Bevezető analízis II. példatár

Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

2016. november 13.

Tartalomjegyzék

1. Bizonyítási módszerek, valós számok

Biztatásul közlöm, hogy tévesnek bizonyult a cáfolata annak a híresztelésnek, mely szerint mégsem hazugság azt tagadni, hogy lesz olyan hallgató, akinek egy analízis feladatot sem kell megoldania ahhoz, hogy ne bukjon meg.

(Baranyai Zsolt)

1.1. Állítások, tagadások, logikai műveletek, halmazok

Balkezes Bendegúz a bal kezével mindig igaz, a jobb kezével mindig hamis állításokat írt. Melyik kezével írta a következő állításokat? Fogalmazzuk meg az állítások tagadását! Döntsük el az állításokról is, és a tagadásokról is, hogy igazak-e! Minden választ indokoljunk!

1.1. Ha $1 = 1$, akkor $2 = 3$.

1.2. Ha $1 = 2$, akkor $2 = 3$.

1.3. Ha az f függvény monoton csökken $\mathbb{R}$-en, akkor $(-f)$ monoton nő $\mathbb{R}$-en.

1.4. Tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén f^2 páros.

1.5. Tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén f^3 páratlan.

1.6. Ha az f függvény páratlan, akkor f^2 páros.

1.7. Ha az f függvény páros, akkor f^3 páratlan.

1.8. Ha az f függvény periodikus, akkor $|f|$ is periodikus.

1.9. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor periodikus, ha az $|f|$ is periodikus.

1.10. Ezt a mondatot a bal kezemmel írtam.

1.11. Minden (-2)-nél kisebb pozitív szám szereti a tökfőzeléket.

1.12. Van olyan (-2)-nél kisebb pozitív szám, amelyik szereti a tökfőzeléket.

Balkezes Bendegúz a bal kezével mindig igaz, a jobb kezével mindig hamis állításokat ír.

1.13. Van-e olyan mondat, amelyiket egyik kezével sem tud leírni?

1.14. Van-e olyan állítás, amelyiket mindkét kezével le tud írni?

1.15. Van-e olyan állítás, amit le tud írni bal kézzel, és az állítás tagadását is le tudja írni bal kézzel?

1.16. Van-e olyan állítás, amit le tud írni jobb kézzel, és az állítás tagadását is le tudja írni jobb kézzel?

1.17. A teremben hallgatók ülnek, az asztalon nyalókák vannak. Ugyanazt jelenti-e a következő két mondat?

(a) Minden hallgatóhoz van olyan nyalóka, amelyiket szopogatott.

(b) Van olyan nyalóka, amelyiket minden hallgató szopogatott.

1.18. **Ha esik az eső, akkor nem találsz rám.** Melyik mondat jelenti ugyanezt?

(a) Ha nem esik az eső, akkor rám találsz.

(b) Ha rám találsz, akkor nem esik az eső.

Írjuk le a következő mondatok tagadását!

1.19. Minden medve szereti a mézet.

1.20. Van olyan tengerész, aki ismer olyan kikötőt, ahol minden kocsmában járt.

1.21. Van olyan méz, amit nem minden medve szeret.

Tagadjuk a következő mondatokat!

1.22. Ha itt a nyár, akkor meleg az idő.

1.23. Ha a nagynénikémnek kerekei lennének, akkor ő lenne a miskolci gyors.

Tudjuk, hogy az (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy ha $a_n > 2520$, akkor $b_n > 2520$. Mire következtethetünk abból, hogy

1.24. $a_n > 2520$?

1.25. $a_n \leq 2520$?

Egy udvarban kecskék és bolhák vannak. Azt, hogy egy bolha megcsípett egy kecskét, a $\Phi(B, K)$ formulával jelöljük. Olvassuk fel a következő állításokat, és írjuk is le őket szöveggel! Döntsük el, hogy melyik állításból melyik állítás következik!

1.26. $(\forall K) \quad (\exists B) \quad \Phi(B, K)$

1.27. $(\forall K) \quad (\forall B) \quad \Phi(B, K)$

1.28. $(\exists K) \quad (\forall B) \quad \Phi(B, K)$

1.29. $(\exists K) \quad (\exists B) \quad \Phi(B, K)$

1.30. $(\exists B) \quad (\forall K) \quad \Phi(B, K)$

1.31. $(\forall B) \quad (\exists K) \quad \Phi(B, K)$

Egy udvarban kecskék és bolhák vannak. Azt, hogy egy bolha megcsípett egy kecskét, a $\Phi(B, K)$ formulával jelöljük. Írjuk le a következő állítások tagadását formulákkal is, és szöveggel is!

1.32. $(\forall K)\ (\exists B)\ \Phi(B, K)$

1.33. $(\forall K)\ (\forall B)\ \Phi(B, K)$

1.34. $(\exists K)\ (\forall B)\ \Phi(B, K)$

1.35. $(\exists K)\ (\exists B)\ \Phi(B, K)$

1.36. $(\exists B)\ (\forall K)\ \Phi(B, K)$

1.37. $(\forall B)\ (\exists K)\ \Phi(B, K)$

Egy buliban 15 fiú és 12 lány volt. Azt, hogy egy fiú táncolt egy lánnyal, a $T(F, L)$ formulával jelöljük. Vizsgáljuk meg, hogy következik-e az A állításból a B állítás, illetve, hogy következik-e a B állításból az A állítás!

1.38. **A:** $(\forall F) \quad (\exists L) \quad T(F, L)$ **B:** $(\exists L) \quad (\forall F) \quad T(F, L)$

1.39. **A:** $(\exists F) \quad (\forall L) \quad T(F, L)$ **B:** $(\exists F) \quad (\exists L) \quad T(F, L)$

1.40. **A:** $(\forall L) \quad (\exists F) \quad T(F, L)$ **B:** $(\exists L) \quad (\forall F) \quad T(F, L)$

1.41. **A:** $(\exists L) \quad (\forall F) \quad T(F, L)$ **B:** $(\exists F) \quad (\exists L) \quad T(F, L)$

Egy buliban 15 fiú és 12 lány volt. Azt, hogy egy fiú táncolt egy lánnyal, a $T(F, L)$ formulával jelöljük. Írjuk le a következő állításokat formulákkal, és vizsgáljuk meg, hogy következik-e az A állításból a B állítás, illetve, hogy következik-e a B állításból az A állítás!

1.42. **A:** Van olyan lány, aki minden fiúval táncolt.
B: Van olyan fiú, aki minden lánnyal táncolt.

1.43. **A:** Van olyan lány, aki táncolt valamelyik fiúval.
B: Van olyan fiú, aki táncolt valamelyik lánnyal.

1.44. **A:** Minden fiú táncolt valamelyik lánnyal.
B: Minden lány táncolt valamelyik fiúval.

1.45. **A:** Minden fiú táncolt minden lánnyal.
B: Van olyan lány, aki minden fiúval táncolt.

1.46. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Vezessünk be jelöléseket, és írjuk fel formulákkal a következő állításokat, amelyek egy teniszbajnokságról szólnak!

1.47. Volt olyan versenyző, aki senkit nem vert meg.

1.48. Volt olyan versenyző, aki mindenkit megvert.

1.49. Minden versenyző nyert is, és veszített is játékot.

1.50. Egyetlen versenyző sem vert meg mindenkit.

Legyenek A, B, és C halmazok. Írjuk fel A, B, C és a halmazműveletek segítségével, azaz olyan jellegű formulával, mint például $(A \setminus B) \cup C$, az alábbi halmazokat!

1.51. Azon elemek halmaza, amelyek A-ban benne vannak, de B-ben és C-ben nincsenek benne.

1.52. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan kettőben vannak benne.

Igazak-e a következő állítások?

1.53. $(x \in B) \wedge (B \subset C) \implies x \in C$,

1.54. $(x \in B) \vee (B \subset C) \implies x \in C$,

1.55. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \implies A \subset C$,

1.56. $(A \subset B) \vee (B \subset C) \implies A \subset C$,

1.57. $(A \in B) \implies A \subset B$?

1.58. $(A \subset B) \implies A \in B$?

Igaz-e tetszőleges A, B és C halmazokra, hogy

1.59. ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$.

1.60. ha $a \in A$ és $A \subset B$, akkor $a \in B$.

1.61. ha $A \cup B = C$, akkor $C \setminus B = A$.

1.62. ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor $A = B$.

1.63. ha $A \cap B = C$, akkor $A \subset C$.

Igaz-e tetszőleges A és B halmazokra, hogy

1.64. $A \backslash B = A \cap \overline{B}$,

1.65. $(A \cup B) \backslash B = A$,

1.66. $(A \backslash B) \cup B = A$,

1.67. $\overline{A} \backslash B = A \backslash \overline{B}$?

Legyenek A, B, C halmazok. Írjuk fel A, B, C és a halmazműveletek segítségével, azaz olyan jellegű formulával, mint például $(A \backslash B) \cup C$, az alábbi halmazokat!

1.68. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan egyben vannak benne.

1.69. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan kettőben vannak benne.

1.70. Azon elemek halmaza, amelyek mindhárom halmazban benne vannak.

1.71. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B halmazokra $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.72. Bizonyítsuk be a De Morgan azonosságokat:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \text{és} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

1.2. Direkt bizonyítás, indirekt bizonyítás, teljes indukció

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket, ha a és b pozitív számok!

1.73. $\dfrac{a+b}{2} \geq \dfrac{2}{1/a+1/b}$

1.74. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{2}{1/a+1/b}$

1.75. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2}$

1.76. $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}} \geq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

1.77. $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

1.78. $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{1/a+1/b}$

Legyen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ állítások egy sorozata. Mely állításokról tudjuk biztosan, hogy igazak, illetve mely állításokról tudjuk biztosan, hogy hamisak, ha

1.79. A_1 igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

1.80. A_1 igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{n-1} igaz.

1.81. A_1 igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{2n} igaz.

1.82. A_1 igaz, és ha A_n hamis, akkor A_{n-1} hamis.

1.83. A_1 igaz, és ha A_n hamis, akkor A_{n+1} hamis.

1.84. A_{10} hamis, és ha A_n igaz, akkor A_{n-1} igaz.

1.85. A_7 igaz, és $n \geq 5$ esetén ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

1.86. A_3 igaz, és $n \geq 5$ esetén ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

1.87. A_1 igaz és A_2 igaz, és ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

1.88. A_{10} igaz és A_{11} igaz, és ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

1.89. A_{10} igaz és A_{11} igaz, és $n > 20$ esetén ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

Bizonyítsuk be a következő állításokat tetszőleges pozitív egész n esetén!

1.90. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

1.91. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1.92. Fejezzük ki közvetlenül n-nel az $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$ összeget! Először sejtsük meg az eredményt, majd bizonyítsuk be!

1.93. Fejezzük ki közvetlenül n-nel az $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$ összeget! Először sejtsük meg az eredményt, majd bizonyítsuk is be!

Bizonyítsuk be a következő állításokat! A feladatokban n pozitív egész számokat jelöl.

1.94. $2^n > n^2$, ha $n > 4$

1.95. $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \geq 1$

1.96. $\sqrt{n} \leq 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1.97. $2^n > n^3$, ha $n > 9$

1.98. $2\sqrt{n} \geq 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1.99. **Állítás:** Ha $\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, akkor minden pozitív egész szám 1.
Bizonyítás teljes indukcióval: Az állítás $n = 1$-re igaz. Most induljunk ki abból, hogy $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Ha $n \geq 2$, akkor írjuk fel az előbbi azonosságot n helyett $(n-1)$-gyel:
$1 + 2 + \cdots + n - 1 = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

Adjunk mindkét oldalhoz 1-et: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{(n-1)n}{2} + 1$.
Tehát $\dfrac{(n-1)n}{2} + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, amiből következik, hogy $n = 1$.
Keressük meg a hibát!

1.100. **Állítás:** Minden ló egyszínű.
Bizonyítás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy bármely n ló egyszínű. Az állítás $n = 1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy igaz n-re, és ebből fogjuk $n+1$-re belátni: adott $n+1$ ló közül az indukciós feltevés miatt az $1., 2., \ldots, n.$ is egyszínű és a $2., \ldots, n., (n+1).$ is egyszínű, tehát mind az $n+1$ ló egyszínű.

Keressük meg a hibát!

1.101. **Állítás:** Ha G egy olyan egyszerű véges gráf (azaz G-ben nincs hurokél és nincs többszörös él), amelyben minden csúcs foka 2, akkor G kör.
Bizonyítás a gráf csúcsainak számára vonatkozó teljes indukcióval. Induljunk ki $n = 3$-ból, akkor a feltételeket csak a K_3 teljes gráf elégíti ki, ami valóban kör.
Tegyük fel, hogy az $n-1$ csúcsú, a feltételeknek eleget tevő gráfra igaz az állítás, és tegyük fel, hogy $n > 3$. Legyen u a gráf egy csúcsa. Mivel u foka 2, u-nak pontosan 2 szomszédja van, legyenek ezek v és w. Hagyjuk el a gráfból az u csúcsot a hozzátartozó élekkel együtt, és húzzunk be egy élt v és w között. Ekkor megint minden csúcs foka 2 lesz, viszont a gráfnak most $n-1$ csúcsa van, tehát az indukciós feltevés miatt kör. Ha u-t beillesztjük v és w közé, akkor a gráfnak n csúcsa lesz, és továbbra is kör.

Keressük meg a hibát!

1.102. **Állítás:** Ha van valamennyi egyformának látszó pénzérménk, de az egyik hamis, és így könnyebb, mint a többi, akkor egy kétkarú mérleg segítségével egyetlen méréssel kiválaszthatjuk a hamisat.
Bizonyítás: Induljunk ki 2 darab érméből, ekkor 1 mérés elég. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ darab érme esetén is elég 1 mérés. Vegyünk most $n+1$ érmét! Egyet tegyünk félre! A maradék n érméből az indukciós feltétel miatt 1 méréssel ki tudjuk választani a hamisat, illetve, ha nincs köztük a hamis, akkor a félretett érme a hamis. Tehát $n+1$ érme esetén is elég volt 1 mérés.

Keressük meg a hibát!

Legyen u_n a Fibonacci-sorozat n-edik tagja, azaz

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \text{ és } u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

1.103. u_n és u_{n+1} relatív prímek!

1.104. $u_n < 1{,}7^n$.

1.105. $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n+1}$, ha $n \geq 1$.

1.106. $u_n > 1{,}5^{n-1}$, ha $n \geq 6$.

1.107. Legyen $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ és $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$. Határozzuk meg a_{101} értékét!

1.108. Kivágjuk egy sakktáblából az egyik átlójának két végén levő négyzeteket (az A1 és a H8 mezőket). Le lehet-e fedni a megmaradó sakktáblát 31 darab 2×1-es lappal (dominóval)? (Egy lap 2 mezőt tud lefedni.)

1.109. Kivágjuk egy sakktáblából az egyik átlójának egyik végén levő négyzetet (az A1 mezőt). Le lehet-e fedni a megmaradó sakktáblát 21 darab 3×1-es lappal? (Egy lap 3 egymás melletti mezőt tud lefedni.)

1.110. Egy 5×5-ös sakktábla minden mezőjén áll egy bolha. Amikor az óra éjfélt üt, minden bolha átugrik valamelyik oldalszomszédos mezőre. Tudnak-e úgy ugrani, hogy az ugrás után is minden mezőn 1 bolha legyen?

1.111. Bizonyítsuk be, hogy két racionális szám összege racionális!

1.112. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális!

Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak!

1.113. $3 + \sqrt{2}$

1.114. $3\sqrt{2}$

1.115. $\sqrt{3}$

1.116. $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$

1.117. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

1.118. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

1.119. Lehet-e két irracionális szám összege racionális?

1.120. Lehet-e két racionális szám hányadosa irracionális?

1.121. Igaz-e, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális?

1.122. **Állítás:** Az 1 a legnagyobb szám.
Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy nem az 1 a legnagyobb szám, hanem A. Ekkor $A > 1 > 0$, így a pozitív A-val szorozva $A^2 > A$, tehát találtunk A-nál nagyobb számot (A^2-et), ami ellentmondás.

Keressük meg a hibát!

1.123. Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak van 100-nál nagyobb tagja!

1.124. Legyen $a_1 = 0{,}9$ és $a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak van $\dfrac{1}{1000}$-nél kisebb tagja!

1.3. Nevezetes közepek

1.125. Bizonyítsuk be, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok számtani, mértani és harmonikus közepe a számok legkisebbike és legnagyobbika közé esik!

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $a + b + c = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke maximális legyen:

1.126. abc,

1.127. a^3b^2c.

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $abc = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke minimális legyen:

1.128. $2a + b + c$,

1.129. $a^2 + b^2 + c^2$.

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $abc = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke minimális legyen:

1.130. $a + b + c$,

1.131. $3a + 2b + c$.

1.132. Egy kereskedőnek nem pontos a kétkarú mérlege, mert a karok hossza nem egyenlő. Miután tudja ezt, minden vásárlónál az áru egyik felét a mérleg egyik serpenyőjében, a másik felét a mérleg másik serpenyőjében méri, gondolván, hogy ezzel kiküszöböli a mérleg pontatlanságát. Valóban ez a helyzet?

1.133. Egy kereskedőnek nem pontos a kétkarú mérlege, mert a karok hossza nem egyenlő. Adjunk meg olyan módszert, amellyel ezzel a mérleggel is pontosan le tudja mérni az áruk súlyát!

1.134. Egy motorcsónak motorja a csónakot állóvízben v sebességgel hajtja. A csónak az u sebességű folyóban s utat tesz meg a folyás irányában, majd visszamegy a kiindulási helyéhez. Mennyi lesz az átlagsebessége a teljes úton v-hez képest: v-vel egyenlő, v-nél nagyobb vagy v-nél kisebb?

1.135. Legyen egy téglalap két éle a és b, átlója pedig c. Ekkor a téglalap területe $T = ab$, és a téglalap kerülete $K = 2(a + b)$.

Tehát: $$\frac{T}{\frac{K}{2}} = \frac{ab}{\frac{2(a+b)}{2}}$$

Így: $$\frac{2T}{K} - \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{ab}{a+b} - \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Mivel $0 < a < c$, ezért: $$a\left(\frac{2T}{K} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right) < c\left(\frac{ab}{a+b} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$

Beszorzás után: $$\frac{2Ta}{K} - \frac{ac}{\sqrt{2}} < \frac{abc}{a+b} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}$$

T és K helyébe írjunk ab-t és $2(a + b)$-t: $$\frac{2a^2b}{2(a+b)} - \frac{ac}{\sqrt{2}} < \frac{abc}{a+b} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}$$

Rendezés után: $$\frac{2a^2b}{2(a+b)} - \frac{abc}{a+b} < \frac{ac}{\sqrt{2}} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}$$

Kiemelés után: $$\frac{ab}{a+b}(a-c) < \frac{c}{\sqrt{2}}(a-c)$$

Osztunk $(a - c)$-vel, de $a - c < 0$: $$\frac{ab}{a+b} > \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Négyzet esetén $b = a$ és $c = a\sqrt{2}$: $$\frac{a^2}{2a} > \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Egyszerűsítés és rendezés után: $1 > 2$

Keressük meg a hibát!

