Az analízis megalapozása példatár

Gémes Margit, Keleti Tamás, Szentmiklóssy Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

2015. június 24.

Tartalomjegyzék

1. A logika alapjai

Egy szigeten olyan lakosok élnek, akik csak hétfőn, szerdán és pénteken mondanak igazat, a hét többi napján hazudnak. Mikor hangozhattak el a következő mondatok?

1.1. Holnap igazat fogok mondani.

1.2. Holnap és holnapután is hazudni fogok.

A híres Feit-Thompson-tétel azt mondja ki, hogy minden páratlan elemszámú véges csoport feloldható. A tétel alapján mit válaszolhatunk az alábbi kérdésekre? (Az is lehet, hogy semmit, vagyis a tételből semmit sem következik az adott kérdésre.) A feladatban szándékosan szerepelnek olyan matematikai fogalmak is, amelyeket nem ismernek. Ez nem okozhat gondot, mert most csak a logikai összefüggéseket kell érteni.

1.3. Van-e 111 elemű nem feloldható csoport?

1.4. Van-e 112 elemű feloldható csoport?

1.5. Van-e 111 elemű feloldható csoport?

1.6. Van-e 112 elemű nem feloldható csoport?

1.7. Igaz-e, hogy ha egy véges csoport nem feloldható, akkor páros elemszámú?

1.8. Igaz-e, hogy ha egy véges csoport feloldható, akkor páratlan elemszámú?

1.9. Igaz-e, hogy minden páratlan elemszámú nem feloldható véges csoport torziómentes?

1.10. Igaz-e, hogy minden páratlan elemszámú véges csoport torziómentes vagy feloldható?

A matematika talán legfontosabb és leghíresebb sejtése a Riemann-sejtés, mely azt mondja ki, hogy a Rimann-féle zéta-függvény minden nem triviális komplex gyökének a valós része $1/2$. (A triviális gyökök a $-2, -4, -6, \ldots$.) A feladatban szándékosan szerepelnek olyan matematikai fogalmak is, amelyeket nem ismernek. Ez nem okozhat gondot, mert most csak a logikai összefüggéseket kell érteni.

1.11. Bizonyítja-e a sejtést, ha találunk egy olyan nem triviális komplex gyököt, melynek a valós része $0,5$?

1.12. Bizonyítja-e a sejtést, ha találunk egymillió olyan nem triviális komplex gyököt, melynek a valós része $0,5$?

1.13. Megcáfolja-e a sejtést, ha találunk egy olyan nem triviális komplex gyököt, melynek a valós része $0,498$?

Tanulni fogjuk ebben a félévben, hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye. Ez és a múlt félévben tanultak alapján válaszoljunk a kérdésekre.

1.14. Van-e olyan függvény, amelynek nincs primitív függvénye, de differenciálható?

1.15. Van-e olyan függvény, amelynek van primitív függvénye, de nem differenciálható?

Matematika országban a bíró csak a bizonyítékoknak hisz. Például, ha Frigyes azt állítja, hogy van fekete oroszlán, akkor állításának helyességéről meggyőzheti a bírót azzal, ha mutat neki egy fekete oroszlánt.

1.16. Frigyes azt állítja, hogy minden oroszlán fekete. Elég bizonyíték-e, ha mutat a bírónak egy fekete oroszlánt?

1.17. Frigyes azt állítja, hogy minden oroszlán fekete, Gerzson pedig azt állítja, hogy Frigyes téved. Hogyan bizonyíthatná Gerzson az állítását?

1.18. Frigyes azt állítja, hogy minden 2-re vegződő négyzetszám osztható 3-mal. Gerzson szerint Frigyes téved. Hogyan bizonyíthatná Gerzson az állítását? Frigyesnek vagy Gerzsonnak van igaza?

1.19. Frigyes azt állítja, hogy bármely egymást követő három egész szám összege osztható 3-mal. Hogyan bizonyíthatná Frigyes az állítását?

1.20. Frigyes azt állítja, hogy egy másodfokú egyenletnek lehetnek negatív gyökei. Hogyan bizonyíthatná Frigyes az állítását?

1.21. Frigyes azt állítja, hogy egy másodfokú egyenletnek lehet 3 gyöke. Gerzson szerint Frigyes téved. Hogyan bizonyíthatná Gerzson az állítását?

Balkezes Bendegúz a bal kezével mindig igaz, a jobb kezével mindig hamis állításokat írt. Melyik kezével írta a következő állításokat?

1.22. Minden 9-cel osztható négyzetszám osztható 3-mal.

1.23. Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel és 4-gyel.

1.24. Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel vagy 4-gyel.

1.25. Minden 2-re végződő négyzetszám páratlan.

1.26. A 0 páros szám.

1.27. Van olyan piros krokodil, amelyik éppen most ebben a teremben repked.

1.28. Minden piros krokodil, amelyik éppen most ebben a teremben repked, 17-nél nagyobb prímszám.

Tudjuk, hogy b és c olyan számok, melyekre $b \mid 2520 \implies c \mid 2520$. Mire következtethetünk az alábi állításokból?

1.29. $b \nmid 2520$

1.30. $c \nmid 2520$

1.31. Ha kedd van, akkor Belgiumban vagyunk. Melyik állítás következik ebből?

(a) Ha szerda van, akkor nem Belgiumban vagyunk.

(b) Ha Belgiumban vagyunk, akkor kedd van.

(c) Ha nem Belgiumban vagyunk, akkor nincs kedd.

1.32. Ha kedd van, akkor Belgiumban vagyunk. Melyik állítás jelenti ugyanezt?

(a) Ha szerda van, akkor nem Belgiumban vagyunk.

(b) Ha Belgiumban vagyunk, akkor kedd van.

(c) Ha nem Belgiumban vagyunk, akkor nincs kedd.

Hány olyan részhalmaza van a $H = \{1, 2, 3, \dots 100\}$ halmaznak, amelyre teljesül az adott tulajdonság?

1.33. Az 1 benne van a részhalmazban.

1.34. Az 1 és a 2 benne van a részhalmazban.

1.35. Az 1 vagy a 2 benne van a részhalmazban.

1.36. Az 1 nincs benne vagy a 2 nincs benne a részhalmazban?

1.37. Az 1 benne van a részhalmazban vagy a 2 nincs benne a részhalmazban.

1.38. Ha az 1 benne van a részhalmazban, akkor a 2 benne van a részhalmazban.

1.39. Ha az 1 benne van a részhalmazban, akkor a 2 nincs benne a részhalmazban?

1.40. Hány olyan részhalmaza van a $H = \{1, 2, 3, \ldots 100\}$ halmaznak, amelyekre az előző hét feladat tulajdonságai nem teljesülnek? (Ez 7 külön feladat.)

1.41. Egy egész számokból álló H halmazról tudjuk, hogy valahányszor x és $x + 1$ benne van a H halmazban valamilyen x-re, akkor $x + 2$ is benne van H-ban. Következik-e ebből, hogy valahányszor y nincs benne H-ban, de $y - 1$ benne van H-ban valamilyen y-ra, akkor $y - 2$ nincs benne H-ban?

1.42. Fogadjuk el igaznak az alábbiakat:

(a) Ha egy állat emlős, akkor vagy van farka, vagy van kopoltyúja.

(b) Egyik állatnak sincs farka.

(c) Minden állat vagy emlős, vagy van farka, vagy van kopoltyúja.

Következik-e a fentiekből, hogy minden állatnak van kopoltyúja?

1.43. Mi a következő két állítás logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: Ha egy macska bolhás, akkor vakarózik.

Q: Minden bolhás macska vakarózik.

1.44. Fogadjuk el igaznak, hogy ki korán kel, aranyat lel. Melyik állítás igazsága következik ebből?

(a) Aki későn kel, nem lel aranyat.

(b) Aki aranyat lelt, az korán kelt.

(c) Aki nem lelt aranyat, az későn kelt.

1.45. Igaz-e, hogy ha a teremben repkedő krokodil prímszám, akkor minden prímszám páratlan? Igaz-e az állítás megfordítása? Igaz-e, hogy ha minden prímszám páratlan, akkor a teremben repkednek krokodilok?

1.46. Bizonyítsuk be, hogy

$$(A \Longleftrightarrow B) \;=\; (A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longleftarrow B)\,!$$

Igazak-e a következő állítások?

1.47. $(A \Longrightarrow B) \;=\; (B \Longrightarrow A)$

1.48. $(A \Longrightarrow B) \;=\; (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$

1.49. $(A \Longrightarrow B) \;=\; (\overline{A} \Longrightarrow \overline{B})$

1.50. $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \subset C$

1.51. $(A \in B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \in C$

1.52. $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$

1.53. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$

1.54. $(A \in B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$

Formalizáljuk, azaz írjuk fel csak logikai jelekkel az alábbi állításokat!

1.55. Nem igaz, hogy P vagy Q.

1.56. Nem P, ha nem Q.

1.57. Sem Q, sem P.

1.58. P pedig nem is Q.

1.59. Csak akkor P, ha Q.

1.60. Sem P, sem Q.

1.61. Q, feltéve, hogy P.

1.62. Nem P, mégis Q.

1.63. P vagy Q, de nem mindkettő.

1.64. Nem igaz, hogy ha P, akkor egyúttal Q is.

Írjuk fel az alábbi állítások igazságtáblázatát, az állítások tagadását és a tagadások igazságtáblázatát!

1.65. $\neg A \Longrightarrow B$

1.66. $\neg B \Longrightarrow \neg A$

Tegyük fel, hogy az A állításból nem következik a B állítás. Van-e a következő formulák között olyan, amelyik pontosan ugyanezt jelenti, azaz ekvivalens azzal, hogy $\overline{A \Longrightarrow B}$?

1.67. $A \Longrightarrow \overline{B}$

1.68. $\overline{A} \Longrightarrow B$

1.69. $B \Longrightarrow A$

1.70. $\overline{B} \Longrightarrow A$

Olvassuk fel a következő állításokat!

