával úgy, hogy minden közbenső irányítás k-élösszefüggő.*

TÉTEL 3.3.9 *Ha D_1 és D_2 ugyanannak az irányítatlan gráfnak két k-élösszefüggő irányítása, akkor irányított utak és körök egymás utáni megfordításával el lehet jutni D_1-ből D_2-be úgy, hogy minden közbenső irányítás k-élösszefüggő.*

Biz. Legyen $f(v) := \varrho_2(v),\ \ v \in V$. Mivel $\sum[f(v) : v \in V]$ az élek számával egyenlő, így G bármely olyan irányítására, ahol $\varrho(v) \geq f(v)$ fennáll minden v-re, szükségképpen minden v-re egyenlőség teljesül. A 3.3.8 következmény szerint D_1-ből kiindulva irányított utak egymás utáni átforgatásával egy olyan D_1' k-élösszefüggő irányítást kaphatunk, amelyben minden v pont befoka legalább $f(v)$ és így pontosan $f(v)$, és ráadásul úgy, hogy a közbenső irányítások mind k-élösszefüggők. A 2.2.6 tétel miatt D_1'-ből körök átfordításával eljuthatunk D_2-be. Természetesen egy körátfordítás a halmazok befokát, így a k-élösszefüggőséget sem befolyásolja. •

3.4 Két alkalmazás

Érdemes hangsúlyozni, hogy az eddig szereplő irányítási tételek mindegyikében a keresett irányítást utak irányításának egymás utáni megfordításával kaphattuk meg. Léteznek olyan irányítási eredmények is, amikor csak bonyolultabb módszerek segítenek. Ilyen például, ha egy vegyes gráfot akarunk s-ből k-élösszefüggőre irányítani. Itt például már nem lesz érvényes a linking tulajdonság. Most azonban az eddigi irányítási eredményeknek érdekes alkalmazásaként bemutatjuk két gráfelméleti probléma megoldását. Megjegyezzük azonban, hogy mindkét tétel levezethető a matroid metszet tételből.

3.4.1 Csúcsok szétbontása

A gráfelmélet ,,első” tétele szerint egy összefüggő irányítalan gráfnak akkor és csak akkor létezik Euler bejárása, ha minden pont foka páros. Egy Euler bejárás létezése úgy is interpretálható, hogy minden csúcsot másodfokú pontokra lehet szétbontani úgy, hogy összefüggő gráfot (szükségképpen egy kört) kapjunk. Kérdés, hogy mi mondható, ha a szétbontott pontokra általánosabb fokszám előírások adottak.

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf ponthalmazán egy m mindenütt pozitív egészértékű függvény. G-nek egy m-**bontás**án egy olyan gráfot értünk, amely G-ből keletkezik úgy, hogy mindegyik v pontot $m(v)$ részre bontjuk szét, és a v-vel szomszédos éleket tetszés szerint kiosztjuk a szétbontott pontot között.

TÉTEL 3.4.1 (Nash-Williams) *G-nek akkor és csak akkor létezik összefüggő m-bontása, ha*

$$e(X) \geq m(X) + c(X) - 1 \tag{3.10}$$

teljesül minden $X \subseteq V$ nemüres részhalmazra.

Biz. Tegyük fel először, hogy G-nek létezik egy G' összefüggő m-bontása. Valamely $X \subseteq V$ halmazra tekintsük a G' ponthalmazának azt a partícióját, amely egyrészt az X bontott pontjaiból mint egyelemű halmazokból, másrészt a $G - X$ komponenseinek megfelelő G'-beli halmazokból áll. A partíció-részek száma tehát $m(X) + c(X)$. Miután G' összefüggő, a részek között legalább $m(X) + c(X) - 1$ él vezet. Ezen élek olyan G-beli éleknek felelnek meg, melyeknek legalább egyik vége X-ben van, így (3.10) valóban szükséges.

Az elegendőség bizonyításához válasszunk ki egy tetszőleges s csúcsot. A 3.2.5 tétel azt állítja, hogy egy G gráfnak valamely $f : V \to \mathbf{Z}_+$ alsó korlátra nézve akkor és csak akkor van olyan irányítása, amelyben minden csúcs v befoka legalább $f(v)$ és amelyben minden csúcs elérhető s-ből, ha minden X halmazra

$$e(X) \geq f(X) + c(X) - \varepsilon_1(X) \tag{3.11}$$

Legyen most $f(v) := m(v)$ ha $v \in V - s$ és $f(s) := m(s) - 1$. Könnyen látszik, hogy ezen választás mellett (3.11) következik (3.10)-ből, így G-nek létezik a kívánt irányítása. Legyen F egy tetszőleges feszítő s-fenyő az adott irányításban. Minden v csúcsot bontsunk szét úgy, hogy kiválasztunk $m(v) - 1$ bemenő élt, melyek nincsenek F-ben, és ezen élek mindegyike definniál egy egypontú részt a szétbontásban. (Tehát a v szétbontásánál egy kivétellel mindegyik rész egyelemű lesz.) Az így kapott bontás összefüggőségét az F fenyő biztosítja. •

Következmény 3.4.2 *Ha G mindegyik z pontjánál az $m(z)$ szám mellett adva van $m(z)$ darab pozitív szám, melyek összege éppen z foka, és (3.10) teljesül, akkor létezik olyan m-bontás, amelyben minden új pont foka előre adott.*

Biz. A 3.4.1 tétel miatt van m-bontás. Amennyiben ez nem teljesíti a fokszám előírást, akkor létezik z' és z'' két pont egy eredeti z pont bontásából, hogy z''-nek túl nagy a foka, z'-nek pedig túl kicsi. Tekintsük a bontott gráfnak egy feszítő fáját. A z''-nek vegyünk egy olyan uz'' élét, amely nem a fabeli $z''z'$ út első éle, és ezt cseréljük át egy uz' élre: megmarad az összefüggőség és a fokok jó irányban változnak. •

Megjegyzés A bontási probléma ekvivalens a következővel. Adott egy alaphalmaznak egy $\{V_1, \ldots, V_r\}$ partíciója és minden $\{V_i, V_j\}$ párra egy α_{ij} nemnegatív egész. Olyan összefüggő gráfot keresünk, amelyben a V_i halmazok stabilak és minden $\{V_i, V_j\}$ pár között legfeljebb α_{ij} él vezet. (Egy S halmaz **stabil**, ha nem feszít élt.) Ez egy matroid metszet probléma. Általánosabban azt is megkövetelhetjük, hogy a keletkező gráf k-partíció-összefüggő legyen.

Akkor és csak akkor létezik k-partíció-összefüggő m-bontás, ha G maga k-partíció-összefüggő és V minden $\mathcal{F} := \{X_0, X_1, \ldots, X_t\}$ partíciójára $i(X_0) + e(\mathcal{F}) \geq tk$, ahol $e(\mathcal{F})$ a részek közötti élek száma.

3.4.2 Fokszám-korlátos fák

Egy összefüggő irányítatlan gráfban szeretnénk olyan feszítő fát keresni, amely a csúcsokon fokszám korlátoknak tesz eleget. Ez a probléma így túl általános, hiszen ha minden pontban a fokszámra felső korlátként 2-t adunk meg, akkor a feladat a Hamilton út létezésének problémájával ekvivalens, ami köztudottan NP-teljes. Ha azonban pontoknak csak egy stabil halmazán vannak korlátok, akkor létezik jó karakterizáció.

TÉTEL 3.4.3 *Legyen G összefüggő irányítatlan gráf és $S \subset V$ a G pontjainak egy stabil részhalmaza. Legyen továbbá $f_S : S \to \mathbf{Z}_+$ és $g_S : S \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f_S \leq g_S$. Akkor és csak akkor létezik G-nek olyan F feszítő fája,*

(i) amelyre $d_F(v) \geq f_S(v)$ minden $v \in S$-re, ha

$$f_S(X) \leq |X| + |\Gamma(X)| - 1 \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq S \text{ halmazra,} \tag{3.12}$$

(ii) amelyre $d_F(v) \leq g_S(v)$ minden $v \in S$-re, ha

$$g_S(X) \geq |X| + c(X) - 1 \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq S \text{ halmazra,} \tag{3.13}$$

(iii) amelyre $f_S(v) \leq d_F(v) \leq g_S(v)$ minden $v \in S$-re, ha mind (3.12), *mind* (3.13) *teljesül.*

Biz. Szükségesség. Legyen F egy feszítő fa és legyen $X \subseteq S$ nemüres halmaz. Jelölje F_X az F-nek az X-szel szomszédos élekből álló részerdejét.

Ha most F olyan, hogy $d_F(V) \geq f_S(v)$ fennáll minden $v \in S$-re, akkor egyrészt $|F_X| \geq f_S(X)$, másrészt, mivel egy erdő élszáma kisebb a pontszámánál, $|F_X| \leq |V(F_X)| - 1 = |X| + |\Gamma_F(X(S)| - 1 \leq |X| + |\Gamma(X)| - 1$, és a kettő összevetéséből (3.12) következik.

Legyen most F olyan, amelyre $d_F(V) \leq g_S(v)$ fennáll minden $v \in S$-re. Mivel egy feszítő fa V tetszőleges t részes partíciójára legalább $t-1$ köztes élt tartalmaz, így az X pontjaiból mint egyelemű halmazokból valamint a $G - X$ komponenseiből álló $|X| + c(X)$ részes partícióra F legalább legalább $|X| + c(X) - 1$ köztes élt. E köztes élek persze mind X pontjaival szomszédosak (hiszen két komponens között egyáltalán nincs él), így a köztes élek száma legfeljebb $g(X)$, és a kettőt összevetve (3.13) következik.

Az elegendőség bizonyításához feltehetjük, hogy G páros gráf. Ha ugyanis $T := V - S$ feszítene élt, akkor ezeket egy-egy ponttal felosztva, az osztáspontokat S-hez véve és mindegyik osztásponthoz 0 alsó és illetve ∞ felső korlátot rendelve az eredetivel ekvivalens feladatot kapunk (mind a primál oldalon, mind a feltételi oldalon).

Legyen $s \in V - S$ egy tetszőleges pont. A kapcsolatot az irányítások és a fokszám előírt fák között az alábbi lemma teremti meg.

Lemma 3.4.4 *A $G = (S, T; E)$ páros gráfban legyen $m : S \to \mathbf{Z}^+$ olyan függvény, amelyben $m(S) = |V| - 1$. Akkor csak akkor létezik G-nek olyan F feszítő fája, amelyre $d_F(v) = m(v)$ minden $v \in S$ pontra fennáll, ha G-nek létezik olyan irányítása, amelyben s-ből G-nek minden csúcsa elérhető és minden S-beli v csúcs befoka $d(v) - m(v) + 1$.*

Biz. Ha létezik a kívánt F fa, akkor irányítsuk F éleit úgy, hogy s gyökerű fenyőt kapjunk, az S pontjaival szomszédos többi élt mind S-felé, míg a maradék éleket tetszőlegesen. Így olyan irányítást kapunk, amelyben egyrészt V minden eleme elérhető s-ből, másrészt egy tetszőleges $v \in S$ pont kifoka éppen $m(v) - 1$, azaz befoka $d(v) - m(v) + 1$.

Megfordítva, tekintsük a gráfnak egy olyan irányítását, amelyben minden pont elérhető s-ből és minden S-beli v pont befoka $\varrho(v) = d(v) - m(v) + 1$, azaz $\delta(v) = m(v) - 1$. Legyen $\vec{F}$ egy tetszőleges s gyökerű feszítő fenyő. Állítjuk, hogy az az F feszítő fa, amely az $\vec{F}$ irányítatlan értelemben vett éleiből áll, teljesíti a $d_F(v) = m(v)$ kívánalmat a $v \in S$ pontokban. Valóban, $d_F(v) = 1 + \delta_{\vec{F}}(v) \leq 1 + \delta(v) = m(v)$, azaz $d_F(v) \leq m(v)$, és így $|V| - 1 = |F| = \sum_{v \in S} d_F(v) \leq m(S) = |V| - 1$, amiből $d_F(v) = m(v)$ következik minden $v \in S$ pontra. •

Definiáljuk a $g : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ és $f : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ függvényeket a következőképp. Legyen $g(v) := \infty$, ha $v \in V - S$ és $g(v) := d(v) - f_S(v) + 1$, ha $v \in S$. Legyen $f(v) := \{-\infty\}$, ha $v \in V - S$ és $f(v) := d(v) - g_S(v) + 1$, ha $v \in S$. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a (3.12) feltétel ekvivalens a (3.6) feltétellel, és hogy a (3.13) feltétel ekvivalens a (3.7) feltétel $k = 1$-re vonatkozó speciális alakjával. Így a lemma alapján a tétel következik. • •

Feladat 3.4.1 *Igazoljuk, hogy egy G hurokmentes összefüggő gráfnak, mindig van olyan F feszítő fája, amelyre $d_F(v) \leq \lfloor (d_G(v) + 3)/2 \rfloor$ minden v csúcsra fennáll.*

2007. május 6.File: irany2

4. Fejezet

IRÁNYÍTATLAN LEEMELÉSEK ÉS ALKALMAZÁSAIK

4.1 Az irányítatlan élösszefüggőség megőrzése: leemelés

Legyen $G = (U, E)$ irányítatlan gráfnak $e = zu$ és $f = zv$ két szomszédos éle. Azt mondjuk, hogy a $G^{ef} = (U, E - \{e, f\} + uv)$ gráf a G-ből az e és f élek leemelésével keletkezett. Analóg módon definiálhatjuk a leemelést egy $G = (U, E)$ irányított gráfban is: legyenek $e = uz$ és $f = zv$ irányított élek, ekkor definíció szerint $G^{ef} = (U, E - \{e, f\} + uv)$. Könnyen látszik, hogy mind az irányított, mind az irányítatlan esetben $\lambda(x, y; G) \geq \lambda(x, y; G^{ef})$ minden x, y pontpárra fennáll, (ahol $\lambda(x, y)$ az irányítatlan esetben az x és y között vezető élidegen utak maximális számát jelöli, míg az irányítottban az x-ből y-ba vezetőkét). Tehát leemeléssel az élösszefüggőség biztosan nem nő. Kérdés, hogy mikor nem csökken. Irányítatlan gráfokra a választ a következő alapvető eredmény adja meg.

TÉTEL 4.1.1 (Lovász) *A $G = (V + z, E)$ irányítatlan gráfban a kijelölt z pont $d(z)$ foka legyen pozitív és páros. Legyen $k \geq 2$ egész és tegyük fel, hogy*

$$\lambda(x, y; G) \geq k \text{ minden } x, y \in V \text{ pontpárra.} \tag{4.1}$$

Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = zv$ él, amelyekre $\lambda(x, y; G^{ef}) \geq k$ minden $x, y \in V$ pontpárra.

Biz. Menger tétele alapján a (4.1) feltevés azzal ekvivalens, hogy

$$d(X) \geq k \text{ minden } \emptyset \neq X \subset V \text{ részhalmazra,} \tag{4.2}$$

ahol $d(X)$ jelöli az X halmaz **fokszámát**, vagyis azon élek számát, melyeknek az egyik végpontja X-ben van, a másik X-n kívül. Ha leemeléskor egy halmaznak csökken a fokszáma, akkor 2-vel csökken. Egy $X \subset V$ részhalmazt nevezzünk **veszélyes**nek, ha $d(X) \leq k + 1$.

Legyen S az z szomszédainak halmaza. Egy $f = zv$ él akkor nem emelhető le az adott $e = zt$ éllel, ha v benne van egy t pontot tartalmazó veszélyes halmazban. Indirekt tegyük fel, hogy S lefedhető t-t tartalmazó veszélyes halmazokkal, és legyen $\mathcal{F}$ a t pontot tartalmazó maximális (azaz nem bővíthető) veszélyes halmazoknak egy S-t fedő rendszere, melyre $|\mathcal{F}|$ minimális.

$\mathcal{F}$ nem lehet egytagú, mert ha X olyan veszélyes halmaz, melyre $S \supset X$, akkor $d(V - X) = d(X) - d(z) \leq (k + 1) - 2 = k - 1$, ami ellentmondana (4.2)-nek.

Az sem lehet, hogy $\mathcal{F} = \{X, Y\}$. Ekkor ugyanis $k + 1 + k + 1 \geq d(X) + d(Y) = d(X - Y) + d(Y - X) + 2\bar{d}(X, Y) \geq k + k + 2$, amiből az adódik, hogy z-ből egyetlen él megy $X \cap Y$-ba. Az $\alpha := d(z, X - Y)$ és $\beta := d(z, Y - x)$ jelölést használva azt kapjuk, hogy $d(z) = 1 + \alpha + \beta$. Miután $d(z)$ páros, $\alpha \neq \beta$. Legyen mondjuk $\alpha > \beta$. De ekkor $d(V - X) = d(X + z) = d(X) - (\alpha + 1) + \beta \leq d(X) - 2 \leq (k + 1) - 2 \leq k - 1$, vagyis $V - X$ megsérti (4.2)-t.

Végül kimutatjuk, hogy $|\mathcal{F}| \geq 3$ sem lehetséges. Ezt kétféleképp is megtesszük: az olvasó eldöntheti, ízléséhez melyik áll közelebb. Az első megközelítés rövidebb, annak révén, hogy bevezet egy új egyenlőtlenséget a $d(X)$ függvényre. A második kicsit hosszabb, de csak a már ismert $d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2d(X, Y)$ azonosságot használja. Kezdjük tehát a Lovásztól származó hármas egyenlőtlenséggel.

Lemma 4.1.2 *Egy irányítatlan gráfban, melynek ponthalmaza U, bármely $A, B, C \subseteq U$ halmazra fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$d(A) + d(B) + d(C) \geq$$
$$d(A \cap B \cap C) + d(A - (B \cup C)) + d(B - (A \cup C)) + d(C - (A \cup B)) + 2d(A \cap B \cap C, U - (A \cup B \cup C)).$$

Biz. Az egyenlőtlenséget elég egyélű gráfokra igazolni. Ilyenekre pedig az egyenlőtlenség az él elhelyezkedésétől függő egyszerű esetszétválasztással ellenőrizhető. •

Állítás 4.1.3 $|\mathcal{F}| \leq 2$.

1. Biz. Ha indirekt létezne $A, B, C \in \mathcal{F}$, akkor a lemma alapján $3(k+1) \geq d(A) + d(B) + d(C) \geq d(A \cap B \cap C) + d(A - (B \cup C)) + d(B - (A \cup C)) + d(C - (A \cup B)) + 2d(A \cap B \cap C, U - (A \cup B \cup B)) \geq k + k + k + k + 2$, ami ellentmond a $k \geq 2$ feltevésnek. • •

2. Biz. Legyen ismét indirekt $A, B, C \in \mathcal{F}$.

Állítás A *Ha X és Y átmetsző veszélyes halmazok, melyekre $t \in X \cap Y$, akkor $\bar{d}(X, Y) = 1$.*

Biz. $(k+1) + (k+1) \geq d(X) + d(Y) = d(X - Y) + d(Y - X) + 2\bar{d}(X, Y) \geq k + k + 2$, amiből az A állítás következik. •

Állítás B *Legyenek X és Y átmetsző veszélyes halmazok, melyekre $t \in X \cap Y$, és tegyük fel, hogy X maximális veszélyes. Ekkor $d(X) = d(Y) = k + 1$ and $d(X \cap Y) = k$.*

Biz. Már láttuk, hogy két veszélyes halmaz nem fedheti S-t és így $X \cup Y \neq V$. Az X maximalitása miatt $d(X \cup Y) \geq k + 2$. Így $(k+1) + (k+1) \geq d(X) + d(Y) \geq d(X \cup Y) + d(X \cap Y) \geq (k+2) + k$, amiből a B állítás következik. •

Az A, B, C halmazok közül legyen A és B az a kettő, melyek M metszete a legnagyobb. A B állítást $X := A$-ra és $Y := B$-re alkalmazva adódik, hogy $d(M) = k$. Emiatt C és M nem lehet átmetsző, mert akkor a B állítást $X := C$-re és $Y := M$-re alkalmazva $d(M) = k + 1$ adódna. Tehát $M \subseteq C$, és így az M maximalitása miatt $A \cap C = B \cap C = M$. Az A állítás szerint $\bar{d}(A, B) = \bar{d}(A, C) = \bar{d}(B, C) = 1$ vagyis zt az egyetlen él, amely kilép M-ből, ellentmondásban a $k \geq 2$ feltevéssel. • •

Gyakorlat 4.1.1 *Példán mutassuk meg, hogy a fenti tétel $k = 1$-re nem érvényes. Mutassuk meg, hogy a tételben a $d(z)$ párosságára tett kikötés nem hagyható ki.*

TÉTEL 4.1.4 *Legyen a $G = (V + z, E)$ irányítatlan gráfban a z pont $d(z)$ foka pozitív és páros, és tegyük fel, hogy $k \geq 2$ egészre (4.1) fennáll. Ekkor a z-vel szomszédos élek párba állíthatók úgy, hogy a párok szimultán leemelésével kapott $G' = (V, E')$ gráf k-élösszefüggő.*

Biz. A 4.1.1 tétel ismételt alkalmazásával az eredmény rögtön következik. •

A tételben megfogalmazott párba állítást és szimultán leemelést **teljes leemelés**nek nevezzük. A tételből kapjuk, hogy $k \geq 2$-re egy k-élösszefüggő gráf bármely páros fokú csúcsánál van olyan teljes leemelés, amely k-élösszefüggő gráfot eredményez. A teljes leemelés inverz művelete a következő: válasszunk ki tetszőlegesen j meglévő élt, mindegyiket osszuk fel egy ponttal, és egyesítsük a j osztás-pontot egyetlen új ponttá. E műveletre úgy hivatkozunk, hogy **összecsípünk** j élt (egy új ponttal).