1.136. Melyik az egységkörbe írható maximális területű téglalap?

1.137. Melyik az egységgömbbe írható maximális térfogatú egyenes körhenger?

1.138. Mennyi a maximuma a $g(x) = x(1-x)^3$ függvénynek a $[0, 1]$ intervallumon?

1.139. Határozzuk meg az $x^2(1-x)$ függvény legnagyobb értékét a $[0, 1]$ zárt intervallumon.

1.140. Tudjuk, hogy $a < b$ és $x < y$. Melyik nagyobb: $ax + by$ vagy $ay + bx$?

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket!

1.141. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$, ha $a, b > 0$

1.142. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, ha $a, b, c > 0$

1.143. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$, ha $a, b, c > 0$

1.144. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$, ha $a, b, c > 0$

1.4. Valós számok, számhalmazok

Bizonyítsuk be a következő állításokat!

1.145. A $\{0, 1\}$ halmaz a $\mod 2$-vel vett műveletekkel testet alkot,

1.146. A $\{0, 1, 2\}$ halmaz a $\mod 3$-mal vett műveletekkel testet alkot,

1.147. A $\{0, 1, 2, 3\}$ halmaz a $\mod 4$-gyel vett műveletekkel nem alkot testet!

1.148. Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok teste nem rendezhető!

Bizonyítsuk be az axiómák alapján, hogy az a, b valós számokra igazak a következő állítások!

1.149. Ha $a < b$, akkor $-a > -b$,

1.150. Ha a és b pozitív, és $a < b$, akkor $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Igazak-e a valós számok körében következő állítások? Az igaz állításokat az axiómák alapján bizonyítsuk, a hamis állításoknál mutassunk ellenpéldát!

1.151. Ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$.

1.152. Ha $a > b$ és $b < c$, akkor $a < c$.

1.153. Ha $a > b$ és $b < c$, akkor $a > c$.

1.154. Ha $a > b$, $a < d$ és $b > e$, akkor $d > e$.

1.155. Ha $a > b$, $a < d$ és $b > e$, akkor $d < e$.

1.156. Ha $a > b$, $a > d$ és $b > e$, akkor $d > e$.

1.157. Ha $a > b$, $a > d$ és $b > e$, akkor $d < e$.

1.158. Ha $a > b$, $a < d$ és $b < e$, akkor $d > e$.

1.159. Ha $a > b$, $a < d$ és $b < e$, akkor $d < e$.

Igazak-e a valós számok körében következő állítások? Az igaz állításokat az axiómák alapján bizonyítsuk, a hamis állításoknál mutassunk ellenpéldát!

1.160. Ha $a < b$ és $c < 0$, akkor $a \cdot c > b \cdot c$.

1.161. Ha $a, b \neq 0$, és $a < b$, akkor $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

1.162. Ha a és b azonos előjelűek, és egyik sem nulla, továbbá $a < b$, akkor $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

1.163. Ha $a < b$, akkor $a^2 < b^2$.

1.164. Ha $a < b$, akkor $a^3 < b^3$.

1.165. Ha a és b azonos előjelűek, továbbá $a < b$, akkor $a^2 < b^2$.

1.166. Ha a és b azonos előjelűek, továbbá $a < b$, akkor $a^3 < b^3$.

1.167. Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $a + c < b + d$.

1.168. Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $a \cdot c < b \cdot d$.

1.169. Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $a \cdot c > b \cdot d$.

1.170. Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $a - c < b - d$.

1.171. Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $a - c > b - d$.

1.172. Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $d - a < b - c$.

1.173. Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $d - a > b - c$.

1.174. Ha $\frac{a}{b} > 0$, és $a < c$ és $b > d$, akkor $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

1.175. Ha $\frac{a}{b} < 0$, és $a < c$ és $b > d$, akkor $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek!

1.176. $|a| + |b| \geq |a + b|$

1.177. $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

1.178. $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

1.179. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számokra igaz, hogy

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| .$$

Melyik állításból következik a másik?

1.180. **P:** $a < b$ **Q:** $|a| < |b|$

1.181. **P:** $a < b$ **Q:** $\left|\frac{1}{a}\right| < \left|\frac{1}{b}\right|$, ahol $a, b \neq 0$

1.182. **P:** $a < b$ **Q:** $a + b < |a + b|$

1.183. **P:** $a < b$ **Q:** $a + b \leq |a + b|$

1.184. **P:** $a < b$ **Q:** $ab < |ab|$

1.185. **P:** $a < b$ **Q:** $ab \leq |ab|$

1.186. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív a valós számhoz van olyan pozitív egész n, amelyre teljesül, hogy $\frac{1}{n} < a$.

1.187. Bizonyítsuk be az Archimédeszi axiómából, hogy $(\forall b, c < 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ nb < c$!

1.188. Bizonyítsuk be, hogy bármely két különböző valós szám között van irracionális szám!

Szemléltessük a következő számhalmazokat számegyenesen! Döntsük el, hogy melyik intervallum, és melyik nem az! Az intervallumok esetében döntsük el, hogy melyik zárt, melyik nyílt, és melyik se nem zárt, se nem nyílt!

1.189. $A = \{1, 2, 3\}$

1.190. $B = \{5, 6\}$

1.191. $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 6\}$

1.192. $D = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 6\}$

1.193. $E = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 6\}$

1.194. $F = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x < 6\}$

Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mit jelentenek a következő állítások?

1.195. $\forall x \in H\ \exists y \in H\ (y < x)$

1.196. $\forall y \in H\ \exists x \in H\ (y < x)$

1.197. $\exists x \in H\ \forall y \in H\ (y \leq x)$

1.198. $\exists y \in H\ \forall x \in H\ (y \leq x)$

Legyen $H_1 = \{h \in \mathbb{R} : -3 < h \leq 1\}$ és $H_2 = \{h \in \mathbb{R} : -3 \leq h < 1\}$. Melyik állítás igaz, ha $H = H_1$, illetve ha $H = H_2$?

1.199. $\forall x \in H\ \exists y \in H\ (y < x)$

1.200. $\forall y \in H\ \exists x \in H\ (y < x)$

1.201. $\exists x \in H\ \forall y \in H\ (y \leq x)$

1.202. $\exists y \in H\ \forall x \in H\ (y \leq x)$

Határozzuk meg a következő intervallumsorozatok metszetét! (Például rajz segítségével sejtsük meg a metszetet! Ha a sejtés szerint a metszet M, akkor bizonyítsuk be, hogy $\forall x \in M$ esetén teljesül, hogy $\forall n\ x \in I_n$, továbbá ha $y \notin M$ akkor $\exists k\ y \notin I_k$. (Itt k és n pozitív egész számok.)

1.203. $I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$

1.204. $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

1.205. $I_n = \left[2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right]$

1.206. $I_n = \left(2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right)$

1.207. $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$

1.208. $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

1.209. $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$

1.210. $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$

Határozzuk meg a következő intervallumsorozatok metszetét! Mely intervallumsorozatokra teljesülnek a Cantor-axióma feltételei?

1.211. $I_n = \left[1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$

1.212. $I_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$

1.213. $I_n = \left[-n, \frac{1}{n}\right]$

1.214. $I_n = \left[-2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$

1.215. $I_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$

1.216. $I_n = (-n, n)$

Melyik állítás igaz? (A választ mindig indokoljuk!)

1.217. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok zártak.

1.218. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor az intervallumok nyíltak.

1.219. Egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont.

1.220. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nyílt.

1.221. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nem zárt.

1.222. Ha egy zárt intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok egymásba vannak skatulyázva.

1.223. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont?

1.224. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete nem üres?

1.225. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete üres?

1.226. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete valódi intervallum (nem csak egy pont)?

1.227. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete valódi intervallum?

1.228. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete valódi nyílt intervallum?

1.229. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete valódi nyílt intervallum?

1.230. A valós számok axiómái közül melyek teljesülnek és melyek nem a racionális számok halmazára (a szokásos műveletekkel és rendezéssel)?

1.231. Bizonyítsuk be, hogy bármely két valós szám között van véges tizedes tört!

1.232. Mi a kapcsolat a véges tizedestört alakban felírható számok halmaza és a racionális számok halmaza között?

1.233. Bizonyítsuk be, hogy egy valós szám tizedestört-alakja akkor és csak akkor periodikus, ha a szám racionális.

1.234. Fordítsuk le a végtelen tizedestörtékről tanultakat kettes számrendszerre, azaz definiáljuk a véges és végtelen bináris (kettedes) törteket és mondjuk ki a tételeink megfelelőit!

1.235. Ellenőrizzük, hogy a Cantor-axióma állítása nem marad igaz, ha bármelyik feltételét elhagyjuk!

Melyik állítások igazak?

1.236. Az $I_n = [a_n, b_n]$ intervallumsorozat metszetének pontosan egy eleme van, ha $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}^+) \quad (\forall n > n_0) \quad b_n - a_n < \varepsilon$.

1.237. Az $I_n = (a_n, b_n)$ intervallumsorozat metszetének pontosan egy eleme van, ha $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}^+) \quad (\forall n > n_0) \quad b_n - a_n < \varepsilon$.

1.238. Az $I_n = [a_n, b_n]$ intervallumsorozat metszetének egynél több eleme van, ha $(\forall n \in \mathbb{N}^+) \quad b_n - a_n > 1$.

1.239. Az $I_n = (a_n, b_n)$ intervallumsorozat metszetének egynél több eleme van, ha $(\forall n \in \mathbb{N}^+) \quad b_n - a_n > 1$.

1.240. Az $I_n = (a_n, b_n)$ egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszetének egynél több eleme van, ha $(\forall n \in \mathbb{N}^+) \quad b_n - a_n > 1$.

1.241. Az $I_n = (a_n, b_n)$ egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszetének pontosan egy eleme van, ha $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}^+) \quad (\forall n > n_0) \quad b_n - a_n < \varepsilon$.

1.242. Az $I_n = [a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszetének pontosan egy eleme van, ha $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n \in \mathbb{N}^+) \quad b_n - a_n < \varepsilon$.

Döntsük el az alábbi halmazokról, hogy alulról korlátosak-e, felülről korlátosak-e, korlátosak-e, és hogy van-e legkisebb, illetve legnagyobb elemük?

1.243. $\{x \in \mathbb{R} : x \le 73\}$

1.244. $\{x \in \mathbb{Q} : x \le 73\}$

1.245. $\{x \in \mathbb{R} : x \le \sqrt{2}\}$

1.246. $\{x \in \mathbb{Q} : x \le \sqrt{2}\}$

Döntsük el az alábbi halmazokról, hogy alulról korlátosak-e, felülről korlátosak-e, korlátosak-e, és hogy van-e legkisebb illetve legnagyobb elemük?

1.247. prímszámok halmaza

1.248. pozitív számok halmaza

1.249. $[-5, -2)$

1.250. $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

1.251. $\left\{\sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.252. $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.253. $\left\{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.254. $\left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.255. $\left\{\frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.256. $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.257. $\left\{\frac{n}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.258. $\{n - k : n, k \in \mathbb{N}^+\}$

1.259. $\left\{\sqrt{n^2+1} - k : n, k \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.260. $\left\{n - \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.261. Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mi a következő állítások logikai kapcsolata?

(a) H alulról nem korlátos.

(b) H-nak nincs legkisebb eleme.

(c) $(\forall x \in H)\ (\exists y \in H)\ y < x$.

(d) $(\forall y \in H)\ (\exists x \in H)\ y < x$.

1.262. Van-e olyan olyan nem üres valós számhalmaz, amelyik felülről korlátos, de nincs legnagyobb eleme?

1.263. Írjuk fel logikai jelekkel a következő állítást: „Az A halmaznak nincs legkisebb eleme.”

1.264. Van-e olyan $a_1, a_2, \ldots$ számsorozat, amelyre az $\{a_1, a_2, \ldots\}$ halmaz korlátos, de nincs se maximuma, se minimuma?

1.265. Adjunk példát olyan nem üres valós számhalmazra, amelyik korlátos, de nincs legkisebb eleme!

Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz nem üres. Mi a következő állításpárok logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

1.266. **P:** H-nak nincs minimuma. **Q:** $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\exists b \in H)\quad b < a$

1.267. **P:** H-nak nincs minimuma. **Q:** $(\forall a \in H)\ (\exists b \in H)\quad b < a$

1.268. **P:** H-nak nincs maximuma. **Q:** $(\forall a \in \mathbb{R})\ (\exists b \in H)\quad b > a$

1.269. **P:** H-nak nincs maximuma. **Q:** $(\forall a \in H)\ (\exists b \in H) \quad b > a$

1.270. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között, azaz melyikből következik a másik?

P: Az A halmaz véges (azaz véges sok eleme van).
Q: Az A halmaz korlátos.

Írjuk fel logikai jelekkel az alábbi állításokat!

1.271. Az A halmaz egyik felső korlátja -3.

1.272. Az A halmaz felülről korlátos.

1.273. Az A halmaz korlátos.

1.274. Az A halmaznak a 3 nem alsó korlátja.

1.275. Az A halmaz alulról nem korlátos.

1.276. Az A halmaz nem korlátos.

1.277. Egy számhalmaznak hány maximuma, illetve hány felső korlátja lehet?

1.278. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között, azaz melyikből következik a másik?

P: Az A halmaznak van legkisebb eleme. **Q:** Az A halmaz alulról korlátos.

Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

1.279. $[1, 2]$

1.280. $(1, 2)$

1.281. $\mathbb{Q}$

1.282. $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+ \right\}$

1.283. Tudjuk, hogy H-nak nincs c-nél kisebb felső korlátja. Következik-e ebből, hogy $\sup H = c$?

1.284. Tudjuk, hogy c felső korlátja H-nak. Következik-e ebből, hogy $\sup H = c$?

1.5. Becslések

Bizonyítsuk be, hogy van olyan pozitív N egész szám, amelyre teljesül, hogy minden $n > N$ esetén

1.285. $0{,}001n^5 - 200 > 1000n^4$,

1.286. $0{,}001n^5 + 3n^4 - 200n^3 + 100 > 1000n^4 + 2000n^3 + 3000n^2 + 4$,

1.287. $0{,}001n^5 - 200 > 1000n^3 + 10000\sqrt{n} + 3$,

1.288. $0{,}1n^5 + 30n^4 - 20n^3 + 10 > 1000n^4 + 2000n^3 + \frac{1}{n}$,

1.289. $n^5 - 3n^4 - 200n^3 + 100\sqrt{n} > 1000n^4 - 2000n^3 + 3000n^2 + 4$,

1.290. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0{,}001$.

1.291. $\sqrt{n+10} - \sqrt{n+1} < 0{,}001$.

1.292. $\sqrt{n+100} - \sqrt{n+10} < 0{,}001$.

1.293. Tegyük fel, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $a_n > 42$. Következik-e ebből, hogy $a_{n+1} > 42$? Következik-e az, hogy $a_{n-1} < 42$?

1.294. Tegyük fel, hogy $a_{10} > b_{10},\ a_{11} > b_{11},\ a_{12} > b_{12}$. Következik-e ebből, hogy $a_{13} > b_{13}$?

1.295. Tegyük fel, hogy ha $n > 42$, akkor $a_n > 3500$. Következik-e ebből, hogy ha $n < 42$, akkor $a_n \leq 3500$?

1.296. Tegyük fel, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $n > N$ esetén $a_n > b_n$. Következik-e ebből, hogy $a_n \leq b_n$ csak véges sok n-re teljesül?

1.297. Tegyük fel, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $n > N$ esetén $a_n > b_n$. Lehet-e olyan $M \in \mathbb{N}^+$ hogy $(\forall n > M)$ esetén $a_n \leq b_n$?

1.298. Tegyük fel, hogy hogy van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $n > N$ esetén $a_n > b_n$. Következik-e ebből, $n > 9$ esetén $a_n > b_n$?

1.299. Tegyük fel, hogy egyetlen $N \in \mathbb{N}^+$ esetén sem teljesül, hogy $(\forall n > N)$ esetén $a_n > b_n$. Következik-e ebből, hogy van olyan $M \in \mathbb{N}^+$ hogy $(\forall n > M)$ esetén $a_n \leq b_n$?

Van-e a következő sorozatoknak 100-nál nagyobb tagjuk? Van-e olyan $N \in \mathbb{N}^+$, amelyre teljesül, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > 100$? Van-e a sorozatoknak 10-nél kisebb tagjuk? Van-e olyan $M \in \mathbb{N}^+$, amelyre teljesül, hogy minden $n > M$ esetén $a_n < 10$?

1.300. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n}$

1.301. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2}$

1.302. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{1+2+\cdots+n}$

1.303. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\cdots+\sqrt{2n}}{1+2+3+\cdots+n}$

1.304. $a_n = \dfrac{20\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right)}{n^2}$

1.305. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

1.306. $a_n = \dfrac{20\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$

1.307. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$

Sorozatok versenyfutása: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat a versenyfutásban legyőzi a (b_n) sorozatot, ha van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > b_n$. Határozzuk meg, hogy a következő feladatokban melyik sorozat nyeri a versenyfutást!

1.308. $a_n = n^{15} + 3n^6 - 2n + 500, \quad b_n = 1000n^4 + 100n^3 + 1$

1.309. $a_n = 1000n^5 + 100n^3 + 6, \quad b_n = n^{40} + \dfrac{1}{n}$

1.310. $a_n = 1000n^4 + 100n^3 + 1, \quad b_n = n^5 - \sqrt{n} - 300$

1.311. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad b_n = 0{,}0001$

1.312. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}$

1.313. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n, \quad b_n = 1$

1.314. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n, \quad b_n = \frac{1}{2}$

1.315. $a_n = 1{,}001^n, \quad b_n = 1000$

1.316. $a_n = \sqrt[n]{2}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{n}$

1.317. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{50}, \quad b_n = 1 + \frac{50}{n} + \frac{2500}{n^2}$

1.318. $a_n = 2^n, b_n = n$

1.319. $a_n = 2^n, b_n = n^2$

1.320. $a_n = 2^n, b_n = n^3$

1.321. $a_n = 2^n, b_n = n^{10}$

1.322. Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) végtelen sok tagban különböző sorozatok, amelyek közül egyik sem győzi le a másikat?

1.323. Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) végtelen sok tagban különböző sorozatok, amelyek közül mindkettő legyőzi le a másikat?

1.324. Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) végtelen sok tagban különböző sorozatok, amelyek közül mindegyik legyőzi a $c_n = n$ sorozatot, de (a_n) és (b_n) versenyfutásában nincs győztes?