1.71. $(\exists x)\ (x \in H)$

1.72. $(\exists x)(\exists y)\ (x \in H \wedge y \in H \wedge x \neq y)$

1.73. $(\forall x \in H)(\forall y \in H)(\forall z \in \mathbb{R})\ (x < z < y \Longrightarrow z \in H)$

1.74. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül) a prímszámok halmazát!

Írjuk fel az alábbi állítások tagadását!

1.75. Kék az ég és zöld a fű.

1.76. Ki korán kel, aranyat lel.

1.77. Minden tengerész járt már kocsmában.

1.78. Van olyan kocsma, ahol még nem járt tengerész.

1.79. Minden tengerész ismer olyan kikötőt, ahol van olyan kocsma, ahol még nem járt.

1.80. Ha a nagynénikémnek kerekei lennének, akkor ő lenne a miskolci gyors.

1.81. Minden egér szereti a sajtot.

1.82. Aki másnak vermet ás, maga esik bele.

1.83. Minden ember életében jön egy pillanat, mikor olyat akar tenni, amit nem szabad.

1.84. Van, akit nem várnak, csak érkezik.

1.85. Mindenki másképp csinálja.

1.86. Londonban sej, van számos utca, és minden utcán van sarok.

1.87. Egy csoport kapott egyszer egy zacskó cukorkát. Igaz-e, hogy ha volt olyan hallgató, aki minden cukorkát szopogatott, akkor volt olyan cukorka, amit minden hallgató szopogatott? Igaz-e az állítás megfordítása?

Egy táncmulatságon lányok és fiúk táncoltak. Jelölje $T(L, F)$ azt az állítást, hogy az L lány az este folyamán táncolt az F fiúval. Fordítsuk le emberi nyelvre az összes alábbi állítást! Minden egy állításpárnál döntsük el, hogy van-e különbség a két állítás között, következik-e valamelyikből a másik, ekvivalensek-e!

1.88. **P:** $(\exists L)(\exists F)\, T(L, F)$ **Q:** $(\exists F)(\exists L)\, T(L, F)$

1.89. **P:** $(\forall L)(\exists F)\, T(L, F)$ **Q:** $(\exists F)(\forall L)\, T(L, F)$

1.90. **P:** $(\forall L)(\forall F)\, T(L, F)$ **Q:** $(\forall F)(\forall L)\, T(L, F)$

Jelentse $P(x)$, hogy x páros, $H(x)$, hogy x hattal osztható. Mit jelentenek a következő formulák, és igazak-e?

1.91. $P(4) \wedge H(12)$

1.92. $\forall x \quad P(x) \implies H(x)$

1.93. $\exists x \quad P(x) \wedge \overline{H}(x)$

1.94. $\forall x \quad H(x) \implies P(x)$

1.95. Oldjuk meg a következő két feladatot!

(a) Oldjuk meg az $y^2 > 25$ egyenlőtlenséget!

(b) Keressünk meg azokat az Y értékeket, amelyekre igaz az, hogy ha $y > Y$, akkor $y^2 > 25$.
Azonos-e a két feladat megoldáshalmaza? Megoldása-e az (a), illetve a (b) feladatnak az $y = -7$? Ekvivalens-e az (a) és a (b) feladat?

1.96. Oldjuk meg a következő két feladatot!

(a) Oldjuk meg az $\frac{1}{y^2} < \frac{1}{100}$ egyenlőtlenséget!

(b) Keressünk meg azokat az Y értékeket, amelyekre igaz az, hogy ha $y < Y$, akkor $\frac{1}{y^2} < \frac{1}{100}$.

Azonos-e a két feladat megoldáshalmaza? Megoldása-e az (a), illetve a (b) feladatnak az $y = 17$? Ekvivalens-e az (a) és a (b) feladat?

1.97. Hány igaz állítás van a következő keretben?

1) A teremben repkedő piros krokodilok prímszámok.
2) Ha $x^2 = y^2$, akkor $x = y$
3) Ha $x = y$, akkor $\sin x = \sin y$.

1.98. Hány igaz állítás van a következő keretben?

1) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3) Ebben a keretben pontosan 1 igaz állítás van.

A következő feladatok mindegyikében két állítás szerepel egy olyan állatkertről, amelyikben van 10 oroszlán és 7 gorilla, és 9 gondozó törődik velük. Vizsgáljuk meg, lehet-e mindkét állítás igaz! Vizsgáljuk meg, lehet-e mindkét állítás hamis! Vizsgáljuk meg, lehet-e az egyik állítás igaz, a másik hamis, és ha lehet, mondjuk meg, melyik az igaz állítás!

1.99. **P:** Minden gorillának van kedvenc gondozója.

Q: Van olyan gondozó, akit minden gorilla kedvel.

1.100. **P:** Minden oroszlán minden gondozót kedvel.

Q: Van olyan oroszlán, amelyik kedvel gondozót.

1.101. **P:** Van olyan gondozó, aki kedvel oroszlánt.

Q: Van olyan oroszlán, amelyik kedvel gondozót.

1.102. **P:** Van olyan gorilla, aki minden gyümölcsöt a kedvenc gondozójától kap.

Q: Minden gyümölcs esetén van a olyan gorilla, amelyik azt a gyümölcsöt a kedvenc gondozójától kapja.

1.103. Négy embernek egy rozoga hídon kell átmennie sötétben egy zseblámpa segítségével. Egyszerre csak ketten tudnak átmenni és lámpa nélkül nem, tehát csak a "ketten átmennek, egy visszajön a lámpával" módszer lehetséges. Az emberek maximális sebessége különböző. Ha egyedül vannak, rendre 1, 2, 5 és 10 perc alatt érnek át. Két ember együtt a lassabbik sebességével tud haladni. Átjuthatnak-e a hídon valamennyien 30 perc alatt? Átjuthatnak-e 20 perc alatt? És 17 perc alatt? Vagy 15 perc alatt?

1.104. Kovács úr minden délután 5 órakor érkezik vonattal az állomásra, ahol a felesége várja kocsival, és azonnal hazaviszi. Egyik nap Kovács úr hamarabb végzett a munkájával, és korábbi vonatra szállt. Így 4 órakor érkezett az állomásra. Elindult gyalog hazafelé. A felesége a szokásos időben indult érte kocsival. Amikor az úton találkoztak, Kovács úr beült a kocsiba, és hazamentek. A szokásos időpontnál 10 perccel hamarabb érkeztek haza. Hány órakor ült be Kovács úr az autóba, ha feltételezzük, hogy a felesége mindig azonos és állandó sebességgel ment a kocsival?

1.105. Bendegúz egyszerre udvarolt Amáliának és Borókának. Amália a metró A, Boróka ugyanazon metróvonal B végállomásánál lakott. Bendegúz munka után lement a metróba, és mert mindkét lányt egyformán szerette, a metróra bízta a döntést. Amelyik metró először jött, arra szállt fel. A metrók mindkét irányban 10 percenként követték egymást. Egy idő után azt vette észre, hogy átlagosan 10 alkalomból 9-szer Amáliához ment, és csak egyszer Borókához. Hogyan lehetséges ez?

1.106. Egy börtönben az egyik rabnak felajánlják, hogy kiszabadulhat, ha a börtön kapuját egy megadott jel után pontosan 45 perccel nyitja ki. Órát viszont nem adnak neki, csak egy doboz gyufát, és két gyújtózsinórt. A gyújtózsinórokról azt lehet tudni, hogy mindkét gyújtózsinór pontosan 1 óra alatt ég végig, de a láng időben nem feltétlenül egyszerre és egyenletesen halad végig a zsinórokon. Hogyan tudja a rab a gyújtózsinórok segítségével pontosan kimérni a 45 percet?

1.107. Egy biológus egy 10m hosszú rúdra 100 hangyát rakott fel. Véletlenszerű volt, hogy melyik hangya a rúd melyik pontjára került, és az is véletlenszerű volt, hogy melyik hangya a rúd melyik vége fele nézett. A hangyák állandó, 1cm/s sebességgel haladtak mindaddig, amíg bele nem ütköztek egy másik hangyába. Akkor mindkét hangya megfordult, és 1cm/s sebességgel haladtak az ellenkező irányba a következő ütközésig, amikor is az ütköző hangyák megint megfordultak, és állandó, 1cm/s sebességgel haladtak tovább az ellenkező irányba a következő ütközésig, és így tovább. Ha egy hangya elért a rúd valamelyik széléhez, akkor leesett a rúdról. Bizonyítsuk be, hogy a kísérlet kezdete után 20 perccel már üres volt a rúd!

Egy vándor a sivatag szélén egy őrbódéhoz érkezett. Az őrbódétól két út indult tovább. Az egyik út a sivatag közepébe vezetett, ahonnan még senki nem jött vissza. A másik út egy oázishoz vitt. Az őrbódéban különböző őrök lehetnek. Lehet igazmondó, aki mindig igazat mond, lehet hazudós, aki mindig hazudik, és lehet szeszélyes, aki hol igazat mond, hol hazudik. A vándor eldöntendő kérdéseket tehet fel az őröknek, az őrök csak „igen"-nel vagy „nem"-mel felelhetnek. Milyen kérdéssel, illetve kérdésekkel tud a vándor biztosan eljutni az oázisba?

1.108. A bódéban két őr van, az egyik igazmondó, a másik hazug, és a vándor egy kérdést tehet fel.

1.109. A bódéban egy őr van, aki vagy igazmondó vagy hazug (nem tudjuk, melyik), és a vándor egy kérdést tehet fel.

1.110. A bódéban három őr van, egy igazmondó, egy hazug és egy szeszélyes, és a vándor két kérdést tehet fel.

1.111. A bódéban négy őr van, két igazmondó és két szeszélyes, és a vándor akárhány kérdést feltehet.

1.112. Oldjuk meg az előző feladatokat úgy, hogy az őrök ugyan értik a kérdést, de a vándor által nem ismert saját nyelvükön felelnek: csak „ukk" vagy „mukk" lehet a válaszuk, ahol a két válasz közül az egyik igent, a másik pedig nemet jelent.