Gyakorlat 4.1.2 *Igazoljuk, hogy egy $2k$-élösszefüggő gráf k élének összecsípése $2k$-élösszefüggő gráfot eredményez.*

Közismert, hogy minden 2-élösszefüggő gráf előállítható egy pontból kiindulva „fülek” hozzáadásával, ahol a fül egy olyan út, amelynek két vége már meglévő pont, míg belső pontjai (ha vannak egyáltalán) új pontok. A fülön nincsenek pont-ismétlődések, eltekintve attól, hogy két végpontja esetleg egybeeshet (amikoris a fül egy kör). Ebből a jellemzésből rögtön adódik, hogy minden 2-élösszefüggő gráf előllítható egy pontból kiindulva két művelet tetszőleges sorrendben történő egymás utáni alkalmazásával, ahol az egyik művelet két meglévő pont összekötése új éllel, a másik pedig egy meglévő él felosztása új ponttal. Ezen előállítás nyíltszíni általánosítása a következő.

TÉTEL 4.1.5 *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf akkor és csak akkor $2k$-élösszefüggő, ha egy pontból kiindulva előállítható az alábbi két művelet egymás utáni ismételt alkalmazásával.*

(A) Két létező pontot kössünk össze új éllel,
(B) Csípjünk össze k meglévő élt egy új ponttal.

Biz. A tétel nem-triviális részének bizonyításához szükségünk van az alábbi könnyű lemmára.

Lemma 4.1.6 *Minden legalább két pontú, él-elhagyásra nézve minimális K-élösszefüggő gráfnak van K-ad fokú pontja ($K \geq 1$).*

Biz. Egy él elhagyása pontosan akkor rontja el a gráf K-élösszefüggőségét, ha létezik olyan K-fokú halmaz, amely az él egyik végpontját tartalmazza, a másikat nem. Legyen X olyan halmaz, amelyre $d(X) = K$ és X elemszáma minimális. Készen vagyunk, ha X egyelemű. Tegyük fel, nem ez a helyzet. Természetesen létezik olyan $e = ab$ él, amelynek mindkét vége X-ben van, mert különben X minden pontja legfeljebb $d(X) = K$ fokú volna. Most létezik olyan Y $a\bar{b}$-halmaz (azaz a-t tartalmazó, b-t nem tartalmazó halmaz), amelyre $d(Y) = K$. Az X minimalitása miatt sem Y, sem $V - Y$ nem lehet X-nek része vagyis X és Y keresztezők. De ekkor $K + K \geq d(X) + d(Y) \geq d(X \cap Y) + d(X \cup Y) \geq K + K$, amiből $d(X \cap Y) = K$ következik, ellentétben X minimalitásával. •

A tétel bizonyításához $|E|$ szerinti indukciót alkalmazunk. A tétel semmitmondó, ha $|V| = 1$, így legyen $|V| \geq 2$. A feltevés szerint G $2k$-élösszefüggő. Amennyiben létezik olyan e él, amelyre $G' := G - e$ is $2k$-élösszefüggő, akkor indukció alapján G'-nek már létezik kívánt előállítása, és ezt kiegészítve az e él hozzáadásával, a G keresett előállítását kapjuk.

Tegyük most fel, hogy G él-elhagyásra nézve minimális $2k$-élösszefüggő gráf. A lemma szerint létezik egy z pontja, amelynek a foka $2k$. Alkalmazzuk a 4.1.4 tételt. A keletkező G' gráf $2k$-élösszefüggő, így indukció alapján G'-nek már létezik kívánt előállítása. Ebből G előállítását úgy kapjuk meg, hogy a G'-ben szereplő k leemelt élre alkalmazzuk a (B) operációt. • •

Feladat 4.1.3 *Igazoljuk, hogy egy gráf akkor és csak akkor 3-élösszefüggő, ha egy pontból előáll a fenti (A) és az alábbi (B') és (C) műveletek egymás utáni alkalmazásával.*

(B') Osszunk fel egy meglévő élt egy új ponttal, és az osztópontot kössük össze egy tetszőleges meglévő ponttal.
(C) Osszunk fel két különböző élt egy-egy új ponttal és az osztópontokat kössük össze egy éllel.

Feladat 4.1.4 *Igazoljuk, hogy a* 4.1.6 *lemmában valójában két pont is létezik a kívánt tulajdonsággal.*

Gyakorlat 4.1.5 *Legyen $K = 2k + 1$ és tegyük fel, hogy $G = (V, E)$ gráf K-élösszefüggő. Igazoljuk, hogy a K-as vágások keresztezés-mentes rendszert alkotnak.*

Feladat 4.1.6 *Igazoljuk, hogy páratlan K esetén, ha G élelhagyásra nézve minimális K-élösszefüggő gráf (amelynek legalább két pontja van), akkor van olyan e $= uv$ éle, amely legfeljebb csak az u vagy a v csúcs által (esetleg) meghatározott minimális vágásokban van benne.* (Útmutatás. Legyen $Z \subseteq V$ olyan halmaz, amelyre $|Z| \geq 2$, $d(Z) = K$ és $|Z|$ minimális. Ha nincs ilyen halmaz, bármely uv él jó lesz, ha van, úgy bármely Z által feszített uv él.)

Feladat 4.1.7 *Igazoljuk a Lovász tételnek egy olyan változatát, amelyben a z csúcson kívül adott még egy s csúcs, (4.1) csupán minden $x, y \in V - s$ pontpárra van feltéve, és a leemelés után a $\lambda(x, y; G^{ef}) \geq k$ egyenlőtlenséget minden $x, y \in V - s$ pontpárra követeljük meg.*

Feladat 4.1.8 *Igazoljuk, hogy minden $(2k + 1)$-élösszefüggő gráf egy pontból kiindulva előállítható az alábbi műveletek egymás utáni ismételt alkalmazásával.*

(A) Két létező pontot kössünk össze egy éllel,
(B) Csípjünk össze k meglévő élt egy z csúccsal és húzzunk be egy új élt z-ből egy meglévő csúcshoz.
(C) Csípjünk össze k meglévő élt egy z csúccsal, a keletkező gráfban ismét csípjünk össze k meglévő élt egy z' csúccsal, végül kössük össze a z és z' csúcsokat egy új éllel.

4.2 Az irányítatlan élösszefüggőség növelése

Tegyük most fel, hogy egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf nem k-szor élösszefüggő, és új élek hozzáadásával azzá akarjuk tenni. Több kérdés is megfogalmazható. Például, mennyi a szükséges új élek minimális száma, illetve ami ezzel ekvivalens, döntsük el, hogy adott γ számú új él elegendő-e? Vagy, adott fokszám-előírás esetén mikor létezik olyan növelés, amelyre az új élek gráfjában minden pont foka az előírt? Ezen utóbbi kérdés megválaszolásával kezdjük.

TÉTEL 4.2.1 *Adott $G = (V, E)$ gráf, $k \geq 2$ egész, és $m : V \to \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírás. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre $d_H(v) = m(v)$ teljesül minden $v \in V$ pontra és $G + H$ k-élösszefüggő, ha $m(V)$ páros és*

$$m(X) \geq k - d_G(X) \tag{4.3}$$

teljesül minden $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazra, ahol $m(X) := \sum[m(v) : v \in X]$.

Biz. Ha létezik a kívánt H, akkor $k \leq d_{G+H}(X) = d_G(X) + d_H(X) \leq d_G(X) + m(X)$, amiből (4.3) következik. $m(V)$ párossága triviálisan szükséges.

Az elegendőség bizonyításához adjunk a gráfhoz egy új z pontot és minden $v \in V$ pontra $m(v)$ párhuzamos élt z és v között. A (4.3) feltétel szerint teljesül a 4.1.4 tétel feltétele. Igy z-nél létezik teljes leemelés, amely k-élösszefüggő gráfot eredményez. A leemelt élek H gráfja kielégíti a tétel feltételeit. •

Gyakorlat 4.2.1 *Igazoljuk, hogy megfordítva, a* (4.2.1) *tétel is implikálja a* (4.1.4) *tételt.*

Nézzük most meg, hogy hány él hozzávételével tehető egy gráf k-élösszefüggővé. Nemüres diszjunkt halmazoknak egy rendszerét **részpartíció**nak nevezzük.

TÉTEL 4.2.2 (Watanabe és Nakamura) *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k-élösszefüggővé ($k \geq 2$), ha a pontok minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciójára*

$$2\gamma \geq \sum_i [k - d(X_i)]. \tag{4.4}$$

Másszóval, azon élek minimális száma, melyeknek G-hez adása k-élösszefüggő gráfot eredményez, egyenlő a $\max\lceil \sum_i (k - d(X_i)/2 \rceil$ *értékkel, ahol a maximum a V összes részpartíciójára megy.*

Biz. A tétel első alakjával foglalkozunk. A szükségesség bizonyítása egyszerű gyakorló feladat. Az elegendőséghez legyen $m : V \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény, amelyre (4.3) fennáll, $m(V) \geq 2\gamma$, és $m(V)$ minimális.

Lemma 4.2.3 $m(V) = 2\gamma$.

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy $m(V) > 2\gamma$. Nevezzünk egy $X \subset V$ halmazt **pontos**nak, ha $k - d(X) = m(X)$. Az m minimalitása miatt minden v pont, amelyre $m(v) > 0$, benne van pontos halmazban. Minden ilyen pontra tekintsünk egy v-t tartalmazó P_v minimális pontos halmazt.

Állítjuk, hogy az ezen halmazok által alkotott $\mathcal{F}$ halmazrendszer lamináris. Valóban, ha P_u, P_v átmetszőek, akkor $m(P_u) + m(P_v) = k - d(P_u) + k - d(P_v) \leq k - d(P_u - P_v) + k - d(P_v - P_u) \leq m(P_u - P_v) + m(P_v - P_u) = m(P_u) + m(P_v) - 2m(P_u \cap P_v) \leq m(P_u) + m(P_v)$, amiből az adódik, hogy $m(P_u \cap P_v) = 0$, így $v \in P_v - P_u$ és $u \in P_u - P_v$, továbbá a $P_u - P_v, P_v - P_u$ halmazok pontosak, ami ellentétben áll a P_u és P_v halmazok minimális választásával.

Legyenek az $\mathcal{F}$ lamininíris rendszer maximális tagjai $X_1, \ldots, X_t$. Ezek tehát páronként duszjunkt pontos halmazok és lefedik az összes olyan v pontot, amelyekre $m(v)$ pozitív. A (4.4) feltételből kapjuk, hogy $m(V) = \sum_i m(X_i) = \sum_i [k - d(X_i)] \leq 2\gamma$, ellentétben az indirekt feltevéssel. •

Alkalmazzuk a 4.2.1 tételt. A kapott H gráfnak a lemma miatt γ éle van. • •

Gyakorlat 4.2.2 *Mutassuk meg, hogy a tétel $k = 1$-re nem érvényes.*

Feladat 4.2.3 *A* tört élösszefüggőség növelési *problémában a $G = (V, E)$ gráf élösszefüggőségét úgy akarjuk növelni, hogy tört éleket is használhatunk, (azaz minden új élt egy hozzárendelt pozitív kapacitással együtt adunk meg, és a keletkező kapacitásos gráfot akkor tekintjük k-élösszefüggőnek, ha minden vágásban az eredeti élek száma plusz az új élek kapacitásainak összege legalább k.) A cél a felhasznált kapacitások összegének minimalizálása. Mutassuk meg, hogy $k \geq 1$ esetén az optimális megoldás választható félegésznek, továbbá hogy az egészértékű növelési feladatban $k \geq 2$ esetén az optimum értéke legfeljebb féllel nagyobb, mint a tört növelési feladat optimumáé. $k = 1$-re viszont az eltérés a $(|V| - 1)/2$ értéket is elérheti.*

4.3 k-élösszefüggő irányítások

A Lovász tételnek egy másik szép alkalmazásaként levezetjük Nash-Williams 3.3.1 tételét.

TÉTEL 4.3.1 (Nash-Williams, gyenge irányítási tétel) *A G irányítatlan gráf éleit akkor és csak akkor lehet úgy irányítani, hogy az eredményül kapott irányított gráf k-élösszefüggő legyen, ha G $2k$-élösszefüggő.*

Biz. A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőség igazolásához $|V| + |E|$ szerinti indukciót használunk. A $|V| = 1, |E| = 0$ alapeset triviális. Alkalmazzuk a 4.1.5 tételt. Amennyiben G egy G' $2k$-élösszefüggő gráfból áll elő egy új e él hozzáadásával, úgy vegyük a G'-nek indukció alapján létező k-élösszefüggő irányítását, és irányítsuk e-t tetszőlegesen: a G így keletkező irányítása k-élösszefüggő lesz. Amennyiben G egy G' gráfból a (B) operáció segítségével áll elő, akkor a G'-nek egy k-élösszefüggő irányítása természetes módon kiterjeszthető a G irányításává, amely nyilván k-élösszefüggő lesz. •

Igazolható a Nash-Williams tétel alábbi élesítése, melyet itt bizonyítás nélkül említünk.

TÉTEL 4.3.2 *Legyen G $2k$-élösszefüggő gráf és H a G-nek egy Euler-részráfja (azaz H-ban minden pont foka páros). Ekkor H-nak egy tetszőleges Euler-irányítását ki lehet terjeszteni a G-nek egy k-élösszefüggő irányításává.* •

Most a Lovász-féle leemelést használva levezethetjük a Nash-Williams tétel egy más irányú élesítését.

TÉTEL 4.3.3 *Egy $2k$-élösszefüggő irányítatlan gráfnak létezik k-élösszefüggő közel-Euler irányítása.*

Biz. Amennyiben G-nek létezik egy z páros fokú pontja, úgy a 4.1.4 tétel miatt z-nél létezik teljes leemelés a $2k$-élösszefüggés megőrzésével, és ekkor indukcióval készen vagyunk. Ha viszont minden pont foka páratlan, akkor a gráfból kihagyható egy alkalmas $e = uv$ éle a $2k$-élösszefüggőség megsértése nélkül, hiszen minimális $2k$-élösszefüggő gráfról már láttuk, hogy tartalmaz $2k$-ad fokú pontot. Indukcióval $G - e$-nek van közel-Euler k-élösszefüggő irányítása, és mivel $G - e$-ben mind az u, mind a v foka páros, az e-t tetszőlegesen irányítva a közel-Eulerséget nem rontjuk el. •

2007. május 6.file: graf: emel1

5. Fejezet

IRÁNYÍTOTT LEEMELÉSEK ÉS ALKALMAZÁSAIK

5.1 Az irányított élösszefüggőség megőrzése leemeléssel

Egy D digráfban az $e = uz, f = zv$ élek **leemelésén** azt a műveletet értjük, amikor az e és f éleket kicseréljük egy új uv élre. A keletkező digráfot D^{ef}-fel jelöljük. Az egész fejezetben hasznosnak fognak bizonyulni az alábbi azonosságok.

$$\varrho(X) + \varrho(Y) = \varrho(X \cap Y) + \varrho(X \cup Y) + d(X, Y). \tag{5.1}$$

$$\varrho(X) + \varrho(Y) = \varrho(X - Y) + \varrho(Y - X) + \bar{d}(X, Y) + \varrho(X \cap Y) - \delta(X \cap Y). \tag{5.2}$$

Azt mondjuk, hogy egy $D = (V, A)$ digráf csúcsainak egy U' részhalmazában **k-élösszefüggő**, ha bármely U'-beli pontból bármely másik U'-beli pontba vezet k élidegen út. Ez Menger tétele alapján azzal ekvivalens, hogy

$$\varrho(X) \geq k, \delta(X) \geq k \text{ minden } U'\text{-t elválasztó } X \subseteq V \text{ részhalmazra,} \tag{5.3}$$

ahol egy X halmazról akkor mondjuk, hogy **elválasztja** U'-t, ha $U' \cap X \neq \emptyset, U' - X \neq \emptyset$. (Természetesen az U' halmaz k-élösszefüggősége nem ugyanaz, mint az, hogy az U' által feszített digráf k-élösszefüggő.) Az alábbiakban egy olyan $D = (U + z, A)$ digráffal fogunk dolgozni, amelynek z kitüntetett pontja.

TÉTEL 5.1.1 (W. Mader) *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráf U-ban k-élösszefüggő ($k \geq 1$), és tegyük fel, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$. Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = uz$ él, amelyre az $\{e, f\}$ élpár leemelésével kapott D^{ef} digráf is U-ban k-élösszefüggő.*

Biz. Egy $X \subset U$ részhalmazt nevezzünk **be-pontosnak,** ha $\varrho(X) = k$ és **ki-pontosnak**, ha $\delta(X) = k$. Az X-t **pontosnak** hívjuk, ha ki-pontos vagy be-pontos.

Lemma 5.1.2 *Legyen X és Y két t-t tartalmazó pontos halmaz. Ekkor $X \cup Y$ is pontos.*

Biz. Készen vagyunk, ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$, így feltehető, hogy nem ez a helyzet. Nem lehet, hogy az egyik halmaz ki-pontos, a másik pedig be-pontos, mert ha például $\varrho(X) = k$ és $\delta(Y) = k$, akkor az $\bar{Y} := U + z - Y$ és az X halmazra $2k = \varrho(X) + \varrho(\bar{Y}) = \varrho(X \cup \bar{Y}) + \varrho(X \cap \bar{Y}) + d(X, \bar{Y}) \geq 2k + 1$ adódna.

Tegyük fel most, hogy X, Y ki-pontosak. (A bizonyítás analóg abban az esetben, ha X, Y be-pontosak). Nem lehet, hogy $X \cup Y = U$, mert különben $\bar{X} \cap \bar{Y} = \{z\}$, és ekkor felhasználva, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$, (5.2) alapján azt kapnánk, hogy $2k = \varrho(\bar{X}) + \varrho(\bar{Y}) = \varrho(\bar{X} - \bar{Y}) + \varrho(\bar{Y} - \bar{X}) + \bar{d}(\bar{X}, \bar{Y}) \geq k + k + 1$. Ha viszont $X \cup Y \subset U$, akkor (5.3) miatt $2k = \delta(X) + \delta(Y) \geq \delta(X \cap Y) + \delta(X \cup Y) \geq k + k$, amiből a lemma következik. •

Ha egyáltalán nincs t-t tartalmazó pontos halmaz, akkor $e = zt$-vel bármely $f = uz$ leemelhető. Ha van ilyen pontos halmaz, akkor a lemma alapján létezik egy t-t tartalmazó egyértelmű maximális pontos M halmaz. Nem lehet, hogy minden z-be lépő él M-ből jön. Ha ugyanis $\varrho(M) = k$, akkor $\delta(U - M) = \varrho(M + z) \leq \varrho(M) - 1 = k - 1$, ellentétben az (5.3) feltevéssel, ha viszont $\delta(M) = k$, akkor $\varrho(U - M) = \delta(M + z) \leq \delta(M) - \varrho(z) + \delta(z) - 1 \leq k - 1$, ismét ellentétben (5.3)-gyel. Létezik tehát olyan $f = uz$ él, amelyre $u \in U - M$ és ez e-vel leemelhető. • •

Gyakorlat 5.1.1 *Mutassuk meg, hogy a $\varrho(z) = \delta(z)$ követelmény nélkül a tétel már $k = 1$-re sem igaz.*

Feladat 5.1.2 *Igazoljuk, hogy ha a $D = (U + z, A)$ digráf U-ban k-élösszefüggő ($k \geq 1$), és $\delta(z) \leq \varrho(z) < 2\delta(z)$, akkor akkor z-nél létezik leemelhető élpár, amely megőrzi az U-beli k-élösszefüggőséget.*

Érdemes Mader tételét az alábbi ekvivalens alakban is megfogalmazni.

TÉTEL 5.1.3 *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráf U-ban k-élösszefüggő ($k \geq 1$), és tegyük fel, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$. Ekkor a z-be belépő és z-ből kilépő élek párba állíthatók úgy, hogy a párokat egyszerre leemelve k-élösszefüggő digráfot kapunk az U csúcshalmazon.*

A z-vel szomszédos élek ilyen párba állítására és leemelésére a z csúcs **teljes leemelés**eként fogunk hivatkozni. A tételt könnyen felhasználhatjuk gyökeres k-élösszefüggőségre vonatkozó analóg eredmény igazolására.