1.325. Legyen (a_n) és (b_n) két pozitív tagú sorozat! Határozzuk meg a versenyfutás lehetséges eredményeit a_n és b_n, illetve $\frac{a_n + b_n}{2}$ és $\sqrt{a_n b_n}$ között.

1.326. Tegyük fel, hogy van olyan $K \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > K$ esetén $a_n > b_n$, és hogy van olyan $L \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > L$ esetén $x_n > y_n$. Melyik sorozat nyeri a versenyfutást: $a_n x_n + b_n y_n$ vagy $a_n y_n + b_n x_n$?

Tegyük fel, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > b_n$. Következnek-e ebből a következő feladatok állításai?

1.327. Minden $n < N$ esetén $a_n < b_n$.

1.328. Van olyan $n < N$, hogy $a_n < b_n$.

1.329. Az $a_n > b_n$ egyenlőtlenség megoldása az egész számok halmazán $n > N$.

Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) sorozatok, amelyekre igaz, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > b_n$, és igazak a következő feladatok állításai?

1.330. Minden $n < N$ esetén $a_n < b_n$.

1.331. Van olyan $n < N$, hogy $a_n < b_n$.

1.332. Az $a_n > b_n$ egyenlőtlenség megoldása az egész számok halmazán $n > N$.

Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

1.333. **P:** A versenyfutásban az (a_n) sorozat legyőzi a (b_n) sorozatot.
Q: Végtelen sok $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > b_n$.

1.334. **P:** A versenyfutásban az (a_n) sorozat legyőzi a (b_n) sorozatot.
Q: Az $a_n < b_n$ egyenlőtlenség csak véges sok $n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesül.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan pozitív n egész szám, amelyre

1.335. $1{,}0001^n > 1000$,

1.336. $0{,}999^n < \dfrac{1}{1000}$,

1.337. $1{,}01^n > n^2$,

1.338. $\sqrt[n]{2} < 1{,}00001$,

1.339. $\sqrt[n]{0{,}0001} > 0{,}9$,

1.340. $\sqrt[n]{n} < 1{,}0001$.

1.341. Adjunk meg olyan N számot, amelyre igaz, hogy ha $n > N$, akkor

$$\frac{1}{n^5 + 4n^3 + 2n^2 + 1} < \frac{1}{1000}.$$

Hány megoldása van a feladatnak?

Bizonyítsuk be, hogy van olyan pozitív n egész szám, amelyre

1.342. $0{,}9^n < \dfrac{1}{100}$, **1.343.** $\sqrt[n]{2} < 1{,}01$, **1.344.** $\sqrt[n]{0{,}1} > 0{,}9$.

1.345. Bizonyítsuk be, hogy $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k < 1 + \dfrac{k}{n} + \dfrac{k^2}{n^2}$, ha k, n pozitív egészek, és $k < n$.

1.346. Melyik nagyobb: 1000^{1000} vagy 1001^{999}?

1.347. Melyik nagyobb: 1000^{1001} vagy 1001^{1000}?

1.348. Bizonyítsuk be, hogy az $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ rekurzióval megadott sorozat monoton nő!

1.349. Bizonyítsuk be, hogy az $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - a_n}$ rekurzióval megadott sorozat monoton nő!

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív ε-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $n > N$, akkor

1.350. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$, **1.351.** $\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1} < \varepsilon$,

1.352. $\sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon$, **1.353.** $\sqrt[n]{0{,}0001} > 1 - \varepsilon$.

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív ε-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $n > N$, akkor

1.354. $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, **1.355.** $\dfrac{1}{n^2 + \sqrt{n} + 1} < \varepsilon$, **1.356.** $\dfrac{n+1}{n^2 + \sqrt{n} + 1} < \varepsilon$.

Bizonyítsuk be, hogy minden $K \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $n > N$, akkor

1.357. $\sqrt{n} > K,$

1.358. $n^5 - 1000n^4 > K,$

1.359. $n^5 - n\sqrt{n} > K,$

1.360. $n^5 - 1000n^4 - n\sqrt{n} - 2000 > K.$

1.361. $\dfrac{n^2+n+1}{3n+5000} > K$

1.362. $\dfrac{\sqrt{n+3}+1}{\sqrt[7]{n^2}+5} > K$

1.363. $\dfrac{n^2-n+1000}{30n-5} > K$

1.364. $\dfrac{n^4+n+1}{\sqrt{n}+5000} > K$

Bizonyítsuk be, hogy minden $K \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $n > N$, akkor

1.365. $-\sqrt{n} < K,$

1.366. $n - n^2 < K,$

1.367. $1000\sqrt{n} + n - n^2 < K,$

1.368. $1000n^7 - 0{,}001n^8 + n^6 + 500 < K.$

1.369. $\dfrac{n-n^2+1}{3n+5000} < K$

1.370. $\dfrac{1-n}{\sqrt[7]{n^2}+5} > K$

1.371. $\dfrac{n^2-n+1000}{5-30n} < K$

1.372. $\dfrac{26-n^2}{30+n} < K$

1.373. $\dfrac{n^2+n+1}{-3n+5000} < K$

1.374. $\dfrac{\sqrt{n+3}-n}{\sqrt[7]{n^2}+5} < K$

1.375. $\dfrac{-n^2-n+1000}{30n-5} < K$

1.376. $\dfrac{-n^4+n+1}{\sqrt{n}+5000} < K$

Bizonyítsuk be, hogy minden $K \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $n > N$, akkor

1.377. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n} > K,$

1.378. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n} > K,$

1.379. $a_n = \dfrac{n\sqrt{1}+n\sqrt{2}+n\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}}{1+2+\cdots+n} > K.$

2. Sorozatok

2.1. A határérték fogalma, konvergens sorozatok, divergens sorozatok

Legyen az (a_n) sorozat a következőképp megadva: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. A feladatokban szereplő n és n_0 jelek pozitív egész számokat jelölnek.

2.1. Adjunk meg olyan n_0 számot, hogy $\forall n > n_0$ esetén teljesüljön, hogy

(a) $|a_n - 1| < 0{,}1$, **(b)** $|a_n - 1| < 0{,}01$.

2.2. Van-e olyan n_0 szám, hogy $\forall n > n_0$ esetén teljesül, hogy $|a_n - 2| < 0{,}001$?

2.3. Igaz-e, hogy

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$? **(b)** $\exists n_0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$?

(c) $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$? **(d)** $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| > \varepsilon)$?

(e) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \le n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$? **(f)** $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \le n_0\ (|a_n - 1| > \varepsilon)$?

Legyen az (a_n) sorozat a következőképp megadva: $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$. A feladatokban szereplő n és n_0 jelek pozitív egész számokat jelölnek.

2.4. Adjunk meg olyan n_0 számot, hogy $\forall n > n_0$ esetén teljesüljön, hogy

(a) $|a_n - 1| < 0{,}1$, **(b)** $|a_n - 1| < 0{,}01$.

2.5. Van-e olyan n_0 szám, hogy $\forall n > n_0$ esetén teljesül, hogy $|a_n - 2| < 0{,}001$?

2.6. Igaz-e, hogy

(a) $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ (|a_n-1|<\varepsilon)$? **(b)** $\exists n_0\ \forall\varepsilon>0\ \forall n>n_0\ (|a_n-1|<\varepsilon)$?

(c) $\exists\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ (|a_n-1|<\varepsilon)$? **(d)** $\exists\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ (|a_n-1|>\varepsilon)$?

(e) $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\le n_0\ (|a_n-1|<\varepsilon)$? **(f)** $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\le n_0\ (|a_n-1|>\varepsilon)$?

Legyen az (a_n) sorozat a következőképp megadva: $a_n=2+(-1)^n\frac{1}{n}$. A feladatokban szereplő n és n_0 jelek pozitív egész számokat jelölnek.

2.7. Adjunk meg olyan n_0 számot, hogy $\forall n>n_0$ esetén teljesüljön, hogy

(a) $|a_n-2|<0{,}1$, **(b)** $|a_n-2|<0{,}01$.

2.8. Van-e olyan n_0 szám, hogy $\forall n>n_0$ esetén teljesül, hogy $|a_n-1|<0{,}001$?

2.9. Igaz-e, hogy

(a) $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ (|a_n-2|<\varepsilon)$? **(b)** $\exists n_0\ \forall\varepsilon>0\ \forall n>n_0\ (|a_n-2|<\varepsilon)$?

(c) $\exists\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ (|a_n-2|<\varepsilon)$? **(d)** $\exists\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ (|a_n-2|>\varepsilon)$?

(e) $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\le n_0\ (|a_n-2|<\varepsilon)$? **(f)** $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\le n_0\ (|a_n-2|>\varepsilon)$?

Keressünk olyan N számot, hogy $\forall n>N$ esetén teljesüljön, hogy

2.10. $1{,}01^n>1000$;

2.11. $0{,}9^n<\frac{1}{100}$.

2.12. $\sqrt[n]{2}<1{,}01$.

2.13. $\sqrt[n]{n}<1{,}0001$.

Mutassuk meg, hogy van olyan n_0 szám, amelyre igaz, hogy minden $n>n_0$ esetén

2.14. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<0{,}01$,

2.15. $\sqrt{n+7}-\sqrt{n+3}<0{,}01$.

2.16. $\sqrt{n^2+5}-n<0{,}01$.

2.17. $\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+2}<0{,}01$,

Igaz-e, hogy b pontosan akkor határértéke az (a_n) sorozatnak, ha teljesülnek a következő állítások?

2.18. bármely $\varepsilon > 0$-ra az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van ε-nál közelebb b-hez?

2.19. bármely $\varepsilon > 0$-ra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van b-től legalább ε távolságra?

2.20. van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van ε-nál közelebb b-hez?

2.21. van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van b-től legalább ε távolságban?

Melyik állításból következik, hogy $a_n \to \infty$?

2.22. $\forall K$ esetén a (K, ∞) intervallumon kívül az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van.

2.23. $\forall K$ eseten a (K, ∞) intervallumban az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van.

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Melyik állítás következik ebből? Melyik állításból következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2.24. Az (a_n) sorozatnak nincs legnagyobb tagja.

2.25. Az (a_n) sorozatnak van legkisebb tagja.

2.26. A $(3, \infty)$ intervallumon kívül az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van.

2.27. $\forall K$ esetén a (K, ∞) intervallumon kívül az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van.

2.28. A $(3, \infty)$ intervallumban az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van.

2.29. $\forall K$ esetén a (K, ∞) intervallumban az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van.

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Melyik állítás következik ebből? Melyik állításból következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$?

2.30. Az (a_n) sorozatnak van legnagyobb tagja.

2.31. Az (a_n) sorozatnak nincs legkisebb tagja.

2.32. A $(-\infty, 3)$ intervallumon kívül az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van.

2.33. $\forall K$ esetén a $(-\infty, K)$ intervallumon kívül az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van.

2.34. A $(-\infty, 3)$ intervallumban az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van.

2.35. $\forall K$ esetén a $(-\infty, K)$ intervallumban az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van.

Lehet-e az (a_n) sorozat határértéke $-\infty$, ∞ vagy egy valós szám, ha

2.36. a sorozatnak van legnagyobb tagja?

2.37. a sorozatnak nincs legnagyobb tagja?

2.38. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?
P: Az (a_n) sorozat szigorúan monoton nő. **Q:** Az (a_n) sorozat tart a végtelenhez.

Mi a P és a Q állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

2.39. **P:** $a_n \to -\infty$ **Q:** $(\forall n \in \mathbb{N}^+) \quad a_n \geq a_{n+1}$

2.40. **P:** $a_n \to -\infty$ **Q:** $(\forall n \in \mathbb{N}^+) \quad a_n > a_{n+1}$

2.41. **P:** $a_n \to -\infty$ **Q:** $(\exists N \in \mathbb{N}^+)\ (\forall n > N) \quad a_n > a_{n+1}$

2.42. **P:** $(\forall K \in \mathbb{R}^+)\ (\exists n \in \mathbb{N}^+)\ a_n < K$ **Q:** $(\exists N \in \mathbb{N}^+)\ (\forall n > N) \quad a_n > a_{n+1}$

2.43. **P:** $(\exists K \in \mathbb{R}^+)\ (\forall N \in \mathbb{N}^+)\ (\exists n > N) \quad a_n > K$

Q: $(\exists n \in \mathbb{N}^+) \quad a_n < a_{n+1}$

Lehet-e az (a_n) sorozat határértéke $-\infty$, ∞ vagy egy valós szám, ha

2.44. a sorozatnak végtelen sok 3-nál nagyobb tagja van?

2.45. a sorozatnak végtelen sok 3-nál kisebb tagja van?

2.46. a sorozatnak végtelen sok 3-nál kisebb, és végtelen sok 3-nál nagyobb tagja van?

2.47. Egy sorozatnak végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja van. Lehet-e a sorozat konvergens? Tarthat-e a sorozat végtelenhez vagy mínusz végtelenhez?

Van-e olyan oszcillálva divergens sorozat, amelyik

2.48. korlátos

2.49. nem korlátos?

Sejtsük meg a következő sorozatok határértékét, és bizonyítsuk be a sejtést a határérték definíciója alapján!

2.50. $\dfrac{1}{n^2}$

2.51. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2.52. $\dfrac{3}{n+2}$

2.53. $\dfrac{3}{n} - \dfrac{5}{\sqrt{n}}$

2.54. $\dfrac{3n+2}{5n-3}$

2.55. $\dfrac{n-\sqrt{n}}{n+10}$

2.56. $\dfrac{4n^7+3n^2-2}{3n^7+12}$

2.57. $\dfrac{4n^7+3n^2-2}{12-3n^7}$

2.58. $\dfrac{4n^3+3n^8-2}{12-3n^8-n^2}$

2.59. $(-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^2}$

2.60. $(-1)^n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2.61. $(-1)^n \cdot \dfrac{3}{n+2}$

Bizonyítsuk be, hogy a következő sorozatok végtelenhez tartanak, azaz keressünk küszöbindexet a következő sorozatokhoz!

2.62. $n-\sqrt{n}$

2.63. $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}$

2.64. $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n}$

2.65. $\dfrac{n^2-10n}{10n+100}$

2.66. $\dfrac{5n^3-10\sqrt{n}}{10n^2+100}$

2.67. $\dfrac{4n^7+10n^3-6}{10n^2-2n+5}$

2.68. $\dfrac{2^n}{n}$

2.69. $\dfrac{n!}{2^n}$

2.70. $\dfrac{2^n+n}{n-3}$

2.71. $\dfrac{n^n}{n!}$

2.72. $n!-n$

2.73. $n!-3^n$

2.74. $n-\sqrt[n]{n}$

2.75. $\sqrt{n^3+1}-n$

Bizonyítsuk be, hogy a következő sorozatok mínusz végtelenhez tartanak, azaz keressünk küszöbindexet a következő sorozatokhoz!

2.76. $1-n$

2.77. $n-n^2$

2.78. $n-2^n$

2.79. $\dfrac{10n-n^2}{10n+100}$

2.80. $\dfrac{5n^3-10\sqrt{n}}{-10n^2+100}$

2.81. $\dfrac{4n^7-10n^3+6}{-10n^3+5}$

2.82. $n-n!$

2.83. $2^n-n!$

2.84. $\sqrt[n]{n}-n$

2.85. $\sqrt{n}-n^2$

Konvergensek-e vagy divergensek-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

2.86. $a_n=\begin{cases}3, & \text{ha } n \text{ páros}\\ 4, & \text{ha } n \text{ páratlan}\end{cases}$

2.87. $a_n=\begin{cases}3n, & \text{ha } n \text{ páros}\\ 4n^2, & \text{ha } n \text{ páratlan}\end{cases}$

2.88. $a_n=\begin{cases}3, & \text{ha } n\le 100\\ 4, & \text{ha } n>100\end{cases}$

2.89. $a_n=\begin{cases}n, & \text{ha } n \text{ páros}\\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan}\end{cases}$

2.90. $a_n=\begin{cases}-n+10, & \text{ha } n \text{ páros}\\ -n^2, & \text{ha } n \text{ páratlan}\end{cases}$

2.91. $a_n=\begin{cases}n-n^2, & \text{ha } n \text{ páros}\\ -\sqrt{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan}\end{cases}$

Van-e határértékük a következő sorozatoknak? Ha igen, bizonyítsuk be a definíciók alapján! Melyik sorozat konvergens?

2.92. $n - n^2 + 32$

2.93. $n - \sqrt{n} - 32$

2.94. $\dfrac{3n^5 - 7n^2 + 10}{n^2 - n^5 + 10}$

2.95. $\dfrac{3n^3 - 7n^2 + 10}{n^2 - n^5 + 10}$

2.96. $\dfrac{3n^9 - 7n^2 + 10}{n^2 - n^5 + 10}$

2.97. $\dfrac{3n - 7n^8 + 10}{n^2 - n^5 + 10}$

2.98. Bizonyítsuk be, hogy az $\dfrac{1}{n}$ sorozat nem tart 7-hez!

2.99. Bizonyítsuk be, hogy az $\dfrac{1}{n}$ sorozat nem tart ∞-hez!

2.100. Bizonyítsuk be, hogy a $(-1)^n$ sorozat divergens!

2.101. Bizonyítsuk be, hogy a $(-1)^n n$ sorozatnak nincs határértéke!

2.2. Határérték és műveletek, határérték és rendezés

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét a műveletekkel kapcsolatos tételek alkalmazásával!

2.102. $\dfrac{(-1)^n}{n}$

2.103. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2.104. $\dfrac{n}{n+1}$

2.105. $\dfrac{5n-1}{7n+2}$

2.106. $\dfrac{3n^4 + 2n - 1}{5n^4 + \sqrt{n} - 7}$

2.107. $\dfrac{5 - 3n^7}{n^7 + 5n^2 - 4}$

2.108. $\dfrac{8 - 3n^6 + n^9}{15n^9 + n^2 - 2}$

2.109. $\dfrac{n^6 + n^5 + n^2 - 4}{10n^6 + n^3 - 30}$

2.110. $\dfrac{n^{4/5} + \sqrt{n} - 2}{n^{3/2} + 16}$

2.111. $\dfrac{\sqrt{n^3} + 15}{4 - n\sqrt{n}}$

2.112. $\dfrac{n + \dfrac{1}{n}}{n+1}$

2.113. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

2.114. $\sqrt{n^2+1} - n$

2.115. $\dfrac{1 + \cdots + n}{n^2}$

2.116. $\dfrac{8-3n^{16}+n^9}{15n^9+n^2-2}$

2.117. $\dfrac{n^{3/2}+\sqrt{n}+3}{n^{4/5}+20}$

2.118. $\dfrac{n-n^5+2}{n^3+n^2+1}$

2.119. $\dfrac{n-n^5+2}{n^4+n^2+1}$

2.120. n^5-n^7+3

2.121. $10n-100\sqrt{n}$

2.122. $n^7-n^6-n^5-n^4-100$

2.123. $n-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$

2.124. $0{,}0001n^2-10000n$

2.125. $n\sqrt{n}\sqrt[3]{n}-n^2$

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét! Adjunk meg ε-tól függő küszöbindexet!