1.113. 3 matematikus bemegy egy kocsmába, és rendel. A nagy zajban nem hallják egymást, a pincér is alig hallja őket. Ezért jó hangosan megkérdezi:
– Mindenki rendelt sört?
A matematikusok is hangosan felelnek:
1. matematikus: – Nem tudom.
2. matematikus: – Nem tudom.
3. matematikus: – Igen.
Kinek hoz, és kinek nem hoz sört a pincér?

Egy másik esetben a pincér ezeket a válaszokat kapta:
1. matematikus: – Nem tudom.
2. matematikus: – Nem tudom.
3. matematikus: – Nem.
Mit kérdezett a pincér, ha ezek után mindenkinek hozott sört?

2. Halmazok, valós számok

Igazak-e tetszőleges A és B halmazokra a következő állítások? Amelyik nem igaz, ott döntsük el, hogy igaz-e valamelyik tartalmazás, azaz hogy igaz állítást kapunk-e (minden A, B halmazpárra), ha $=$ helyett $\subset$-t vagy $\supset$-t írunk!

2.1. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$?

2.2. $(A \cup B) \setminus A = B$?

2.3. $(A \setminus B) \cup B = A$

2.4. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

Igazak-e a következő állítások?

2.5. $(A \subset B) \wedge (B \in C) \implies A \in C$

2.6. $(A \subset B) \wedge (B \in C) \implies A \subset C$

2.7. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \implies A \subset C$

2.8. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \implies A \in C$

2.9. $(A \in B) \wedge (B \in C) \implies A \in C$

2.10. $(A \in B) \wedge (B \subset C) \implies A \in C$

2.11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bizonyítsuk be az alábbiakat tetszőleges $A_1, \ldots, A_n$ halmazokra!

2.12. $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

2.13. $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

2.14. Állapítsuk meg az állítások logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e, hogy melyikből következik a másik!

P: $x \in A \vee x \in B$

Q: $x \in A \cap B$

2.15. Állapítsuk meg az állítások logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e, hogy melyikből következik a másik!

P: $(A \subset B) \wedge (C \subset D)$

Q: $A \setminus D \subset B \setminus C$

2.16. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül) azt, hogy a H halmaz pontosan 1 elemű!

2.17. Van-e olyan A halmaz, amelyre $\mathbb{Z} \subset A$ és $\mathbb{Z} \in A$ is teljesül?

Ábrázoljuk a következő halmazokat a számegyenesen!

2.18. $\{x \in \mathbb{Z} \ : \ x^2 \leq 5\}$

2.19. $\{x \in \mathbb{Z} \ : \ x^2 \leq 5 \wedge (x = 3 \vee x = -4)\}$

2.20. $\{x \in \mathbb{R} \ : \ (\forall y \in \mathbb{R})\ y > x \Longrightarrow y^2 > 4\}$

2.21. $\{x \in \mathbb{R} \ : \ (\forall y \in \mathbb{R})\ y < x \Longrightarrow y^2 < 4\}$

Bizonyítsuk be (az axiómákból) a következő állításokat!

2.22. Minden valós számhoz van nála nagyobb egész szám.

2.23. Minden valós számhoz van nála kisebb egész szám.

2.24. Bizonyítsuk be, hogy bármely két valós szám között van irracionális szám!

2.25. Írjuk fel az Arkhimédeszi és a Cantor axióma tagadását!

Teljesül-e a Cantor-axióma, ha zárt intervallumok helyett a következő intervallumok szerepelnének benne?

2.26. Nyílt.

2.27. Balról zárt, jobbról nyílt.

2.28. Teljesül-e a Cantor-axióma, ha zárt intervallumok helyett jobbról zárt, balról nyílt intervallum szerepelne benne?

2.29. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b valós számokra igaz, hogy $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$.

2.30. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számokra $|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$.

2.31. Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok teste nem rendezhető, azaz nem lehet megadni a komplex számok halmazán olyan rendezést, amelyre teljesül minden rendezési axióma!

Korlátosak-e alulról, illetve felülről a következő halmazok? Ha igen, adjunk meg alsó, illetve felső korlátokat! Határozzuk meg a halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

2.32. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.33. $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$

2.34. $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.35. A negatív irracionális számok halmaza

2.36. $\{\sqrt{n} : n \geq 2$ egész szám $\}$

2.37. $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$

Lehet-e a H halmaz szuprémuma c, ha teljesülnek a következő állítások?

2.38. $k < c$ és k felső korlátja H-nak?

2.39. $k > c$ és k alsó korlátja H-nak?

2.40. $\exists h \in H \quad h > c$?

2.41. c maximuma H-nak?

Legyen H egy nem üres számhalmaz. Mit jelentenek a következő állítások?

2.42. $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad y < x$

2.43. $\forall y \in H \quad \exists x \in H \quad y < x$

Igazak-e az előző két feladat állításai a következő halmazokra?

2.44. $H_1 = \{c : 0 \leq c < 1\}$

2.45. $H_2 = \{c : 0 < c \leq 1\}$

2.46. $H_3 = [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

2.47. $H_4 = \{[c] : 0 < c < 3\}$

2.48. $H_5 = \{\{c\} : 0 < c < 3\}$

2.49. $H_6 = \{\sin c : c \in \mathbb{R}\}$

2.50. $H_7 = \{\ln c : c > 0\}$

2.51. $H_8 = \{c^2 : c \in \mathbb{R}\}$

Legyen $K_1 = K_2 = \{c : 0 < c < 1\}$. Igazak-e a következő állítások?

2.52. $\forall x \in K_1 \quad \exists y \in K_2 \quad x < y$

2.53. $\exists y \in K_2 \quad \forall x \in K_1 \quad x < y$

Legyen H egy nem üres számhalmaz. Írjuk fel szövegel a „nem” szó használata nélkül az alábbi állításokat! Írjuk fel logikai kvantorokkal is a következő állításokat!

2.54. H-nak nincs minimuma.

2.55. H felülről nem korlátos.

2.56. A H halmaz nem korlátos.

2.57. Van-e olyan korlátos

(a) halmaz

(b) számsorozat

amelynek nincs se maximuma, se minimuma? (Egy számsorozat korlátos, ha a sorozat tagjaiból álló halmaz korlátos.)

2.58. Tegyük fel, hogy A nem üres, felülről korlátos halmaz, és $\sup A = b$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $x \in A$, amelyre $x > b - \varepsilon$!

Van-e olyan $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre teljesülnek a következő állítások?

2.59. $\sup A > \inf A$

2.60. $\sup A < \inf A$

2.61. $\sup A = \inf A$

2.62. $\sup A \neq \inf A$

Legyen H valós számok egy halmaza. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi formulák?

2.63. $(\exists x)\ (x \in H)$

2.64. $(\exists x)(\exists y)\ (x \in H \wedge y \in H \wedge x \neq y)$

2.65. $(\forall x)\ (x \in H \Longrightarrow x \in \mathbb{Z})$

2.66. $(\forall x)\ (x \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x \in H)$

2.67. Bizonyítsuk be, hogy bármely két valós szám között van véges tizedes tört!

2.68. Mi a kapcsolat a véges tizedes tört alakban felírható számok halmaza és a racionális számok halmaza között?

2.69. Igaz-e, hogy minden irracionális szám végtelen tizedestört alakja egyértelmű?

Igazak-e a következő állítások?

2.70. Minden véges tizedes tört alakban felírható szám racionális.

2.71. Minden racionális szám felírható véges tizedes tört alakban.

2.72. Minden irracionális szám végtelen tizedestört alakja egyértelmű.

2.73. Minden racionális szám végtelen tizedestört alakja nem egyértelmű.

2.74. Bizonyítsuk be a hatványozás azonosságait pozitív alap(ok) és egész kitevő(k) esetén!

2.75. Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$. Mit mondhatunk $\sup A$ és $\sup B$ nagyságviszonyáról (vagyis milyen egyenlőtlenség igaz biztosan) és mit $\inf A$ és $\inf B$ nagyságviszonyáról?

2.76. Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből melyik következik?

(a) H alulról nem korlátos.

(b) H-nak nincs legkisebb eleme.

(c) $(\forall x \in H)\ (\exists y \in H)\ y < x$.

2.77. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazokra

$$\Big((\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ x \leq y\Big) \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$$

2.78. Legyen H egy nem üres számhalmaz. Mi a következő állítások logikai kapcsolata?

P: H felülről korlátos

Q: $\forall h \in H \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad h < K$

Legyen H egy nem üres számhalmaz. Mit jelentenek a következő állítások?

2.79. $\exists x \in H \quad \forall y \in H \quad x \leq y$

2.80. $\exists y \in H \quad \forall x \in H \quad x \leq y$

Igazak-e az előző két feladat állításai a következő halmazokra?

2.81. $H_1 = \{c : 0 \leq c < 1\}$

2.82. $H_2 = \{c : 0 < c \leq 1\}$

2.83. $H_3 = [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

2.84. $H_4 = \{[c] : 0 < c < 3\}$

2.85. $H_5 = \{\{c\} : 0 < c < 3\}$

2.86. $H_6 = \{\sin c : c \in \mathbb{R}\}$

2.87. $H_7 = \{\ln c : c > 0\}$

2.88. $H_8 = \{c^2 : c \in \mathbb{R}\}$

2.89. Tegyük fel, hogy A és B olyan nem üres számhalmazok, melyekre teljesül, hogy

$$(\forall x \in A)\ (\forall y \in B)\ x < y.$$

Következnek-e ebből a következő állítások?