TÉTEL 5.1.4 *Legyen $D = (U + z, A)$ olyan digráf, amelynek egy kijelölt $s \in U$ gyökércsúcsából U minden pontjába vezet k élidegen út, és tegyük fel, hogy $\varrho_D(z) \geq \delta_D(z)$. Ekkor a z-ből kilépő éleket párba lehet alkalmas $\delta_D(z)$ darab z-be belépő éllel úgy, hogy e párokat egyszerre leemelve és a fennmaradó $\varrho_D(z) - \delta_D(z)$ z-be lépő élt pedig kihagyva gyökeresen k-élösszefüggő digráfot kapunk az U csúcshalmazon.*

Biz. A digráf minden olyan v csúcsánál (beleértve z-t is), amelynek befoka nagyobb, mint a kifoka, adjunk a digráfhoz $\varrho(v) - \delta(v)$ párhuzamos vs élt. Állítjuk, hogy az így keletkező D' digráf U-ban k-élösszefüggő. Valóban, a tétel feltevése szerint egyrészt $\varrho_{D'}(X) = \varrho_D(X) \geq k$ minden nemüres $X \subseteq U - s$ halmazra. Másrészt D'-ben ilyen X halmaz minden pontjának kifoka legalább akkora, mint a befoka, és így $\delta_{D'}(X) \geq \varrho_{D'}(X) \geq k$. Az 5.1.3 tétel szerint D'-ben a z-nél létezik teljes leemelés, amely k-élösszefüggő digráfot eredményez U-n. Ha ebből kihagyjuk az s-be vezető éleket, akkor gyökeresen k-élösszefüggő digráfot kapunk, amely a tételben előírt módon keletkezett D-ből (ahol D'-ben a leemelésnél a z-ből s-be vezető $\varrho_D(z) - \delta_D(z)$ darab párhuzamos él z-be lépő párjai felelnek meg a kihagyandó éleknek). •

5.1.1 Kis általánosítás

Mader fenti tétele és következménye valójában az alábbi kissé általánosabb alakban is érvényben marad. A bizonyítás az eredetinél alig bonyolultabb.

TÉTEL 5.1.5 *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráf és $U' \subseteq U$, hogy a digráfnak minden $v \notin U'$ csúcsára* (így speciáliasan z-re is) *$\varrho(v) = \delta(v)$. Tegyük fel, hogy D az U'-ben k-élösszefüggő ($k \geq 1$). Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = uz$ él, amelyre az $\{e, f\}$ élpár leemelésével kapott D^{ef} digráf U'-ben k-élösszefüggő.*

Biz. Egy U'-t elválasztó $X \subseteq U$ részhalmazt akkor neveztünk be-pontosnak, ha $\varrho(X) = k$ és ki-pontosnak, ha $\delta(X) = k$. Egy $\{uz, zt\}$ élpár akkor és csak akkor felel meg a tétel kívánalmainak, ha nincsen olyan pontos halmaz, amely tartalmazza t-t és u-t.

Lemma 5.1.6 *Legyen X és Y két t-t tartalmazó pontos halmaz. Ekkor $X \cup Y$ is pontos.*

Biz. Nincs mit igazolni, ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$ így feltessszük, hogy nem ez a helyzet. Tegyük fel először, hogy az egyik halmaz be-pontos, a másik pedig ki-pontos, azaz $\varrho(X) = k$ és $\delta(Y) = k$. Legyen $\bar{Y} := U + z - Y$.

Tegyük fel először, hogy $X - Y = X \cap \bar{Y}$ nem választja el U'-t. Az nem lehet, hogy $U' \subseteq X - Y$, mert akkor Y nem választaná el U'-t. Így tehát $X - Y$-nak semelyik pontja sincs U'-ben. Ekkor a tétel feltevése szerint ezen pontok be- és kifoka megegyezik, amiből $\varrho(X \cap \bar{Y}) = \delta(X \cap \bar{Y})$ adódik. Most nyilván mind $X \cap Y$, mind $X \cup Y$ elválasztja U'-t, így (5.2) alapján $2k = \varrho(X) + \varrho(\bar{Y}) = \varrho(X - \bar{Y}) + \varrho(\bar{Y} - X) + \bar{d}(X, \bar{Y}) \geq \varrho(X \cap Y) + \delta(X \cup Y) \geq k + k$. Emiatt végig egyenlőségnek kell állnia és így $X \cup Y$ ki-pontos halmaz.

Így tehát feltehetjük, hogy $X - Y$ elválasztja U'-t, és analóg módon azt is, hogy $Y - X = V - (X \cup \bar{Y})$ elválasztja U'-t. Emiatt $\varrho(X - Y) \geq k$ és $\varrho(Y - X) \geq k$ és így $2k = \varrho(X) + \varrho(\bar{Y}) = \varrho(X \cup \bar{Y}) + \varrho(X \cap \bar{Y}) + d(X, \bar{Y}) \geq 2k + 1$ adódik, vagyis ez az eset nem fordulhat elő.

Tegyük fel most, hogy X és Y ki-pontosak. (A bizonyítás analóg abban az esetben, ha X, Y be-pontosak). Nem lehet, hogy $U' \subseteq X \cup Y$, mert akkor a tétel feltevése miatt $\varrho(\bar{X} \cap \bar{Y}) = \delta(\bar{X} \cap \bar{Y})$ és ekkor (5.2) alapján azt kapnánk, hogy $2k = \varrho(\bar{X}) + \varrho(\bar{Y}) = \varrho(\bar{X} - \bar{Y}) + \varrho(\bar{Y} - \bar{X}) + \bar{d}(\bar{X}, \bar{Y}) \geq k + k + 1$. Analóg módon, nem lehet, hogy $U' \cap (X \cap Y) = \emptyset$. Így tehát mind $X \cup Y$, mind $X \cap Y$ elválasztja U'-t és így (5.1) miatt $2k = \delta(X) + \delta(Y) \geq \delta(X \cap Y) + \delta(X \cup Y) \geq k + k$, amiből adódik, hogy $X \cup Y$ ki-pontos, és a lemma következik. •

Ha egyáltalán nincs t-t tartalmazó pontos halmaz, akkor $e = zt$-vel bármely $f = uz$ él leemelhető. Ha van ilyen pontos halmaz, akkor a lemma alapján létezik egy M egyértelmű maximális t-t tartalmazó pontos halmaz. Azt kell kimutatnunk, hogy a gráfban létezik olyan uz él, amelyre $u \in U - M$. Tegyük fel indirekt, hogy minden z-be lépő él M-ből jön. Ha $\varrho(M) = k$, akkor $\delta(U - M) = \varrho(M + z) \leq \varrho(M) - 1 = k - 1$, ellentétben az (5.3) feltevéssel. Ha $\delta(M) = k$, akkor $\varrho(U - M) = \delta(M + z) \leq \delta(M) - \varrho(z) + \delta(z) - 1 = k - 1$, ismét ellentétben (5.3)-gyel. • •

Megmutatjuk, hogy az 5.1.5 tétel is alkalmazható gyökeres élösszefüggés megőrzésére is.

TÉTEL 5.1.7 *Legyen a $D = (U, A)$ digráf olyan, hogy $(*)$ az s gyökérpontból egy $T \subseteq U$ halmaz minden pontjába vezet $k \geq 1$ élidegen út, azaz*

$$\lambda(s, u) \geq k \text{ minden } u \in T \text{ csúcsra.} \tag{5.4}$$

Tegyük fel, hogy

$$\text{minden } v \in U - T \text{ csúcsra } \varrho(v) \geq \delta(v). \tag{5.5}$$

Ha egy $z \in U - T$ csúcsra $\varrho(z) > \delta(z)$, akkor $\varrho(z) - \delta(z)$ darab z-be lépő él kihagyható úgy, hogy az (5.4) tulajdonság fennmarad. Ha $\varrho(z) = \delta(z)$, akkor létezik z-nél olyan leemelés, amely (5.4)-t megőrzi.

Biz. A digráf minden olyan $v \in U$ pontjára, amelyre $\varrho(v) > \delta(v)$ adjunk $\varrho(v) - \delta(v)$ darab v-ből s-be menő párhuzamos élt. Ekkor a keletkező D' digráf minden $v \in U - s$ csúcsára fennáll, hogy $\varrho'(v) \leq \delta'(v)$, amiből minden $X \subseteq U$ halmazra $\delta'(X) \geq \varrho'(X)$. Állítjuk, hogy az $U' := T + s$ halmaz D'-ben k-élösszefüggő. Valóban a tétel feltételét használva minden T-t metsző $X \subseteq U$ halmazra $\delta'(X) \geq \varrho'(X) = \varrho(X) \geq k$.

Az 5.1.5 tétel miatt D'-ben a z-nél lévő bemenő és kimenő élek párba állíthatók úgy, hogy a párok közül akármennyit leemelve a keletkező digráf U'-ben k-élösszefüggő. Ebből adódik, hogy ha $\varrho(z) = \delta(z)$, akkor ugyanezen leemeléseket D-ben végrehajtva (5.4) fennmarad. Ha viszont $\varrho(z) > \delta(z)$, úgy $\varrho(z) - \delta(z)$ darab z-be lépő él párja v-ből s-be menő (hozzáadott) él lesz, és ezért ezen z-be lépő élek halmaza kitörölhető D-ből a (5.4) megsértése nélkül. •

5.2 Az irányított élösszefüggőség növelése

Mader irányított leemelési tételének segítségével megoldhatjuk az irányított élösszefüggőség növelésének problémáját. Tegyük fel, hogy egy $D = (U, A)$ irányított gráf nem k-élösszefüggő, de új élek hozzáadásával szeretnénk azzá tenni. Jelölje a keresett új élek digráfját $H = (U, F)$. Több kérdés is természetesen adódik. H-nak a be- illetve a ki-fokaira tehetünk előírást, H élszámára felső korlátot, illetve közös általánosításként a be- és ki-fokokra felső korlátot és az élszámra felső korlátot.

TÉTEL 5.2.1 *Adott $D = (U, A)$ digráf és $m_{be} : U \to \mathbf{Z}_+$, $m_{ki} : U \to \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírások. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (U, F)$ digráf, amelyre $\varrho_H(v) = m_{be}(v)$ és $\delta_H(v) = m_{ki}(v)$ teljesül minden $v \in U$ pontra és $D + H$ k-élösszefüggő, ha $m_{be}(U) = m_{ki}(U)$,*

$$m_{be}(X) \geq k - \varrho_D(X) \tag{5.6}$$

és

$$m_{ki}(X) \geq k - \delta_D(X) \tag{5.7}$$

teljesül minden $\emptyset \neq X \subset U$ részhalmazra.

Biz. Ha létezik a kívánt H digráf, akkor $k \leq \varrho_{D+H}(X) = \varrho_D(X) + \varrho_H(X) \leq \varrho_D(X) + m_{be}(X)$, amiből (5.6) következik. (5.7) analóg módon látható. Mivel mind $m_{be}(U)$, mind $m_{ki}(U)$ a H éleinek számával egyenlő, így $m_{be}(U) = m_{ki}(U)$.

Az elegendőség bizonyításához adjunk a gráfhoz egy új z pontot és minden $v \in U$ pontra $m_{be}(v)$ párhuzamos élt z-ből v-be és $m_{ki}(v)$ párhuzamos élt v-ből z-be. Az (5.6) és (5.7) feltételek szerint teljesül az 5.1.3 Tétel feltétele. Így a z-be bemenő és a z-ből kijövő élek úgy párba állíthatók, hogy az $m_{be}(U)$ darab pár leemelésével keletkező digráf k-élösszefüggő. A leemelt élek H digráfja kielégíti a tétel feltételeit. •

TÉTEL 5.2.2 *Egy $D = (U, A)$ irányított gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k-élösszefüggővé, ha a pontok minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ rész-partíciójára*

$$\gamma \geq \sum_i [k - \varrho(X_i)] \tag{5.8}$$

és

$$\gamma \geq \sum_i [k - \delta(X_i)]. \tag{5.9}$$

Biz. A szükségesség bizonyítása egyszerű gyakorló feladat. Az elegendőséghez legyen $m_{be} : U \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény, amelyre (5.6) fennáll, $m_{be}(U) \geq \gamma$ és $m_{be}(U)$ minimális.

Lemma 5.2.3 $m_{be}(U) = \gamma$.

Biz. Indirekt legyen $m_{be}(U) > \gamma$. Nevezzünk egy $X \subset U$ halmazt **be-pontosnak**, ha $k - \varrho(X) = m_{be}(X)$. Az m_{be} minimalitása miatt minden v pont, amelyre $m_{be}(v) > 0$, benne van be-pontos halmazban. Tekintsük a (tartalmazásra nézve) maximális be-pontos halmazok $\mathcal{M} := \{X_1, \dots, X_t\}$ családját. Ha ennek létezik két X, Y tagja, melyekre $X \cup Y = U$, akkor (5.9)-t az $\{\bar{X}, \bar{Y}\}$ rész-partícióra felírva (ahol $\bar{X} := U - X, \bar{Y} := U - Y$) azt kapjuk, hogy $\gamma \geq k - \delta(\bar{X}) + k - \delta(\bar{Y}) = k - \varrho(X) + k - \varrho(Y) = m_{be}(X) + m_{be}(Y) \geq m_{be}(U)$, ellentmondásban az indirekt feltevéssel.

Következik tehát, hogy $\mathcal{M}$ bármely két X, Y tagjára $X \cup Y \neq U$. Emiatt $X \cap Y = \emptyset$, mert különben $k - m_{be}(X) + k - m_{be}(Y) = \varrho(X) + \varrho(Y) \geq \varrho(X \cap Y) + \varrho(X \cup Y) \geq k - m_{be}(X \cap Y) + k - m_{be}(X \cup Y) = k - m_{be}(X) + k - m_{be}(Y)$, amiből az következik, hogy $X \cup Y$ is be-pontos ellentétben X vagy Y maximalitásával.

Azt kaptuk, hogy $\mathcal{M}$ be-pontos halmazokból álló rész-partíció, amely fedi az összes olyan pontot, amelyre $m_{be}(v) > 0$. (5.8)-t használva $m_{be}(U) = \sum[m_{be}(X) : X \in \mathcal{M}] = \sum[k - \varrho(X) : X \in \mathcal{M}] \leq \gamma$, ellentmondás. •

Teljesen analóg módon kaphatunk egy (5.7)-t kielégítő m_{ki} függvényt, amelyre $m_{ki}(U) = \gamma$. Az 5.2.1 Tétel alkalmazásával a bizonyítás teljes. • •

Az élösszefüggés növelésével kapcsolatban érdemes még megvizsgálni a növelési feladatot, ha csak az m_{ki} függvény van előírva (amivel nyilván analóg az az eset, amikor csak az m_{be} függvény előírt).

TÉTEL 5.2.4 *Adott $D = (U, A)$ digráf és $m_{ki} : U \to \mathbf{Z}_+$ kifokszám-előírás. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (U, F)$ digráf, amelyre $\delta_H(v) = m_{ki}(v)$ teljesül minden $v \in U$ pontra és a $D + H$ digráf k-élösszefüggő, ha*

$$m_{ki}(U) \geq \sum_i [k - \varrho_D(X_i)] \tag{5.10}$$

teljesül U minden $\{X_i\}$ részpartíciójára és

$$m_{ki}(X) \geq k - \delta_D(X) \tag{5.11}$$

teljesül minden $\emptyset \neq X \subset U$ részhalmazra.

Biz. Legyen $\gamma := m_{ki}(U)$. Ezen γ-ra alkalmazva az előbbi tétel bizonyítását, most csak az m_{be} függvényt kell megkonstruálnunk, hiszen az m_{ki} már eleve adott. Tekintsük tehát a minimális m_{be} függvényt, amely teljesíti (5.7)-t. Elég igazolni, hogy az 5.2.3 Lemma érvényben van. Ha a lemma bizonyításában szereplő $\mathcal{M}$-nek létezik két X, Y tagja, melyekre $X \cup Y = U$, akkor (5.11) alapján $m_{be}(X) = k - \varrho_D(X) = k - \delta_D(\bar{X}) \leq m_{ki}(\bar{X})$ és $m_{be}(Y) = k - \varrho_D(Y) = k - \delta_D(\bar{Y}) \leq m_{ki}(\bar{Y})$. Ezeket összeadva kapjuk: $m_{be}(U) \leq m_{be}(X) + m_{be}(Y) \leq m_{ki}(\bar{X}) + m_{ki}(\bar{Y}) \leq m_{ki}(U) = \gamma$, ami épp a lemma állítása.

Amennyiben $\mathcal{M}$-ben nincs két ilyen X, Y tag, úgy (amint azt már láttuk) $\mathcal{M}$ részpartíció, és ezért (5.10) szerint $\gamma = m_{ki}(U) \geq \sum_i [k - \varrho_D(X_i)] = \sum_i [m_{be}(X_i)] = m_{be}(U)$, tehát a lemma ekkor is fennáll. •

Feladat 5.2.1 *Igazoljuk, hogy egy digráf akkor és csak akkor tehető erősen összefüggővé legfeljebb γ új él hozzávételével, ha legfeljebb γ forráskomponense van és legfeljebb γ nyelőkomponense van.* (A forráskomponens egy 0 befokú, a nyelőkomponens egy 0 kifokú erősen összefüggő részgráf).

5.3 Gyökeresen k-élösszefüggő digráfok előállítása

Lemma 5.3.1 *Tegyük fel, hogy egy $D = (V, A)$ digráfban $(*)$ egy s gyökérből egy $U \subseteq V - s$ halmaz minden pontjába vezet k élidegen út. Ha valamely $t \in U$ csúcsra $\varrho(t) > k$, akkor az egyik t-be lépő él kihagyható a $(*)$ tulajdonság elrontása nélkül.*

Biz. Tekintsünk k élidegen utat s-ből t-be és legyen $e = ut$ egy ezen utak által nem használt t-be lépő él. Állítjuk, hogy e kihagyása után $(*)$ fennáll. A k út miatt ugyanis minden U-beli v pontra igaz, hogy bármely $v\bar{s}$-halmaz befoka $G - e'$-ben is legalább k, és így Menger tétele szerint létezik s-ből v-be k élidegen út. •

Gyakorlat 5.3.1 *Igazoljuk, hogy egy élelhagyásra nézve minimális k-élösszefüggő digráfnak legfeljebb $2k(n-1)$ éle van. Azt is mutassuk meg, hogy ez a korlát éles abban az értelemben, hogy létezik $2k(n-1)$ élű minimális k-élösszefüggő digráf.*

TÉTEL 5.3.2 *Egy D digráf akkor és csak akkor s-ből k-élösszefüggő* ($k \geq 1$), *ha előállítható az s-ből kiindulva az alábbi három művelet egymás utáni ismételt alkalmazásával.*

(B1) *Két létező pontot kössünk össze egy irányított éllel.*
(B2) *Adjunk a digráfhoz egy új pontot és vezessünk bele k új élt.*
(B3) *Csípjünk össze j meglévő élt* ($0 < j < k$) *egy új z ponttal, és adjunk a digráfhoz $k - j$ darab z-be vezető* (esetleg párhuzamos) *új élt.*

Biz. Könnyen látszik, hogy a megadott műveletek gyökeresen k-élösszefüggő digráfot eredményeznek. A megfordításhoz élszám szerinti indukciót használunk. Amennyiben a digráfnak van olyan e éle, amelyet elhagyva a gyökeresen k-élösszefüggőség fennmarad, úgy indukció miatt $D-e$-nek már létezik a kívánt előállítása. Ennek a végén a (B1) művelettel az e élt visszaadva megkapjuk D keresett előállítását. Feltehetjük tehát, hogy D minimálisan gyökeresen k-élösszefüggő. Készen vagyunk, ha $|V|=1$, így legyen $|V|\geq 2$.

Az 5.3.1 lemma szerint $\varrho(v)=k$, ha $v\neq s$. A minimalitás miatt s-be nem lép be él, és így $0=\varrho(s)<\delta(s)$, ezért van olyan z pont, amelyre $(k=)\varrho(z)>\delta(z)$. Az 5.1.4 tétel miatt a z-be menő élek közül $k-\delta(z)$ kihagyható és a fennmaradó $j:=\delta(z)$ darab z-be lépő él leemelhető úgy, hogy a létrejövő D' digráf gyökeresen k-élösszefüggő lesz. De ekkor az eredeti D digráf $\delta(z)=0$ esetén a (B2), míg $\delta(z)\geq 1$ esetén a (B3) művelet segítségével áll elő D'-ből, és így indukcióval a tétel következik. •

5.3.1 Fenyők pakolása

Nevezzünk egy $D=(V,A)$ digráfot k-**fenyő-összefüggő**nek valamely $s\in V$ gyökérpontjára nézve, ha D tartalmaz k élidegen s-gyökerű feszítő fenyőt.