2.126. $\dfrac{2n^6+3n^5}{7n^6-2}$

2.127. $\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}-2n$

2.128. Adjunk példát arra, hogy $a_n-b_n\to 0$ de $\dfrac{a_n}{b_n}\not\to 1$.

2.129. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n\to a>0$, akkor $\sqrt{a_n}\to\sqrt{a}$.

2.130. Legyen $a_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ (n tagú az összeg). Mivel a tagokat alkotó sorozatok 0-hoz tartanak, ezért az a_n sorozat tart 0-hoz. Másrészt minden n-re $a_n=n\cdot\dfrac{1}{n}=1$, ezért $a_n\to 1$. Melyik következtetés a hibás, és mi a hiba benne?

2.131. Tudjuk, hogy $1+\dfrac{1}{n}\to 1$, továbbá $1^n=1$, ezért $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\to 1$.

Másrészt a **Bernoulli-egyenlőtlenség** felhasználásával bizonyíthatjuk, hogy $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geq 2$, tehát $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ határértéke nem lehet kisebb 2-nél.

Melyik következtetés a hibás, és mi a hiba benne?

2.132. Adjunk példát olyan (a_n) és (b_n) sorozatokra, amelyekre teljesül, hogy $\dfrac{a_n}{b_n}\to 1$, de $a_n-b_n\not\to 0$.

2.133. Mutassunk példákat az $\dfrac{a_n}{b_n}$ sorozat lehetséges viselkedésére, ha $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

Mi a következő állítások logikai kapcsolata az $a_n \to a$ állítással?

2.134. $a_n^2 \to a^2$

2.135. $a_n^3 \to a^3$

Mi a következő állításpárok logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

2.136. **P:** (a_n) konvergens és (b_n) konvergens **Q:** $(a_n + b_n)$ konvergens

2.137. **P:** $a_n + b_n \to \infty$ **Q:** $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$

2.138. **P:** $a_n + b_n \to \infty$ **Q:** $a_n \to \infty$ vagy $b_n \to \infty$

2.139. **P:** $a_n \cdot b_n \to 0$ **Q:** $a_n \to 0$ vagy $b_n \to 0$

2.140. **P:** (a_n) és (b_n) korlátos **Q:** $(a_n + b_n)$ korlátos

2.141. **P:** (a_n) és (b_n) korlátos **Q:** $(a_n \cdot b_n)$ korlátos

2.142. Tegyük fel, hogy $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$ **Q:** $a_n - b_n \to 0$

2.143. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1} = 0$, akkor (a_n) konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

2.144. Mutassunk példákat az $(a_n + b_n)$ sorozat lehetséges viselkedésére, ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

2.145. Mutassunk példákat az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat lehetséges viselkedésére, ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

2.146. Mutassunk példákat az $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat lehetséges viselkedésére, ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

2.147. Tegyük fel, hogy a b_n sorozat egyetlen tagja sem 0. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: $b_n \to \infty$ **Q:** $\frac{1}{b_n} \to 0$

2.148. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ **Q:** $a_n - b_n \to 0$

2.149. Tegyük fel, hogy $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ **Q:** $a_n - b_n \to 0$

2.150. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatra teljesül, hogy $\frac{a_n - 5}{a_n + 3} \to \frac{5}{13}$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n \to 10$.

2.151. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatnak van határértéke. Mi a következő állítások logikai kapcsolata? **P:** Minden elég nagy n-re $\frac{1}{n} \le a_n$ **Q:** $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$

2.152. Igaz-e, hogy ha $(a_n \cdot b_n)$ konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_n) is divergens?

2.153. Igaz-e, hogy ha (a_n/b_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_n) is divergens?

Tegyük fel, hogy az (a_n) és (b_n) sorozatnak van határértéke. Mi a következő állítások logikai kapcsolata?

2.154. **P:** Minden elég nagy n-re $a_n < b_n$. **Q:** $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$

2.155. **P:** Minden elég nagy n-re $a_n \le b_n$. **Q:** $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

Melyik állításokból következik, hogy az (a_n) sorozatnak van határértéke? Melyik állításokból következik, hogy (a_n) konvergens? Melyik állításokból következik, hogy (a_n) divergens?

2.156. (b_n) konvergens és $a_n > b_n$ minden elég nagy n-re.

2.157. $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ és $a_n > b_n$ minden elég nagy n-re.

2.158. (b_n) és (c_n) konvergens és $b_n \leq a_n \leq c_n$ minden elég nagy n-re.

2.159. $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ és $a_n > b_n$ minden elég nagy n-re.

2.160. $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ és $a_n < b_n$ minden elég nagy n-re.

2.161. Korlátos-e felülről a $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2}$ sorozat?

2.162. Bizonyítsuk be, hogy ha $a > 1$, akkor $a^n \to \infty$.

2.163. Bizonyítsuk be, hogy ha $a \leq -1$, akkor a^n oszcillálva divergens!

Adjunk példát olyan (a_n) sorozatra, amelyikre teljesül, hogy

2.164. $\sqrt[n]{a_n} \to 2$

2.165. $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{1}{2}$

2.166. $\sqrt[n]{a_n} \to 0$

2.167. $\sqrt[n]{a_n} \to \infty$

Mutassunk példát olyan a_n sorozatra, amelyre igaz, hogy $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, és

2.168. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

2.169. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

2.170. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2.171. $\lim_{n\to\infty} a_n = 7$

2.172. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sqrt[n]{a_n} \to 2$, akkor $a_n \to \infty$.

2.173. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{1}{2}$, akkor $a_n \to 0$.

Mit mondhatunk a $\lim_{n\to\infty} a_n$ határértékről, ha

2.174. $\sqrt[n]{a_n} \to 2$?

2.175. $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{1}{2}$?

2.176. $\sqrt[n]{a_n} \to 1$?

Mit mondhatunk a $\lim_{n\to\infty} a_n^n$ határértékről, ha

2.177. $a_n \to 2$?

2.178. $a_n \to \frac{1}{2}$?

2.179. $a_n \to 1$?

Van-e olyan (a_n) sorozat, amelyikre igaz, hogy

2.180. $a_n \to \infty$ és $\sqrt[n]{a_n} \to 1$?

2.181. $a_n \to 0$ és $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$?

2.182. $a_n \to \infty$ és $\sqrt[n]{a_n} \to 3$?

2.183. $a_n \to \infty$ és $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$?

2.184. $a_n \to 3$ és $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$?

2.185. $a_n \to 3$ és $\sqrt[n]{a_n} \to \infty$?

Konvergensek-e vagy divergensek-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

2.186. $\frac{1}{n} \cdot \{n\}$

2.187. $\frac{1}{n} \cdot [n]$

2.188. $\frac{1}{n} \cdot \{n^2\}$

2.189. $\frac{1}{n^2} \cdot [n]$

2.190. $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$

2.191. $\sqrt[n]{7 + (-1)^n}$

2.192. $\sqrt[n]{2^n - n}$

2.193. $\sqrt[n]{2^n + n^2}$

2.194. $\sqrt[n]{2^n - n^2}$

2.195. $\sqrt[n]{\dfrac{2^n + n^2 + 1}{3^n + n^3 + 1}}$

2.196. $\sqrt[n]{3^n - 2^n}$

2.197. $\dfrac{1 - 2 + 3 - \cdots - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

2.3. Monoton sorozatok, részsorozatok

2.198. Legyen (a_n) és (b_n) két monoton sorozat. Mit tudunk mondani a monotonitás szempontjából az $(a_n + b_n)$ sorozatról?

2.199. Legyen (a_n) és (b_n) két monoton sorozat. Mit tudunk mondani a monotonitás szempontjából az $(a_n \cdot b_n)$ sorozatról?

2.200. Legyen $a_1 = 1$, és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Bizonyítsuk be, hogy az (a_n) sorozat monoton növő!

2.201. Legyen $a_1 = \dfrac{1}{2}$, és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden tagja pozitív, továbbá, hogy a sorozat monoton csökkenő!

2.202. Legyen $a_1 = 0{,}9$, és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden tagja pozitív, továbbá, hogy a sorozat monoton csökkenő! Mutassuk meg, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, amelyre igaz, hogy $a_n < 10^{-6}$, és adjunk példát ilyen n számra!

2.203. Legyen $a_1 > 0$, és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1{,}1$. Mutassuk meg, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, amelyre igaz, hogy $a_n > 10^6$, és adjunk példát ilyen n számra!

2.204. Legyen $a_1 = a > 0$ tetszőleges, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right)$. Mutassuk meg, hogy $a_n \to \sqrt{a}$.

2.205. Legyen $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, és $n > 1$ esetén $a_n = \dfrac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$. Határozzuk meg az (a_n) sorozat határértékét!

2.206. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = A$. Határozzuk meg a $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ sorozat határértékét!

Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

2.207. **P:** Az (a_n) sorozat monoton nő. **Q:** Az (a_n) sorozat végtelenhez tart.

2.208. **P:** Az (a_n) sorozat monoton csökken. **Q:** Az (a_n) sorozat mínusz végtelenhez tart.

Határozzuk meg a következő rekurzív sorozatok határértékét, ha van! A rekurzív képletekben $n \geq 1$.

2.209. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1 + a_n^2}$

2.210. $a_1 = 1{,}5, \quad a_{n+1} = -a_n + 1$

2.211. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + \dfrac{5}{a_n}}{2}$

2.212. $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + \dfrac{5}{a_n}}{2}$

2.213. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2}{a_n}\right)$

2.214. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$

2.215. $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

2.216. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^3 + 1}$

2.217. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{a_n}\right)$

2.218. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$

Korlátosak-e, illetve monotonok-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határérté-keket, ha vannak!

2.219. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

2.220. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$

2.221. $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}$

2.222. Korlátos-e, illetve monoton-e az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ sorozat? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

Mi a következő állításpárok logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

2.223. **P:** (a_{2n}), (a_{2n+1}) és (a_{3n}) konvergens **Q:** (a_n) konvergens

2.224. **P:** $a_{2n} \to 5$ **Q:** $a_n \to 5$

2.225. **P:** (a_{2n}) és (a_{2n+1}) konvergens **Q:** (a_n) konvergens

Döntsük el az alábbi sorozatokról, hogy van-e konvergens részsorozatuk!

2.226. $(-1)^n$

2.227. $\frac{1}{n}$

2.228. $\sqrt{n}$

2.229. $(-1)^n \frac{1}{n}$

2.230. Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) sorozatnak nincs konvergens részsorozata, akkor $|a_n| \to \infty$.

2.4. Nagyságrendek, nevezetes sorozatok

2.231. Bizonyítsuk be, hogy $n! \prec n^n$ igaz!

Tegyük az alábbi sorozatokat nagyságrend szerint sorba!

2.232. (n^7), (n^2+2^n), $(100\sqrt{n})$, $\left(\frac{n!}{10}\right)$

2.233. (n^7+n^2), $(n!+2^n)$, $(100\sqrt[3]{n})$, $\left(\frac{n^{10}}{10}\right)$

2.234. (n^7-n^2), $(n!\cdot 2^n)$, $\left(\frac{n!}{2^n}\right)$, $\left(\frac{3^n}{10}\right)$

2.235. Illesszük be az $n \prec n^2 \prec n^3 \prec \cdots \prec 2^n \prec 3^n \prec \cdots \prec n! \prec n^n$ sorba a megfelelő helyre $\sqrt{n}$-et, $\sqrt[3]{n}$-et,..., $\sqrt[k]{n}$-et!

Keressük meg az alábbi sorozatok között az összes aszimptotikusan egyenlő párt!

2.236. (n^7+n^2), (n^7+n^5), (n^2+n^5), $(\sqrt{n}+n^5)$, $(n^7-\sqrt{n})$, $(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n})$, $(n\sqrt{n})$

2.237. $(n!)$, (n^n), $(n!+n^n)$, $(\sqrt{n})$, $(\sqrt[n]{n})$, $(\sqrt{n+1})$, $(\sqrt[n]{2})$

2.238. $(n!+2^n)$, $(n!-2^n)$, $(\sqrt{n}+2^n)$, $(n\sqrt{n})$, $(n\cdot 2^n)$, $(2^n\cdot\sqrt{n})$, $(3n\cdot 2^n)$

Bizonyítsuk be, hogy minden elég nagy $n\in\mathbb{N}^+$ esetén

2.239. $n! < \frac{1}{2}n^n$

2.240. $n^2 < 0{,}1\cdot 5^n$

2.241. $2^n < \frac{1}{3}\cdot 3^n$

2.242. $n+n\sqrt{n} < \frac{1}{5}n^2-100$

2.243. $n^3+n^5 < \sqrt{n}+2^n$

2.244. $n^{1000} < 0{,}0001\cdot 2^n$

Konvergensek-e vagy divergensek-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

2.245. $\frac{2^n}{3^n}$

2.246. $\frac{3^n}{2^n}$

2.247. $(1{,}1)^n$

2.248. $\left(-\frac{4}{5}\right)^n$

2.249. $\dfrac{1}{(1{,}2)^n + 1}$

2.250. $\dfrac{n+2}{\sqrt{n} - 3^{-n}}$

2.251. $\dfrac{3^n}{(-3)^n}$

2.252. $\dfrac{n^{100}}{100^n}$

2.253. $\dfrac{10^n}{n!}$

2.254. $\dfrac{n^3}{(1{,}2)^n}$

2.255. $n! - 3^n$

2.256. $3^n - n \cdot 2^n$

2.257. $n \cdot 3^n - n^2 \cdot 2^n$

2.258. $1{,}1^n \cdot n! - n^n$

2.259. $\dfrac{(3{,}01)^n}{2^n + 3^n}$

2.260. $\dfrac{n! - 3^n}{n^{10} - 2^n}$

2.261. $(0{,}99)^n n^2$

2.262. $\dfrac{(1{,}01)^n}{n^2}$

2.263. $\dfrac{3^n - \sqrt{n} + n^{10}}{2^n - \sqrt[n]{n} + n!}$

2.264. $\sqrt[n]{2^n + n - 1}$

2.265. $\dfrac{3^{n+6} + n^2}{2^{n+3}}$

2.266. $\dfrac{4^n + 5^n}{6^n + (-7)^n}$

2.267. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész szám esetén $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{k!} \leq e$.

2.268. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{k!}\right) = e$

2.269. Bizonyítsuk be, hogy az e szám irracionális!

2.270. Adottak az a és b pozitív számok. Legyen $a_1 = a$ és $b_1 = b$, továbbá $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ és $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Bizonyítsuk be, hogy az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek, és hogy a két sorozat határértéke megegyezik!

3. Végtelen sorok

3.1. Végtelen sorok konvergenciája

Írjuk fel a következő sorok n-edik részletösszegét! Határozzuk meg a részletösszegek határértékét! Adjuk meg a sorok összegét!

3.1. $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^k} + \cdots$

3.2. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \cdots$

3.3. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3k-2) \cdot (3k+1)} + \cdots$

Írjuk fel a következő sorok n-edik részletösszegét! Határozzuk meg a részletösszegek határértékét! Adjuk meg a sorok összegét!

3.4. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots$

3.5. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+3)} + \cdots$

3.6. Legyen $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots = 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots)$. Tehát $S = 1 + 2S$, amiből $S = -1$. Hol a hiba?

Határozzuk meg a következő sorok összegét, ha konvergensek!

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{9^n}$

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{9^n}$

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^n}{(-9)^n}$

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{4^n + 5^n}$

3.11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{9^n}$

3.12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(-3)^n}$

3.13. Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ sor?

Igaz-e, hogy ha

3.14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$?

3.15. $a_n \to 1$, akkor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens?

3.16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $a_n \to 1$?

3.17. $a_n \to 0$, akkor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens?

Hova tartanak a következő sorok tagjaiból álló sorozatok? Konvergensek-e a sorok?

3.18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

3.19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

3.20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$

3.21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$

3.22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

3.23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

3.24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$

3.25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

3.2. Pozitív tagú sorok konvergenciakritériumai

Döntsük el a majoráns kritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$

3.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

3.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

Döntsük el a hányadoskritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

3.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

3.32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

3.33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Tegyük fel, hogy minden pozitív egész n-re $a_n > 0$. Mit állíthatunk a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját illetően biztosan, ha

3.34. $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$,

3.35. $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$,

3.36. $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$?

Döntsük el a gyökkritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

3.38. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n}\right)^n$

3.39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$

3.40. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

3.41. Legyen $a_{2n} = \frac{2^{n-1}}{3^n}$ és $a_{2n-1} = \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját hányadoskritériummal is, és gyökkritériummal is! Mit tapasztalunk?

3.42. Bizonyítsuk be, hogy ha egy végtelen sor konvergenciáját el lehet dönteni hányadoskritériummal, akkor el lehet dönteni gyökkritériummal is!

Tegyük fel, hogy $b_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, továbbá $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$. Mit állíthatunk a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját illetően biztosan, ha

3.43. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens.

3.44. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens.

Döntsük el ismert sorok nagyságrendjével való összehasonlítással, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^2+3}$

3.46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3n^9}}{\sqrt{n^4}+3}$

3.47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^4+3n}$

3.48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^6}}{n^2+3}$

Döntsük el, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+\sqrt{n}}$

3.50. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

3.51. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

3.52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

3.53. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

3.54. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^n$

3.55. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

3.56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

3.57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$

3.58. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

3.59. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3.60. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

3.61. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

3.62. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+200}{2n+7}\right)^n$

3.63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+3}{n^3-n+2}$

3.64. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

3.65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

3.66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

3.67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n-2^n}$

3.68. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)$

3.69. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, valamint c egy valós szám. Következnek-e ebből az alábbi állítások?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) = AB$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (b_n \neq 0)$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |A|$

3.3. Feltételes és abszolút konvergencia

3.70. Igaz-e, hogy ha egy végtelen sorban a tagokból álló sorozat monoton csökken, akkor a sor konvergens?

3.71. Igaz-e, hogy ha egy végtelen sorban a tagok előjele váltakozik, akkor a sor konvergens?

3.72. Igaz-e, hogy ha egy végtelen sorban a tagok előjele váltakozik, és a tagok abszolút értékeiből álló sorozat monoton csökken, akkor a sor konvergens?

3.73. Igaz-e, hogy ha egy végtelen sorban a tagokból álló sorozat monoton csökkenve 0-hoz tart, akkor a sor konvergens?

3.74. Igaz-e, hogy ha egy végtelen sorban a tagok előjele váltakozik, és a tagok abszolút értékeiből álló sorozat 0-hoz tart, akkor a sor konvergens?

Melyik sor Leibniz-sor? Melyik sor konvergens?

3.75. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

3.76. $1 - \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots$

3.77. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

3.78. $1 - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 9} - \frac{1}{8\cdot 27} + \cdots$

3.79. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

3.80. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \cdots$

Konvergensek-e a következő sorok? Igaz-e, hogy Leibniz-sorok?