(a) $\sup A \leq \sup B$

(b) $\sup A < \sup B$

2.90. Igaz-e, hogy az A és B nem üres, korlátos halmazokra $\inf A = \inf B$ és $\sup A = \sup B$ is teljesül, akkor $A \cap B \neq \emptyset$?

2.91. Mely valós számok írhatóak fel egyértelműen végtelen n-edestört alakban minden n-re az n-es számrendszerben?

Legyenek A, B, C halmazok. Írjuk fel A, B, C és a halmazműveletek segítségével, azaz olyan jellegű formulával, mint például $(A \setminus B) \cup C$, az alábbi halmazokat!

2.92. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan egyben vannak benne.

2.93. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan háromban vannak benne.

Legyenek A, B, és C halmazok. Írjuk fel A, B, C és a halmazműveletek segítségével, azaz olyan jellegű formulával, mint például $(A \setminus B) \cup C$, az alábbi halmazokat!

2.94. Azon elemek halmaza, amelyek A-ban benne vannak, de B-ben és C-ben nincsenek benne.

2.95. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan kettőben vannak benne.

2.96. Szemléltessük a következő számhalmazokat számegyenesen! Döntsük el, hogy melyik intervallum, és melyik nem az! Az intervallumok esetében döntsük el, hogy melyik zárt, melyik nyílt, és melyik se nem zárt, se nem nyílt!

(a) $A = \{1, 2, 3\}$ **(b)** $B = \{5, 6\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 6\}$ **(d)** $D = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 6\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 6\}$ **(f)** $F = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x < 6\}$

2.97. Legyen $H_1 = \{h \in \mathbb{R} : -3 < h \leq 1\}$ és $H_2 = \{h \in \mathbb{R} : -3 \leq h < 1\}$.
Melyik állítás igaz, ha $H = H_1$ vagy $H = H_2$?

(a) $\forall x \in H\ \exists y \in H\ (y < x)$ **(b)** $\forall y \in H\ \exists x \in H\ (y < x)$

(c) $\exists x \in H\ \forall y \in H\ (y \leq x)$ **(d)** $\exists y \in H\ \forall x \in H\ (y \leq x)$

2.98. Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mit jelentenek a következő állítások?

(a) $\forall x \in H\ \exists y \in H\ (y < x)$ **(b)** $\forall y \in H\ \exists x \in H\ (y < x)$

(c) $\exists x \in H\ \forall y \in H\ (y \leq x)$ **(d)** $\exists y \in H\ \forall x \in H\ (y \leq x)$

2.99. Határozzuk meg a következő intervallumsorozatok metszetét! (Például rajz segítségével sejtsük meg a metszetet! Ha a sejtés szerint a metszet M, akkor bizonyítsuk be, hogy $\forall x \in M$ esetén teljesül, hogy $\forall n\ x \in I_n$, továbbá ha $y \notin M$ akkor $\exists k\ y \notin I_k$. (Itt k és n pozitív egész számok.)

(a) $I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ **(b)** $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

(c) $I_n = \left[2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right]$

(d) $I_n = \left(2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right)$

(e) $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$

(f) $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

(g) $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$

(h) $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$

Melyik állítás igaz? (A választ mindig indokoljuk!)

2.100. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok zártak.

2.101. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor az intervallumok nyíltak.

2.102. Egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont.

2.103. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nyílt.

2.104. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nem zárt.

2.105. Ha egy zárt intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok egymásba vannak skatulyázva.

2.106. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont?

2.107. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete nem üres?

2.108. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete üres?

2.109. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete valódi intervallum (nem csak egy pont)?

2.110. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete valódi intervallum?

2.111. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete valódi nyílt intervallum?

2.112. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete valódi nyílt intervallum?

2.113. Döntsük el az alábbi halmazokról, hogy alulról korlátosak-e, felülről korlátosak-e, korlátosak-e, és hogy van-e legkisebb, illetve legnagyobb elemük?

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 73\}$ **(b)** $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 73\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq \sqrt{2}\}$ **(d)** $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$

Döntsük el az alábbi halmazokról, hogy alulról korlátosak-e, felülről korlátosak-e, korlátosak-e, és hogy van-e legkisebb illetve legnagyobb elemük?

2.114. prímszámok halmaza

2.115. pozitív számok halmaza

2.116. $[-5, -2)$

2.117. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.118. Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

(a) $\left\{\sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$ **(b)** $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$ **(d)** $\left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.119. Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mi a következő állítások logikai kapcsolata?

(a) H alulról nem korlátos. **(b)** H-nak nincs legkisebb eleme.

(c) $(\forall x \in H)\ (\exists y \in H)\ y < x.$ **(d)** $(\forall y \in H)\ (\exists x \in H)\ y < x.$

2.120. Adjunk példát olyan nem üres valós számhalmazra, amelyik korlátos, de nincs legkisebb eleme!

2.121. Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz nem üres. Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: H-nak nincs minimuma. **Q:** $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\exists b \in H)\quad b < a$

2.122. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között, azaz melyikből következik a másik?

P: Az A halmaz véges (azaz véges sok eleme van).
Q: Az A halmaz korlátos.

2.123. Tudjuk, hogy H-nak nincs c-nél kisebb felső korlátja. Következik-e ebből, hogy $\sup H = c$?

2.124. Tudjuk, hogy $a < b$ és $x < y$. Melyik nagyobb: $ax + by$ vagy $ay + bx$?

2.125. Hol van a hiba a következő levezetésben?

$$\log_7 \frac{4}{5} = \log_7 \frac{4}{5}$$

$3 > 2$, ezért

$$3 \log_7 \frac{4}{5} > 2 \log_7 \frac{4}{5}.$$

A logaritmus azonosságát felhasználva:

$$\log_7 \left(\frac{4}{5}\right)^3 > \log_7 \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

Tehát:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 > \left(\frac{4}{5}\right)^2,$$

azaz

$$\frac{64}{125} > \frac{16}{25} = \frac{80}{125}.$$

3. Bizonyítási módszerek, becslések

Igazak-e a következő állítások?

3.1. Két racionális szám összege mindig racionális.

3.2. Egy racionális és egy irracionális szám összege mindig irracionális.

3.3. Két irracionális szám összege mindig irracionális.

3.4. Két irracionális szám összege mindig racionális.

Lehet-e racionális a következő műveletek eredménye?

3.5. Két irracionális szám összege.

3.6. Egy racionális és egy irracionális szám szorzata

Igazak-e a következő állítások?

3.7. Két racionális szám szorzata mindig racionális.

3.8. Egy racionális és egy irracionális szám szorzata mindig irracionális.

3.9. Két irracionális szám szorzata mindig irracionális.

3.10. Két irracionális szám szorzata mindig racionális.

Lehet-e racionális a következő műveletek eredménye?

3.11. Két irracionális szám szorzata.

3.12. Egy racionális és egy irracionális szám összege.

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén

3.13. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

3.14. $\sqrt[n]{2}-1 \leq \frac{1}{n}$

3.15. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$.

3.16. Mutassuk meg, hogy a Bernoulli-egyenlőtlenségben az $a \geq -1$ feltétel nem hagyható el, mert ha elhagynánk, hamis állítást kapnánk!

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket, ha $a > 0$ és $n \in \mathbb{N}^+$.

3.17. $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

3.18. $a+\frac{1}{a} \geq 2$

Bizonyítsuk be, hogy van olyan n_0 terészetes szám, hogy $\forall n > n_0$ esetén teljesülnek a következő egyenlőtlenségek!

3.19. $1,01^n > 100$

3.20. $0,9^n < \frac{1}{1000}$

Adjunk meg olyan n-t, amelyre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek!

3.21. $1,00001^n > 1000$

3.22. $0,9999^n < 0,0001$

3.23. $\sqrt[n]{2} < 1,00001$

3.24. $\sqrt[n]{1/2} > 0,9999$

3.25. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n-re $\sqrt[n]{3}-1 \leq \frac{2}{n}$!

3.26. Bizonyítsuk be, hogy minden elég nagy n-re teljesül, hogy $\sqrt[n]{1000} < 3-\sqrt[n]{n}$ egyenlőtlenség!

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c nemnegatív valós számokra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

3.27. $\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}$

3.28. $a^2b+b^2c+c^2a \geq 3abc$

3.29. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

3.30. Az 1 m^3-es térfogatú téglák közül melyiknek legkisebb a felszíne?

3.31. **Állítás:** Az 1 a legnagyobb szám.
Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy nem az 1 a legnagyobb szám, hanem A. Ekkor $A > 1 > 0$, továbbá $A > A^2$. Az utolsó egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív A-val osztva azt kapjuk, hogy $1 > A$, ami ellentmond az indirekt feltevésnek, tehát mégis az 1 a legnagyobb szám.
Hol a hiba?

Legyen $A_1, A_2, A_3 \ldots$ állítások egy sorozata. Ezek közül melyik állításokról tudjuk biztosan, hogy igazak, illetve melyekről, hogy biztosan hamisak a következő feltételek mellett?

3.32. A_{100} igaz. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.

3.33. A_1 igaz. Ha A_n igaz, akkor A_{n-1} is igaz.

3.34. A_{100} igaz. Ha A_n hamis, akkor A_{n+1} is hamis.

3.35. A_1 és A_2 igaz. Ha A_n és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} is igaz.

3.36. A_1 igaz. Ha A_n és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} is igaz.

3.37. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz. A_{2^n} hamis minden n-re.

3.38. A_7 igaz, és $n \geq 5$ esetén ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

3.39. A_{10} igaz és A_{11} igaz, és $n > 20$ esetén ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

3.40. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén A_{2^n} igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{n-1} igaz.