Lemma 5.3.3 *Az* 5.3.2 *tételben szereplő* (B1), (B2), (B3) *műveletek megőrzik egy digráf k-fenyő-összefüggőségét.*

Biz. Tegyük fel, hogy a $D'=(V',A')$ digráf k-fenyő-összefüggő és legyenek $F_1,F_2,\dots,F_k$ élidegen feszítő s-fenyők. A lemma állítása a (B1) és a (B2) műveletekre vonatkozólag nyilvánvaló, így csak (B3)-mal foglalkozunk. Jelölje $D=(V,A)$ a (B3) művelettel D'-ből keletkező digráfot. Amennyiben egyik fenyő él sem kerül összecsípésre, úgy a z-be belépő k darab új élt tetszés szerint szétoszthatjuk a k darab F_i fenyők között. Tegyük most fel, hogy a k fenyő közül az első $\alpha\geq 1$ darab használ (B3) során összecsípett élt. Mindegyik ilyen F_i-re $(1\leq i\leq\alpha)$ tekintsünk egy olyan $e_i=u_iv_i$ összecsípésre kerülő élt, amely az F_i-ben a gyökérhez legközelebb van. Módosítsuk az F_i-t úgy, hogy e_i-t helyettesítjük az u_iz és zv_i élekkel, az összes többi F_i-beli összecsípésre kerülő uv élt pedig helyettesítjük az zv éllel. Íly módon kapunk α élidegen feszítő fenyőt D-ben. Ekkor még fennmarad $k-\alpha$ darab z-be lépő él, amelyeket a fennmaradt ugyanennyi darab F_i $(i=\alpha+1,\dots,k)$ fenyők között szétosztva megkapjuk a D digráf k élidegen feszítő s-fenyőjét. •

TÉTEL 5.3.4 (Edmonds: gyenge alak) *Ha egy $D=(U,A)$ digráf valamely s gyökérre nézve k-élösszefüggő, úgy tartalmaz k élidegen s-gyökerű feszítő fenyőt.*

Biz. Az 5.3.2 tétel szerint D előáll valamely D' gyökeresen k-élösszefüggő digráfból az ott megadott műveletek segítségével. Indukció alapján D'-ben létezik k élidegen feszítő fenyő, és így a lemma alapján D-ben is. •

Feladat 5.3.2 *Adjuk meg az olyan irányítatlan gráfoknak az előzővel analóg előállítását, amelyek tartalmaznak k élidegen feszítő fát.*

Feladat 5.3.3 *Vezessük le Edmonds tételéből az* 5.3.2 *előállítási tételt.*

Általánosítás

Az 5.1.5 tétel segítségével megadhatjuk az Edmonds tétel gyenge alakjának általánosítását is.

TÉTEL 5.3.5 *Tegyük fel, hogy egy $D=(V,A)$ digráf valamely s gyökérpontjára és csúcsainak egy s-t nem tartalmazó $T\subset V$ részhalmazára nézve k-szor (s,T)-élösszefüggő, azaz létezik s-ből T minden pontjába k-élidegen út. Tegyük fel, hogy minden $v\in V-T-s$ csúcsra $\varrho(v)\geq\delta(v)$. Ekkor létezik k élidegen s-gyökerű fenyő, melyek mindegyike tartalmazza az egész T-t.*

Biz. Az 5.3.1 lemma szerint feltehetjük, hogy minden T-beli csúcs befoka pontosan k, míg s befoka 0.

Abban az esetben, amikor $U':=T+s$ valódi része V-nek, egy $z\in V-U'$ csúcsra alkalmazhatjuk az 5.1.7 tételt, és akkor indukcióval készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy $T=V-s$. $\varrho(s)=0<\delta(s)$ miatt van olyan z pont, amelynek befoka nagyobb, mint a kifoka. Az első rész szerint létezik k élidegen s-fenyő, amelyek mindegyike tartalmazza $T-z$ minden pontját. E fenyő közül ha j tartalmaz z-be lépő élt, akkor a maradék $k-j$ darab z-be lépő élt kiosztva a maradék $k-j$ fenyő között a keletkező k fenyő mindegyike feszítő lesz. •

Feladat 5.3.4 *Példával mutassuk meg, hogy az* 5.3.5 *tételben a $\varrho(v)\geq\delta(v)$ követelmény nem hagyható ki* (már a $k=2$ esetben sem: van példa öt pontú digráfon!)

Következmény 5.3.6 *Tegyük fel, hogy a $D=(V,A)$ digráf élei úgy vannak megszínezve, hogy az azonos színű élek feje megegyezik. Akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő s-fenyő úgy, hogy semelyik színosztályt sem használhatja több, mint egy fenyő, ha bármely $X\subseteq V-s$ halmazra az X-be belépő élek között van legalább k különböző színű.*

Biz. A feltevés nyilván szükséges. Az elegendőség bizonyításához minden $v \in V - s$ pontra vezessünk be $\sum \sigma(v)$ új pontot, ahol $\sigma(v)$ jelöli a v-be menő élek különböző színeinek a számát, helyettesítsünk minden egyes v-be menő i színű élt egy v_i-menő éllel, ahol v_i az i-dik színnek megfelelő új pont, és mindegyik v-nél lévő új pontból vezessünk egy új élt v-be. Legyen $T := V - s$. Most minden $T + s$-n kívüli pont kifoka egy, így teljesül az előző 5.3.5 tétel feltétele. Az új digráf k élidegen T-feszítő fenyője az eredeti digráfban k olyan fenyőnek felel meg, melyek élei mind különböző színűek. •

Feladat 5.3.5 *Legyenek $\{s_i, t_i\}$ pontpárok egy k-élösszefüggő D digráfban. Bizonyítsuk be, hogy léteznek élidegen utak s_i-ből t_i-be $(i = 1, 2, \ldots, k)$.*

Független fenyők

TÉTEL 5.3.7 (Huck) *Legyen $D = (V, A)$ aciklikus egyszerű digráf, melyben $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ a forráspontok* (azaz 0 befokú pontok) *halmaza $U := V - S$ pedig a többi csúcsé. Tegyük fel, hogy minden $u \in U$ pont befoka legalább k. Ekkor $i = 1, \ldots, k$-ra léteznek s_i gyökerű $U + s_i$-t feszítő F_i fenyők úgy, hogy minden $u \in U$ pontra az egyes F_i fenyőkben lévő $s_i u$-utak az u-tól eltekintve diszjunktak.*

Biz. A tételben leírt tulajdonságú fenyőket nevezzük **függetlenn**ek.

Lemma 5.3.8 *Ha egy $D' = (U + s, A')$ egyszerű aciklikus digráfban egy s forrásponton kívül minden pont befoka legalább egy, akkor az U elemeinek létezik egy olyan sorrendje, amelyben az előre mutató élek halmaza néhány s-ből induló éllel kiegészítve feszítő s-fenyőt alkot.*

Biz. Az állítás nyilvánvaló, ha U egyelemű, így tegyük fel, hogy $|U| \geq 2$. Ekkor létezik egy z nyelőpont. Indukcióval a $D' - z$ digráfban létezik az $U - z$-beli csúcsoknak egy kívánt sorrendje. Amennyiben z-be egyedül az s-ből vezet él, úgy tegyük z-t a meglévő sorrend elé legelső pontnak. Ha viszont U valamely pontjából lép él z-be, akkor jelölje u_i a sorrendben legelső ilyent és illesszük z-t az u_i és a rákövetkező u_{i+1} pont közé. Az U így kapott sorrendjére a lemma kívánalma teljesül, hiszen az egyetlen új előre menő él $u_i z$. •

A tétel $k = 1$-re nyilvánvaló, ezért feltesszük, hogy $k \geq 2$. Alkalmazzuk a lemmát a D digráf $U + s_k$ által feszített $D' = (U + s_k, A')$ részgráfjára. Legyen $u_1, \ldots, u_p$ az U elemeinek a lemma által biztosított sorrendje és F_k az ehhez tartozó fenyő.

Jelölje D'' azt a digráfot, amely D-ből keletkezik az s_k csúcs valamint az F_k fenyő éleinek elhagyásával. Indukció miatt D''-ben $i = 1, \ldots, k-1$-re léteznek a kívánt $F_1, \ldots, F_{k-1}$ független fenyők. Miután ezen fenyők minden U-beli pontból induló éle az $u_1, \ldots, u_p$ sorrendben visszafelé vezet, míg az F_k fenyő élei mind előre, ezért minden $u \in U$ pontra az F_k-ban lévő $s_k u$-útnak és bármely F_i-ben $(i = 1, \ldots, k-1)$ lévő $s_i u$-útnak u az egyedüli közös pontja. • •

Bebizonyítható, hogy tetszőleges digráfban $k = 2$-re, ha azt tesszük fel, hogy az S (kételemű) halmazból minden $u \in U$ csúcsba vezet 2 diszjunkt út, akkor létezik két független fenyő. Magasabb k-ra ugyanakkor a megfelelő állítás már nem érvényes.

5.4 Fedések és pakolások (irányított) fákkal

Az Edmonds tétel egy érdekes alkalmazása a következő. Egy irányított erdőt nevezzünk **fenyves**nek, ha minden pont befoka legfeljebb egy (másszóval az erdő mindegyik komponense fenyő).

TÉTEL 5.4.1 *A $D = (V, A)$ digráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető le k fenyvessel, ha* (i) *minden pont befoka legfeljebb k, és* (ii) *$i(X) \leq k(|X| - 1)$ teljesül minden $X \subseteq V$ halmazra, ahol $i(X)$ jelöli az X által feszített élek számát.*

Biz. Mindkét feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elegendőséget elemi konstrukcióval igazoljuk. Adjunk a digráfhoz egy új s pontot és minden v pontra $k - \varrho(v)$ párhuzamos élt s-ből v-be. Az új D' digráfban minden $X \subseteq V$ halmazra fennáll $\varrho'(X) = \varrho(X) + \sum[k - \varrho(v) : v \in X] = \varrho(X) - \varrho(X) - i(X) + k|X| \geq k$. Az 5.3.4 tétel szerint létezik k diszjunkt s-gyökerű feszítő fenyő. Ezeket az eredeti D-re megszorítva k fenyvest kapunk, melyek fedik D éleit. •

Feladat 5.4.1 *Igazoljuk, hogy ha egy párhuzamos élt és hurkot nem tartalmazó digráfban minden pont befoka legfeljebb K, akkor az élhalmaz lefedhető $K + 1$ fenyvessel.*

Irányítatlan gráfokra könnyen levezethetjük Nash-Williams [1960] (történetileg korábbi) tételét.

TÉTEL 5.4.2 (C.St.J.A. Nash-Williams) *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető le k erdővel, ha minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ részhalmazra*

$$i_G(X) \leq k(|X| - 1). \tag{5.12}$$

Biz. A 2.2.7 tétel szerint $G = (V, E)$-nek akkor és csak akkor van olyan irányítása, amelyben minden pont befoka legfeljebb k, ha $i_G(X) \leq k|X|$ teljesül minden $X \subseteq V$-re. Így a tétel feltételéből következik ilyen irányítás létezése, és ezért az 5.4.1 tételt alkalmazhatjuk. •

Feladat 5.4.2 *Igazoljuk, hogy egyszerű síkgráf élei lefedhetők három erdővel.*

Irányítások segítségével Edmonds tételéből levezethetjük Tutte diszjunkt fákra vonatkozó eredményét is.

TÉTEL 5.4.3 (W.T. Tutte) *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf akkor és csak akkor k-faösszefüggő, ha k-partíció-összefüggő, másszóval, G-ben akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fa, ha V minden $\mathcal{F} := \{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára fennáll, hogy*

$$e(\mathcal{F}) \geq k(t - 1), \tag{5.13}$$

ahol $e(\mathcal{F})$ a részek között vezető élek számát jelöli (azaz $e(\mathcal{F}) = \sum_i d(V_i)/2$).

Az elegendőség bizonyítása érdekében csupán azt kell belátnunk, hogy valamely kijelölt s pontra létezik G-nek s-ből k-élösszefüggő irányítása. Ebben az esetben ugyanis Edmonds tétele miatt a megirányított gráfban létezik k élidegen feszítő fenyő, melyek az eredeti irányítatlan gráfban megadják a keresett k élidegen feszítő fát. Az 3.2.1 tétel alkalmazásával a $\gamma = 0$ esetben Tutte tétele adódik, magasabb γ-ra pedig az alábbi többlet.

Következmény 5.4.4 *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot akkor és csak akkor lehet legfeljebb γ új él hozzáadásával úgy kibővíteni, hogy a megnövelt gráf tartalmazzon k élidegen feszítő fát, ha (3.4) teljesül V minden $\mathcal{F} := \{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára. Tetszőleges $s \in V$ pontra érvényes továbbá, hogy az új élek mind választhatók s végpontúnak.* •

Egy játék

Befejezésül álljon itt Tutte tételének egy kedves alkalmazása. Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfon két játékos –vágó és kötő– játszik. Kötő egy lépésében kiválaszt egy élt és összehúzza. Vágó egy lépésében kiválaszt egy élt és eltörli. Kötő nyer, ha sikerül egy pontta összehúznia a gráfot, ami azzal ekvivalens, hogy sikerült egy feszítő fa valamenyi élét kijelölnie. Vágó nyer, ha egy vágás éleit mind kitörölte. Tegyük fel, hogy vágó kezd.

TÉTEL 5.4.5 *Kötőnek akkor és csak akkor van nyerő stratégiája, ha van két élidegen feszítő fa. Vágónak akkor és csak akkor van nyerő stratégiája, ha a csúcsoknak létezik egy olyan $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciója, amelyben a keresztélek száma legfeljebb $2t - 3$.*

Biz. Tutte tételét $k = 2$-re alkalmazva kapjuk, hogy egy gráfban akkor és csak akkor van két élidegen feszítő fa, ha a csúcsoknak minden $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára a keresztélek száma legalább $2t - 2$. Tehát a kétféle konfiguráció közül, pontosan az egyik létezik.

Tegyük fel, hogy létezik F_1, F_2 két élidegen feszítő fa. Ha vágó mondjuk F_1 egy e élét törli el, akkor kötő válaszul F_2-nek egy olyan élét húzza össze, amely az $F_1 - e$ erdő két komponense között vezet. Ha vágó nem $F_1 \cup F_2$-beli élt töröl, akkor kötő bármelyik faélt összehúzhatja. Mindkét esetben a keletkezett gráfban van két élidegen feszítő fa. Tehát, ha van két élidegen feszítő fa, akkor kötőnek valóban van nyerő stratégiája.

Tegyük most fel, hogy létezik olyan $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíció, amelyre a keresztélek száma legfeljebb $2t - 3$. Vágó minden lépésében ezen keresztélek egyikét hagyja el. Az első lépés után legfeljebb csak $2t - 4$ keresztél marad. A kötő az egész játék során ezen keresztéleknek legfeljebb csak a felét választhatja, azaz legfeljebb $t - 2$-t, vagyis a kötő által választott élhalmaz biztosan nem lesz összefüggő. •

Feladat 5.4.3 *Igazoljuk, hogy ha egy gráf felbontható k élidegen feszítő fa uniójára, akkor úgy is felbontható, hogy a gráf egy alkalmas pontja mindegyik fában legfeljebb 2 fokú.*

Fentebb megmutattuk, hogy Tutte tétele miként következik egy irányítási tétel közbeiktatásával Edmonds fenyő tételéből. Most megmutatjuk, hogy az Edmonds tétel gyenge alakja is levezethető Tutte tételéből.

Biz. (az 5.3.4 tételben az elegendőségé) Közismert, hogy irányítatlan gráfban, ha adott két feszítő fa és az egyiknek egy éle, akkor a másiknak van olyan éle, amellyel kicserélve egymást mindkét fából fát kapunk. (Ez általában egy matroid két bázisára is érvényes.) Az is világos, hogy
($*$) ha uv_1 és uv_2 egy fa két éle, akkor egy uv_3 nem-fa él legfeljebb csak az egyikük helyére cserélhető be úgy, hogy fát kapjunk.

Állítjuk, hogy ha egy digráfban ha $\lambda(s, v) \geq k$ minden v csúcsra teljesül, de bármely élt eltörölve ez már nem igaz, akkor $\varrho(v) = k$ minden $v \neq s$ csúcsra. Valóban, a feltevés szerint minden él belép pontos halmazba. Továbbá láttuk, hogy egy v pontot tartalmazó pontos halmazok $P(v)$ metszete pontos, és így minden v-be lépő él $P(v)$-be is belép, amiből adódik, hogy $\varrho(v) = k$.

Ennek alapján az Edmonds tételt elég olyan digráfokra igazolni, amelyben

$$\varrho(s) = 0, \tag{5.14}$$

$$\varrho(v) = k \ (v \in V - s), \tag{5.15}$$

vagyis ilyenkor az élek száma $k(n-1)$. A $\varrho(X) \geq k$ $(X \subseteq V - s)$ feltételből adódik, hogy V bármely $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára a kereszt-élek száma legalább $k(t-1)$. Tutte tétele alapján a digráf élhalmaza felbomlik k élidegen feszítő fa uniójára. A következőt igazoljuk.

Lemma 5.4.6 *Ha egy D irányított gráf felbomlik k élidegen feszítő fa uniójára, továbbá* (5.14) *és* (5.15) *teljesül, akkor D felbomlik k fenyő uniójára is.*

Biz. Nyilván létezik olyan u pont, amelynek kifoka kisebb, mint k (ami a befoka). Állítjuk, hogy van olyan fákra bontás, amelyben minden fa pontosan egy u-ba lépő élt használ. Valóban ha az egyik F fa két v-be lépő élt használ, akkor a felbontás egy másik H fája egyet sem, és ekkor az F egyik u-be lépő élét a H alkalmas élével felcserélve jobb felbontást kapnánk.

Kimutatjuk, hogy létezik olyan fa-felbontás is, amelyben ráadásul minden fa legfeljebb egy u-ból kilépő élt használ. Valóban, ha az egyik fa, F, használná mondjuk az uv_1 és uv_2 éleket, akkor egy másik fa, H nem használna u-ból kilépő élt. Tekintsük most mindkét élhez a vele kicserélhető élt. Ez $(*)$ miatt az egyik esetben, mondjuk uv_1-re, biztosan nem a H-nak az u-ba lépő egyetlen éle. Így ezen éleket felcserélve jobb felbontást kapunk.

Tehát van olyan fa-felbontás, amelyben minden fa az u-nál egyetlen bemenő élt és legfeljebb egy kilépő élt használ. Ha most az u-nál kihagyunk $\varrho(u) - \delta(u)$ bemenő élt, a megmaradó $\delta(u)$ bemenő élt összepárosítjuk a kimenő élekkel, és mindegyik $\{xu, ux'\}$ élpárt helyettesítjük az xx' éllel (más szóval "leemeljük" az élpárt), akkor egy olyan digráfot kapunk a $V - u$ halmazon, amelyre teljesülnek a lemma feltételei. Így indukció alapján ez már felbomlik k élidegen fenyőre. A leemeléseket visszaállítva és a kihagyott éleket kiosztva azon fenyőkhöz, amelyek nem tartalmaztak leemelt élt az eredeti digráfnak egy fenyő felbontását kapjuk. •

2007. május 6.file: graf emel2

6. Fejezet

SZÍNEZÉSEK

6.1 Perfekt gráfok

A $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban a következő jelöléseket használjuk.

$\chi(G)$ kromatikus szám: a legkisebb szám, ahány stabil részhalmazba a csúcsokat fel lehet bontani,
$\omega(G)$: a maximális klikk elemszáma,
$\bar{\chi}(G)$ klikkfedési szám: a komplementer gráf kormatikus száma,
$\alpha(G)$: a maximális stabil halmaz elemszáma ($= \omega(\bar{G})$).

Nyilván $\chi \geq \omega$ és $\bar{\chi} \geq \alpha$. Egy $G = (V, E)$ gráfot akkor nevezünk **perfekt**nek, ha minden feszített G' részgráfjában $\chi(G') = \omega(G')$, vagyis a kromatikus szám egyenlő a maximális klikk méretével. Egy páros gráf nyilván perfekt, és a komplementere is az (a Kőnig tétel fedési alakja miatt). H páros gráf élgráfja is perfekt hiszen az élgráf kromatikus száma éppen a H gráf $\chi'(H)$ élszínezési száma, míg a klikkszáma a H maximális $\Delta(H)$ fokszáma, márpedig Kőnig élszínezési tétele szerint $\omega'(H) = \Delta(H)$. A H páros gráf élgráfjának komplementere is perfekt, mert egyrészt ennek egy stabil halmaza a H egy csúcsában végződő élei halmazának felel meg, vagyis a kromatikus száma épp H lefogó pontjainak minimális $\tau(H)$ száma, másrészt pedig egy klikkje a H egy párosításának felel meg, márpedig Kőnig tétele szerint $\tau(H) = \nu(H)$. Részbenrendezett halmaz gráfja (comparability gráf) is perfekt a Dilworth tétel polárisa miatt, és a komplementer gráfja is perfekt a Dilworth tétel miatt.

Legyen $H = (S, \mathcal{F})$ olyan hipergráf, amelyben az üres halmaz nem hiperél. Valamely $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ esetén a $H' = (S, \mathcal{F}')$ hipergráfot a H részhipergráfjának nevezzük. Egy pont **foka** a pontot tartalmazó hiperélek száma. $\Delta(H)$ jelöli a maximális fokszámot. A hipergráf $\chi'(H)$ **kromatikus indexe** vagy **élszínezési száma** az a legkisebb szám, ahány színnel a hiperéleket meg lehet színezni úgy, hogy az egyszínű élek páronként diszjunktak legyenek. Nyilván $\Delta \leq \chi'$. Egy hipergráfot **Δ-normális**nak nevezünk, ha minden H' részhipergráfjára $\Delta(H') = \chi'(H')$. A diszjunkt hiperélek maximális számát $\nu(H)$ jelöli, míg a hiperéleket fedő (lefogó) pontok minimális számát $\tau(H)$. Nyilván $\nu \leq \tau$. Egy hipergráfot **τ-normálisnak** nevezünk, ha minden H' részhipergráfjára $\tau(H') = \nu(H)$.