3.81. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$ és $a_{2n} = -\frac{1}{3^{n-1}}$

3.82. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$ és $a_{2n} = -\frac{1}{3n}$

Döntsük el, hogy konvergensek-e, illetve abszolút konvergensek-e a következő sorok!

3.83. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

3.84. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$

3.85. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

3.86. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

3.87. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

3.88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

Adjunk meg olyan divergens sorokat, amelyekre teljesül, hogy

3.89. a tagok előjele váltakozik, és a tagokból álló sorozat 0-hoz tart!

3.90. a tagok előjele váltakozik, és a tagok abszolút-értékeinek a sorozata monoton csökken!

3.91. a tagokból álló sorozat monoton csökkenve 0-hoz tart!

4. Függvények globális tulajdonságai

4.1. Grafikon, periódus, paritás, monotonitás

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát! Ábrázoljuk a következő függvényeket! Határozzuk meg a monotonitási szakaszokat! Melyik függvény páros? Melyik függvény pártalan?

4.1. x^2 **4.2.** x^4 **4.3.** x^3 **4.4.** x^5

4.5. $\sqrt{x}$ **4.6.** $\sqrt[3]{x}$ **4.7.** $[x]$ **4.8.** $[x]^2$

4.9. $[x^2]$ **4.10.** $\left[\frac{1}{x}\right]$ **4.11.** $\frac{1}{[x]}$ **4.12.** $\frac{x}{[x]}$

4.13. $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$ **4.14.** $\{x\}$ **4.15.** $\{x\}^2$ **4.16.** $\{x^2\}$

4.17. $\left\{\frac{1}{x}\right\}$ **4.18.** $\frac{1}{\{x\}}$ **4.19.** $\frac{x}{\{x\}}$ **4.20.** $x \cdot \left\{\frac{1}{x}\right\}$

Lehet-e periodikus, lehet-e monoton, lehet-e páros az a függvény, amelyiknek az értelmezési tartománya

4.21. $(-3, 3)$. **4.22.** $[-3, 3]$. **4.23.** $(-4, 5)$. **4.24.** $(-\infty, \infty)$.

Írjuk fel kvantorok segítségével (a tagadás jelét és áthúzást nem használhatunk), hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény

4.25. periodikus. **4.26.** nem periodikus.

4.27. páros. **4.28.** nem páratlan.

4.29. se nem páros, se nem páratlan. **4.30.** monoton növő.

4.31. nem monoton csökkenő.

4.32. nem monoton.

4.33. Melyik állításból következik, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton?

(a) $(\forall a)\ (\exists b > a)\ f(a) < f(b)$

(b) $(\forall a)\ (\exists b > a)\ f(a) \leq f(b)$

(c) $(\exists a)\ (\exists b > a)\ f(a) \leq f(b)$

(d) $(\forall a)\ (\forall b > a)\ f(a) \leq f(b)$

4.34. Melyik állítás következik abból, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton?

(a) $(\forall a)\ (\exists b > a)\ f(a) < f(b)$

(b) $(\forall a)\ (\exists b > a)\ f(a) \leq f(b)$

(c) $(\exists a)\ (\exists b > a)\ f(a) \leq f(b)$

(d) $(\forall a)\ (\forall b > a)\ f(a) \leq f(b)$

4.35. Adjunk példát olyan függvényre, amelyik semmilyen intervallumon nem monoton!

4.36. Adjunk példát olyan periodikus függvényre, amelyiknek nincs legkisebb pozitív periódusa!

4.37. Adjunk példát olyan periodikus függvényre, amelyiknek minden nem nulla valós szám periódusa!

4.38. Adjunk példát olyan periodikus függvényre, amelyiknek periódusa minden nem nulla racionális szám, de egyetlen irracionális szám sem periódusa!

4.39. Van-e olyan periodikus függvény, amelyik monoton?

4.40. Van-e olyan periodikus függvény, amelyiknek van legnagyobb periódusa?

4.41. Igaz-e, hogy két monoton függvény összege monoton?

4.42. Igaz-e, hogy két periodikus függvény összege periodikus?

Melyik állításból következik a másik az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén?

4.43. **P:** f periodikus **Q:** $|f|$ periodikus

4.44. **P:** f monoton **Q:** $|f|$ monoton

4.45. **P:** f páros **Q:** $|f|$ páros

4.46. **P:** f páratlan **Q:** $|f|$ páratlan

4.2. Korlátosság, szélsőérték

Melyik függvény korlátos alulról? Melyik függvény korlátos felülről? Melyik függvény korlátos? Melyik függvénynek van minimuma? Melyik függvénynek van maximuma?

4.47. $-x^2$

4.48. $-x^3$

4.49. $\sqrt{-x}$

4.50. $\sqrt[3]{-x}$

4.51. $[-x]$

4.52. $[x]^2$

4.53. $[-x^2]$

4.54. $\left[\frac{1}{x}\right]$

4.55. $\frac{1}{[x]}$

4.56. $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$

4.57. $\frac{x}{[x]}$

4.58. $\{x\}$

4.59. $\{x\}^2$

4.60. $\{x^2\}$

4.61. $x \cdot \{x\}$

4.62. $[x] \cdot \{x\}$

4.63. $\left\{\frac{1}{x}\right\}$

4.64. $\frac{1}{\{x\}}$

4.65. $\frac{x}{\{x\}}$

4.66. $x \cdot \left\{\frac{1}{x}\right\}$

Írjuk fel kvantorok segítségével (a tagadás jelét és áthúzást nem használhatunk), hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek

4.67. a maximumhelye 2.

4.68. a minimum helye nem 3.

4.69. a maximuma 2.

4.70. a minimuma nem 3.

4.71. van minimuma.

4.72. nincs maximuma.

4.73. a 3 alsó korlátja.

4.74. a 3 nem felső korlátja.

4.75. van alsó és felső korlátja is.

4.76. nincs sem alsó, sem felső korlátja.

Melyik állításból következik, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény korlátos?

4.77. $(\forall a)\ (\exists b)\ f(a) \le f(b)$

4.78. $(\forall a)\ (\exists b)\ f(a) \le b$

4.79. $(\exists b)\ (\forall a)\ f(a) \le f(b)$

4.80. $(\exists b)\ (\forall a)\ |f(a)| \le f(b)$

4.81. $(\exists b)\ (\forall a)\ f(a) \le b$

4.82. $(\exists b)\ (\forall a)\ |f(a)| \le b$

Melyik állítás következik abból, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény korlátos?

4.83. $(\forall a)\ (\exists b)\ f(a) \le f(b)$

4.84. $(\forall a)\ (\exists b)\ f(a) \le b$

4.85. $(\exists b)\ (\forall a)\ f(a) \le f(b)$

4.86. $(\exists b)\ (\forall a)\ f(a) \le b$

4.87. $(\exists b)\ (\forall a)\ |f(a)| \le b$

4.88. $(\exists b)\ (\forall a)\ f(a) \le |b|$

4.89. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyik korlátos, de nincs sem minimuma, sem maximuma!

4.90. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyik egyetlen intervallumban sem korlátos?

4.91. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyiknek minden pontban maximuma van?

Melyik állításból következik a másik az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén?

4.92. **P:** f korlátos **Q:** $|f|$ korlátos

4.93. **P:** f nem korlátos **Q:** $|f|$ nem korlátos

4.3. Konvexitás

Írjuk fel a következő függvények esetében a grafikon azon húrjának az egyenletét, amelyik átmegy az adott intervallum végpontjaihoz tartozó grafikon pontokon!

4.94. x^2, $[2, 5]$

4.95. $\sqrt{x}$, $[3, 7]$

4.96. $\frac{1}{x}, \quad [4,6]$

4.97. $\sqrt{|x|}, \quad [-2,5]$

4.98. $[x], \quad [1,3]$

4.99. $[x], \quad [1,2]$

Írjuk fel kvantorokkal (a tagadás jelét és áthúzást nem használhatunk), hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény

4.100. konvex a $[-3,5]$ intervallumon!

4.101. nem konkáv a $[-3,5]$ intervallumon!

Bizonyítsuk be, hogy

4.102. x^2 konvex $[0,\infty)$-en

4.103. x^3 konkáv $(-\infty,0]$-n

4.104. $\sqrt{x}$ konvex $[0,\infty)$-en

4.105. $\frac{1}{x}$ konkáv $(-\infty,0)$-n

Melyik állításból következik, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex az $I = [a,b]$ intervallumon?

4.106. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

4.107. $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

4.108. $(\forall a \leq c \leq x \leq d \leq b) \quad f(x) \leq \frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)+f(c)$

Melyik állítás következik abból, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex az $I = [a,b]$ intervallumon?

4.109. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

4.110. $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

4.111. $(\forall a \leq c \leq x \leq d \leq b) \quad f(x) \leq \frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)+f(c)$

4.112. Bizonyítsuk be, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex függvény grafikonjának és tetszőleges egyenesnek legfeljebb 2 közös pontja lehet!

4.113. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyik minden intervallumon konvex is, és konkáv is!

4.114. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyik egyetlen intervallumon sem konvex, és egyetlen intervallumon sem konkáv!

4.115. Igaz-e, hogy az I intervallumon konvex függvények összege konvex az I intervallumon?

Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyik

4.116. monoton nő és konkáv?

4.117. konvex és periodikus?

4.118. szigorúan konvex és periodikus?

4.119. konvex és páratlan?

4.120. szigorúan konvex és páratlan?

4.121. konkáv és páros?

Melyik állításból következik a másik az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén?

4.122. **P:** f konvex — **Q:** $|f|$ konvex

4.123. **P:** f nem konkáv — **Q:** $|f|$ nem konkáv

4.124. **P:** f konvex — **Q:** $-f$ konkáv

4.125. **P:** f konvex az $[5, 7]$ intervallumon — **Q:** f konvex az $[1, 8]$ intervallumon

4.126. **P:** f konvex az $[5, 7]$ intervallumon — **Q:** f felülről korlátos az $[5, 7]$ intervallumon

Megoldások

1. Bizonyítási módszerek, valós számok

1.4. Jobb kézzel írta, mert az állítás nem igaz. Legyen például $f(x) = x + 1$ és tekintsük a függvényt az 1, illetve -1 helyeken.

$$f^2(1) = (1+1)^2 = 4, \qquad f^2(-1) = (-1+1)^2 = 0.$$

Tehát $f^2(1) \neq f^2(-1)$, ezért f^2 nem páros.

Az állítás tagadása: van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek a négyzete nem páros függvény.

1.5. Az előző példában szereplő $f(x) = x + 1$ függvény mutatja, hogy ez az állítás sem igaz:

$$f^3(1) = (1+1)^3 = 8, \qquad f^3(-1) = (-1+1)^3 = 0.$$

Tehát $f^3(1) \neq -f^3(-1)$, ezért f^3 nem páratlan.

1.19. Van olyan medve, amelyik nem szereti a mézet.

1.20. Minden tengerész, minden kikötőben talál olyan kocsmát, ahol még nem járt.

1.21. Minden medve minden mézet szeret.

1.22. Itt a nyár, de mégis hideg van.

1.23. A nagynénikémnek kerekei vannak, mégsem ő a miskolci gyors.

1.32. $(\exists K)\ (\forall B)\ \neg\Phi(B, K)$

Van olyan kecske, amelyiket egyetlen bolha sem csípett meg. (Bekenték bolhariasztóval.)

1.33. $(\exists K)\ (\exists B)\ \neg\Phi(B, K)$

Van olyan kecske, amelyiket valamelyik bolha nem csípett meg. (Szerencséje volt.)

1.34. $(\forall K)\ (\exists B)\ \neg\Phi(B, K)$

Egyetlen kecskét sem csípte meg az összes bolha. (Elszaladtak a kecskék.)

1.35. $(\forall K)\ (\forall B)\ \neg\Phi(B,K)$

Egyetlen bolha sem csípett meg egyetlen kecskét sem. (Ezek csak kutyát csípnek.)

1.36. $(\forall B)\ (\exists K)\ \neg\Phi(B,K)$

Egyetlen bolha sem csípett meg minden kecskét. (Túl sok a kecske.)

1.37. $(\exists B)\ (\forall K)\ \neg\Phi(B,K)$

Van olyan bolha, amelyik egyetlen kecskét sem csípett meg. (Vegetáriánus bolha.)

1.42. **A:** $(\exists L)\ (\forall F)\ T(F,L)$ **B:** $(\exists F)\ (\forall L)\ T(F,L)$

$A \not\Longrightarrow B$, például, ha egy fiú senkivel sem táncolt.

$B \not\Longrightarrow A$, például, ha egy lány senkivel sem táncolt.

1.43. **A:** $(\exists L)\ (\exists F)\ T(F,L)$ **B:** $(\exists F)\ (\exists L)\ T(F,L)$

$A \iff B$, mert $T(F,L)$ és $T(L,F)$ egyszerre igaz vagy hamis, a formula szimmetrikus a változóira nézve.

1.44. **A:** $(\forall F)\ (\exists L)\ T(F,L)$ **B:** $(\forall L)\ (\exists F)\ T(F,L)$

$A \not\Longrightarrow B$, például, ha csak egy lány táncolt, de ő mindenkivel.

$B \not\Longrightarrow A$, például, ha csak egy fiú táncolt, de ő mindenkivel.

1.45. **A:** $(\forall F)\ (\forall L)\ T(F,L)$ **B:** $(\exists L)\ (\forall F)\ T(F,L)$

$A \Longrightarrow B$, mert van legalább egy lány, és őt minden fiú megtáncoltatta.

$B \not\Longrightarrow A$, például, ha csak egy lány táncolt, de ő mindenkivel.

1.46. Kétoldali tartalmazást bizonyítunk.

Legyen $x \in A \cap (B \cup C)$ tetszőleges. Ekkor $x \in A$ és $x \in B \cup C$. Ha $x \in B$, akkor $x \in A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Ha pedig $x \in C$, akkor $x \in A \cap C \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Ezzel beláttuk, hogy

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Legyen most $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ tetszőleges. Ekkor $x \in A \cap B$ vagy $x \in A \cap C$. Ha $x \in A \cap B$, akkor $x \in A$, és $x \in B \subset B \cup C$, és így $x \in A \cap (B \cup C)$. Hasonlóan, ha $x \in A \cap C$, akkor $x \in A$, és $x \in C \subset B \cup C$, és így $x \in A \cap (B \cup C)$. Ezzel beláttuk, hogy

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

1.51.

$$A \setminus (B \cup C)$$

1.52.

$$((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$$

1.59. Igaz. Legyen $x \in A$ tetszőleges. Mivel $A \subset B$, ezért $x \in B$. És mivel $B \subset C$, ezért $x \in C$.

1.60. Igaz, ez éppen a részhalmaz definíciója.

1.61. Nem igaz, például ha $A = B = [0,1]$, akkor $C = [0,1]$ és $C \setminus B = \emptyset \neq A$.

1.62. Nem igaz, például ha $A = [0,1],\ B = [0,2]$, akkor $A \setminus B = \emptyset$ és $A \neq B$.

Megjegyzés: ne keverjük össze a kivonást a halmazok különbségével! Annyi viszont igaz, hogy ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor $A \subset B$

1.63. Nem igaz, például ha $A = [0,2],\ B = [1,3]$, akkor $C = A \cap B = [1,2]$ és $A \not\subseteq C$.

Megjegyzés: ne keverjük össze a metszetet az unióval. Az állítás az „unióra” igaz: ha $A \cup B = C$, akkor $A \subset C$.

1.71.

$$x \in \overline{(A \cup B)} \iff x \notin (A \cup B) \iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \iff$$
$$\iff (x \in \overline{A}) \wedge (x \in \overline{B}) \iff x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$$

1.2. Direkt bizonyítás, indirekt bizonyítás, teljes indukció

1.77. Azonos átalakításokat végzünk, felhasználva, hogy a és b pozitív.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a+b \geq 2\sqrt{ab} \iff (a+b)^2 \geq 4ab \iff$$
$$\iff a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff$$
$$\iff (a-b)^2 \geq 0$$

Megjegyzés: az utolsó egyenlőtlenség baloldala, $(a-b)^2$ pontosan akkor nulla, ha $a = b$. Ezzel azt is beláttuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $a = b$.

1.78. Visszavezetjük az előző feladatra.

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \iff \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \iff \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

Alkalmazhatjuk az előző feladat eredményét, a és b helyett az $1/a$ és $1/b$ pozitív számokra.

1.80. Egyedül A_1 igaz biztosan.

1.82. Mindegyik A_n igaz. Ez a forma a teljes indukció „descente infinie” verziója.

1.93. Legyen $s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)$. Ekkor $s_1 = 4,\ s_2 = 9, s_3 = 16, \ldots$. A sejtés

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Az $n = 1$ esetre igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz, belátjuk, hogy akkor $(n + 1)$-re is igaz.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) + (2n + 3) = s_n + 2n + 3 = \\ &= (n + 1)^2 + 2n + 3 = (n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1 = (n + 2)^2 \end{aligned}$$

1.97. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 10$, akkor

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3.$$

Tegyük fel, hogy n-re igaz az egyenlőtlenség. Mivel ekkor

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^3,$$

ezért elég belátni, hogy ha $n > 9$, akkor $(n+1)^3 = n^3 +3n^2 +3n+1 < 2n^3$, azaz azt, hogy $n^3 - 3n^2 - 3n - 1 > 0$.

$$n^3 - 3n^2 - 3n - 1 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - 6n = (n - 1)^3 - 6n > 0 \iff (n - 1)^3 > 6n$$

Ha $n > 9$, akkor $n - 1 > 6$. Másrészt

$$(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1 > n \iff n^2 + 1 > 3n.$$

Ez biztosan teljesül, ha $n > 3$. Tehát, ha $n > 9$, akkor

$$n - 1 > 6 \quad \text{és} \quad (n - 1)^2 > n.$$

A két utolsó egyenlőtlenség szorzatából

$$(n - 1)^3 > 6n.$$

1.98. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor $1 \le 2\sqrt{1} = 2$. Tegyük fel, hogy n-re igaz az egyenlőtlenség, azaz

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n}.$$

$$s_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = s_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Elég belátni, hogy $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 2\sqrt{n+1}$.

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 2\sqrt{n+1} \iff 2\sqrt{n(n+1)} + 1 \le 2(n+1) \iff$$
$$\iff \sqrt{n(n+1)} \le \frac{2n+1}{2} = \frac{n+(n+1)}{2}.$$

Ez pedig igaz a kéttagú számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával az n és $n+1$ számokra.

1.105. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$ akkor $1^2 - 0 \cdot 3 = 1 = 1^{1+1}$. Tegyük fel, hogy n-re igaz, hogy

$$u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Felhasználjuk, hogy $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, és ezért $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$.

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n(u_{n+1} + u_n) = u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) - u_n^2 =$$
$$= u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = -(u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1}) = (-1)^{n+2}.$$

Ez éppen a bizonyítandó egyenlőség, n helyett $(n+1)$-re felírva.