3.41. A_1 hamis. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.

3.42. A_1 igaz. Ha A_n hamis, akkor A_{n-1} is hamis.

3.43. A_{10} hamis. Ha A_n igaz, akkor A_{n-1} igaz.

3.44. A_1 igaz. Ha A_n igaz, akkor A_{2n} igaz.

3.45. A_1 igaz. Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ mind igaz, akkor A_{n+1} is igaz.

3.46. A_3 igaz, és $n \geq 5$ esetén ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

3.47. A_1 igaz és A_2 igaz, és ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

3.48. A_1 igaz, és ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

3.49. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén A_{2^n} igaz, és ha A_n hamis, akkor A_{n-1} hamis.

3.50. Bizonyítsuk be, hogy van olyan n_0, amelyre $n > n_0$ esetén $3^n > 5n^2$ teljesül!

3.51. Igez-e a következő tétel? Ha nem, akkor hol a hiba?

Tétel: Minden ló egyszínű.

Bizonyítás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy bármely n ló egyszínű.

Az állítás $n = 1$-re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy igaz n-re, és ebből fogjuk $n+1$-re belátni: adott $n+1$ ló közül az indukciós feltevés miatt az $1., 2., \dots, n.$ is egyszínű és a $2., \dots, n., (n+1).$ is egyszínű, tehát mind az $n+1$ ló egyszínű.

3.52. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 3$.

3.53. Egy futó 20 kört fut, a köröket rendre $v_1, \dots, v_{20}$ sebességgel futja. Mennyi a futó átlagsebessége a teljes távon? Milyen közepe az átlagsebesség a $v_1, \dots, v_{20}$ sebességeknek? Azonos-e ez a közép a körönkénti sebességek átlagával (számtani közepével)? Ha nem, melyik a nagyobb?

3.54. Az alábbiakban megpróbáljuk megoldani a következő egyenletet!

$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3} = 1$ Emeljük köbre mindkét oldalt!

$1 - x + 3\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2 \sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2 + x - 3 = 1$

$-2 + 3\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x-3}\left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3}\right) = 1$

Vegyük észre, hogy a baloldalon a zárójelben levő összeg az eredeti egyenlet szerint 1.

$\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x-3} = 1$

$(1-x)(x-3) = 1$

$x = 2$

Tényleg megoldás ez? Mit rontottunk el? Gondoljuk végig, hogy a fenti levezetés mit bizonyít, és mit nem bizonyít!

Futó Bendegúz 20 kört fut, és a köröket rendre $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességgel futja. Szaladó Zebulon 20 percig fut, a sebességét percenként változtatja, a k-adik percben v_k sebességgel fut ($k = 1, 2, \ldots, 20$).

3.55. Számítsuk ki Futó Bendegúz és Szaladó Zebulon átlagsebességét a teljes távon, és határozzuk meg, hogy melyik középpel számolhatók az átlagsebességek a megfelelő $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességekből!

3.56. Melyik futónak nagyobb az átlagsebessége?

3.57. Adjunk meg olyan pozitív egész K számot, amelyre igaz, hogy ha $n > K$ pozitív egész, akkor $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{1000}$. Hány megoldása van a feladatnak?

Van-e olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

3.58. $\sqrt[n]{999} < 1,001$

3.59. $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n} > 100$

Van-e olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

3.60. $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^2} > 100?$

3.61. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > n$

3.62. Bizonyítsuk be, hogy ha három nemnegatív szám szorzata 1, akkor összegük legalább 3 !

Van-e olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

3.63. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 100$

3.64. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > n$

3.65. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{2}+2$

3.66. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 10 \cdot \sqrt[3]{n}$

3.67. Legyen egy téglalap két oldala a és b, átlója pedig c. Ekkor a téglalap területe $T = ab$, és a téglalap kerülete $K = 2(a+b)$.

Tehát $$\frac{T}{\frac{K}{2}} = \frac{ab}{\frac{2(a+b)}{2}}.$$

Így $$\frac{2T}{K} - \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{ab}{a+b} - \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Mivel $0 < a < c$, ezért $$a\left(\frac{2T}{K} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right) < c\left(\frac{ab}{a+b} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right).$$

Beszorzás után: $$\frac{2Ta}{K} - \frac{ac}{\sqrt{2}} < \frac{abc}{a+b} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}.$$

T és K helyébe írjunk ab-t és $2(a+b)$-t: $$\frac{2a^2b}{2(a+b)} - \frac{ac}{\sqrt{2}} < \frac{abc}{a+b} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}.$$

Rendezés után: $$\frac{2a^2b}{2(a+b)} - \frac{abc}{a+b} < \frac{ac}{\sqrt{2}} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}.$$

Kiemelés után: $$\frac{ab}{a+b}(a-c) < \frac{c}{\sqrt{2}}(a-c).$$

Osztunk $(a-c)$-vel, de $a < c$, így $a - c < 0$ $$\frac{ab}{a+b} > \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Négyzet esetén $b = a$ és $c = a\sqrt{2}$. $$\frac{a^2}{2a} > \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Egyszerűsítés és rendezés után: $1 > 2.$

Hol a hiba?

3.68. Egy kereskedőnek nem pontos a kétkarú mérlege, mert a karok hossza nem egyenlő. Miután tudja ezt, minden vásárlónál az áru egyik felét a mérleg egyik serpenyőjében, a másik felét a mérleg másik serpenyőjében méri, gondolván, hogy ezzel kiküszöböli a mérleg pontatlanságát. Valóban ez a helyzet?

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $a + b + c = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke maximális legyen:

3.69. abc,

3.70. a^3b^2c.

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $abc = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke minimális legyen:

3.71. $a+b+c$,

3.72. $3a+2b+c$.

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $a+b+c=18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke maximális legyen:

3.73. a^2bc,

3.74. $\dfrac{abc}{ab+bc+ac}$.

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $abc=18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke minimális legyen:

3.75. $2a+b+c$,

3.76. $a^2+b^2+c^2$.

3.77. Huszonöt szuper intelligens éhes oroszlán közé egy darab oszthatatlan hús kerül. Ha valamelyik megeszi, akkor elalszik, és amíg alszik, a többiek úgy tekintenek rá, mint egy darab oszthatatlan húsra. A fentieket az oroszlánok is tudják. Mi fog történni?

4. Sorozatok határértéke

Írjuk fel logikai jelekkel (de a tagadás jele nélkül) az alábbi állításokat!

4.1. Az a_n sorozat tart 5-höz.

4.2. Az a_n sorozat nem tart 5-höz.

4.3. Az a_n sorozat konvergens.

4.4. Az a_n sorozat divergens.

4.5. Az a_n sorozat nem tart végtelenhez.

4.6. Az a_n sorozat nem tart mínusz végtelenhez.

4.7. Az a_n sorozat oszcillálva divergens.

4.8. Az a_n sorozat nem oszcillálva divergens.

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$. Következnek-e ebből az alábbi állítások?

4.9. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(n > n_0 \implies |5 - a_n| < \varepsilon)$

4.10. $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R}^+)\, |a_n| < K$

Következik-e az alábbi állításokból, hogy a sorozat konvergens?

4.11. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(n > n_0 \implies |a_n - 5| < 2\varepsilon$

4.12. $\forall n \in \mathbb{N}^+)\, |a_n| < 5$

Mi a következő sorozatok határértéke? Ha véges a határérték, akkor mutassunk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz, ha végtelen, akkor $P = 10^6$-hoz, ha mínusz végtelen, akkor $P = -10^6$-hoz!

4.13. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

4.14. $\dfrac{3n^6 - n + 2}{2n^6 + 1}$

4.15. $\dfrac{1}{1 - \sqrt{n}}$

4.16. $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

4.17. $n - \sqrt{n}$

4.18. $\dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n}$

4.19. $\dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n}$

4.20. $\dfrac{n^2 - 10n}{10n + 100}$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz küszöbindexet!

4.21. $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$

4.22. $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$

4.23. $\sqrt[8]{n}$

4.24. $\sqrt[n]{8}$

Melyik sorozat korlátos alulról, melyik korlátos felülről, és melyik sorozat korlátos? Melyik sorozat konvergens, melyik divergens? Melyik sorozatnak van határértéke? Adjuk meg a létező határértékeket, és indokoljuk meg az eredményeket!

4.25. $a_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ prím} \\ 2 - \dfrac{1}{n} & \text{egyébként} \end{cases}$

4.26. $a_n = -1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

4.27. $a_n = 2^{-n}$

4.28. $a_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

4.29. $a_n = n^{-2}$

4.30. $a_n = (-1)^n + 3$

4.31. $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$

4.32. $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$

4.33. $\sqrt[8]{n}$

4.34. $\sqrt[n]{8}$

Melyik sorozat konvergens, melyik divergens, melyiknek van határértéke, és mi a határérték?

4.35. $a_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

4.36. $b_n = \begin{cases} 3n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 4n^2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

4.37. $\sqrt{n^2 - 1}$

4.38. $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$

4.39. $\sqrt[n]{7+\sin n}$

4.40. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

4.41. $\frac{2^n}{3^n}$

4.42. 2^{-n}

4.43. $n!$

4.44. $\sqrt{n^2+1}-n$

4.45. $\sqrt{n^2+n}-n$

4.46. $\frac{n+\sin n}{\sqrt{n^2+1}}$

Melyik sorozat konvergens, melyik divergens, melyiknek van határértéke, és mi a határérték?

4.47. $a_n = \begin{cases} -n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

4.48. $b_n = \begin{cases} -3n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -n^2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

4.49. $\sqrt{n^2+1}$

4.50. $\sqrt[n]{3^n-2^n}$

4.51. $\sqrt[n]{7-\cos n}$

4.52. $\sqrt{n^2-1}-n$

4.53. $\sqrt{n^2-n}-n$

4.54. $\frac{n+\sin n}{n+\cos n}$

4.55. $\sqrt[n]{n^2}$

4.56. $\sqrt[n]{n^2+n}$

4.57. $\frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{n}}$

4.58. $\sqrt[3]{n^2-10n}$

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha vannak!