Egy hipergráfról akkor mondjuk, hogy **Helly tulajdonságú**, ha páronként metsző hiperéleinek egy rendszerét mindig le lehet fogni egy ponttal.

Gyakorlat 6.1.1 *Mind a Δ-normális, mind a τ-normális hipergráfok Helly tulajdonságúak.*

TÉTEL 6.1.1 *Legyen H egy Δ-normális hipergráf. Ekkor bármely hipergráf, amely H-ból hiperélek elhagyásával és/vagy többszörözésével keletkezik Δ-normális.*

Biz. Azt látjuk be, hogy bármely Z hiperél megkétszerezésével keletkező H^+ hipergráfra $\chi'(H^+) = \Delta(H^+)$. Ebből már a tétel teljes általánosságban következik. Jelölje Z^+ a Z bevett másodpéldányát. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset *A Z-nek létezik olyan pontja, amelynek H-beli foka $\Delta(H)$.* Ekkor $\Delta(H^+) = \Delta(H) + 1$, és a H egy $\Delta(H)$ színnel történő élszínezéséhez a Z^+ élt egy új színnel hozzávéve megkapjuk H^+ egy $\Delta(H^+)$ színű élszínezését.

2. eset *Z-nek minden pontja legfeljebb $\Delta(H) - 1$ fokú H-ban.* Tekintsük H-nak egy $\Delta(H)$ színnel történő élszínezését, amelyben a Z-vel egyező színű hiperélek legyenek $Z_1, \ldots, Z_t$. Egy színosztály szükségképpen fed minden $\Delta(H)$ fokú pontot, speciálisan a $\{Z, Z_1, \ldots, Z_t\}$ színosztály is, sőt már a $\{Z_1, \ldots, Z_t\}$ osztály is, hiszen Z-ben a feltevés szerint egyáltalán nincs $\Delta(H)$ fokú pont. Emiatt a H^+ hipergráfból a $Z_1, \ldots, Z_t$ hiperélek törlésével keletkező H' részhipergráfban a maximális fokszám $\Delta(H) - 1$. A Δ-normalitás miatt H' hiperélei megszínezhetők $\Delta(H)-1$ színnel. Ehhez hozzávéve a (diszjunkt halmazokból álló $\{Z^+, Z_1, \dots, Z_t\}$ színosztályt a H^+ hipergráf egy $\Delta(H^+) = \Delta(H)$ színnel történő élszínezését kapjuk. •

TÉTEL 6.1.2 *Ha egy H hipergráf Δ-normális, akkor τ-normális.*

Biz. Elég belátni, hogy $\tau(H) = \nu(H)$, mert részhipergráfokra ugyanúgy következik az egyenlőség. ν szerinti indukciót használunk. Ha $\nu(H) = 0$, azaz a hipergráfnak egyáltalán nincs éle, akkor nulla ponttal lefogható, azaz $\tau(H) = 0$. Tegyük fel, hogy $\nu(H) > 0$. Valamely $s \in S$ ponthoz jelölje H_s azt a részhipergráfot, amely H-nak az s-t nem tartalmazó hiperéleiből áll.

1. eset *Létezik olyan $s \in S$ pont, amelyre $\nu(H_s) \leq \nu(H) - 1$.* Indukcióval egyrészt $\tau(H_s) = \nu(H_s)$, másrészt a H_s hiperéleinek egy $\tau(H_s)$ elemű lefogását az s ponttal kiegészítve a H egy lefogását kapjuk, így $\tau(H) \leq \tau(H_s) + 1$. Ezeket összevetve a triviális $\nu(H) \leq \tau(H)$ egyenlőtlenséggel, azt kapjuk, hogy $\nu(H) \leq \tau(H) \leq \tau(H_s) + 1 = \nu(H_s) + 1 \leq \nu(H)$, amiből végig egyenlőség, így speciálisan $\nu(H) = \tau(H)$ adódik.

2. eset *Minden $s \in S$ ponthoz létezik egy $\nu(H)$ páronként diszjunkt H_s-beli halmazból álló $\{F_1^s, F_2^s, \dots, F_{\nu(H)}^s\}$ halmazrendszer.* Ezeket összetéve egy olyan H^* hipergráfot kapunk, amely az eredeti H hipergráf bizonyos éleinek esetleges többszörözésével jött létre, amelynek összesen $|S|\nu(H)$ hiperéle van, és amelyben minden pont foka legfeljebb $|S| - 1$. A 6.1.1 tétel miatt H^* hiperélei megszínezhetők $|S| - 1$ színnel. De ekkor a legnagyobb színosztály több, mint $\nu(H)$ hiperélt tartalmaz, ellentétben $\nu(H)$ definíciójával. Vagyis a 2. eset nem fordulhat elő. •

Tetszőleges $G = (V, E)$ gráfhoz hozzárendelhetjük az ún. **klikk-hipergráf**ját, melyet jelöljünk H_G-vel. Ennek csúcsai a G tartalmazásra nézve maximális klikkjeinek felelnek meg, míg hiperélei a G csúcsainak. Egy $v \in V$ gráfcsúcshoz rendelt hiperél álljon mindazon hipergráf pontból, amelyre a hozzátartozó G-beli maximális klikk tartalmazza v-t.

A definícióból következik, hogy a gráf két csúcsa akkor és csak akkor nem szomszédos, ha a nekik megfelelő hiperélek diszjunktak. Valóban, ha az u és v csúcs szomszédos, akkor benne vannak egy maximális K klikkben, így az u-nak és v-nek megfelelő hiperélek tartalmazzák a K-nak megfelelő pontot. Míg ha a két hiperélnek van közös pontja, akkor az ennek megfelelő G-beli maximális klikk tartalmazza a két hiperélnek megfelelő egy-egy gráfcsúcsot, tehát ezek szomszédosak. Következik, hogy ha K a G egy nem-bővíthető klikkje és v az ennek megfelelő gráfpont, akkor $|K| = d_H(s)$, ahol $d_H(s)$ jelöli az s pont H-beli fokát (:s-t tartalmazó hiperélek számát). Emiatt

$$w(G) = \Delta(H_G) \text{ és } \bar{\chi}(G) = \tau(H_G). \tag{6.1}$$

Hasonlóképp megfigyelhető, hogy G stabil részhalmazai és a H_G diszjunkt hiperélekből álló részhipergráfjai között egy-egy értelmű kapcsolat van, és emiatt

$$\alpha(G) = \nu(H_G) \text{ és } \chi(G) = \chi'(H_G). \tag{6.2}$$

Tetszőleges H hipergráfhoz hozzárendelhetjük a G_H **élgráf**ját (másnéven **metszetgráf**ját), amelyben a csúcsoknak a hipergráf élei felelnek meg: kettő akkor szomszédos, ha a megfelelő hiperélek metszik egymást. Egy-egy értelmű kapcsolat van a hipergráf páronként diszjunkt éleinek rendszerei és az élgráf stabil ponthalmazai között, emiatt

$$\nu(H) = \alpha(G_H) \text{ és } \chi'(H) = \chi(G_H). \tag{6.3}$$

Egy H hipergráfban valamely s pontot tartalmazó hiperéleknek az élgráfban egy klikk felel meg, amelynek mérete $d_H(v)$ Amennyiben H Helly tulajdonságú, úgy a megfordítás is érvényes, miszerint ha a H néhány élének megfelelő pontok klikket alkotnak G_H-ban (azaz ezen hiperélek páronként metszőek), akkor ezen hiperélek egy ponttal lefoghatók. Így Helly hipergráfra

$$\Delta(H) = \omega(G_H) \text{ és } \tau(H) = \bar{\chi}(G_H). \tag{6.4}$$

TÉTEL 6.1.3 *Ha egy $G = (V, E)$ gráf perfekt, akkor a klikk-hipergráfja Δ-normális.*

Biz. Legyen $H' = (S, \mathcal{F}')$ a klikk-hipergráf egy részhipergráfja. Az $\mathcal{F}'$ tagjainak megfelelő gráfcsúcsok halmaza legyen V'. Legyen G' a V' által feszített részgráfja G-nek. Legyen $\beta := \chi(G') = \omega(G')$. Tekintsük először G' pontjainak egy β-színezését. Ez definiálja a H' hiperéleinek egy β-színezését, amelyben az azonos színű hiperélek páronként diszjunktak. Tehát $\chi'(H') \leq \beta$. Legyen tovább $K' \subseteq V'$ egy β elemű klikk. Ez kibővíthető a G egy (tartalmazásra nézve) maximális K klikkjévé. A K-nak megfelelő H-beli pont benne van a V' elemeinek megfelelő hiperélekben, azaz $\Delta(H') \geq \beta$, és így $\Delta(H') \geq \chi'(H') \geq \Delta(H')$, tehát $\Delta(H') = \chi'(H')$, vagyis H valóban Δ-normális. •

TÉTEL 6.1.4 (Lovász perfekt gráf tétele) *Egy perfekt gráf komplementere perfekt.*

Biz. Elég azt belátni, hogy $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$, hiszen $\bar{G}$ egy $V' \subseteq V$ ponthalmaz által feszített részgráfja nem más, mint a V' által G-ben feszített részgráf komplementere.

Az előző tétel szerint mivel G perfekt, ezért H_G klikk-hipergráfja Δ-normális. Így a 6.1.2 tétel miatt H_G τ-normális. (6.1) és (6.2) alapján $\chi(\bar{G}) = \bar{\chi}(G) = \tau(H_G) = \nu(H_G) = \alpha(G) = \omega(\bar{G})$. •

Végül megmutatjuk, hogy a 6.1.2 tétel megfordítottja is érvényes.

TÉTEL 6.1.5 *Ha H egy τ-normális hipergráf, akkor Δ-normális.*

Biz. Mivel H részhipergráfja is τ-normális, így elég belátni, hogy $\Delta(H) = \chi'(H)$. Mivel H τ-normális, így a G_H élgráf komplementere perfekt. A perfekt gráf tétel miatt G_H is perfekt, és ezért $\chi(G_H) = \omega(G_H)$. Márpedig G_H egy klikkjének pontjai a H páronként metsző hiperéleinek felelnek meg, amelyek egy ponttal lefoghatók, hiszen H τ-normális. Ezért H $\Delta(H)$ maximális fokszáma egyenlő $\omega(G_H)$-val. Másrészt egy-egy értelmű kapcsolat van G_H pontszínezései és H élszínezései között, így $\chi'(H) = \chi(G_H)$, amiből $\Delta(H) = \chi'(H)$. •

Kiderült tehát, hogy egy hipergráf akkor és csak akkor τ-normális, ha Δ-normális. Emiatt az ilyen hipergráfokat röviden **normális** hipergráfnak nevezik. Miután láttuk, hogy normális hipergráfból éltöbbszörözéssel normális hipergráfot kapunk, kapjuk az alábbi eredményt.

Lemma 6.1.6 (Többszörözési lemma) *Ha egy perfekt gráf egy v pontját egy klikkel helyettesítjük abban az értelemben, hogy a klikk minden pontja a v eredeti szomszédaival van összekötve, akkor perfekt gráfot kapunk.*

Gyakorlat 6.1.2 *Ha egy perfekt gráf egy v pontját egy S stabil halmazzal helyettesítjük abban az értelemben, hogy S minden pontja a v eredeti szomszédaival van összekötve, akkor perfekt gráfot kapunk.*

A Többszörözési lemmából rögtön adódik:

TÉTEL 6.1.7 *Legyen $w : V \to \mathbf{Z}_+$ a $G = (V, E)$ perfekt gráf csúcsainak egy nemnegatív egészértékű súlyozása. A maximális súlyú stabil halmaz α_w súlya egyenlő azon (nem feltétlenül különböző) klikkek minimális $\bar{\chi}_w(G)$ számával, melyek közül legalább $w(v)$ tartalmaz minden v csúcsot. A maximális súlyú klikk ω_w súlya egyenlő azon (nem feltétlenül különböző) stabil halmazok minimális $\chi_w(G)$ számával, melyek közül legalább $w(v)$ tartalmaz minden v csúcsot.* •

file: graf: perfekt 2007. május 6.

6.2 Listaszínezés

6.2.1 Páros gráfok élszínezése

TÉTEL 6.2.1 (Kőnig élszínezési tétele) *Egy Δ-reguláris $G = (A, B; E)$ páros gráf $\chi'(G)$ élszínezési száma Δ.*

Biz. Δ szín nyilván szükséges, azaz $\Delta \leq \chi'(G)$. A nem-triviális irány bizonyításához pontszám szerinti indukciót használunk. A $\Delta = 0$ eset semmitmondó, míg $\Delta \geq 1$ esetén elég kimutatnunk, hogy létezik teljes párosítás, mert ezt kihagyva egy $(\Delta - 1)$-reguláris gráfot kapunk.

Vegyünk két szomszédos s, t pontot, melyek között $\beta > 0$ párhuzamos él vezet. A t s-től különböző szomszédainak halmazát jelölje T, míg az s t-től különböző szomszédaiét S. Töröljük el az s és t pontokat, majd adjunk a gráfhoz $\Delta - \beta$ új élt az S és T között úgy, hogy a keletkező G' gráf is Δ-reguláris legyen. Indukció szerint G' élhalmaza megszínezhető Δ színnel úgy, hogy minden szín egy teljes párosítás. Mivel G'-ben $\Delta - \beta < \Delta$ új él van, e párosítások egyike nem tartalmaz új élt. Ezt egy s és t közötti éllel kiegészítve a G egy teljes párosítását kapjuk. •

Megjegyzés Az élszínezési tétel szokványos bizonyításában kimutatják, hogy a Δ-regularitásból következik a Hall-feltétel, így a Hall tétel alapján létezik teljes párosítás. A fenti, R. Rizzitől származó bizonyítás érdekessége, hogy nem támaszkodik korábbi eredményre.

Következmény 6.2.2 *Egy páros gráf élszínezési száma egyenlő a Δ maximális fokszámmal.*

Biz. Új pontok és élek esetleges hozzávételével elérhetjük, hogy a gráf két osztály egyforma méretű legyen és mindegyik pont foka pontosan Δ, így alkalmazhatjuk a 6.2.1 tételt. •

Tegyük fel ezután, hogy továbbra is egy olyan élszínezést keresünk, amelyben minden színosztály párosítást alkot, de most minden él színére előírjuk, hogy az az élhez előre megadott színlistából kerüljön kiválasztásra. Egy ilyen színezést **él-listaszínezés**nek neveznek. Amennyiben minden élen a színlista ugyanazt a Δ színt tartalmazza, úgy a listaszínezés ugyanaz, mint a Δ színnel történő élszínezés. Kőnig tételének nagymérvű általánosítása az alábbi.

TÉTEL 6.2.3 (F. Galvin) *Ha $G = (A, B; E)$ páros gráf minden élén a színlista legalább $\Delta = \Delta(G)$ elemet tartalmaz, akkor létezik listaszínezés.*

Biz. A bizonyításhoz kis kitérőre van szükségünk.

Stabil párosítások

Egy $G = (F, L; I)$ páros gráfról azt mondjuk hogy **élrendezett**, ha minden csúcsánál az odafutó éleknek adott egy lineáris, "jóság" szerinti rendezése. Megengedett, hogy két párhuzamos él a két végpontjában ellentétesen rendezett legyen. Tekintsünk a gráfnak egy $M \subseteq I$ párosítását. Azt mondjuk, hogy a $h \in I - M$ él **M-fedett**, ha legalább az egyik végpontja olyan, hogy ott végződik M-beli él és az jobb, mint h. Az M párosítást **stabil**nak nevezzük, ha minden $I - M$-beli él M-fedett.

[Játékos szemléltetéssel az élrendezett páros gráfot úgy képzelhetjük el, mint fiúknak és lányoknak egy ismeretségi rendszerét, ahol minden személyhez adott az általa ismertek preferencia sorrendje. Fiúk és lányok egy párosítását akkor érezzük instabilnak, ha van olyan egymást ismerő fiú és lány, akiknek vagy egyáltalán nincs párjuk, vagy az egyiknek nincs és a másik őt jobbnak tartja, mint az aktuális párját, vagypedig mind a ketten jobbnak tartják egymást az aktuális párjuknál. A stabil párosítás fenti definíciója ezt az érzetet tükrözi.]

TÉTEL 6.2.4 (Gale és Shapley) *Minden $G = (F, L; I)$ élrendezett páros gráfban van stabil párosítás.*

Biz. Amennyiben minden F-beli csúcsra az onnan kiinduló legjobb él a másik végpontjánál a legrosszabb, úgy ezen élek egy (egy F-et fedő) párosítást alkotnak, és ez stabil.

Tegyük fel tehát, hogy van olyan $e = uv$ él ($u \in F$), amely u-nál a legjobb, de v-nél van nála rosszabb $f = xv$ él. A $G' := G - f$ élrendezett gráfban indukció miatt már létezik egy M stabil párosítás. Állítjuk, hogy M a G-ben is stabil. Ehhez azt kell csupán belátni, hogy az f él is M-fedett. Az e jobb a v pontban f-nél, így rögtön kész vagyunk, ha e maga az M-hez tartozik. Ha e nincs M-ben, akkor az M G'-beli stabilitása miatt létezik egy $a \in M$ él, amely az e egyik végpontjából indul és ott jobb, mint e. Miután e az u végpontjánál a legjobbnak volt választva, ezért a szükségképpen a v-nél jobb, mint e, és emiatt a itt f-nál is jobb. •

Egy élrendezett páros gráf minden $e = uv$ éléhez definiáljuk az él **értékét**, mint az e-nél jobb u végű élek száma plusz az e-nél jobb v végű élek száma plusz egy.

Lemma 6.2.5 *Tegyük fel, hogy egy élrendezett $(A, B; E)$ páros gráf minden élén adott egy színlista, amelynek legalább annyi eleme van, mint az él értéke. Ekkor létezik listaszínezés.*

Biz. Legyen s a listákon szereplő egyik szín, és legyen $G_s = (A, B; E_s)$ az a részgráf, amelynek éleinek színlistáján szerepel az s szín. A 6.2.4 tétel szerint G_s-nek létezik egy M_s stabil párosítása. Töröljük G-ből az M_s elemeit valamint G minden színlistájáról az s színt.

Állítás 6.2.6 *A keletkező G' élrendezett gráfra is fennáll, hogy minden élének színlistája annyi elemű, mint az él* (módosított) *értéke.*

Biz. Mivel az M_s elhagyásával egy él értéke nem nő, csak olyan $f \in E - M_s$ éllel lehet baj, amelynek a színlistája az s színnel csökkent, azaz $f \in E_s - M_s$. Miután M_s stabil párosítás G_s-ben, így az f él az egyik végpontjában biztosan rosszabb, mint az ott végződő M_s-beli él. De ez azt jelenti, hogy az f értéke G'-ben kisebb, mint G-ben, vagyis az (eggyel) csökkentett színlista legalább annyi elemű, mint a szintén csökkentett élérték. •

Indukcióval G'-nek létezik listaszínezése a csökkentett listára nézve. Ehhez hozzávéve az s-sel színezett M_s párosítást, a G-nek megkapjuk a keresett listaszínezését. • •

Galvin tételének bizonyítására térve a 6.2.2 következmény folytán G éleinek létezik Δ-színezése, ahol a színek az $1, \ldots, \Delta$ számok. Az A csúcsaiban a szomszédos élek sorrendjét definiáljuk a színek növekvő sorrendjében, míg a B csúcsaiban a színek csökkenő sorrendjében. Ekkor minden él értéke legfeljebb Δ, hiszen egy j színű élnél az egyik végpontjában jobb élek és a másik végpontjában rosszabb élek színei páronként különböznek. A 6.2.5 lemma szerint létezik listaszínezés. • • •

6.2.2 Irányított gráfok kernelei

Az él-listaszínezés analógiájára beszélhetünk pontok listaszínezéséről, amikor az élek helyett a csúcsokon adott lehetséges színek egy listája. Azt mondjuk, hogy egy gráf k-listaszínezhető, ha a csúcsain bárhogy is megadva egy k elemű színlistát, létezik listaszínezés. A legkisebb ilyen k értéket nevezik a gráf **listaszínezési szám**ának. A definícióból adódik, hogy ez legalább akkora, mint a kromatikus szám és Galvin tétele azt mondja ki, hogy egy páros gráf élgráfjára a két érték egybeesik.

Megmutatjuk, hogy a Galvin tétel bizonyítása mögött valójában egy listaszínezési tételek bizonyítására alkalmas általánosabb megközelítés rejlik. Egy $D = (V, A)$ digráf pontjainak S stabil részhalmazát **kernel**nek nevezzük, ha S-ből minden $v \in V - S$ pontba vezet él. Az irányított háromszög mutatja, hogy nem minden digráfban van kernel. Egy digráfot nevezzünk **kernelesnek**, ha minden feszített részgráfjában van kernel.