1.106. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ha $n \ge 6$, akkor $u_n > 1{,}5^{n-1}$. Ha $n = 6$ és $n = 7$ esetén

$$u_6 = 8 > 7{,}59375 = 1{,}5^5, \quad u_7 = 13 > 11{,}390625 = 1{,}5^6.$$

Legyen $n \ge 6$ és tegyük fel, hogy n és $n+1$ esetén igaz az egyenlőtlenség:

$$u_n > 1{,}5^{n-1}, \quad u_{n+1} > 1{,}5^n.$$

Be kell látnunk, hogy $n+2$ esetén is igaz az egyenlőtlenség.

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n > 1{,}5^n + 1{,}5^{-1}n = 1{,}5^{n-1}(1{,}5+1) > 1{,}5^{n+1},$$

mivel $1{,}5^2 = 2{,}25 < 2{,}5$.

1.107. Írjuk fel az (a_n) sorozat néhány tagját:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 4,\ a_4 = 9,\ a_5 = 16,\ \dots$$

A sejtés az, hogy $a_n = (n-1)^2$, Tegyük fel, hogy $a_n = (n-1)^2$ és $a_{n+1} = n^2$. Ekkor

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 = 2n^2 - (n-1)^2 + 2 = 2n^2 - n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

éppen a keresett egyenlőség.

1.110. Nem tudnak így ugrani. Színezzük meg a sakktábla mezőit két színnel a szokásos módon sötétre és világosra. Ekkor bármely két szomszédos mező ellenkező színű, ezért ha egy bolha ugrik, akkor más színű mezőre ugrik, mint ahol eredetileg volt. De a sakktábla oldala páratlan hosszúságú, ezért a táblának páratlan sok (25) mezője van és így valamelyik színből, például sötétből (ha a bal alsó mező sötét) több van, mint világosból. Eszerint a sötét mezőn álló bolhák az ugrás után kevesebb mezőre érkeznek, így valamelyik világos mezőn egynél több bolha landol.

Megjegyzés: Valójában azt bizonyítottuk be, hogy semmilyen páratlan oldalú sakktáblán sem lehet így ugratni a bolhákat. Ennek a feladatnak egy ismertebb verziója, hogy páratlan oldalú sakktáblát nem lehet lefedni (egyrétűen) 2×1-es dominókkal. Azt könnyű belátni, hogy minden páros oldalú sakktábla lefedhető.

1.115. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\sqrt{3}$ racionális. Ekkor megadható két egész szám, p és q úgy, hogy

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}, \qquad 3 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Feltehetjük, hogy mindkét egész szám pozitív és a hányadosuk már nem egyszerűsíthető, azaz p és q relatív prím számok. Az egyenlőséget q^2-tel beszorozva

$$3q^2 = p^2.$$

Eszerint p^2 osztható 3-mal. Mivel 3 prímszám ezért p is osztható 3-mal, $p = 3r$, ahol r egy pozitív egész szám.

$$3q^2 = 9r^2, \qquad q^2 = 3r^2.$$

Az előző gondolatmenethez hasonlóan azt kapjuk, hogy q is osztható 3-mal. Ez ellentmond annak, hogy p és q relatív prím.

Megjegyzés: Ugyanez a bizonyítás 3 helyett tetszőleges $n > 0$ prímszámra is elmondható: ha $n > 0$ prímszám, akkor $\sqrt{n}$ irracionális. Valójában n-ről csak azt használtuk ki, hogy nem osztható 1-nél nagyobb négyzetszámmal, azaz n előáll különböző prímszámok szorzataként. A bizonyítást tovább gondolva megkaphatjuk azt a tételt, hogy pozitív egész n esetén n négyzetszám vagy $\sqrt{n}$ irracionális.

1.116. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = r$ racionális szám. De akkor $1 + \sqrt{3} = 2 \cdot r$ és $\sqrt{3} = 2 \cdot 3 - 1$ is racionális szám. Ez ellentmond az előző (1.115.) feladat állításának!

1.117. Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \frac{p}{q}, \qquad p^2 = 2 \cdot 3 \cdot q^2,$$

ahol p és q két relatív prím pozitív egész szám. Mivel 2 és 3 két különböző prímszám, ezért p osztható 6-tal, $p = 2 \cdot 3 \cdot r$. Innen

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot r^2 = 2 \cdot 3 \cdot q^2, \qquad q^2 = 2 \cdot 3 \cdot r,$$

és így q is osztható 6-tal, ami ellentmondás.

1.118. Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{2}{3} = \frac{p^2}{q^2}, \qquad 2q^2 = 3p^2,$$

ahol p és q két relatív prím pozitív egész szám. Innen azt kapjuk, hogy p osztható 2-vel, q pedig osztható 3-mal, azaz

$$p = 2r, \qquad q = 3s,$$

ahol r és s két pozitív egész szám.

$$2 \cdot 3^2 \cdot s^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot r^2, \qquad 3s^2 = 2r^2.$$

Innen kapjuk, hogy r és ezért p is osztható 3-mal, ami ellentmondás.

1.124. Indirekt módon bizonyítunk. tegyük fel, hogy minden n estén $a_n \geq \dfrac{1}{1000} = 10^{-3}$. Ekkor

$a_1 = a_0 - a_0^2 \leq 0{,}9 - 10^{-6}, a_2 = a_1 - a_1^2 \leq a_1 - 10^{-6} \leq 0{,}9 - 2 \cdot 10^{-6}, \ldots, a_n \leq 0{,}9 - n \cdot 10^{-6}$.

Ez az utolsó, $a_n < 0{,}9 - n \cdot 10^{-6}$ egyenlőtlenség könnyen belátható. De akkor az $n = 10^6$ választással $a_n < 0{,}9 - 1 < 0 < 10^{-3}$, ami ellentmondás.

Megjegyzés: mivel a bizonyítás indirekt, formálisan csak azt láttuk be, hogy van egyezrednél kisebb tagja a sorozatnak, azt nem, hogy az egymilliomodik tag kisebb mint egyezred. Ahhoz, hogy ezt is belássuk, módosítani kell az indirekt feltevést arra, hogy

$$a_n \geq 10^{-3}, \text{ ha } n \leq 10^6.$$

1.3. Nevezetes közepek

1.128.

$$2a + b + c = 3 \cdot \frac{2a + b + c}{3} \geq 3\sqrt[3]{(2a)bc} = 3\sqrt[3]{2 \cdot 18} = 3\sqrt[3]{36}$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $2a = b = c = \sqrt[3]{36}$.

1.129. Felhasználjuk a mértani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}\right)^2 \geq 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 = 3\left(\sqrt[3]{18}\right)^2.$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b = c = \sqrt[3]{18}$.

1.134. Természetesen csak akkor értelmes a feladat, ha $v > u$. A v_a átlagsebesség a megtett út osztva a megtételhez szükséges t idővel:

$$v_a = \frac{2s}{t}.$$

Számoljuk ki t-t. A folyásirányban a sebesség $v+u$, az s úthoz szükséges idő

$$t_1 = \frac{s}{v+u}.$$

Az ellenkező úton a sebesség $v-u$, az s úthoz szükséges idő

$$t_2 = \frac{s}{v-u}.$$

Mivel $t = t_1 + t_2$, ezért

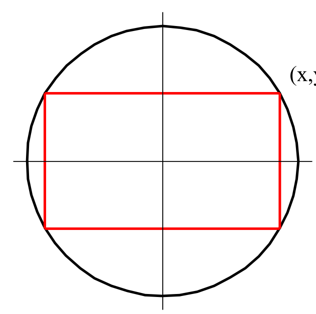
$$v_a = \frac{2s}{\frac{s}{v+u} + \frac{s}{v-u}} = \frac{2}{\frac{1}{v+u} + \frac{1}{v-u}}.$$

Tehát v_a éppen a harmonikus közepe a $v+u$, $v-u$ számoknak, és ezért $u > 0$ esetén határozottan kisebb a két szám számtani közepénél, v-nél.

1.137. Az ábra a gömb és a henger egy síkmetszetét ábrázolja. Az ábra jelöléseit használva, a henger térfogata:

$$V = 2\pi \cdot U, \text{ ahol } U = x^2 \cdot y \text{ és } x^2 + y^2 = 1, \ \ 0 \le x \le 1.$$

Ezért $U = x^2\sqrt{1-x^2}$. Számoljuk ki $\frac{U^2}{4}$ maximumát:



$$\frac{U^2}{4} = \frac{x^4(1-x^2)}{4} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (1-x^2).$$

Az itt szereplő három pozitív szám összege x-től függetlenül 1, és így szorzatuk akkor maximális, ha megegyeznek:

$$\frac{x^2}{2} = 1 - x^2 \text{ azaz } x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \ \ y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Tehát a maximális térfogat: $V = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

1.139. Felhasználva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$x^2(1-x) = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (1-x) \le 4 \cdot \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (1-x)}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}.$$

Egyenlőség csak akkor van, ha $\frac{x}{2} = 1 - x$, azaz $x = \frac{2}{3}$.

Tehát a keresett maximum: $\frac{4}{27}$.

1.4. Valós számok, számhalmazok

1.148. Indirekt, tegyük fel, hogy rendezhető. Először belátjuk, hogy $1 > 0$. Ez azért igaz, mert 1 nem nulla és négyzetszám: $1 = (-1)^2$. Ebből következik, hogy $-1 \le 0$.

Másrészt -1 is négyzetszám: $-1 = i^2$, tehát $-1 > 0$. Ez ellentmondás.

1.152. Az állítás nem igaz. Legyen például $a = 2,\ b = 0,\ c = 1$.

1.167. Az állítás igaz, egyenlőtlenségeket össze lehet adni.

$$a < b \implies a + c < b + c$$

$$c < d \implies b + c < b + d$$

Végül a rendezés tranzitivitását kihasználva

$$a + c < b + d.$$

1.168. Az állítás nem igaz. Legyen például $a = c = -2,\ b = d = -1$.

1.179. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 2$ esetben éppen a háromszög egyenlőtlenséget kapjuk. Tegyük fel, hogy valamely $n \ge 2$ esetén igaz az

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \ge |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|$$

egyenlőtlenség. Az indukciós feltevés és a háromszög egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+|a_{n+1}| \ge |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|+|a_{n+1}| \ge |a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}|.$$

1.186. Az Archimédeszi axióma szerint van olyan n pozitív egész, amelyre

$$\frac{1}{a} < n.$$

Az egyenlőtlenséget beszorozhatjuk a pozitív a-val:

$$1 < a \cdot n,$$

majd a pozitív $1/n$-nel:

$$\frac{1}{n} < a.$$

1.195. A H halmaznak nincs minimuma (minimális eleme).

1.196. H-nak nincs maximuma.

1.197. H-nak van maximuma.

1.198. A H halmaznak van minimuma.

1.211.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n},3-\frac{1}{n}\right]=[2,2]=\{2\}.$$

Nem teljesülnek a Cantor-axióma feltételei, a zárt intervallumok nincsenek „egymásba skatulyázva”, azaz nem szűkülnek, hanem bővülnek. Ezért a metszet a első intervallum.

1.255. $A=\left\{\dfrac{1}{2n-1}:n\in\mathbb{N}^{+}\right\}$, $\inf A=0,\ \sup A=\max A=1$, nincs minimuma.

1.256. $A=\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}:n\in\mathbb{N}^{+}\right\}$ esetén $\inf A=0,\ \sup A=\max A=2$, nincs minimuma.

1.263. $\forall x\in A\ \exists y\in A\ (y<x)$

1.264. Ilyen sorozat például az $a_n=(-1)^n\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, azaz

$$a_n=\begin{cases}1-\dfrac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páros}\\[2ex] -1+\dfrac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan.}\end{cases}$$

1.284. Nem következik. Legyen például $H=(0,1),\ c=2$. Ekkor $\sup H=1<c=2$.

1.5. Becslések

1.288. Átalakítjuk az egyenlőtlenséget úgy, hogy a bal oldalon csak a legmagasabb fokú (n^5) tag maradjon:

$$0{,}1n^5+30n^4-20n^3+10>1000n^4+2000n^3+\frac{1}{n}\iff 0{,}1n^5>930n^4+2020n^3+\frac{1}{n}.$$

$$930n^4+2020n^3+\frac{1}{n}\le 930n^4+2020n^4+n^4=2951n^4<3000n^4<0{,}1n^5,$$

ha $n>30000=3\cdot10^4$. Tehát az $N=3\cdot10^4$ megoldás.

1.291. Az egyenlőtlenség baloldalát az úgynevezett „gyöktelenítéssel” (gyökök összegével való bővítés) alakítjuk át:

$$\sqrt{n+10}-\sqrt{n+1}=\frac{9}{\sqrt{n+10}+\sqrt{n+1}}<\frac{10}{\sqrt{n}}<0{,}001.$$

$$\frac{10}{\sqrt{n}}<0{,}001 \iff 10^4<\sqrt{n} \iff 10^8<n.$$

Tehát az $N=10^8$ választás megfelel.

1.341.

$$\frac{1}{n^5+4n^3+2n^2+1}<\frac{1}{1000} \quad\iff\quad n^5+4n^3+2n^2+1>1000$$

Mivel $n^5+4n^3+2n^2+1>n^5\geq n^3$, ezért az előző egyenlőtlenség biztosan teljesül, ha $n>10$.

Tehát az $N=10$ megoldása a feladatnak. De ha a 10 megoldás, akkor minden $N\geq 10$ is megfelelő N, ezért végtelen sok megoldása van a feladatnak.

1.342. Használjuk a **Bernoulli-egyenlőtlenséget**.

$$0{,}9^n<\frac{1}{100} \iff \left(\frac{10}{9}\right)^n>100.$$

$$\left(\frac{10}{9}\right)^n=\left(1+\frac{1}{9}\right)^n>1+\frac{n}{9}>\frac{n}{9}>100,$$

ha $n>900$. Tehát az $n=901$ (és minden nagyobb n) ilyen szám.

1.343.

$$\sqrt[n]{2}<1{,}01 \iff 1{,}01^n>2.$$

A **Bernoulli-egyenlőtlenség** szerint

$$1{,}01^n=\left(1+\frac{1}{10}\right)^n>1+\frac{n}{10}>\frac{n}{10}>2,\ \text{ha}\ n>20.$$

1.344.

$$\sqrt[n]{0{,}1}>0{,}9 \iff \frac{1}{0{,}9}>\sqrt[n]{\frac{1}{0{,}1}} \iff \frac{10}{9}>\sqrt[n]{10} \iff \left(1+\frac{1}{9}\right)^n>10.$$

$$\left(1+\frac{1}{9}\right)^n>1+\frac{n}{9}>\frac{n}{9}>10,\ \text{ha}\ n>90.$$

1.349. Először is oldjuk meg az $\dfrac{1}{3-x} = x$ egyenletet. Feltesszük, hogy $x \neq 3$.

$$\frac{1}{3-x} = x \iff 1 = x(3-x) \iff x^2 - 3x + 1 = 0$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai:

$$a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \qquad b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Nyilvánvaló, hogy $a_0 = 0 < a$. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ha $a_n < a$, akkor $a_{n+1} < a$ és $a_n < a_{n+1}$. Tegyük fel tehát, hogy $a_n < a$. Ekkor

$$a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n} < \frac{1}{3-a} = a.$$

Itt felhasználtuk azt a nyilvánvaló tényt, hogy $a < 3$. Mivel a_n kisebb, mint a pozitív főegyütthatós $x^2 - 3x + 1 = 0$ másodfokú egyenlet kisebbik gyöke, ezért

$$a_n^2 - 3a_n + 1 > 0 \iff a_n < \frac{1}{3-a_n} = a_{n+1}.$$

Az így kapott egyenlőtlenség minden n-re igaz, tehát a sorozat (szigorúan) monoton nő.

1.354. Az **Arkhimédeszi axióma** szerint van olyan N pozitív egész szám, amelyre $N \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, például $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. A feladat feltételeinek az eggyel kisebb $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ is megfelel.

1.355.

$$\frac{1}{n^2 + \sqrt{n} + 1} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Tehát az $N = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ megfelel.

1.356.

$$\frac{n+1}{n^2 + \sqrt{n} + 1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{2}{\varepsilon}.$$

1.377. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $n \geq 2$, és ezért

$$\left[\frac{n}{2}\right] \geq \frac{n-1}{2} \geq \frac{n}{4}.$$

Hagyjuk el az a_n-t leíró kifejezés számlálójából azokat a tagokat, amelyeknek az indexe (a gyök alatti szám) kisebb, mint $\frac{n}{2}$. A többi tag mindegyike legalább $\frac{n}{2}$, és ilyen tagból legalább $\left[\frac{n}{2}\right]$ darab van. Ezért

$$a_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n} \le \frac{\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]}{n} \ge \frac{\frac{\sqrt{n}}{2}\cdot\frac{n}{4}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{8} > K, \text{ ha } n > 64K^2.$$

1.378. Megint legyen n legalább kettő, és ezért $\left[\frac{n}{2}\right] \ge \frac{n}{4}$.

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n} \ge \frac{\sqrt[3]{\frac{n}{2}}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]}{n} \ge \frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{2}\cdot\frac{n}{4}}{n} = \frac{\sqrt[3]{n}}{8} > K, \text{ ha } n > 512K^3.$$

1.379. Legyen $n \ge 2$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n\sqrt{1}+n\sqrt{2}+n\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}}{1+2+\cdots+n} = \\ &= \frac{n(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})}{\frac{n(n+1)}{2}} = 2\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n+1} \ge \\ &\ge 2\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]}{n+1} \ge \frac{n\sqrt{n}}{4(n+1)} \ge \frac{\sqrt{n}}{8} > K, \text{ ha } n > 64K^2. \end{aligned}$$

2. Sorozatok

2.1. A határérték fogalma, konvergens sorozatok, divergens sorozatok

2.4. Mivel $a_n \to 1$, ezért megadhatók a keresett küszöbindexek.

(a) Legyen $\varepsilon = 0{,}1$.

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}1 \iff \sqrt{n} > 10 \iff n > 10^2$$

Tehát az $n_0 = 10^2$ választás megfelel.

(b) Legyen $\varepsilon = 0{,}01$. Az előző megoldásban $0{,}1$-et $0{,}01$-re cserélve kapjuk, hogy az $n_0 = 10^4$ választás megfelel.

2.5. Nincs ilyen n_0 küszöbindex, ugyanis az előző feladat **(a)** részének megoldása szerint ha $n > 10^4$, akkor $|a_n - 1| < 0{,}1$. Ezért ezekre az n-ekre

$$|a_n - 2| = |(a_n - 1) - (2 - 1)| \geq |1 - |a_n - 1|| > 1 - 0{,}1 = 0{,}9 > 0{,}001.$$

2.6. Ezek a feladatok a konvergencia definíciójában szereplő jelek (logikai kvantorok, egyenlőtlenség) sorrendjének és típusának a fontosságát mutatják meg.