4.59. $3^{3^{-n}-\sqrt[n]{3}}$

4.60. $\operatorname{arctg}\sqrt{n}$

4.61. $\cos\left(\frac{n}{n+1}\right)$

4.62. $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/3}$

4.63. $\frac{n^5}{(-3)^n}$

4.64. $\sqrt{\operatorname{arctg} n}$

4.65. $\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}$

4.66. $\cos\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

4.67. $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n/3}$

4.68. $\dfrac{n^7}{(-2)^n}$

4.69. $\sqrt{\operatorname{arctg} 2n}$

4.70. $\sqrt[n]{\operatorname{arctg} n}$

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha vannak!

4.71. $0,99^n n^2$

4.72. $\dfrac{3^n - \sqrt{n} + n^{10}}{2^n - \sqrt[n]{n} + n!}$

4.73. $\sqrt[n]{2^n - n^2}$

4.74. $\dfrac{(-10)^n}{n!}$

4.75. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

4.76. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

4.77. $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$

4.78. $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha vannak!

4.79. $0,9^n n^3$

4.80. $\sqrt[n]{3^n - n^3}$

4.81. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

4.82. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+3}$

4.83. $\left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)^{3n}$

4.84. $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{6n}$

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha vannak!

4.85. $\dfrac{(-10)^n}{n!}$

4.86. $\sqrt[3]{n! + 5^n - n^n}$

4.87. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

4.88. $(5^n - n!) \cdot 0,3^n$

4.89. $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2} n$

4.90. $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

4.91. $n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

4.92. $\sqrt{\sqrt[n]{3}+2^{-n}+n^{-1/n}}$

4.93. $\inf\{\sqrt[n]{2} \;:\; n \in \mathbb{N}^+\} = ?$

4.94. Igaz-e, hogy ha az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek, akkor az $a_n + b_n$ is konvergens?

4.95. Igaz-e, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) sorozat pedig divergens, akkor $a_n + b_n$ divergens?

4.96. Igaz-e, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) sorozat pedig divergens, akkor $a_n - b_n$ divergens?

Legyen a_n és b_n két divergens sorozat! Igazak-e ekkor a következő állítások?

4.97. a_n és b_n összege mindig divergens.

4.98. a_n és b_n szorzata mindig divergens.

4.99. Igaz-e, hogy ha az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergens-ek, akkor az $a_n \cdot b_n$ is konvergens?

4.100. Igaz-e, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) sorozat pedig divergens, akkor $a_n \cdot b_n$ divergens?

4.101. Igaz-e, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) sorozat pedig divergens, akkor $a_n \cdot b_n$ konvergens?

4.102. Egy sorozat $0,000001$-hez konvergál. Lehet-e a sorozatnak negatív tagja? Lehet-e a sorozatnak végtelen sok negatív tagja?

4.103. Egy sorozatnak végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja van. Lehet-e konvergens?

Ekvivalensek-e a következő állítások azzal, hogy b határértéke az (a_n) sorozatnak?

4.104. Bármely $\varepsilon > 0$-ra az a_n sorozatnak végtelen sok tagja van ε-nál közelebb b-hez.

4.105. Bármely $\varepsilon > 0$-ra az a_n sorozatnak csak véges sok tagja van b-től legalább ε távolságban.

4.106. Van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre az a_n sorozatnak végtelen sok tagja van ε-nál közelebb b-hez.

4.107. Van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre az a_n sorozatnak végtelen sok tagja van b-től legalább ε távolságban.

Tegyük fel, hogy az a_n sorozat ∞-hez divergál. Következnek-e ebből a következő állítások?

4.108. Az (a_n) sorozatnak nincs legnagyobb tagja.

4.109. Az (a_n) sorozatnak van legkisebb tagja.

Melyik állításból következik, hogy a sorozat végtelenhez divergál?

4.110. Az (a_n) sorozatnak nincs legnagyobb tagja.

4.111. Az (a_n) sorozatnak van legkisebb tagja.

4.112. Az (a_n) sorozatnak van legkisebb tagja és a sorozat szigorúan monoton nő.

4.113. Az (a_n) sorozatnak nincs legnagyobb tagja és a sorozat szigorúan monoton nő.

Írjuk fel logikai jelekkel, de a határérték jelölései és tagadásjel (valamint $\nexists$ és $\not\forall$ jelek) nélkül az alábbi állításokat!

4.114. Az (a_n) sorozat nem tart $-\infty$-hez.

4.115. A (b_n) sorozat oszcillálva divergens.

4.116. Írjuk fel az $a_n \to \infty$ és az $a_n \to -\infty$ definícióját a ¨minden elég nagy n-re¨ kifejezés segítségével!

4.117. Bizonyítsuk be a rendőrszabályt végtelen határérték esetében!

4.118. Az határérték és műveletek kapcsolatáról szóló tételben a kritikus határértékek helyére "?" került, mert ott bármi állhat. Adjunk példákat a lehetséges esetekre!

4.119. Mi a következő két állítás logikai kapcsolata?

A: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

B: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$

4.120. Mi a következő két állítás logikai kapcsolata, ha a_n és b_n végtelenhez tartó sorozatok?

A: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

B: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$

4.121. Tegyük fel. hogy $\forall n \quad a_n \neq 0$ és $b_n \neq 0$. Igaz-e ekkor, hogy $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0 \iff \dfrac{b_n}{a_n} \to \infty$?

4.122. Tegyük fel. hogy $\forall n \quad a_n \neq 0$ és $b_n \neq 0$, továbbá $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$. Igaz-e ekkor, hogy $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0 \iff \dfrac{b_n}{a_n} \to \infty$?

Mutassunk olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ és teljesülnek a következő állítások!

4.123. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$

4.124. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 7$

4.125. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -7$

4.126. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$

4.127. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$

4.128. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ nem létezik!

Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) sorozatok, amelyekre $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$ és teljesülnek a következő állítások?

4.129. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$

4.130. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 7$

4.131. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -7$

4.132. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$

4.133. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -\infty$

4.134. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ nem létezik?

Mutassunk olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ és teljesülnek a következő állítások!

4.135. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = 0$

4.136. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = 7$

4.137. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = -7$

4.138. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = \infty$

4.139. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = -\infty$

4.140. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)$ nem létezik!

Mi a P és Q állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

4.141. **P:** $a_n \to 0$ **Q:** $|a_n| \to 0$

4.142. **P:** $a_n \to 3$ **Q:** $|a_n| \to 3$

4.143. Bizonyítsuk be, hogy két, mínusz végtelenhez tartó sorozat összege is mínusz végtelenhez tart!

4.144. Tegyük fel, hogy $a_n \to 2$. Mi a határértéke az a_n^n, illetve, az $\sqrt[n]{a_n}$ sorozatoknak?

4.145. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

4.146. Írjuk fel az alábbi sorozatokat nagyságrend szerinti sorba!

(a) (n^7) **(b)** (n^2+2^n) **(c)** $(100\sqrt{n})$ **(d)** $n!/10$

4.147. Keressük meg az alábbi sorozatok között az összes aszimptotikusan egyenlő párokat!

(a) $(n!)$ **(b)** (n^n) **(c)** $(n!+n^n)$ **(d)** $(\sqrt{n})$

(e) $(\sqrt[n]{n})$ **(f)** $(\sqrt{n+1})$ **(g)** $(\sqrt[n]{2})$ **(h)** $(\sqrt{n^2})$

4.148. Legyenek (a_n) és (b_n) végtelenhez tartó sorozatok. Mi az (a) és (b) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

(a) $a_n \sim b_n$ **(b)** $a_n - b_n \to 0$

4.149. Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) sorozat gyorsabban tart végtelenhez, mint a (b_n) sorozat, és a (b_n) sorozat gyorsabban tart végtelenhez, mint a (c_n) sorozat, akkor az (a_n) sorozat gyorsabban tart végtelenhez, mint a (c_n) sorozat!

Legyen $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ és $b_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$.
Bizonyítsuk be a következő állításokat!

4.150. Minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $b_n = 2 - \frac{1}{n}$.

4.151. Minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $a_n \leq b_n$.

4.152. Az (a_n) sorozat korlátos.

4.153. Az (a_n) sorozat monoton.

4.154. Az (a_n) sorozat konvergens.

Van-e a következő sorozatoknak konvergens részsorozatuk?

4.155. $(-1)^n$

4.156. $\sin n$

4.157. $\frac{1}{n}$

4.158. $\sqrt{n}$

4.159. $\sqrt{n} - [\sqrt{n}]$

4.160. $\{\sqrt{n}\}$

4.161. Igaz-e, hogy ha egy sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor a sorozat konvergens?

Van-e a következő sorozatoknak konvergens részsorozatuk?

4.162. $(-2)^n$

4.163. $\cos \sqrt{n}$

4.164. $\frac{3}{n^2+1}$

4.165. $\{\sqrt{n}\}$

4.166. Igaz-e, hogy ha egy sorozatnak van divergens részsorozata, akkor a sorozat divergens?

4.167. Mutassunk olyan sorozatot, amelynek van végtelenhez tartó, mínusz végtelenhez tartó és 0-hoz tartó részsorozata is!

4.168. Milyen határértéke lehet egy olyan sorozatnak, amelynek van 1-hez tartó részsorozata is és 2-höz tartó részsorozata is?

4.169. Határozzuk meg az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ és $b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ sorozatok határértékét!

4.170. Írjuk fel a Cauchy-kritérium tagadását egy (a_n) sorozatra! Mi a felírt állítás logikai kapcsolata az „(a_n) divergens” állítással?

Mi a logikai kapcsolata az „a_n sorozat konvergens” állításnak a következő állításokkal?

4.171. $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$

4.172. $\lim_{n\to\infty}(a_{2n}-a_n)=0$

4.173. Írjuk fel a Cauchy-kritérium tagadását egy (a_n) sorozatra! Mi a felírt állítás logikai kapcsolata az „(a_n) divergens” állítással?