Lemma 6.2.7 *Legyen adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf minden v csúcsán egy $L(v)$ színlista. Ha G-nek létezik egy olyan $D = (V, \vec{E})$ kerneles irányítása, amelyben minden v csúcsra $|L(v)| \geq \varrho(v) + 1$, akkor G csúcsainak létezik listaszínezése.*

Biz. Legyen s egy előforduló szín és tekintsük azon csúcsok V_s halmazát, melyek színlistája tartalmazza s-et. A V_s által feszített részgráfban a feltevés szerint létezik egy K_s kernel. Töröljük a gráf pontja közül K_s elemeit továbbá minden színlistáról az s színt. A keletkező D' digráfra és L' listákra érvényes, hogy $|L'(v)| \geq \varrho'(v)+1$, hiszen ha egy $v \in V - K_s$ csúcsnak csökkent a színlistája, akkor $v \in V_s$ és így K_s kernelsége miatt D-ben létezik él K_s-ből v-be, vagyis $\varrho'(v)$ is kisebb, mint $\varrho(v)$, márpedig feltettük, hogy $|L(v)| \geq \varrho(v) + 1$. •

Mikor létezik olyan kerneles irányítása, amelyben minden befok megadott korlát alatt van? Tekintsünk például egy $G = (S, T; F)$ élrendezett páros gráfot. Készítsük el ennek az L_G élgráfját, amelyben minden e élnek megfelel egy v_e pont és a v_e és v_f pontok között akkor vezet él, ha e-nek és f-nek van közös végpontja G-ben. Amennyiben e és f párhuzamos élek, azaz mindkét végpontjuk közös, akkor a v_e ás v_f között két párhuzamos élt vezetünk. A G egy élrendezésének az élgráf egy olyan $\vec{L}_G$ irányítása felel meg, amelyben v_e-ből vezet él v_f-be, ha e jobb, mint f. (Speciálisan, ha e és f párhuzamosak és az egyik közös végüknél e a jobb, a másiknál pedig f, akkor v_e és v_f között két ellentétesen irányított párhuzamos él vezet).

Ezen a nyelven egy élrendezett páros gráf stabil párosítása pontosan az $\vec{L}_G$ digráf egy kernelének felel meg, és ezért Gale és Shapley tétele épp azt jelenti, hogy az $\vec{L}_G$ digráfban van kernel. Mivel az élgráf egy feszített részgráfja az eredeti G egy részgráfjának élgráfja, ezért $\vec{L}_G$ valójában kerneles. Továbbá a Galvin tétel bizonyításában használt megfigyelés miszerint egy páros gráf éleinek létezik egy olyan élrendezése, amelyben minden él értéke legfeljebb Δ azt jelenti, hogy az élgráf ehhez tartozó (kerneles) $\vec{L}_G$ irányításában minden pont befoka legfeljebb $\Delta - 1$ és így a lemma szerint létezik listaszínezés. (A Galvin tétel bizonyításában valójában erre a speciális esetre láttuk be a lemmát).

Bemutatunk még egy esetet, amikor ez a megközelítés eredményes.

TÉTEL 6.2.8 (Richardson) *Ha egy $D = (V, A)$ irányított gráfban nincs páratlan irányított kör, akkor kerneles.*

Biz. Egy digráfot röviden párosnak fogunk nevezni, ha irányítatlan értelemben páros.

Állítás 6.2.9 *Egy D' erősen összefüggő digráf pontosan akkor nem tartalmaz páratlan irányított kört, ha páros.*

Biz. A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőséghez tegyük fel, hogy nincs páratlan irányított kör. Élszám szerinti indukció. Erősen összefüggő gráfok fülfelbontásából tudjuk, hogy vagy létezik egy $e = st$ él, amely elhagyható az erősen összefüggőség megsértése nélkül vagy létezik egy olyan z csúcs, amelyre $\varrho(z) = \delta(z) = 1$. Az első esetben indukció miatt $D' - e$ páros gráf. Ekkor s és t szükségképpen különböző pontosztályba esik és így D is páros, ugyanis ha egy osztályba esnének, akkor bármely t-ből s-be vezető P irányított út páros sok élből áll és így $P + e$ páratlan irányított kört alkotna.

A másik esetben húzzuk össze a z-be belépő és onnan kilépő egy-egy élt. A keletkező D'' digráf persze erősen összefüggő és nincsen benne páratlan irányított kör, és ezért indukció miatt páros. De ekkor D is az. •

A tételt pontszám szerinti indukcióval bizonyítjuk. Tekintsük D-nek egy C forrás-komponensét (azaz egy olyan erősen összefüggő komponenst, amelybe nem megy él). Az állítás szerint ennek pontjai két színnel színezhetők. Jelölje C_1 és C_2 a két színosztályt. Tegyük fel, hogy mondjuk C_1 nem üres. Figyeljük meg, hogy C erős összefüggősége miatt a C_2 minden pontjába vezet él C_1-ből. Töröljük ki D-ből C_1-et és az összes olyan csúcsot, amelybe vezet él C_1-ből (speciálisan C_2 elemeit). A keletkező D' digráfban indukció miatt van K' kernel.

Legyen $K := K' \cup C_1$. A konstrukció miatt D minden olyan csúcsába, amely nincs K-ban vezet K-ból él. Állítjuk, hogy K stabil D-ben, azaz K kernel. Ehhez csak azt kell látni, hogy $u \in C_1$ és $v \in K'$ pontok között nincs él. Az u-ból persze nem vezethet él v-be, hiszen D'-nek egyáltalán nincs olyan pontja, amelybe vezetne él C_1-ből, de v-ből sem vezethet u-ba, hiszen v nem C_2-ben van és $C = C_1 \cup C_2$ forrás-komponens volt. • •

6.2.3 Gráfok listaszínezése

Merevkörű gráfok listaszínezése

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf **merevkörű** (chordal), ha minden legalább négy élű körének van húrja. (Egy xy élt akkor mondunk egy C kör húrjának, ha x és y nem követi egymást a C mentén.) Könnyen ellenőrizhető, hogy intervallum rendszer metszetgráfja merevkörű, sőt általánosabban egy fa részfa-rendszerének élgráfja is az. Ismeretes, hogy minden merevkörű gráf perfekt, azaz a kromatikus száma egyenlő a maximális méretű klikk $\omega(G)$ elemszámával.

Emlékeztetünk a max-vissza sorrend fogalmára. Ezt úgy kapjuk meg, hogy tetszőleges pontot választunk első pont gyanánt, és ha már az első i pontot kiválasztottuk, akkor $i + 1$-diknek a maradékból azt választjuk, amelyből a kiválasztott pontok halmazába a lehető legtöbb él vezet. Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi eredményt.

Lemma 6.2.10 (Yannakakis és Tarjan) *Merevkörű gráf minden v pontjára a v azon szomszédai klikket alkotnak, melyek a max-vissza sorrendben megelőzik.* •

TÉTEL 6.2.11 *Merevkkörű gráf listaszínezezési száma egyenlő a maximális klikk $\omega(G)$ elemszámával* (és így a kromatikus számmal).

Biz. Irányítsuk a gráf éleit a max-vissza sorrend szerint előre (azaz a későbbi végpont felé). Ekkor mindenesetre aciklikus digráfot kapunk, amelyben ráadásul minden csúcs befoka kisebb lesz, mint $\omega(G)$, hiszen ha valamelyik v csúcs befoka legalább $\omega(G)$ volna, akkor v és az őt megelőző szomszédjai egy $\omega(G)$-nél nagyobb klikket alkotnának. A 6.2.7 lemma szerint G listaszínezési száma $\omega(G)$. •

Páros síkgráfok listaszínezése

További alkalmazásként vizsgáljuk meg mi mondható egy $G = (S, T; E)$ páros gráf listaszínezési számáról. Példával megmutatható, hogy ez bármilyen nagy lehet (szöges ellentétben a páros gráf élszínezési számának és él-listaszínezési számának egyenlőségével). Síkgráfokban azonban jobb a helyzet.

TÉTEL 6.2.12 (N. Alon és M. Tarsi) *Síkbarajzolható páros gráf listaszínezési száma legfeljebb 3.*

Biz. Feltehető, hogy a G egyszerű. Jelölje n a csúcsok számát m pedig az élekét. Mivel egyszerű páros síkgráfban minden tartományt legalább 4 él határol, ezért a tartományok t száma legfeljebb $m/2$. Az Euler formula szerint $t + n = m + 2$, így $m/2 + n \leq m + 2$, vagyis az $m \leq 2n - 4$. Mivel G minden részgráfja is páros és síkbarajzolható, következik, hogy G csúcsainak bármely nemüres Z részhalmaza legfeljebb $2|Z| - 4$ élt feszít. Emiatt G-nek létezik olyan D irányítása, amelyben minden pont befoka legfeljebb kettő. A Richardson tétel szerint a D kerneles, ezért a 6.2.7 lemma nyomán G 3-listaszínezhető. •

C. Thomassen igazolta, hogy minden síkgráf listaszínezési száma legfeljebb 5.

file: graf: szinez 2007. május 6.

7. Fejezet

A KIKERESZTEZÉSI ELJÁRÁS

A leemelési művelet alkalmazásainak megismerése után egy másik bizonyítási technikát mutatunk be, a kikeresztezési eljárást.

7.1 Irányított vágások lefogása

Legyen adott a $D = (V, A)$ (irányítatlanul összefüggő) irányított gráf és $\emptyset \subset X \subset V$ egy olyan részhalmaza a pontoknak, amelyből nem lép ki él. Az X-be belépő élek halmazát **irányított vágás**nak nevezzük, míg X-t az irányított vágás **magjának**. Két irányított vágás **keresztező**, ha magjaik keresztezőek. Irányított vágások egy rendszerét akkor nevezzük **keresztezés-mentesnek**, ha magjaik keresztezés-mentesek.

Lemma 7.1.1 *Legyen adott a $D = (V, A)$ (irányítatlanul összefüggő) irányított gráf ponthalmazán irányított vágásoknak egy olyan $\mathcal{J}$ keresztezés-mentes rendszere, amelyre D minden éle $\mathcal{J}$-nek legfeljebb csak k tagjában van benne. Ekkor $\mathcal{J}$-ből kiválasztható legalább $\lceil |\mathcal{J}|/k \rceil$ élidegen irányított vágás.*

Biz. Tekintsük $\mathcal{J}$ magjainak a 1.4.6 tételben leírt irányított fa-reprezentációját. A D egy élének most a fa egy útja felel meg, amely ráadásul irányított út, hiszen az $\mathcal{J}$ tagjai irányított vágások, és az út legfeljebb k élből áll a lemma feltevése alapján. A 1.4.3 lemma szerint a fa élei, és így $\mathcal{J}$ tagjai, egyenletesen k-színezhetők. De ekkor a fa egy legfeljebb k élű útjának minden éle különböző színt kap, ami éppen azt jelenti, hogy az eredeti D digráf minden éle különböző színű irányított vágásokhoz tartozik. Magyarán az egyszínű tagjai $\mathcal{J}$-nek élidegenek. Mivel az egyik színosztály legalább $\lceil |\mathcal{J}|/k \rceil$ tagból áll, a lemma következik. •

Ennyi előkészítés után bebizonyítjuk C. Lucchesi és D. Younger tételét. A dolog érdekessége, hogy ez egy olyan min-max tétel, amely nem fogalmazható meg a TU-mátrixokra vonatkozó eredmények következményeként, a bizonyításában azonban a fenti lemma alapvető.

A D digráf egy $e = uv$ élének fordítva történő (vagy az uv fordítottjának) behúzásán azt értjük, hogy a digráfhoz hozzávesszük a vu élt (az uv változatlanul hagyásával). A keletkező digráfot az alábbiakban D_e-vel jelöljük. Nevezzük éleknek egy F részhalmazát **kötés**nek, ha F elemeinek fordítva történő behúzásával erősen összefüggő digráfot kapunk. Ez azzal ekvivalens, hogy F elemeit összehúzva erősen összefüggő digráfot kapunk, vagy még azzal is, hogy F minden irányított vágásnak tartalmazza legalább egy elemét. Amennyiben D nem tartalmaz elvágó élt, úgy a 2.1.6 feladat alapján F pontosan akkor kötés, ha elemeinek irányítását megfordítva erősen összefüggő digráfot kapunk.

TÉTEL 7.1.2 (Lucchesi és Younger) *Legyen $D = (V, A)$ (irányítatlanul összefüggő) irányított gráf. Az élidegen irányított vágások maximális $\nu = \nu(D)$ száma egyenlő a minimális kötés $\tau = \tau(D)$ elemszámával.*

Biz. A $\nu \leq \tau$ egyenlőtlenség világos, így csak a fordított irány bizonyításával foglalkozunk. ν szerinti indukciót alkalmazunk. Ha ez a szám nulla, akkor nincs irányított vágás D-ben (D erősen összefüggő), és így τ is nulla. Tegyük most fel, hogy $\nu(D) > 0$. Mivel a tétel egyélű digráfra nyilvánvalóan fennáll, azt is feltehetjük, hogy $|A| > 1$.

1. Eset *Létezik a digráfnak olyan e éle, amelyre $\nu(D_e) < \nu(D)$.* Az indukciós feltevést $\nu(D_e)$-re felhasználva és a triviális $\tau(D) \leq \tau(D_e)+1$ egyenlőtlenséget megfigyelve nyerjük, hogy $\tau(D) \leq \tau(D_e)+1 = \nu(D_e)+1 \leq \nu(D)$, amiből a kívánt $\tau(D) \leq \nu(D)$ egyenlőtlenség adódik.

2. Eset *A digráf minden e élére $\nu(D_e) = \nu(D)$.* Azaz létezik D-ben élidegen irányított vágásoknak egy olyan $\nu(D)$ elemszámú $\mathcal{I}_e$ részrendszere, amely tagjainak egyikében sincs benne az e él. Legyen ezen halmazrendszerek egyesítése $\mathcal{J}'$ (úgy értve, hogy egy X vágás annyi példányban fordul elő $\mathcal{J}'$-ben, ahány olyan e él van

D-ben, amelyre $X \in \mathcal{I}_e$.) Ekkor $\mathcal{J}'$-nek $|A|\nu(D)$ tagja van és

$$D \text{ minden éle legfeljebb } k := |A| - 1 \text{ tagban van benne.} \qquad (*)$$

Alkalmazzuk a következő kikeresztezési eljárást. Ha $\mathcal{J}'$-nek van két keresztező tagja, akkor helyettesítsük őket a magjaik metszetéhez és uniójához tartozó irányított vágásokkal. Egy ilyen cserénél $(*)$ érvényes marad. Miután egy kikeresztezés során a magok elemszámának négyzetösszege nő, legfeljebb véges sok lépés után egy olyan keresztezés-mentes $\mathcal{J}$ rendszert kapunk, amely $|A|\nu(D)$ (nem feltétlenül különböző) irányított vágásból áll és amelyre $(*)$ fennáll. A 7.1.1 lemma szerint $\mathcal{J}$ tartalmaz $\lceil |\mathcal{J}|/k \rceil = \lceil |A|\nu(D)/(|A|-1) \rceil > \nu(D)$ élidegen irányított vágást, ellentmondásban $\nu(D)$ jelentésével. A 2. eset tehát nem fordulhat elő. $\bullet$

7.2 Irányított gráfok összefüggőségének növelése eggyel

Azt mondjuk, hogy $X = (X_K, X_B)$ **párhalmaz**t alkot, ha $X_B \subseteq X_K \subseteq V$. A párhalmaz triviális, ha $X_B = \emptyset$ vagy $X_K = V$. X_K a párhalmaz külső tagja, X_B pedig a belső. Egy él **fedi** (**lefogja**) X-t vagy **belép** X-be, ha mind a külső, mind a belső tagjába belép.

Tegyük fel, hogy a $D = (V, A)$ digráf $(k-1)$-szer összefüggő, de k-szor már nem. Ekkor van olyan $X = (X_K, X_B)$ nemtriviális párhalmaz, amelyre $|X_K - X_B| = k - 1$ és D-beli él nem lép be X-be. Nevezzük az ilyen párhalmazokat **hiányos**nak és legyen $\mathcal{L}_D$ a hiányos párhalmazok családja. Definiáljunk $\mathcal{L}_D$-n egy részbenrendezést a természetes módon: $X \leq Y$, ha $X_B \subseteq Y_B$ és $X_K \subseteq Y_K$. Azt mondjuk, hogy az $X, Y \in \mathcal{L}_D$ párok **keresztező**ek, ha e részbenrendezésben nem összehasonlíthatók továbbá $X_B \cap Y_B \neq \emptyset$ és $X_K \cup Y_K \neq V$. A párhalmazok egy $\mathcal{L}$ részhalmazáról azt mondtuk, hogy **keresztező**, ha $\mathcal{L}$ bármely két keresztező tagjával együtt azok metszete és uniója is $\mathcal{L}$-ben van. A $\mathcal{L}_D$ két tagját nevezzük **független**nek, ha a belső halmazaik diszjunktak vagy a külső halmazaik ko-diszjunktak (azaz egyesítésük fedi V-t). Ami azzal ekvivalens, hogy nem fedhetők le egyetlen éllel. Az $\mathcal{L}_D$ két tagjának a viszonya tehát háromféle lehet: a részbenrendezésben összehasonlíthatók, keresztezők, függetlenek. Definiáljuk az $X, Y \in \mathcal{L}_D$ hiányos párhalmazok **metszet**ét és **unió**ját a természetes módon: $X \wedge Y := (X_K \cap Y_K, X_B \cap Y_B)$, $X \vee Y := (X_K \cup Y_K, X_B \cup Y_B)$.

Lemma 7.2.1 *Keresztező $X, Y \in \mathcal{L}_D$ párhalmazok esetén mind $X \wedge Y$, mind $X \vee Y$ tagja $\mathcal{L}_D$-nek.*

Biz. Könnyen látszik, hogy D-beli él sem $X \wedge Y$-t, sem $X \vee Y$-t nem fedi le. Így a D $(k-1)$-összefüggősége folytán $|X_K \cap Y_K| - |X_B \cap Y_B| \geq k - 1$ és $|X_K \cup Y_K| - |X_B \cup Y_B| \geq k - 1$. Miután azonban $(k-1) + (k-1) = |X_K - X_B| + |Y_K - Y_B| = (|X_K \cap Y_K| - |X_B \cap Y_B|) + (|X_K \cup Y_K| - |X_B \cup Y_B|) \geq (k-1) + (k-1)$, így minden becslés egyenlőséggel teljesül, tehát valóban $X \vee Y, X \wedge Y \in \mathcal{L}_D$. $\bullet$

TÉTEL 7.2.2 *Egy $(k-1)$-szor összefüggő $D = (V, A)$ digráf k-összefüggővé tevéséhez szükséges új élek minimális $\tau = \tau(D)$ száma egyenlő a független hiányos párhalmazok maximális $\nu = \nu(D)$ számával.* (Más szóval, D akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k-összefüggővé, ha nem létezik γ-nál több független hiányos párhalmaz).

Biz. Új éleknek egy F halmazát D-hez adva pontosan akkor kapunk k-összefüggő digráfot, ha F minden hiányos párhalmazt lefog. Miután két független párhalmaz egy éllel nem fedhető, ezért $\nu \leq \tau$. Jelölje A^* az A-ban nem szereplő élek halmazát.

Lemma 7.2.3 *Ha $\mathcal{L}_D$ nem üres, akkor létezik olyan $e \in A^*$ él, amelyre $\nu(D+e) < \nu(D)$.*

Biz. Legyen $m := |A^*|$. Tegyük fel indirekt, hogy minden $e \in A^*$ élre $\nu(D+e) = \nu(D)$. Másszóval minden e élre létezik egy párhalmazokból álló $\mathcal{I}_e \subseteq \mathcal{L}_D$ független halmaz, amelyre $|\mathcal{I}_e| = \nu(D)$ és e nem fedi $\mathcal{I}_e$ egyik tagját sem. Legyen ezek egyesítése $\mathcal{J}'$, úgy értve, hogy egy $X \in \mathcal{L}_D$ tag annyi példányban fordul elő $\mathcal{J}'$-ben, ahány darab $\mathcal{I}_e$-ben benne van ($e \in A^*$). Ekkor $|\mathcal{J}'| = m\nu(D)$ és

$$\text{minden él legfeljebb } m - 1 \text{ párhalmazba lép be.} \qquad (7.1)$$

Alkalmazzuk $\mathcal{J}'$-re a kikeresztezési eljárást: amíg csak lehet, vegyünk két keresztező tagot, és helyettesítsük őket a metszetükkel és az uniójukkal. Egy ilyen cserénél (7.1) fennmarad és továbbra is az $\mathcal{L}$ (nem feltétlenül különböző) tagjaiból álló párhalmazok egy rendszerét kapjuk. Miután egy kikeresztezési lépésnél a szereplő hiányos párhalmazok külső és belső halmazai méretének négyzetösszege szigorúan nő, véges sok kikeresztezési lépés után olyan keresztezés-mentes $\mathcal{J}$ rendszert kapunk, amely az $\mathcal{L}$-nek $m\nu(D)$ (nem feltétlenül különböző) tagját tartalmazza, és amelyre (7.1) fennáll. Minden $X \in \mathcal{J}$-re jelölje $s(X)$ azt a számot, ahányszor X előfordul $\mathcal{J}$-ben. Ezen s-értékek összege $|\mathcal{J}| = m\nu(D)$. Állítjuk, hogy a $\mathcal{J}$-n definiált részbenrendezésben minden lánc s-súlya legfeljebb $m-1$. Valóban, ha volna legalább m súlyú lánc, akkor $\mathcal{J}$-ben volna m tag melyek páronként összehasonlíthatók, és mivel ezek egy lánc tagjai (esetleg több példányban), így, amint láttuk, van olyan él, amely mind az m tagot lefogja, ellentétben a (7.1) tulajdonsággal.