(a) Igaz. A 2.4. feladatot általánosítva könnyen látható, hogy $a_n \to 1$ és ez a formula éppen ezt mondja.

(b) Nem igaz. Ez a formula pontosan akkor teljesül egy (a_n) sorozatra, ha valahonnan kezdve a sorozat minden tagja 1. A megadott sorozat nem ilyen.

(c) Igaz. A formula pontosan akkor teljesül egy (a_n) sorozatra, ha a sorozat korlátos. A megadott sorozat korlátos.

(d) Nem igaz. A formula pontosan akkor teljesül egy (a_n) sorozatra, ha van olyan nyílt (ε sugarú) intervallum az 1 körül, amelyik a sorozatnak csak véges sok tagját tartalmazza.

(e) Nem igaz. A formula pontosan akkor teljesül egy (a_n) sorozatra, ha a sorozat első tagja $a_1 = 1$, ugyanis az $n_0 = 1$ választás minden ε esetén megfelel.

(f) Nem igaz, sőt a formula semmilyen sorozatra nem teljesül.
Legyen ugyanis $\varepsilon = |a_1 - 1| + 1$. Erre az ε-ra semelyik n_0 sem jó.

2.12.

$$\sqrt[n]{2} < 1{,}01 = 1 + 0{,}1 \iff 2 < (1 + 0{,}1)^n$$

A **Bernoulli-egyenlőtlenség** szerint

$$(1 + 0{,}1)^n \geq 1 + 0{,}1n > 0{,}1n > 2,$$

ha $n > 20$.

2.13.

$$\sqrt[n]{n} < 1{,}0001 \iff n < \left(1 + 10^{-4}\right)^n$$

A binomiális kifejtést használva

$$\left(1 + 10^{-4}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^{-4k} > \binom{n}{2} 10^{-8} = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 10^8} > \frac{n^2}{8 \cdot 10^8} > n,$$

ha $n > 8 \cdot 10^8$.

2.16.

$$\sqrt{n^2+5} - n = (\sqrt{n^2+5} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2+5}+n}{\sqrt{n^2+5}+n} = \frac{5}{\sqrt{n^2+5}+n} < \frac{5}{n} < 0{,}01,$$

ha $n > 500$.

2.18. Nem igaz. Legyen például

$$a_n = \begin{cases} b, & \text{ha } n \text{ páros} \\ b+1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Megjegyzés: monoton sorozatra az állítás ekvivalens a konvergenciával.

2.24. Ha $a_n \to \infty$, akkor (a_n) felülről nem korlátos, ezért nincs legnagyobb tagja (ez ugyanis felső korlát lenne).

Fordítva nem következik. Legyen például $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Ez a sorozat szigorúan monoton nő, ezért nincs legnagyobb tagja. Viszont felülről korlátos (tart 1-hez), ezért nem tart végtelenhez.

2.25. Ha $a_n \to \infty$, akkor az (a_n) sorozatnak van legkisebb tagja. A végtelenhez tartás (egyik) definíciója szerint minden (a, ∞) félegyenesen kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van. Alkalmazzuk ezt az $a = a_1$ esetre. Ekkor legalább egy tag, tudniillik a_1 nem eleme a (a_1, ∞) félegyenesnek. A kimaradó véges sok tag közül biztosan van legkisebb.

Fordítva nem következik. Legyen például $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Ez a sorozat szigorúan monoton nő, ezért $a_1 = 0$ a legkisebb tagja. Viszont felülről korlátos (tart 1-hez), ezért nem tart végtelenhez.

2.36. A sorozat nem tarthat ∞-hez, de tarthat $-\infty$-hez vagy egy valós számhoz.

2.37. A sorozat nem tarthat $-\infty$-hez, de a többi eset lehetséges.

2.46. Az (a_n) sorozat nem tarthat ∞-hez, mert a $(3,\infty)$ félegyenesen kívül végtelen sok tagja van a sorozatnak.

Az (a_n) sorozat nem tarthat $-\infty$-hez, mert a $(-\infty,3)$ félegyenesen kívül végtelen sok tagja van a sorozatnak.

Az (a_n) sorozat tarthat 3-hoz (máshoz nem): például ha $a_n = 3 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

2.58. Sejtés: $a_n = \dfrac{4n^3 + 3n^8 - 2}{12 - 3n^8 - n^2} \to -1$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Be kell látnunk, hogy van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $|a_n + 1| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}|a_n + 1| &= \left|\frac{4n^3 + 3n^8 - 2}{12 - 3n^8 - n^2} + 1\right| = \left|\frac{(4n^3 + 3n^8 - 2) + (12 - 3n^8 - n^2)}{12 - 3n^8 - n^2}\right| \\ &= \left|\frac{4n^3 - n^2 + 10}{12 - 3n^8 - n^2}\right|\end{aligned}$$

A számláló minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén pozitív, ha pedig $n \geq 2$ akkor a nevező negatív. Hogy egyszerűbb egyenlőtlenséghez jussunk, legyen n legalább 4. Ekkor $n^2 \geq 12$.

$$|a_n + 1| = -\frac{4n^3 - n^2 + 10}{12 - 3n^8 - n^2} = \frac{4n^3 - n^2 + 10}{3n^8 + n^2 - 12} < \frac{4n^3}{3n^8} = \frac{4}{3n^5} < \frac{2}{n^5} < \varepsilon \text{ ha } n > \sqrt[5]{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

Tehát az $N = \max\left\{4, \left[\dfrac{2}{n^5}\right]\right\}$ megfelelő küszöbindex.

2.59. Sejtés: $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^2} \to 0$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Be kell látnunk, hogy van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $|a_n| < \varepsilon$.

$$|a_n| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \text{ ha } n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Tehát az $N = \left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right]$ megfelelő küszöbindex.

2.68. Legyen K tetszőleges. Be kell látnunk, hogy van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $\dfrac{2^n}{n} > K$.

Ha $n > 2$, akkor $n - 1 > \dfrac{n}{2}$ és ezért

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} > \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n^2}{4},$$

$$\frac{2^n}{n} > \frac{n}{4} > K \text{ ha } n > 4K.$$

Tehát az $N = \max\{2, [4K]\}$ megfelelő küszöbindex.

2.85. Legyen K tetszőleges. Be kell látnunk, hogy van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $\sqrt{n} - 2^n < K$. Ha $n > 2$, akkor $1 - n < -1$ és ezért

$$\sqrt{n} - n^2 < n - n^2 = n(1-n) < -n < K \text{ ha } n > -K.$$

Tehát az $N = \max\{2, [-K]\}$ megfelelő küszöbindex.

2.88. Az (a_n) sorozat konvergens, $a_n \to 4$.

2.89. Az (a_n) sorozat oszcillálva divergens.

2.2. Határérték és műveletek, határérték és rendezés

2.106. Az $a_n = \dfrac{3n^4 + 2n - 1}{5n^4 + \sqrt{n} - 7}$ sorozat határértéke kritikus, mivel két végtelenbe tartó sorozat hányadosa. Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevező legmagasabb „rendű” tagjával, n^4-el:

$$a_n = \frac{3n^4 + 2n - 1}{5n^4 + \sqrt{n} - 7} = \frac{3 + \dfrac{2}{n^3} - \dfrac{1}{n^4}}{5 + \dfrac{1}{n^3\sqrt{n}} - \dfrac{7}{n^4}}.$$

A számláló tart 3-hoz, a nevező pedig 5-höz. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 + 2n - 1}{5n^4 + \sqrt{n} - 7} = \frac{3}{5}.$$

2.122.

$$n^7 - n^6 - n^5 - n^4 - 100 = n^7\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{100}{n^7}\right)$$

Mivel $n^7 \to \infty$ és $1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{100}{n^7} \to 1$, ezért

$$n^7 - n^6 - n^5 - n^4 - 100 \to \infty.$$

2.126.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^6 + 3n^5}{7n^6 - 2} = \frac{2}{7}$$

$$\left|\frac{2n^6+3n^5}{7n^6-2}-\frac{2}{7}\right| = \frac{7(2n^6+3n^5)-2(7n^6-2)}{7(7n^6-2)} = \frac{21n^5+4}{7(7n^6-2)} <$$
$$< \frac{21n^5+4n^5}{7(7n^6-2n^6)} = \frac{25}{35}\cdot\frac{1}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség biztosan teljesül, ha $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, és így küszöbindexnek megfelel a

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

2.127. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}-n) = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}-2n) = 0$. Keressünk küszöbindexet $\dfrac{\varepsilon}{2}$-höz külön az $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$ és a $b_n = \sqrt{n^2-1}-n$ sorozathoz.

$$|a_n| = \sqrt{n^2+1}-n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül, ha $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$.

$$|b_n| = n-\sqrt{n^2-1} = \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ez is teljesül, ha $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$, tehát az $n_0 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$ megfelel küszöbindexnek:

$$\left|\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}-2n\right| \le \left|\sqrt{n^2+1}-n\right| + \left|\sqrt{n^2-1}-n\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ha $n > n_0$.

2.128. Legyen például $a_n = \dfrac{1}{n}$, $\quad b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

2.129. Mivel $a > 0$, ezért az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja lehet negatív, így valahonnan kezdve $\sqrt{a_n}$ értelmes.

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \le \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}$$

Mivel $a_n \to a$, választhatunk olyan n_0 küszöbindexet, hogy $n > n_0$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon\cdot\sqrt{a}$ legyen. Ez az n_0 megfelel a keresett küszöbindexnek:

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right| \le \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon\cdot a}{\sqrt{a}} = \varepsilon,$$

ha $n > n_0$.

2.133. **(a)** $\frac{a_n}{b_n}$ konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} > 0$: $\quad a_n = n, \quad b_n = n+1.$

(b) $\frac{a_n}{b_n}$ konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$: $\quad a_n = n, \quad b_n = n^2.$

(c) $\frac{a_n}{b_n}$ divergens és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$: $\quad a_n = n^2, \quad b_n = n.$

(d) $\frac{a_n}{b_n}$ oszcillálva divergens: $a_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ n^2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}, \ b_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n \text{ páros} \\ n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

2.137. **P** $\not\Longrightarrow$ **Q**. Legyen például $a_n = n,\ b_n = 0.$

Q $\Longrightarrow$ **P**. Két (azonos előjelű) végtelenhez tartó sorozat összege is végtelenhez tart.

2.142. **P** $\not\Longrightarrow$ **Q**: legyen például $a_n = n+1, \quad b_n = n.$

Q $\Longrightarrow$ **P**: Mivel $b_n \to \infty$, ezért $\frac{1}{b_n} \to 0$ és így $\frac{a_n - b_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - 1 \to 0.$

2.143.

$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{a_n + 1 - 2}{a_n + 1} = 1 - \frac{2}{a_n + 1} \to 0$$

Fejezzük ki a_n-et b_n segítségével:

$$\frac{2}{a_n + 1} = 1 - b_n, \qquad a_n + 1 = \frac{2}{1 - b_n}, \qquad a_n = \frac{2}{1 - b_n} - 1.$$

A határérték műveleti szabályait alkalmazva kapjuk, hogy $a_n \to 1.$

2.147. **P** $\Longrightarrow$ **Q**. Végtelenhez tartó sorozat reciproka 0-hoz tart. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $b_n \to \infty$, ezért a $K = \frac{1}{\varepsilon}$-hoz van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $b_n > K = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Innen $\frac{1}{b_n} < \varepsilon.$

Q $\not\Longrightarrow$ **P**. Legyen például $b_n = (-1)^n n.$

2.151. **P** $\not\Longrightarrow$ **Q**: legyen például $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$

Q $\Longrightarrow$ **P**: Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0.$

Első eset: $a = \infty$. Ekkor van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén

$$a_n > 1 \geq \frac{1}{n}.$$

Második eset: $0 < a < \infty$: Válasszunk az $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$-höz egy N küszöbindexet, amelyre

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ha $n > N$. De akkor

$$\frac{1}{n} < \varepsilon = \frac{a}{2} = a - \varepsilon < a_n.$$

2.159. Az állításból következik, hogy $a_n \to \infty$, „rendőr-szabály a végtelenre”:

Legyen ugyanis $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel $b_n \to \infty$, ezért van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $K < b_n$. De a feltétel szerint ezekre az n-ekre $K < a_n$ is igaz.

2.160. Semmi sem következik:

az (a_n) sorozat lehet konvergens, például ha $a_n = 0$,

tarthat ∞-hez, például ha $a_n = b_n - 1$,

vagy $-\infty$-hez, például ha $a_n = -n$,

de lehet oszcillálva divergens is, például ha $a_n = (-1)^n$.

2.161. Korlátos, mert konvergens,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^2} = 0,$$

ugyanis

$$0 < \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \cdots + \sqrt{n}}{n^2} = \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

2.172. **Bizonyítás:** Van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $\sqrt[n]{a_n} > 1{,}5$. De ekkor

$$a_n > 1{,}5^n \text{ ha } n > N.$$

Mivel $1{,}5^n \to \infty$, ezért a **rendőr-szabály** szerint $a_n \to \infty$.

2.185. Nincs ilyen sorozat. Ugyanis ha $a_n \to 3$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

Bizonyítás: Van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén

$$1 < a_n < 4.$$

Tehát

$$1 < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{4} \to 1.$$

2.196. Mivel valahonnan kezdve $2^n < \frac{1}{2}3^n$, ezért

$$\frac{3}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{3^n - \frac{1}{2}3^n} < \sqrt[n]{3^n - 2^n} < \sqrt[n]{3^n} = 3,$$

ha n elég nagy. Az egyenlőtlenség bal oldala $\frac{3}{\sqrt[n]{2}} \to 3$, és ezért a **rendőr-szabály** szerint

$$\sqrt[n]{3^n - 2^n} \to 3.$$

2.197. Hozzuk egyszerűbb alakra a sorozat tagjait:

$$a_n = \frac{1 - 2 + 3 - \dots - 2n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{(1-2) + (3-4) + \dots + (2n-1-2n)}{\sqrt{n^2+1}} = -\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Végig osztva a számlálót és a nevezőt a nevező nagyságrendjével, n-nel, kapjuk, hogy

$$a_n = -\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to -1.$$

2.3. Monoton sorozatok, részsorozatok

2.199.

- Két pozitív tagú monoton növő/csökkenő sorozat szorzata monoton nő/csökken.
- Két negatív tagú monoton növő/csökkenő sorozat szorzata monoton csökken/nő.
- Egy pozitív tagú monoton növő és egy negatív tagú monoton csökkenő sorozat szorzata monoton csökken.
- Egy pozitív tagú monoton csökkenő és egy negatív tagú monoton növő sorozat szorzata monoton nő.

Más esetekben nem állíthatjuk biztosan, hogy a szorzat monoton.

Például ha $a_n = n - 10$ és $b_n = n$, akkor a két monoton növő sorozat szorzata nem monoton: az első tíz tagig csökken, aztán nő.

Valamivel bonyolultabb példa:

$$a_n = \begin{cases} n^2, & \text{ha } n \text{ páros} \\ n^2 + 2n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}, \quad b_n = -\frac{1}{n}.$$

Itt (a_n) pozitív tagú monoton növő sorozat, (b_n) pedig negatív tagú monoton növő sorozat. Viszont az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat sehonnan kezdve sem monoton.

2.203. Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy $a_n > a_1 \cdot (1{,}1)^{n-1}$. Elég tehát találnunk egy olyan n-et, amelyre $1{,}1^{n-1} > \frac{10^6}{a_1}$. A **Bernoulli-egyenlőtlenség** szerint

$$(1{,}1)^{n-1} = (1+0{,}1)^{n-1} \geq 1 + (n-1)\cdot 0{,}1 > (n-1)\cdot 0{,}1 > \frac{10^6}{a_1}.$$

Ez biztosan teljesül, ha $n - 1 > \frac{10^7}{a_1}$, azaz ha $n > \frac{10^7}{a_1} + 1$.

2.204. Első lépésként belátjuk, hogy a sorozat minden tagja pozitív, de ez teljes indukcióval nyilvánvaló. Most már jobb alsó becslést is mondhatunk a sorozat tagjaira: a (két tagú) számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a}.$$

Belátjuk, hogy $n = 2$-től kezdve az (a_n) sorozat monoton csökken. Felhasználva, hogy $a_n > 0$,

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \leq a_n \iff a_n^2 + a \leq 2a_n^2 \iff a_n^2 \geq a \iff a_n \geq \sqrt{a}.$$

De az előbb már beláttuk, hogy minden $n \geq 2$ esetén $a_n \geq \sqrt{a}$, tehát a sorozat monoton csökken és (alulról) korlátos, de akkor konvergens.
Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, és persze $b \geq \sqrt{a} > 0$. De akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = b$ is igaz. Másrészt

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \to \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right).$$

Tehát

$$\frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) = b, \text{ ezért } b = \sqrt{a}.$$

2.215. A rekurzív képletből könnyű kiolvasni, hogy $a_n \geq 0$ (sőt azt is, hogy $a_n \geq \sqrt{2}$, ha $n > 1$). Másrészt teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $a_n < 2$.

$n = 1$ re ez igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz, hogy $a_n < 2$. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$

Megmutatjuk, hogy a sorozat monoton nő. Oldjuk meg a $\sqrt{2+x} \geq x$ egyenlőtlenséget a nemnegatív számok körében:

$$\sqrt{2+x} \geq x \iff 2 + x \geq x^2 \iff x^2 - x - 2 \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 2.$$

Mivel már beláttuk, hogy $0 \leq a_n < 2$, ezért x helyébe írhatunk a_n-et, és így $a_{n+1} \geq a_n$. Tehát (a_n) monoton nő és (felülről) korlátos, ezért konvergens. Legyen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Mivel a sorozat tagjai nemnegatívok, ezért $a \geq 0$. A határérték műveleti szabályai és a rekurzív képlet miatt

$$a = \sqrt{2+a} \iff a = 2.$$

2.216. $a_1 > 0$ és ha $a_n > 0$, akkor $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^3+1} > 0$, ezért minden n-re $a_n > 1$. A rekurzív képlet szerint

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n^3+1} > 0,$$

tehát a sorozat (szigorúan) monoton nő. Indirekt módon megmutatjuk, hogy a sorozat nem konvergens és ezért nem is korlátos. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, akkor $a \geq 0$, mert $a_n \geq 0$, és ezért $a^3 + 1 \neq 0$.

$$a = a + \frac{1}{a^3+1}.$$

De ennek az egyenletnek nincs megoldása! Tehát (a_n) monoton nő és nem korlátos, ezért $a_n \to \infty$.