4.174. Tegyük fel, hogy minden n, m-re $|a_n-a_m|<\dfrac{1}{n+m}$. Bizonyítsuk be, hogy a_n konvergens!

Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

4.175. **P:** Az (a_n) sorozat konvergens.
Q: $|a_{n+2}-an|\to 0$

4.176. **P:** Az (a_n) sorozat konvergens.
Q: $|a_{2n}-an|\to 0$

4.177. **P:** Az (a_n) sorozat konvergens.
Q: $|a_{n+1}-an|\to 0$

4.178. Igaz-e, hogy ha a_{2n} és a_{2n+1} konverges, akkor a_n konvergens?

4.179. Igaz-e, hogy ha a_{2n} és a_{3n} konverges, akkor a_n konvergens?

4.180. Igaz-e, hogy ha a_{2n}, a_{2n+1} és a_{3n} konverges, akkor a_n konvergens?

4.181. Bizonyítsuk be, hogy ha minden n-re $a_n\geq 0$, akkor az $s_n=a_1+\ldots+a_n$ sorozatnak van (véges vagy végtelen) határértéke!

4.182. Határozzuk meg az $\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}$ sorozat határértékét, ha van! (Az n-edik tagban n darab gyökjel és n darab 3-as van.)

4.183. Attól függően, hogy egy sorozat melyikkel rendelkezik a *„korlátos, monoton, konvergens”* tulajdonságok közül, 8 féle eset van. Adjunk példát ezek közül azokra, amelyek léteznek, és indokoljuk meg, hogy miért nem létezik a többi!

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha léteznek!

4.184. $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

4.185. $a_1 = 1,5$ és $a_{n+1} = -a_n + 1$

4.186. $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Hova tarthat a $(b_n)^n$ sorozat a következő feltételek mellett?

4.187. $\lim b_n = 2$

4.188. $\lim b_n = 0$

4.189. $\lim b_n = 3$

4.190. $\lim b_n = -\frac{1}{3}$

4.191. $\lim b_n = -3$

4.192. $\lim b_n = \frac{1}{3}$

4.193. $\lim b_n = 1$

4.194. $\lim b_n = -1$

---

5. Függvények lokális és globális tulajdonságai

5.1. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény szigorúan monoton és van inverze, akkor az inverze is szigorúan monoton.

5.2. Milyen a-re konvex, milyen a-ra konkáv $(0, \infty)$-ben az x^a függvény?

5.3. Mit kapunk, ha $f(x) = x^a$-ra felírjuk a Jensen egyenlőtlenséget $t_1 = \dots t_n = \frac{1}{n}$ súlyokkal?

5.4. Milyen eredményt kapunk az előző feladatban az $a = -1$ speciális esetben?

5.5. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{x}$ függvény konkáv!

5.6. Bizonyítsuk be, hogy a $-\sqrt{x}$ függvény konvex!

5.7. Van-e olyan nem-konstans függvény, amely $\mathbb{R}$-en konkáv és mindenütt pozitív?

5.8. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény differenciálható és konvex az I intervallumon, akkor itt a függvény grafikon érintői a grafikon alatt vannak (pontosabban a grafikon semelyik pontja sincs semelyik érintő alatt)! (Segítség: indirekt + Lagrange középértéktétel.)

Írjuk fel logikai jelekkel (de a tagadás jele nélkül) az alábbi állításokat!

5.9. Az $f(x)$ függvény folytonos az a pontban.

5.10. Az $f(x)$ függvény nem folytonos az a pontban.

Mondjuk ki az alábbi határértékekre vonatkozó átviteli elvet a következő estekben!

5.11. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

5.12. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

5.13. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

5.14. **P:** Az $f(n)$ sorozat 5-höz tart.
Q: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$

5.15. **P:** Az $f(\frac{1}{n})$ sorozat 5-höz tart.
Q: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 5$

5.16. Igaz-e, hogy ha f folytonos 0-ban, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$?

Bizonyítsuk be az átviteli elv segítségével, hogy a következő függvényeknek nincs határértékük a megadott helyen!

5.17. $\sin x$–nek ∞-ben

5.18. $\sin \frac{1}{x}$–nek 0-ban

5.19. $\operatorname{tg} x$-nek $\frac{\pi}{2}$-ben

5.20. $\{x\}$-nek ∞-ben

Bizonyítsuk be a Cauchy-kritérium segítségével, hogy a következő függvényeknek nincs határértékük a megadott helyen!

5.21. $\sin x$–nek ∞-ben

5.22. $\sin \frac{1}{x}$–nek 0-ban

5.23. $\operatorname{tg} x$-nek $\frac{\pi}{2}$-ben

5.24. $\{x\}$-nek ∞-ben

5.25. Adjunk minél több bizonyítást arra az állításra, hogy az $[x]$ függvény nem folytonos 0-ban!

5.26. Bizonyítsuk be átviteli elv segítségével, hogy ha az f függvény folytonos a-ban, a g függvény pedig folytonos $f(a)$-ban, akkor $g \circ f$ folytonos a-ban!

5.27. Mi a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ és a $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 1 \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ állítások logikai kapcsolata?

5.28. Igaz-e, hogy tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$?

5.29. Bizonyítsuk be az átviteli elv segítségével, hogy ha egy periodikus függvény nem konstans, akkor nincs határértéke a végtelenben!

Mondjuk ki, és bizonyítsuk be az alábbi határértékekre vonatkozó rendőrszabályt!

5.30. $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$

5.31. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$

5.32. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Határozzuk meg a következő határértékeket!

5.33. $\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}$

5.34. $\lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}$

5.35. $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

5.36. Adjunk minél több bizonyítást arra az állításra, hogy az $[x]$ függvény nem folytonos 0-ban!

Mondjuk ki a Cauchy-kritériumról szóló tételt az alábbi határértékekre!

5.37. $\lim_{x\to a} f(x)$

5.38. $\lim_{x\to\infty} f(x)$

5.39. $\lim_{x\to a^-} f(x)$

5.40. Milyen halmaz lehet $f([a,b])$, ha f folytonos függvény?

5.41. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $[a,b]$ intervallumon folytonos f függvény esetén $f([a,b])$ korlátos zárt intervallum vagy egyetlen pont!

5.42. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény differenciálható 0-ban, és $f(0) = 0$, akkor
$f'(0) = \lim_{n\to\infty} n\cdot f(\frac{1}{n})$.

5.43. Egy függvényt Lipschitz-függvénynek hívunk, ha van olyan L konstans, amelyre $|f(x) - f(y)| \le L\cdot|x-y|$ teljesül az értelmezési tartomány bármely x, y pontpárjára. Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz-függvény az (a,b) intervallumon, akkor létezik a $\lim_{x\to a+} f(x)$ határérték!

6. Taylor-sorok

Határozzuk meg az alábbi függvények 0 körüli nulladik, első, második, harmadik, valamint n-edik Taylor polinomját!

6.1. e^x

6.2. e^{-x}

6.3. $2x^2 - 3x + 4$

6.4. $\sin x$

6.5. $\log(1 + x)$

6.6. $\dfrac{1}{1-x}$

6.7. e^{2x}

6.8. $-3x^2 + 2x + 1$

6.9. $\cos x$

6.10. $\dfrac{1}{1+x}$

6.11. $\dfrac{1}{1+2x}$

6.12. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)}{x^3} = 0$

6.13. Határozzuk meg a $2x^2 - 3x + 4$ függvény 1 körüli nulladik, első, második, harmadik, valamint n-edik Taylor polinomját!

6.14. Határozzuk meg a $\operatorname{ctg} x$ függvény $\dfrac{\pi}{2}$ körüli nulladik, első, második, harmadik, valamint n-edik Taylor polinomját!

Megoldások

1. A logika alapjai

1.14. Tétel volt, hogy ha egy függvény differenciálható, akkor folytonos, továbbá minden folytonos függvénynek van primitív függvénye. Tehát nincs a feladat feltételeinek megfelelő függvény.

1.15. Az $|x|$ függvény folytonos, ezért van primitív függvénye, de $|x|$ a 0-ban nem differenciálható.

1.32. A (c) állítás jelentése azonos az (a) állítás jelentésével.

1.33. Az 1-et mindenképpen beleválasztjuk a részhalmazba, a többi 99 szám mindegyikénél kétféle lehetőségünk van. Ezért a megoldások száma 2^{99}.

1.37. Összesen 100 részhalmaz van. Ezekből a feladatnak csak azok nem felelnek meg, amelyekben az 1 nincs benne, és a 2 benne van. A maradék 98 szám mindegyikénél kétféle lehetőségünk van. Tehát a „rossz” részhalmazok száma 2^{98}, vagyis a feladatnak $2^{100} - 2^{98} = 3 \cdot 2^{98}$ részhalmaz felel meg.

1.38. Összesen 100 részhalmaz van. Ezekből a feladatnak csak azok nem felelnek meg, amelyekben az 1 benne van a részhalmazban, és a 2 nincs benne. A maradék 98 szám mindegyikénél kétféle lehetőségünk van. Tehát a „rossz” részhalmazok száma 2^{98}, vagyis a feladatnak $2^{100} - 2^{98} = 3 \cdot 2^{98}$ részhalmaz felel meg.

1.43. A **P** állítás pontosan akkor hamis, ha van olyan bolhás macska, amelyik nem vakarózik. Ez éppen a **Q** állítás tagadása, tehát a **Q** állítás is pontosan ekkor hamis. Tehát a két állítás ekvivalens, ezért mindkettőből következik a másik.