A 2.1.3 súlyozott poláris Dilworth tétel szerint (*maximális súlyú lánc súlya egyenlő a súlyokat fedő antiláncok minimális számával*) $\mathcal{J}$ felbontható legfeljebb $m-1$ antiláncra. Miután $\mathcal{J}$ össz-súlya $m\nu(D)$, az egyik antilánc bizonyosan legalább $\nu(D)+1$ tagból áll. De ezen tagok páronként függetlenek, ami ellentmond a $\nu(D)$ definíciójának, bizonyítván a lemmát. •

A tétel nemtriviális $\nu \geq \tau$ irányának igazolásához $\nu(D)$ szerinti indukciót használunk. Ha e szám nulla, akkor $\mathcal{L}_D$ üres, azaz D maga k-összefüggő, és így $\tau(D)=0$. Tegyük fel, $\nu(D)>0$. A fenti lemma szerint van olyan $e \in A^*$ él, amelyre $\nu(D+e)<\nu(D)$. Az indukciós feltevést $\nu(D+e)$-re felhasználva nyerjük, hogy $\tau(D) \leq \tau(D+e)+1=\nu(D+e)+1 \leq \nu(D)$, amiből a kívánt $\tau(D) \leq \nu(D)$ egyenlőtlenség adódik. • •

Megjegyezzük, hogy nem igaz az, hogy q független hiányos párhalmaz létezése esetén úgy is kiválasztható q független hiányos párhalmaz, hogy vagy a párhalmazok belső halmazai páronként diszjunktak, vagy a párhalmazok külső halmazai páronként ko-diszjunktak.

7.3 k-élösszefüggő digráfok előállítása

A kikeresztezési eljárás egy másirányú alkalmazásaként megadjuk a k-élösszefüggő digráfok konstruktív előállítási tételét. Ehhez szükségünk lesz Mader leemelési tételére valamint az alábbi tételre.

TÉTEL 7.3.1 (W. Mader) *Legyen $D=(V,A)$ olyan legalább két pontú k-élösszefüggő digráf, amelyből bármely élt elhagyva megszűnik a k-élösszefüggőség. Ekkor D-nek van olyan v pontja, amelyre $\varrho(v)=\delta(v)=k$.*

Biz. Nevezzünk egy $X \subset V$ halmazt **be-pontos**nak, ha $\varrho(X)=k$ és **ki-pontos**nak, ha $\delta(X)=k$. A feltevés szerint minden él belép be-pontos halmazba. Legyen $\mathcal{L}$ be-pontos halmazoknak egy olyan családja, hogy minden él belelép az egyik tagjába, $|\mathcal{L}|$ minimális és ezen belül $\sum[|Z|^2 : Z \in \mathcal{L}]$ maximális. Ekkor állítjuk, hogy $\mathcal{L}$ keresztezés mentés. Ha ugyanis két tagja, X és Y keresztező volna, akkor $k+k=\varrho(X)+\varrho(Y)=\varrho(X \cap Y)+\varrho(X \cup Y)+d(X,Y) \geq k+k+0$, amiből az adódik, hogy a metszetük és az uniójuk is be-pontos és hogy $d(X,Y)=0$. De ekkor $\mathcal{L}$-ben az X-t és Y-t a metszettel és az unióval kicserélve a keletkező $\mathcal{L}'$ be-pontos halmazokból állna, amelyre igaz, hogy minden él belelép egy tagjába, $|\mathcal{L}'|=|\mathcal{L}|$ és $\sum[|Z|^2 : Z \in \mathcal{L}'] > \sum[|Z|^2 : Z \in \mathcal{L}]$, ellentmondásban $\mathcal{L}$ választásával.

Legyen s a V-nek tetszőleges eleme. Legyen $\mathcal{F}_{be} := \{X \subseteq V-s, X \in \mathcal{L}\}$ és legyen $\mathcal{F}_{ki} := \{V-X : s \in X \in \mathcal{L}\}$. Ekkor $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{be} \cup \mathcal{F}_{ki}$ olyan lamináris halmaz-család, hogy a digráf minden éle

$$\text{vagy belép egy be-pontos tagjába vagy kilép egy ki-pontos tagjából.} \tag{7.2}$$

Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ ilyen tulajdonságú, és hogy $\sum[|Z| : Z \in \mathcal{F}]$ minimális.

1. eset. *$\mathcal{F}$ minden tagja egyelemű.* Készen vagyunk, ha van olyan z csúcs, amelyre az egyelemű $\{z\}$ halmaz $\mathcal{F}_{be}$-ben és $\mathcal{F}_{ki}$-ben is benne van, mert ez azt jelentené, hogy $\varrho(z)=k=\delta(z)$. Egy s-ből kilépő él biztosan belép $\mathcal{F}$ egy be-pontos tagjába, ezért $Z := \{v : \{v\} \in \mathcal{F}_{be}\}$ nem-üres, de ekkor egy Z-ből kilépő él megsérti (7.2)-t.

2. eset *$\mathcal{F}$-nek létezik nem egyelemű tagja.* Legyen Z minimális ilyen, és jelölje Z_{be} a Z-ben lévő egypontú $\mathcal{F}_{be}$-beli halmazok unióját, míg Z_{ki} a Z-ben lévő egypontú $\mathcal{F}_{ki}$-beli halmazok unióját. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy Z be-pontos. Természetesen készen vagyunk, ha $Z_{be} \cap Z_{ki} \neq \emptyset$, így tegyük fel, hogy $Z_{be} \cap Z_{ki} = \emptyset$.

Azt állítjuk, hogy Z erősen összefüggő részgráfot feszít. Ha ugyanis nem ez a helyzet, akkor létezik Z-nek egy olyan X valódi nem-üres része, amelybe nem vezet él $Z-X$-ből. De ekkor $k \leq \varrho(X) \leq \varrho(Z)=k$, amiből $\varrho(X)=k$ és így $\mathcal{F}-Z+\{X\}$ is jó rendszer, ellentétben $\sum[|Z| : Z \in \mathcal{F}]$ minimalitásával.

Nem lehet $Z_{be}=Z$, mert ekkor Z-t ki lehetne hagyni $\mathcal{F}$-ből. Valójában a Z_{be} halmaz üres, mert különben az erősen összefüggőség miatt lép él a Z_{be} halmazból a $Z-Z_{be}$ halmazba, de ez az él szükségképpen megsérti (7.2)-t.

Minden $u \in Z$ pontnak Z_{ki}-ben kell lennie, mert különben egy uv él, $v \in Z$, megsérti (7.2)-t. Tehát $Z_{ki}=Z$. De ekkor $k=\varrho(Z)=\sum_{v \in Z} \varrho(v)-i(Z) \geq k|Z|-i(Z)=\sum_{v \in Z} \delta(v)-i(Z)=\delta(Z) \geq k$, vagyis mindegyik egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül és így Z minden pontjára $\varrho(v)=\delta(v)=k$. (Itt $i(Z)$ a Z által feszített élek számát jelöli). •

Feladat 7.3.1 *Igazoljuk, hogy az előző tétel feltételei mellett két pont is létezik a kívánt tulajdonsággal.*

Térjünk rá a k-élösszefüggő digráfok előállítására. Két kézenfekvő művelet kínálkozik arra, hogy egy meglévő k-élösszefüggő digráfból egy nagyobbat állítsunk elő:

(A1) *Két létező pontot kössünk össze egy irányított éllel,*
(A2) *Csípjünk össze k meglévő élt egy új ponttal, azaz a k él mindegyikét osszuk fel egy-egy ponttal, és egyesítsük a k osztás-pontot egyetlen új ponttá.*

Nyilvánvaló, hogy az (A1) művelet megőrzi a k-élösszefüggőséget.

Gyakorlat 7.3.2 *Igazoljuk, hogy az* (A2) *művelet megőrzi a digráf* k*-élösszefüggőségét.*

Ennél még érdekesebb, hogy érvényes az alábbi megfordítás:

TÉTEL 7.3.2 (W. Mader) *Egy* $D = (V, A)$ *irányított gráf akkor és csak akkor* k*-élösszefüggő, ha egy pontból kiindulva előállítható az előbbi* (A1) *és* (A2) *műveletek segítségével.*

Biz. A tétel nem-triviális irányának bizonyításához $|A|$ szerinti indukciót alkalmazunk. Az állítás semmitmondó, ha $|V| = 1$, így legyen $|V| \geq 2$. A feltevés szerint D k-élösszefüggő. Amennyiben létezik olyan e él, amelyre $D' := D - e$ is k élösszefüggő, akkor indukció alapján D'-nek már létezik kívánt előállítása, és ezt kiegészítve az e él hozzáadásával, a D keresett előállítását kapjuk.

Tegyük most fel, hogy D él-elhagyásra nézve minimális k-élösszefüggő digráf. A 7.3.1 tétel szerint létezik egy z pontja, amelyre $\delta(z) = \varrho(z) = k$. Mader 5.3.4 irányított leemelési tétele szerint a z-be bemenő és kimenő élek párba állíthatók úgy, hogy a párokat leemelve keletkező D' digráf k-élösszefüggő. Indukció alapján D'-nek már létezik kívánt előállítása. Ebből D előállítását úgy kapjuk meg, hogy a D'-ben szereplő k leemelt élre alkalmazzuk az (A2) operációt. •

graf ly 2007. május 6.

8. Fejezet

ÉLIDEGEN UTAK

8.1 Az élidegen út probléma

Az **élidegen utak problémája** a következő. Adott G irányított vagy irányítatlan gráf és a pontjaiból alkotott k darab pontpár: $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_k, t_k)$. Keressünk k páronként élidegen utat úgy, hogy az i-dik út s_i-ből t_i-be vezessen. Hasznos ezen összekötendő pontpárokat egy ún. **igényél**lel megjelölni. Az irányított esetben az igényél is irányított lesz, épedig t_i-ből s_i-be. Az igényélek által alkotott $H = (U, F)$ (di)gráfot **igénygráf**nak nevezzük, míg az eredeti (di)gráf a **teljesítő gráf**. Az élidegen utak problémája avval ekvivalens, hogy $G+H$-ben keressünk $|F|$ élidegen (irányított) kört, melyek mindegyike pontosan egy igényélt tartalmaz. Az ilyen köröket nevezzük F**-jó** körnek vagy röviden jónak.

Az irányítatlan élidegen utak problémája NP-teljes már akkor is, ha $G + H$ Euler féle (azaz $d_G(v) + d_H(v)$ minden v csúcsra páros), vagy ha $G + H$ síkbeli. Ugyanakkor polinom időben megoldható, ha $G + H$ Euler ÉS síkbeli: a megoldás Seymour egy tételén és a párosítás elméleten alapul. Akkor is megoldható, ha $k = 2$ (ez messze nem triviális), és általánosabban, létezik polinomiális algoritmus rögzített k esetére (ami tehát a gráf méretében polinomiális, de k értékében nem).

Az irányított élidegen út probléma már a $k = 2$ esetben is NP-teljes. Aciklikus digráfokra a feladat tetszőleges k-ra NP-teljes, ugyanakkor rögzített k-ra ismeretes (dinamikus programozáson alapuló) polinomiális futásidejű algoritmus.

Mind az irányított, mind az irányítatlan esetben adódik egy természetes szükséges feltétel:

$$\text{irányítatlan vágás-egyenlőtlenség:} \quad d_G(X) \geq d_H(X), \tag{8.1}$$

$$\text{irányított vágás-egyenlőtlenség:} \quad \varrho_{\vec{G}}(X) \geq \delta_{\vec{H}}(X). \tag{8.2}$$

Az (**irányított**) **vágásfeltétel** (vagy kritérium) az (irányított) vágás-egyenlőtlenséget követeli meg minden $X \subseteq V$-re. Ezen feltételek általában nem elegendőek, vannak azonban érdekes speciális esetek, amikor igen. Például Menger tételének irányított illetve irányítatlan él-változata szerint ez a helyzet, amikor $s_1 = \ldots = s_k$ és $t_1 = \ldots = t_k$. Egyszerű elemi konstrukcióval következik, hogy a vágásfeltétel elegendő még akkor is, ha csupán az s_i pontok egybeesését követeljük meg.

8.1.1 Egy elegendő feltétel

Először egy elégséges feltételt mutatunk be az élidegen irányított útprobléma megoldhatóságára.

TÉTEL 8.1.1 *Legyenek $\{s_i, t_i\}$ pontpárok egy k-élösszefüggő D digráfban $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Ekkor léteznek élidegen utak s_i-ből t_i be.*

Biz. Bővítsük ki a digráfot egy s gyökérponttal és egy ss_i éllel minden $i = 1, \ldots, k$-ra. Alkalmazhatjuk Edmonds diszjunkt fenyő tételét (5.3.4 tétel). Mivel pontosan k él lép ki az s gyökérpontból, ezek mindegyike más fenyőben van, és e fenyők tartalmazzák a keresett élidegen utakat s_i-ből t_i-be. •

8.1.2 Két terminál pár

Álljon most H két csomag párhuzamos élből áll, azaz H-nak k_i éle van t_i-ből s_i-be $(i = 1, 2)$. Ez az egyik legkisebb olyan igénygráf, amely a Menger tétellel nem kezelhető. (A másik az, amikor az igényélek egy háromszöget alkotnak).

Egy irányított gráfot akkor neveztünk Euler-félének, ha minden pontban a befok egyenlő a kifokkal, irányítatlan gráf esetén pedig akkor, ha minden pont befoka páros.

TÉTEL 8.1.2 *Irányított esetben, ha a $\vec{H}$ igénygráf két csomag (egy irányba menő) párhuzamos élből áll és $\vec{G}+\vec{H}$ Euler-féle, akkor az irányított vágásfeltétel az élidegen utak létezésének szükséges és elegendő feltétele.*

Biz. Az irányított vágásfeltételt csak a t_1-ből s_1-be vezető k_1 igényélre alkalmazva, a Menger tétel alapján létezik $\vec{G}$-ben k_1 élidegen irányított út s_1-ből t_1-be. Ezen k_1 utat és k_1 igényélt $\vec{G}+\vec{H}$-ból kihagyva irányított Euler gráfot kapunk, amely élidegen körök uniójára bomlik, így ezek tartalmaznak k_2 jó kört. •

TÉTEL 8.1.3 (Rothschild and Whinston) *Irányítatlan esetben, ha a H igénygráf két csomag párhuzamos élből áll és $G+H$ Euler-féle, akkor a vágásfeltétel az élidegen utak létezésének szükséges és elegendő feltétele.*

Biz. A tétel bizonyításához először irányítsuk a k_i darab s_it_i-igényélt t_i-től s_i felé ($i=1,2$). Menger tétele szerint G-ben létezik k_1+k_2 darab élidegen irányítatlan út az $S:=\{s_1,s_2\}$ halmazból a $T:\{t_1,t_2\}$ halmazba. Ezen utak éleit előre, a kimaradó élek Euler-gráfját pedig Euler módon megirányítva a $G+H$-nak egy $\vec{G}+\vec{H}$ Euler irányítását kapjuk, amiből minden $X\subseteq V$-re

$$\varrho_{\vec{G}}(X)-\delta_{\vec{G}}(X)=\delta_{\vec{H}}(X)-\varrho_{\vec{H}}(X). \tag{8.3}$$

Írjuk a (8.1) irányítatlan vágás-egyenlőtlenséget az ekvivalens

$$\varrho_{\vec{G}}(X)+\delta_{\vec{G}}(X)\geq\varrho_{\vec{H}}(X)+\delta_{\vec{H}}(X) \tag{8.4}$$

alakba. Ezt (8.3)-hoz adva (8.2) kétszeresét kapjuk, vagyis $\vec{G}+\vec{H}$-ra teljesül az irányított vágásfeltétel, és így alkalmazhatjuk a 8.1.2 tételt. •

Gyakorlat 8.1.1 *Tegyük fel, hogy $G+H$ irányítatlan gráf, melyre a vágás feltétel teljesül. Legyen $\vec{H}$ a H tetszőleges irányítása. Ekkor G irányítható úgy, hogy $\vec{G}+\vec{H}$ Euler-féle.*

Feladat 8.1.2 *Legyenek G és H irányítatlan gráfok úgy, hogy $G+H$ Euler-féle. Legyen $\vec{G}+\vec{H}$ egy Euler irányítása $G+H$-nak. Igazoljuk, hogy az irányítatlan vágás feltétel akkor és csak akkor teljesül $G+H$-ra, ha az irányított teljesül $\vec{G}+\vec{H}$-ra.*

B. Rothschild és A. Whinston tétele T.C. Hu egy korábbi eredményének élesítése, amely szerint ha H két csomag párhuzamos él, de $G+H$ nem feltétlenül Euler, úgy a vágásfeltétel szükséges és elegendő az élidegen út probléma azon relaxációjának megoldásához, amelyben az utakat választhatjuk fél kapacitással. Például ha G egy négyélű kör az s_1,s_2,t_1,t_2 csúcsokon és az igénygráf az s_1t_1 valamint az s_2t_2 élekből áll, akkor a vágásfeltétel teljesül, de a keresett két élidegen út nem létezik. Ugyanakkor s_1 és t_1 között az s_1,s_2,t_1 és az s_1,t_2,t_1 utakat félszer választva valamint s_2 és t_2 között az s_2,s_1,t_2 és az s_2,t_1,t_2 utakat szintén félszer választva egy félegész értékű megoldást kapunk.

8.1.3 Aciklikus síkgráfok

Amint már említettük, az irányított élidegen utak problémája még aciklikus digráf esetén is NP-teljes. Síkgráfokra azonban jobb a helyzet.

FEDÉSI FELTÉTEL Az F-jó köröket nem lehet k-nál kevesebb $A\cup F$-beli éllel lefogni. Ekvivalens alakban: Bármely k' $(1\leq k'\leq k)$ terminál-párra az s_i-ből t_i-be vezető utakat nem lehet k'-nél kevesebb D-beli éllel lefogni.

A feltétel nyilván szükséges a k élidegen F-jó kör, azaz a k élidegen út létezéséhez.

Gyakorlat 8.1.3 *Igazoljuk, hogy ha az irányított vágásfeltétel megsérül, akkor a fedési feltétel is.*

TÉTEL 8.1.4 *Amennyiben D aciklikus és $D+H$ síkgráf, úgy a fedési feltétel szükséges és elegendő az élidegen utak létezéséhez.*

Biz. Tekintsük a $D+H$ gráf síkbeli duálisát, $D'+H'$-t. Állítjuk, hogy ebben létezik k élidegen irányított vágás. Ha nem ez volna a helyzet, akkor a Lucchesi-Younger tétel alapján létezne legfeljebb $k-1$ él, amely az összes irányított vágást lefogja. Ez éppen azt jelentené, hogy az eredeti $D+H$ gráfban az összes irányított kört le lehetne fogni k-nál kevesebb éllel, ellentétben a fedési feltétellel.

Tehát $D'+H'$-ben van k élidegen irányított vágásunk, azaz az eredeti $D+H$-ban van k élidegen irányított körünk. Mivel a feltevés szerint D aciklikus, ezen körök mindegyike tartalmaz legalább egy igényélt. Másrészt k igényél van, így a k kör mindegyike pontosan egy igényélt tartalmaz, vagyis ezen körök F-jó körök. •

8.1.4 Élidegen T-utak

Az alábbi feladatban nincsenek előírva az úttal összekötendő pontpárok, hanem csak egy terminál halmaz adott. Legyen T a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf csúcsainak egy részhalmaza. Egy utat T-**út**nak nevezünk, ha végpontjai T-ben vannak, belső pontjai viszont nem. A Menger tétel irányítatlan élváltozata két elemű T esetén megmondja, hogy mennyi az élidegen T-utak maximális száma. Az általános eset jóval nehezebb, most csak arra az esetre szorítkozunk, amikor minden T-n kívüli pont páros fokú.

TÉTEL 8.1.5 (Lovász, Cherkasskij) *Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf, T a pontok egy olyan halmaza, hogy minden T-n kívüli pont foka páros. Az élidegen T-utak maximális száma egyenlő az $L := \sum_{v \in T} \lambda(v, T - v)/2$ értékkel, vagy ekvivalens alakban, létezik élidegen T-utaknak egy olyan rendszere, amelyben minden $v \in T$ pontból $\lambda(v, T - v)$ út indul ki.*

Biz. A bizonyításban a $\lambda(v, T - v)$ értéket röviden $\lambda(v)$-vel fogjuk jelölni. Élidegen T-utak egy rendszerében v-ből legfeljebb $\lambda(v)$ út indul ki, így az élidegen T-utak maximális száma legfeljebb a $\sum_{v \in T} \lambda(v)$ összeg fele, azaz L.