2.217. Az $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{3}{a_n}\right)$ rekurzív képletből azonnal következik, hogy ha $a_n > 0$, akkor $a_{n+1} > 0$. Mivel $a_1 = 1 > 0$, ezért minden n estén $a_n > 0$. Számoljuk ki a $x = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$ egyenlet gyökeit. Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor valamelyik nem negatív gyökhöz tart.

$$x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{x}\right), \qquad 2x^2 - x - 3 = 0,$$

$$a = \frac{1 - \sqrt{1+24}}{4} = -1, \qquad b = \frac{1 + \sqrt{1+24}}{4} = \frac{3}{2}$$

Az egyenlet vizsgálatából az is kiderül, hogy ha $0 < x < b$, akkor

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{x}\right) > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{b}\right) = \frac{3}{2} = b,$$

és ha $x > b$, akkor

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{x}\right) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{b}\right) = \frac{3}{2} = b.$$

Ez a sorozat tagjaira nézve azt jelenti, hogy $a_n < \dfrac{3}{2}$, ha n páratlan, és $a_n > \dfrac{3}{2}$, ha n páros. Megmutatjuk, hogy a páratlan indexű tagok részsorozata monoton nő, a páros indexűeké pedig monoton csökken. Ha n páratlan, akkor $a_n < b$, és ezért $a_{n+1} > b$, így

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{a_{n+1}}\right) > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{b}\right) = b > a_n.$$

Hasonlóképpen, ha n páros, akkor $a_n > b$ és $a_{n+1} < b$, és ezért

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{a_{n+1}}\right) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{b}\right) = b < a_n.$$

Az eddigi eredményeket összevetve azt kapjuk, hogy a páratlan indexű tagok is konvergálnak és a páros indexű tagok is konvergálnak. Meg kell mutatnunk, hogy mindkét részsorozat $b = \frac{3}{2}$-hez konvergál. Ennek megmutatásához számoljuk ki a_{n+2}-t a_n segítségével.

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{a_n}\right)}\right) = \frac{7a_n + 3}{2(a_n + 3)}$$

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+2} = \frac{7\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 3}{2(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 3)} = \frac{7x + 3}{2(x + 3)} \iff 2x^2 - x - 3 = 0$$

Ennek az egyenletnek már kiszámoltuk a gyökeit, és az egyetlen pozitív gyöke éppen $b = \frac{2}{3}$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}.$$

2.218. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden n esetén $a_n > 0$. A számtani és mértani közepekről szóló egyenlőtlenséget használva kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2},$$

és mivel $a_1 > \sqrt{2}$, azért minden n esetén $a_n > \sqrt{2}$. Megmutatjuk, hogy az (a_n) sorozat monoton csökken, és mivel alulról korlátos, ezért konvergens.

Mivel $a_n > \sqrt{2}$ ezért $\frac{2}{a_n} < \sqrt{2} < a_n$, és így

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) < \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n.$$

Az (a_n) sorozat határértéke csak az $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ egyenlet pozitív gyöke lehet.

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \iff x^2 = 2$$

Tehát a keresett pozitív gyök $\sqrt{2}$, azaz az (a_n) sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}.$$

2.222. Megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton nő. Felhasználva az $(n+1)$ tagú számtani és mértani közepek egyenlőtlenségét

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Most belátjuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \iff \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Most $(n+2)$ tagra használva a számtani és mértani közepek egyenlőtlenségét

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}\right)^{n+2} = 1.$$

Tehát az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens. A sorozat határértékét **Euler-konstansnak** nevezzük és e-vel jelöljük. Belátható, hogy $2 < e < 3$, e irracionális (sőt transzcendens) és $e = 2{,}71\ldots$.

2.225. **P** $\not\Longrightarrow$ **Q**: legyen $a_n = (-1)^n$.

Q $\Longrightarrow$ **P**: Ha (a_n) konvergens, akkor minden részsorozata is konvergens (és ugyanoda tart).

2.230. Az (a_n) sorozatnak pontosan akkor nincs konvergens részsorozata a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint, ha nincs korlátos részsorozata.

Ez akkor igaz, ha minden $K > 0$ valós számra csak véges sok tagja van a sorozatnak a $[-K, K]$ intervallumban, azaz véges sok n kivételével $|a_n| > K$.

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $|a_n| \to \infty$.

2.4. Nagyságrendek, nevezetes sorozatok

2.237.

$$n^n \sim n! + n^n, \qquad \sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}.$$

Más aszimptotikusan egyenlő pár nincs a sorozatok között. Habár $\dfrac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, de ezek a sorozatok nem tartanak ∞-hez.

2.250.

$$\frac{n+2}{\sqrt{n}-3^{-n}} \to \infty,$$

ugyanis a számláló nagyságrendje, n, nagyobb a nevező $\sqrt{n}$ nagyságrendjénél. Ne felejtsük el, hogy $3^{-n} \to 0$.

2.259.

$$\frac{3{,}01^n}{2^n+3^n} = \frac{\left(\frac{3{,}1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}.$$

Itt a számláló ∞-hez tart, mert $\frac{3{,}1}{3} > 1$, a nevező pedig 1-hez, mert $\frac{2}{3} < 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3{,}01)^n}{2^n+3^n} = \infty.$$

2.260. A nevező nagyságrendje 2^n.

$$\frac{n!-3^n}{n^{10}-2^n} = \frac{\frac{n!}{2^n} - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{\frac{n^{10}}{2^n} - 1}.$$

Mivel $\frac{n^{10}}{2^n} \to 0$, ezért a nevező -1-hez tart. Viszont a számláló még mindig kritikus, két végtelenhez tartó sorozat különbsége. Felhasználva, hogy $n! > \left(\frac{n}{4}\right)^n$,

$$\frac{n!}{2^n} - \left(\frac{3}{2}\right)^n > \left(\frac{n}{8}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n > \left(\frac{24}{8}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n > 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

ha $n \geq 24$. Így tehát a számláló ∞-hez tart és

$$\frac{n!-3^n}{n^{10}-2^n} \to -\infty.$$

2.261. $0{,}99^n n^2 = \dfrac{n^2}{(100/99)^n} \to 0$, mivel $n^2 \prec (100/99)^n$.

2.262. $\dfrac{1{,}01^n}{n^2} \to \infty$, mivel $n^2 \prec 1{,}2^n$.

2.263. Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevező nagyságrendjével, $n!$-al.

$$\frac{3^n - \sqrt{n} + n^{10}}{2^n - \sqrt[n]{n} + n!} = \frac{\dfrac{3^n}{n!} - \dfrac{\sqrt{n}}{n!} + \dfrac{n^{10}}{n!}}{\dfrac{2^n}{n!} - \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n!} + 1} \to \frac{0+0+0}{0+0+1} = 0$$

2.264. Minden elég nagy n-re $2^n > n > 1$, ezért

$$2 = \sqrt[n]{2^n} < \sqrt[n]{2^n + n - 1} < \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 2\sqrt[n]{2} \to 2.$$

A rendőr-szabály szerint

$$\sqrt[n]{2^n + n - 1} \to 2.$$

2.265. Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevező nagyságrendjével, 2^n-el.

$$\frac{3^{n+6} + n^2}{2^{n+3}} = \frac{3^6 \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + \dfrac{n^2}{2^n}}{8} \to \frac{\infty + 0}{8} = \infty$$

2.266. Megmutatjuk, hogy a $\dfrac{4^n + 5^n}{6^n + (-7)^n}$ sorozat 0-hoz tart. Ehhez elég megmutatni, hogy az abszolútértékeinek a sorozata tart 0-hoz.

$$\left| \frac{4^n + 5^n}{6^n + (-7)^n} \right| \le \frac{4^n + 5^n}{7^n - 6^n} = \frac{(4/7)^n + (5/7)^n}{1 - (6/5)^n} \to \frac{0+0}{1-0} = 0$$

3. Végtelen sorok

3.1. Végtelen sorok konvergenciája

3.4. A véges geometriai sor összegképletét használva

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \longrightarrow 2$$

3.5. Mivel minden pozitív egész k esetén

$$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right),$$

ezért

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \longrightarrow \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}. \end{aligned}$$

3.11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n = \frac{4}{9}\frac{1}{1-\frac{4}{9}} + \frac{5}{9}\frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \frac{4}{5} + \frac{5}{4}$$

3.12. Mivel a tagok nem tartanak 0-hoz, ezért a sor divergens (lásd a **tagok 0-hoz tartásáról** szóló konvergenciakritériumot).

3.17. Nem, például a **harmonikus sor** divergens, de tagjai 0-hoz tartanak.

3.24. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor részletösszegei úgynevezett **teleszkopikus összegek**:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1.$$

3.25. Mivel $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \dfrac{1}{n}$, és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért a **majoráns-kritérium** szerint a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ sor is divergens. Később majd használhatjuk az **integrálkritériumot** is, mert az $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ improprius integrál divergens.

3.2. Pozitív tagú sorok konvergenciakritériumai

3.28.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Mivel a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **harmonikus sor** divergens, ezért annak $1/2$-ed szerese is divergens. Tehát a nála nagyobb $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ sor is divergens (**divergens minoráns** sor).

3.29. A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens **majoránsa** a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ sornak, ezért a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ sor is konvergens.

3.32.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3}{(1+1/n)^n} \longrightarrow \frac{3}{e} > 1.$$

Ezért a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ sor divergens.

3.33. Mivel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1,$$

ezért a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ sor konvergens.

3.39. Felhasználva, hogy $\sqrt[n]{2^n+1} \to 2$,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{2^n+1}}{3} \to \frac{2}{3} < 1.$$

Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$ sor konvergens.

3.40.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ sor konvergens.

3.47. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^4+3n}$ sor tagjainak nagyságrendje $\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{n^2+4}{n^4+3n} : \frac{1}{n^2} = \frac{(n^2+4)n^1}{n^4+3n} \longrightarrow 1,$$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^4+3n}$ sor is konvergens.

3.48. Belátjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^6}}{n^2+3}$ sor tagjainak nagyságrendje n, ezért a sor divergens, sőt tagjai ∞-hez (és nem 0-hoz) tartanak.

$$\frac{a_n}{n} = \frac{\sqrt{2n^6}}{n(n^2+3)} = \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{3}{n^2}} \to \sqrt{2}.$$

Megjegyzés: Azt, hogy a sor tagjai nem tartanak 0-hoz, a nagyságrendi okoskodás nélkül is könnyen bizonyítható.

3.65.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ divergens.

3.66.

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1,$$

tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergens.

3.67. Megmutatjuk, hogy a sor konvergens. Először is

$$\frac{n^{10}}{3^n-2^n} < \frac{2n^{10}}{3^n}, \text{ ha } 2^n < \frac{1}{2}3^n,$$

és ez valahonnan kezdve igaz. A **majoráns-kritérium** szerint elég megmutatni, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{10}}{3^n}$$

sor konvergens. Erre a sorra alkalmazva a **gyökkritériumot**

$$\sqrt[n]{\frac{2n^{10}}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^{10}}{3} \longrightarrow \frac{1}{3} < 1,$$

ezért a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n-2^n}$ sor is konvergens.

3.68. A sor tagjai nem tartanak 0-hoz:

$$1+\frac{1}{n} \longrightarrow 1 \neq 0,$$

tehát a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ sor divergens.

3.3. Feltételes és abszolút konvergencia

3.71. Nem igaz, például legyen $a_n = (-1)^n$.

3.79. Az $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ Leibniz-sor, mert $\frac{1}{n}$ monoton csökkenően tart 0-hoz, tehát a sor konvergens de nem abszolút konvergens (**harmonikus sor**).

3.80. A $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{4}}+\cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ sor ugyan váltakozó előjelű, de tagjai nem tartanak 0-hoz ($|a_n| \to 1$), ezért a sor divergens.

3.87. A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ sor konvergens, mert Leibniz-típusú, de nem abszolút konvergens, mert $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$ és a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

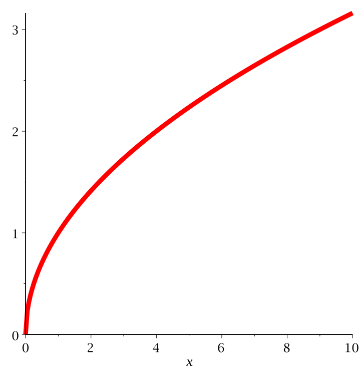
sor divergens (divergens minoráns sor).

3.88. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ sor abszolút konvergens, mert $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens majoráns sor.

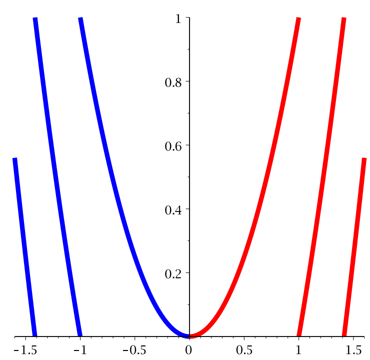
4. Függvények globális tulajdonságai

4.1. Grafikon, periódus, paritás, monotonitás

4.5. Az $f(x) = \sqrt{(}x)$ függvény értelmezési tartománya a $[0, \infty)$ zárt félegyenes. Az értelmezési tartományon szigorúan monoton nő. Se nem páros, se nem páratlan, mivel az értelmezési tartomány nem szimmetrikus az origóra.



4.16. Az $f(x) = \{x^2\}$ függvény értelmezési tartománya az egész számegyenes. A függvény páros, mert x^2 páros. A $[\sqrt{n}, \sqrt{n+1})$ szakaszokon szigorúan nő (a pirossal színezet grafikon darabok), a $(-\sqrt{n+1}, -\sqrt{n}]$ szakaszokon pedig szigorúan csökken.



4.25.

$$(\exists\, p \neq 0)(\forall\, x \in \mathbb{R})\ f(x+p) = f(x)$$

4.26.

$$(\forall\, p \neq 0)(\exists\, x \in \mathbb{R})\ f(x+p) \neq f(x)$$

4.33. Csak a **(d)** állításból következik, hogy f monoton. Ez az állítás éppen a monoton növekedés definíciója. Az összes többi állításra ellenpélda az $f(x) = x^2$ függvény.

4.34. Egyik állítás sem következik: az $f(x) = -x$ függvény monoton (szigorúan monoton csökken) és egyik állítás sem igaz a függvényre.

Megjegyzés: ha f szigorúan monoton nő, akkor mind a négy állítás igaz. Tetszőleges monoton növő függvényre lehet, hogy **(a)** nem igaz (pl. konstans függvény), de a többi igaz.

4.38. Például a **Dirichlet-függvény**:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

4.43. **P** $\implies$ **Q**: ha $p \neq 0$ periódusa az f függvénynek, akkor

$$|f(x+p)| = |f(x)|\,.$$

Általában ha f periodikus, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig tetszőleges, akkor a $h(x) = g(f(x))$ összetett függvény is periodikus.

Q $\not\Longrightarrow$ **P**: legyen például

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

4.2. Korlátosság, szélsőérték

4.47. Az $f(x) = -x^2$ felülről korlátos, például a 0 felső korlát. Van maximuma: $0 = f(0)$.

Alulról nem korlátos: minden K-ra $-(|K|+1)^2 < K$, és ezért persze minimuma sincsen.

4.60. (lásd a (4.16.) feladat megoldásában szereplő ábrát.)

Az $f(x) = \{x^2\}$ függvény korlátos, a 0 alsó korlát, 1 pedig felső korlát.

Minden $\sqrt{n}$ és $-\sqrt{n}$ helyen a függvényérték 0, ezért ezeken a helyeken minimum van.

A függvénynek nincs maximuma: minden x-re $f(x) < 1$, de minden $0 \leq y < 1$ estén van olyan x, hogy $f(x) \geq y$. Ilyen x például az $x = \sqrt{y}$.

4.73.

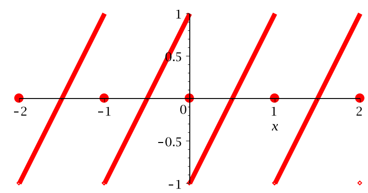
$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\ f(x) \geq 3$$

4.74.

$$(\exists\, x \in \mathbb{R})\ f(x) > 3$$

4.89. Ilyen függvény például a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 2\{x\} - 1, & \text{ha } \{x\} \neq 0 \\ 0, & \text{ha } \{x\} = 0 \end{cases}$$



4.3. Konvexitás

4.95.

$$h(x) = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4}(x - 3) + \sqrt{3}$$

4.101. $\exists a, b, c \quad -3 \leq a < c < b \leq 5,$

$$f(c) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) + f(a) \iff \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4.112. Indirekt módon tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex függvény grafikonjának és az e egyenesnek van három különböző metszéspontja. Legyen a három pont x-koordinátái $a < c < b$. Ekkor a $(c, f(c))$ pont szigorúan a $h_{[a,b]}(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ húr alatt van, ezért

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ha m jelöli az e egyenes meredekségét, akkor

$$m = \frac{f(c) - f(a)}{c - a},$$

mivel az $(a, f(a))$ és a $(c, f(c))$ pont rajta van az egyenesen (és különböznek, mert $a \neq c$). Hasonlóan

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

hiszen a $(b, f(b))$ pont is rajta van az egyenesen. De akkor

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ami ellentmondás.

4.118. Nincs ilyen függvény! Indirekt módon tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex és periodikus. Legyen $p > 0$ egy periódus. Legyen $a = 0,\ b = p,\ c = 2p$ három (különböző) pont az x-tengelyen, valamint $d = f(a) = f(b) = f(c)$. Eszerint a függvénygrafikon három pontja rajta van egy (vízszintes) egyenesen, ami a 4.112. feladat szerint ellentmondás.

4.126. **P** $\Longrightarrow$ **Q**. Legyen $M = \max\{f(5), f(7)\}$. Belátjuk, hogy M felső korlát.

Legyen $x \in [5, 7]$ tetszőleges. A konvexitás miatt az $(x, f(x))$ pont a $h_{a,b}$ húr alatt van, azaz

$$f(x) \leq h_{a,b}(x) = \frac{f(7) - f(5)}{2}(x - 5) + f(5).$$

Két eset van.

1. eset: $M = f(7)$, azaz $f(7) - f(5) \geq 0$. Ekkor

$$\frac{f(7) - f(5)}{2}(x - 5) + f(5) \leq \frac{f(7) - f(5)}{2}(7 - 5) + f(5) = f(7) = M.$$

2. eset: $M = f(5)$, azaz $f(7) - f(5) \leq 0$. Ekkor

$$\frac{f(7) - f(5)}{2}(x - 5) + f(5) \leq \frac{f(5) - f(7)}{2}(7 - 5) + f(7) = f(5) = M.$$

Mindkét esetben azt kapjuk, hogy $f(x) \leq M$.

Megjegyzés: Valamivel egyszerűbb lett volna a számolás, ha M-nek az abszolút értékek maximumát választjuk. Így viszont az is kijött, hogy M nem csak felső korlát, hanem maximum is!

Q $\not\Longrightarrow$ **P**. Legyen $f(x) = -x^2$. Az f függvény szigorúan konkáv, ezért egyetlen intervallumon, és így az $[5, 7]$ intervallumon sem konvex. Viszont az $M = f(5)$ érték felső korlát az $[5, 7]$ intervallumon.