1.72. Van olyan x, amelyhez van olyan y, amelyekre teljesül, hogy x eleme H-nak és y eleme H-nak, és $x \neq y$.

2. Halmazok, valós számok

2.1. Igaz az állítás.

$$x \in (A \setminus B) \iff (x \in A) \wedge (x \notin B) \iff (x \in A) \wedge (x \in \overline{B}) \iff x \in (A \cap \overline{B})$$

2.2. Nem igaz, legyen például $A = B = \{1\}$ Ekkor $(A \cup B) \setminus A = \emptyset \neq B$.

2.9. Nem igaz. Legyen például $A = \{(0,0)\}$, azaz az origó, B az $y = x$ egyenes, C pedig a sík összes egyenese.

2.24. Legyen tehát $a < b$ két valós szám. Tudjuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális, valamint azt is, hogy $a + \sqrt{2}$ és $b + \sqrt{2}$ között van racionális szám, legyen ez r. Ekkor $a < r - \sqrt{2} < b$ és $r - \sqrt{2}$ irracionális.

2.27. Nem teljesül, legyen például $I_n = [1 - 1/n, 1)$.

2.42. A H halmaznak nincs minimuma (minimális eleme).

2.43. H-nak nincs maximuma.

2.47. Egyik sem igaz, H_4-nek van minimuma, 0 és maximuma, 2.

2.49. Egyik sem igaz, H_6-nak van minimuma, -1 és maximuma, 1.

2.60. Nincs ilyen A, mivel minden nem üres A halmazra $\inf A \leq \sup A$.

2.64. A H halmaznak legalább két eleme van.

2.94.

$$A \setminus (B \cup C)$$

2.95.

$$((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$$

2.98.

(a) A H halmaznak nincs minimuma (minimális eleme).

(b) H-nak nincs maximuma.

(c) H-nak van maximuma.

(d) A H halmaznak van minimuma.

3. Bizonyítási módszerek, becslések

3.2. Indirekt módon bizonyítunk. Legyen r egy racionális, i pedig egy irracionális szám, és tegyük fel, hogy $s = r + i$ racionális. De akkor az előző feladat szerint $i = s + (-r)$ racionális, ami ellentmondás.

3.16. Legyen például $a = -3$ és $n = 5$. Ekkor

$$(1+a)^n = (-2)^5 = -32 < 1 + n \cdot a = 1 - 5 \cdot 3 = -14.$$

3.22.

$$0,9999^n < 0,0001 \iff \left(\frac{1}{0,9999}\right)^n > \frac{1}{0,0001} = 10^4.$$

Mivel

$$\frac{1}{0,9999} = \frac{0,9999 + 0,0001}{0,9999} = 1 + \frac{0,0001}{0,9999} > 1 + 10^{-5},$$

ezért

$$\left(\frac{1}{0,9999}\right)^n > \left(1 + 10^{-5}\right)^n > 1 + n \cdot 10^{-5}$$

a Bernoulli egyenlőtlenség miatt. Elég tehát egy olyan n-et keresni, amelyre

$$1 + n \cdot 10^{-5} \geq 10^4.$$

Ez például az $n = 10^9$ (és minden nagyobb n) esetén teljesül.

3.27. Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget $n+1$ számra, mégpedig az n darab b-re és az egy darab a-ra.

3.32. Minden $n \geq 100$ esetén igaz az A_n állítás.

3.42. Mindegyik A_n igaz. Ez a forma a teljes indukció „descente infinie” verziója.

3.73. Az a^2bc egy négytényezős szorzat. Írjuk fel a megadott 3 tagú összeget 4 tagú összegként és használjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget 4 szám esetén:

$$\frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b + c}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b \cdot c} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}a^2bc}$$

Eszerint

$$\frac{18}{4} = \frac{9}{2} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{4}a^2bc}$$

Negyedik hatványra emelés és átrendezés után:

$$a^2bc \leq 4\left(\frac{9}{2}\right)^4$$

A jobboldalon szereplő szám a keresett maximum, hiszen $\frac{a}{2} = b = c = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ esetén egyenlőség van.

3.74. Használjuk a harmonikus és a számtani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{abc}{ab+bc+ac} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3} = \frac{18}{9} = 2.$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b = c = 6$.

3.75.

$$2a+b+c = 3 \cdot \frac{2a+b+c}{3} \geq 3\sqrt[3]{(2a)bc} = 3\sqrt[3]{2 \cdot 18} = 3\sqrt[3]{36}$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $2a = b = c = \sqrt[3]{36}$.

3.76. Felhasználjuk a mértani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$a^2+b^2+c^2 = 3\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^2 \geq 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 = 3\left(\sqrt[3]{18}\right)^2.$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b = c = \sqrt[3]{18}$.

4. Sorozatok határértéke

4.39. A rendőrszabály segítségével bizonyítjuk, hogy $\sqrt[n]{7+\sin n} \to 1$. Egyrészt

$$\sqrt[n]{7+\sin n} \geq \sqrt[n]{7-1} = \sqrt[n]{6} \to 1.$$

Másrészt

$$\sqrt[n]{7+\sin n} \leq \sqrt[n]{7+1} = \sqrt[n]{8} \to 1.$$

4.47. A sorozat divergens, mivel a páros indexű tagok $-\infty$-hez, a páratlan indexűek pedig 2-höz tartanak.

4.65. Mivel $\sqrt{n+2} \to \infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, ezért az átviteli elv szerint $\operatorname{arctg} \sqrt{n+2} \to \dfrac{\pi}{2}$.

4.76.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Mivel

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e \quad \text{és} \quad 1+\frac{1}{n} \to 1,$$

ezért

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e.$$

4.95. Igen, igaz. Indirekten bizonyítjuk: ha a $c_n = a_n + b_n$ sorozat konvergens lenne, akkor a $b_n = c_n - a_n$ is konvergens lenne, pedig a feltevés szerint divergens.

4.106. Nem ekvivalens. Például az

$$a_n = \begin{cases} b & \text{ha } n \text{ páros} \\ n & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

sorozat divergens, de igaz rá az állítás akármilyen $\varepsilon > 0$ esetén is.

Megjegyzés: Az állítás pontosan akkor igaz, ha a sorozatnak van korlátos részsorozata.

4.144. Mivel $a_n \to 2$, ezért van olyan N, hogy $n > N$ esetén $1,5 < a_n < 3$. Ezért N-től kezdve

$$a_n^n > 1,5^n \to \infty \quad \text{és} \quad 1 < \sqrt[n]{1,5} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{3} \to 1.$$

4.149. Mivel mindhárom sorozat végtelenhez tart, ezért valahonnan kezdve a sorozatok tagjai pozitívok (nem nullák).

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0, \quad \frac{b_n}{c_n} \to 0, \quad \text{ezért} \quad \frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} \to 0.$$

4.158. Nincs. Mivel $\sqrt{n} \to \infty$, ezért a sorozat minden részsorozata divergens ($\to \infty$).

4.159. A négyzetszámokból álló részsorozat tagjai mind nullák:

$$\sqrt{k^2} - \left[\sqrt{k^2}\right] = k - k = 0.$$

4.166. Igen, mert ha konvergens lenne, akkor minden részsorozata is konvergens lenne.

4.174. A Cauchy-kritériumot használjuk. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, N pedig olyan, hogy $n, m > N$ esetén

$$\frac{1}{n+m} < \varepsilon.$$

Például $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ megfelel. Ekkor

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{n+m} < \varepsilon.$$

4.184. Könnyen látható (például indukcióval), a sorozat minden tagja pozitív. Ezután teljes indukcióval belátjuk, hogy $2 < a_n$. Ez $n = 1$ esetén igaz. Ha n-re igaz, akkor

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

Most már azt is beláthatjuk, hogy a sorozat (szigorúan) monoton csökken.

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < a_n \iff 2a_n < a_n^2 \iff 2 < a_n.$$

Tehát a sorozat konvergens. Jelölje a határértéket a. Ekkor

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 2a_n} = \sqrt{2a}.$$

Tehát $a = \sqrt{2a}$, azaz $a = 2$.

4.187. $\lim b_n^n = \infty$. Lásd a 4.144. feladatot.

5. Függvények lokális és globális tulajdonságai

5.5. Legyen $0 \leq a < c < b$ tetszőleges. Be kell látnunk, hogy

$$\sqrt{c} \geq \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}(c-a)+\sqrt{a},$$

azaz, hogy

$$\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{c-a} \geq \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}.$$

Egyszerűsítés után

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} \geq \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}.$$

Az egyenlőtlenség átrendezése után

$$\sqrt{b}+\sqrt{a} \geq \sqrt{c}+\sqrt{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{b} \geq \sqrt{c}.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség igaz, mivel a $\sqrt{x}$ függvény (szigorúan) monoton nő.

Megjegyzés: a bizonyításból az is kiderült hogy az $\sqrt{x}$ függvény szigorúan konkáv. Ehhez csak a megfelelő helyeken szigorú egyenlőtlenséget kell írnunk a bizonyításban.

5.18. Legyen

$$x_n = \frac{1}{\pi/2+2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{-\pi/2+2n\pi}.$$

Ekkor

$$\sin\frac{1}{x_n} = 1 \quad \text{és} \quad \sin\frac{1}{y_n} = 1.$$

5.26. Legyen (x_n) egy tetszőleges a-hoz konvergáló sorozat. Meg kell mutatnunk, hogy

$$g(f(x_n)) \to g(f(a)).$$

Mivel f folytonos a-ban és $x_n \to a$, ezért az átviteli elv szerint

$$f(x_n) = y_n \to f(a).$$

A g függvényre is alkalmazhatjuk az átviteli elvet az $f(a)$ pontban, és így

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \to f(a).$$

5.29. Legyen $p > 0$ egy (pozitív) periódus, a és b pedig két olyan valós szám, amelyre $f(a) \neq f(b)$. Ekkor

$$x_n = a+n\cdot p \to \infty,\ f(a) = f(x_n) \to f(a), \qquad y_n = b+n\cdot p \to \infty,\ f(b) = f(y_n) \to f(b).$$

Az átviteli elv szerint $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nem létezik.

6. Taylor-sorok

6.12.