Az egyenlőség igazolásához élszám szerinti indukciót használunk. A tétel semmitmondó, ha a gráfnak nincs éle. Feltehető, hogy a gráf összefüggő. Feltehető továbbá, hogy T nem feszít élt, mert egy ilyen e élt kihagyva L értéke eggyel csökken, a maradékban indukcióval van $L - 1$ élidegen T-út, amihez hozzávéve az egyetlen e élből álló T-utat, megkapjuk G-ben a kívánt L darab élidegen T-utat.

Két esetet különböztetünk meg. Először tételezzük fel, hogy létezik olyan $t \in T$ elem és X nem egyelemű részhalmaz, melyekre $X \cap T = \{t\}$ és $\lambda(t) = d(X)$. Húzzuk össze az X halmazt egy ponttá, melyet jelöljön t'. Az összehúzott gráf legyen G' és $T' := T - t + t'$. Legyen $u \in T'$-re $\lambda'(u) := \lambda(u, T' - u; G')$.

Állítás 8.1.6 *$\lambda'(t') = \lambda(t)$ és minden $u \in T - t$-re $\lambda'(u) = \lambda(u)$.*

Biz. Miután összehúzással csak meglévő vágások szűnnek meg és újak nem keletkeznek, a λ értékek biztosan nem csökkennek. A $\lambda'(t') \leq d'(t') = d(X) = \lambda(t)$ egyenlőtlenségből következik az állítás első része.

Legyen most $u \in T - t$. A Menger tétel alapján van egy olyan U olyan halmaz, amelyre $U \cap T = \{u\}$ és $\lambda(u) = d(U)$. Ekkor $\lambda(u) + \lambda(t) = d(U) + d(X) \geq d(U - X) + d(X - U) \geq \lambda(u) + \lambda(t)$, amiből végig egyenlőség, és így $\lambda(u) = d(U - X) = d'(U - X) \geq \lambda'(u) \geq \lambda(u)$ következik. •

Indukcióval következik, hogy G'-ben van $L' = L$ darab élidegen T'-útból álló $\mathcal{F}'$ útrendszer. Ennek G-ben megfelel egy $\mathcal{F}$ útrendszer. Tekintsünk most G-ben $\lambda(v) = d(X)$ darab élidegen utat u-ból $T - u$-ba, illetve ezeknek csak azon kezdőszeleteit, melyeknek utolsó élei az X és $V - X$ között vezető élek. Ezen utakat és az $\mathcal{F}$-beli utak közül az X-ben végződőket összeillesztve, megkapjuk G-nek egy L útból álló élidegen T-út rendszerét.

Másodiknak vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor semelyik $t \in T$ pontra sincs olyan legalább két elemű X halmaz, amelyre $X \cap T = \{t\}$ és $d(X) = \lambda(t)$. Ez azt jelenti, hogy $X \cap T = \{t\}$, $|X| \geq 2$ esetén $d(X) > \lambda(t)$. A paritási feltevés miatt $d(X)$ és $d(t) = \lambda(t)$ megegyező paritású, ezért $d(X) \geq \lambda(t) + 2$. Tekintsünk most egy tetszőleges $e = tz$ élt és egy z-ben végződő másik $f = zv$ élt. Helyettesítsük az e és f éleket egy új $h = tv$ éllel (mással emeljük le az e, f éleket). A létrejövő G'' gráfban is minden T-n kívüli pont páros fokú. Miután a leemeléssel egy halmaz foka legfeljebb kettővel csökkenhet, $d(X) \geq \lambda(t) + 2$ miatt a $\lambda(t)$ értékek változatlanok maradnak, azaz $L'' = L$. Indukcióval létezik G''-ben L darab élidegen T-út. De ekkor G-ben is létezik, hiszen ha az egyik út használja h-t, akkor h-t e-re és f-re cserélve G-beli utat kapunk. • •

Gyakorlat 8.1.4 *Példán mutassuk meg, hogy a Lovász-Cherkasskij tételben a paritási feltevés nem hagyható el.*

8.2 Élidegen utak síkgráfban

Vizsgáljuk meg az élidegen út problémát irányítatlan síkgráfokban. Szükségünk lesz az alábbi megfigyelésekre.

Lemma 8.2.1 *(a) Ha G minden elemi vágása teljesíti a vágás egyenlőtlenséget, akkor minden vágása teljesíti. (b) Ha Z egy tartalmazásra nézve minimális pontos $s\bar{t}$-halmaz, akkor a $[Z, V-Z]$ vágás elemi.*

Biz. (a) Először igazoljuk a vágás egyenlőtlenséget az olyan $[X, V-X]$ vágásokra, melyekre X összefüggő gráfot feszít. Legyenek a $V-X$ által feszített gráf komponensei $K_1, \ldots, K_l$. Ekkor a $G-K_i$ összefüggő, azaz a $[K_i, V-K_i]$ vágás elemi, és ezért $d_G(K_i) \geq d_H(K_i)$. De ekkor $d_G(X) = \sum_i d_G(K_i) \geq \sum_i d_H(K_i) \geq d_H(X)$.

Legyen most $[X, V-X]$ tetszőleges vágás és legyenek a $V-X$ által feszített gráf komponensei $K_1, \ldots, K_l$ ($l \geq 2$). Az első részben láttuk, hogy azok a vágások, melyeknek egyik partja G-nek összefüggő részgráfját feszíti teljesítik a vágás egyenlőtlenséget. Így speciálisan a $[K_i, V-K_i]$ vágások is, és ezért $d_G(X) = \sum_i d_G(K_i) \geq \sum_i d_H(K_i) \geq d_H(X)$.

A (b) rész igazolásához figyeljük meg, hogy ha X pontos halmaz, úgy a fenti egyenlőtlenségek mind egyenlőséggel teljesülnek, és ezért mind az X, mind a $V-X$ által feszített részgráf komponensei is pontosak. Ebből kapjuk, hogy ha Z tartalmazásra nézve minimális pontos $s\bar{t}$-halmaz, úgy Z összefüggő részgráfot feszít. •

Lemma 8.2.2 (a) *Ha A, B pontosak és $d_H(A,B) = 0$, akkor mind $A \cap B$, mind $A \cup B$ pontos és $d_G(A,B) = 0$.* (b) *Ha A, B pontosak és $\bar{d}_H(A,B) = 0$, akkor mind $A-B$, mind $B-A$ pontos és $\bar{d}_G(A,B) = 0$.*

Biz. $d_H(A) + d_H(B) = d_G(A) + d_G(B) == d_G(A \cap B) + d_G(A \cup B) + 2d_G(A,B) \geq= d_H(A \cap B) + d_H(A \cup B) + 2d_G(A,B) = d_H(A) + d_H(B) + 2(d_G(A,B) - d_H(A,B))$, amiből az (a) rész következik. A (*b*) részt megkapjuk (a)-ból, ha azt B helyén és $V-B$-re alkalmazzuk. •

TÉTEL 8.2.3 (H. Okamura és P.D. Seymour) *Legyen $G = (V,E)$ síkgráf és a $H = (V,F)$ igénygráf olyan, hogy $G+H$ Euler és minden terminálpont G egy tartományának határán helyezkedik el. Ekkor a vágás feltétel szükséges és elegendő az élidegen út probléma megoldásához.*

Biz. G élszáma szerinti indukciót használunk. Az elegendőséget elég a G komponenseira külön bizonyítani, így feltehetjük, hogy G összefüggő. Még az is feltehető, hogy G 2-összefüggő (miért?). Ekkor G minden tartományát kör határolja. Jelölje C a végtelen tartományt határoló kört, és tegyük fel, hogy C pontjai ciklikus sorrendben $v_1, \ldots, v_h$. Feltehetjük, hogy a terminál pontok C-n vannak.

Legyen e a C egy olyan éle, amely benne van pontos vágásban, illetve, ha nincs pontos vágás, akkor C bármelyik éle megteszi. Az indexek esetleges átszámozásával feltehető, hogy $e = v_h v_1$. Legyen $A \subset V$ minimális pontos halmaz, amely v_1-t tartalmazza, de v_h-t nem. A 8.2.1 lemma szerint A összefüggő részgráfját feszíti G-nek, így G síkbelisége miatt az A halmaz a C kört két ívre bontja; az egyik benne van, a másik kívüle. Válasszunk egy olyan $f = v_i v_j$ ($i < j$) igényélt, amelyre $v_i \in A$, $v_j \notin A$ és j a lehető legnagyobb. (Ha egyáltalán nincs pontos halmaz, úgy bármely igényél jó lesz.)

Töröljük el G-ből az e élt és cseréljük ki az f igényélt a $v_1 v_i$ és $v_j v_h$ igényélekre. A kapott G' gráf és H' igénygráf olyan, hogy $G' + H'$ Euler és a terminálok G' egy tartományának határán vannak. Belátjuk, hogy a vágás feltétel is teljesül. Ebből a tétel már következik majd, hiszen indukció miatt G'-ben az élidegen út problémának már van megoldása, és ha ebben a v_1 és v_i között valamint a v_j és v_h között vezető utakat az e él segítségével összeragasztjuk, úgy egy v_i és v_j közötti utat kapunk.

Ha a vágás feltétel indirekt megsérülne G'-re és H'-re nézve, akkor $G+H$ Eulersége miatt létezik egy $G+H$-ra nézve pontos halmaz, amely a v_1, v_i, v_j, v_h pontok közül pontosan vagy *(i)* v_1-t tartalmazza, vagy *(ii)* v_h-t, vagypedig *(iii)* v_1-t és v_h-t.

Az f választása folytán mindegyik esetben $d_H(A,B) = 0$, így alkalmazhatjuk a **??** lemmát, amelyből adódóan mind $A \cap B$, mind $A \cup B$ szoros és $d_G(A,B) = 0$. Az *(i)* és *(iii)* esetekben $A \cap B$ szorossága ellentmond A minimális választásának. Az *(ii)* esetben pedig az e él miatt $d_G(A,B) = 0$ egyenlőséggel kerülünk ellentmondásba. •

Bizonyítás nélkül közöljük az Okamura-Seymour tétel alábbi kiterjesztését.

TÉTEL 8.2.4 (Okamura) *A vágás feltétel még abban az esetben is elegendő, amikor G síkgráf, $G+H$ Euler és G-nek van két tartománya úgy, hogy minden igény él vagy az egyik tartomány határának két pontját köti össze vagy a másikét.*

Kis példa, amikor G síkgráf, $G+H$ Euler és a vágás feltétel nem elegendő a következő: Legyen $G+H$ a teljes ötpontú gráf, amelynek 10 éle közül egy háromszög és az ettől diszjunkt él alkossa az igényéleket, a többi 6 él pedig a G gráfot.

9. Fejezet

PÁROSÍTÁSOK STRUKTÚRÁJA

9.1 Maximális párosítások

Valamely G irányítatlan gráfra jelölje $\nu = \nu(G)$ a független élek maximális számát vagyis a legnagyobb párosítás elemszámát. Kőnig tétele szerint páros gráfban ez egyenlő a pontokat lefogó élek minimális τ számával. Nem páros gráfokban a $\nu = \tau$ min-max reláció már nem feltétlenül igaz, amint ezt a háromszög példája mutatja. Itt $\nu = 1, \tau = 2$. Általános gráfokra vonatkozik az alábbi jellemzés.

TÉTEL 9.1.1 (Berge-Tutte formula) *G-ben a független élek maximális $\nu(G)$ számára érvényes:*

$$\nu(G) = \min_{X \subseteq V} \{|V| - q(X) + |X|\} /2, \tag{9.1}$$

ahol $q(X)$ jelöli az X elhagyásával keletkező páratlan pontszámú komponensek számát.

Ezt a tételt már korábban levezettük Tutte tételéből, most egy közvetlen bizonyítást is adunk. Egy összefüggő gráfot nevezzünk **faktorkritikus**nak vagy röviden **kritikus**nak, ha bármely pontját elkerüli maximális elemszámú párosítás.

Lemma 9.1.2 (Gallai) *G kritikus gráfban a maximális párosítás egyetlen pontot hagy fedetlenül.*

Biz. A definícióból kapjuk, hogy G-nek nincs teljes párosítása. Tegyük fel indirekt, hogy egy M maximális párosítás legalább két pontot nem fed. Válasszuk M-t és a fedetlenül maradó s és t pontokat úgy, hogy az s és t G-beli távolsága a lehető legkisebb legyen. Persze ez a távolság nem egy, azaz s és t nem szomszédos, mert akkor az st élt M-hez lehetne venni, ellentétben M maximális voltával. Legyen P egy legrövidebb út s és t között, és legyen z ennek egy belső pontja. Mivel G kritikus, létezik egy z-t elkerülő maximális elemszámú M_z párosítás. Az M, s, t választása miatt M fedi a P út minden belső pontját, így z-t is. Tekintsük a z-ből induló $M - M_z$-alternáló utat, amelynek első éle M-beli, így utolsó xy éle az M_z maximalitása miatt szükségképpen M_z-beli. Az y pontot tehát nem fedi M, és értelemszerűen y különbözik s és t egyikétől, mondjuk s-től. Ekkor az alternáló út mentén cserélve egy olyan párosítást kapunk M-ből, amelynek elemszáma megegyezik M-ével, azaz, amelyik maximális, továbbá szabadon hagyja z-t és s-t, ellentmondásban az M, s, t választásával. •

Térjünk rá a Berge-Tutte formula bizonyítására. Tetszőleges M párosítás és $X \subseteq V$ halmaz esetén legalább $q(X) - |X|$ pont marad fedetlen, azaz M legfeljebb $|V| - (q(X) - |X|)$ pontot fed, így az M elemszáma legfeljebb $(|V| - q(X) + |X|)/2$. Így a formulában a $\nu(G) \leq$ min irány következik.

A fordított egyenlőtlenség bizonyításához V elemszáma szerinti indukciót alkalmazunk. Ha $|V| = 0$, akkor (9.1) mindkét oldala 0. Tegyük fel tehát, hogy $|V| \geq 1$ és azt, hogy a (9.1) formula érvényes minden kisebb gráfra. Nyilván feltehető, hogy G összefüggő. Azt kell kimutatnunk, hogy létezik egy olyan $X_0 \subseteq V$ halmaz, amelyre

$$\nu(G) \geq (|V| - q(X_0) + |X_0|)/2. \tag{9.2}$$

1. eset G *nem kritikus*, azaz van olyan v pontja, amelyet elhagyva a keletkező G' gráfra $\nu(G') \leq \nu(G) - 1$. Legyen $V' := V - v$. Indukciót használva kapjuk, hogy létezik olyan $X_0' \subseteq V - v$, amelyre $\nu(G') = (|V'| - q'(X_0') + |X_0'|)/2$, ahol $q'(X_0')$ a $G' - X_0'$-ben jelöli a páratlan komponensek számát. Legyen $X_0 := X_0' + v$. Nyilván $q(X_0) = q'(X_0')$. Ezeket összevetve kapjuk: $\nu(G) - 1 \geq \nu(G') = (|V'| - q'(X_0') + |X_0'|)/2 = (|V| - q(X_0) + |X_0| - 2)/2$, ami éppen (9.2).

2. eset *G kritikus.* A Gallai lemma alapján $\nu(G) = (|V|-1)/2$. Tehát $X_0 := \emptyset$ választással $\nu(G) = (|V|-1)/2 \geq (|V| - q(X_0) + |X_0|)/2$, azaz (9.2) fennáll. • •

Nevezzünk **gát**nak egy olyan X halmazt, amelyre a minimum a Berge-Tutte formulában felvététetik. A Berge-Tutte formulából kiolvasható, hogy tetszőleges M maximális párosítás esetén egy X halmaz akkor és csak akkor gát, ha

(a) *Az X elhagyásával keletkező bármely C komponensre az M-nek a C-be eső része legfeljebb egy pont híján fedi C-t.* (b) *X nem feszít M-beli élt.* (c) *M fedi X minden pontját.*

A Berge-Tutte formula valójában azzal ekvivalens, hogy létezik olyan M párosítás és pontoknak olyan X részhalmaza, melyekre (a), (b) és (c) fennáll.

TÉTEL 9.1.3 (Lovász) *Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor kritikus, ha felépíthető bármely pontjából kiindulva páratlan élszámú fülek egymás utáni hozzávételével* (ahol egy fül vagy egy egyszerű út, amelynek csak a két végpontja közös a meglévő gráffal, vagypedig egy kör, amelynek egyetlen pontja közös a meglévő gráffal.)

Biz. A Gallai lemma nyomán a kritikusságnak azt az ekvivalens definícióját használjuk, hogy bármely pontot kihagyva létezik teljes párosítás. Egyszerű ellenőrizni, hogy a felépítési művelet kritikus gráfot eredményez.

A fordított irányhoz legyen r a gráf egy tetszőleges pontja és M_r a $G - r$ egy teljes párosítása. Azt fogjuk belátni, hogy G felépíthető M-ben altrnáló fülek felhasználásával. Mivel ezek első és utolsó éle nem M-beli, egy M-alternáló fül mindig páratlan élszámú.

Tegyük fel, hogy r-ből kiindulva már felépítettünk G-nek egy részgráfját a megadott módon. Jelölje a részgráf ponthalmazát T. (A kezdetben T az egyetlen r pontból áll.) Készen vagyunk, ha $T = V$, ekkor ugyanis a még G-ből esetleg hiányzó éleket egyélű M-alternáló utakként bevéve, megkapjuk G-t. Ha még $T \neq V$, akkor G összefüggősége miatt létezik olyan uv él, amelyre $u \in T, v \notin T$. A gráf kritikus, így v-ből létezik r-be vezető páros M-alternáló út. Legyen ennek p az első T-be eső pontja és jelölje P' az útnak v-ből p-be vezető szegmensét. Most az uv él a P'-vel együtt egy M-alternáló utat vagy kört alkot, amellyel T tovább építhető. •

Most igazolni fogjuk, hogy a Berge-Tutte formulában szereplő gátak között van egy "kanonikus".

TÉTEL 9.1.4 (Gallai és Edmonds) *A $G = (V, E)$ gráfban jelölje $D(G)$ azon pontok halmazát, amelyeket G-nek valamely maximális párosítása nem fed le. Álljon $A(G)$ a $V - D(G)$ azon pontjaiból, melyeknek van $D(G)$-beli szomszédja, és legyen $C(G)$ a maradék pontok halmaza. Ekkor $A(G)$ gátja G-nek, éspedig éppen az a gát, amelynek elhagyásával keletkező páratlan komponensek uniója a lehető legszűkebb. $D(G)$ a $V - A(G)$ páratlan komponenseinek egyesítése, $C(G)$ pedig a $V - A(G)$ páros komponenseinek egyesítése. $D(G)$ komponensei kritikus gráfok. Végül, ha eltöröljük $C(G)$-t valamint az A által feszített éleket, és a páratlan komponensek mindegyikét egy-egy pontra húzzuk össze, akkor olyan páros gráfot kapunk, amelyben az A minden X nemüres részhalmazának legalább $|X| + 1$ szomszédja van.*

Biz. Tetszőleges A' gáthoz jelölje D' a $G - A'$ páratlan komponenseinek unióját, C' pedig a párosakét. Tetszőleges maximális M' párosítás esetén az M' lefedi a X'-t és C'-t. Ezért $D(G)$ biztosan része D'-nek.

Legyen most A' egy olyan gát, amelyre D' minimális. Ekkor D' komponensei kritikusak, mert ha mondjuk az egyik K komponens nem volna az, akkor a K által feszített $G[K]$ gráfnak létezne nemüres X' gátja, amelyet A'-höz véve a G-nek egy olyan gátját kapnánk, ahol a páratlan komponensek uniója valódi része volna D'-nek.

Érvényes továbbá, hogy ha eltöröljük C'-t az A'-ban lévő éleket, és a D'-beli páratlan komponensek mindegyikét egy-egy pontra húzzuk, akkor olyan páros gráfot kapunk, amelyben az A' minden X nemüres részhalmazának legalább $|X| + 1$ szomszédja van. Valóban, ha volna egy hibás X halmaz, akkor $A' - X$ is gát lenne G-ben, amelynek elhagyásával keletkező páratlan komponensek uniója valódi része lenne D'-nek. Ebből kapjuk, hogy D' bármely K páratlan komponenséhez létezik maximális párosítás, amely nem tartalmaz K-ba lépő élt, és így K kritikussága miatt K bármely pontjához létezik őt elkerülő maximális párosítás. Vagyis $D' = D(G)$. Mivel A', gát, így minden pontjából vezet él D'-be, ugyanakkor C' semelyik pontjából nem vezet él D'-be. Tehát $A' = A(G)$, és emiatt $C' = C(G)$. •

Tartalom

Frank András

KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁS, I:

GRÁFELMÉLET

2007. május 6.

ELTE TTK, Operációkutatási Tanszék