Ibarra-Kim approximációs algoritmusa

Legyen adva n darab tárgy pozitív egész w_i súlyokkal és e_i értékekkel, valamint egy w súlykorlát, továbbá egy $\varepsilon > 0$ pontossági korlát. Tegyük fel, hogy minden i-re $w_i \leq w$, hiszen a súlykorlátnál nehezebb tárgyakat úgysem vihetnénk magunkkal. Legyen

$$\mathrm{OPT} = \max\left\{ \sum_{i \in I} e_i \;\middle|\; I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \quad \text{és} \quad \sum_{i \in I} w_i \leq w \right\},$$

valamint legyen I^* egy olyan részhalmaz, amire a maximum éppen eléretik.

Legyen most M egy később alkalmasan választandó szám, ezzel készítsük el a $w'_i = w_i$, $e'_i = \lfloor e_i/M \rfloor$ súlyokat és értékeket, erre a dinamikus programozási algoritmussal keressük meg a w méretű hátizsákban elvihető legnagyobb értéket, legyen ez OPT'. Ezen optimum vétessen fel valamely J részhalmazon, ezt egyébként a dinamikus programozási algoritmussal visszalépéssel (minden minimumszámításnál annak megjegyzésével, hogy a két tag közül melyik eredményezi a minimumot) ki lehet számítani.

Először is vegyük észre, hogy

$$\frac{e_i}{M} - 1 \leq \left\lfloor \frac{e_i}{M} \right\rfloor \leq \frac{e_i}{M},$$

valamint hogy I^* optimális válsztása miatt

$$\mathrm{OPT}' = \sum_{i \in J} \left\lfloor \frac{e_i}{M} \right\rfloor \leq \frac{1}{M} \sum_{i \in J} e_i \leq \frac{1}{M} \mathrm{OPT}.$$

Másfelől a J optimális volta miatt

$$\mathrm{OPT}' = \sum_{i \in J} e'_i \geq \sum_{i \in I^*} e'_i \geq \sum_{i \in I^*} \frac{e_i}{M} - 1 \geq \frac{1}{M} \sum_{i \in I^*} e_i - n = \frac{1}{M} \mathrm{OPT} - n.$$

Ezek alapján tehát látjuk, hogy

$$\mathrm{OPT} - nM \leq M \cdot \mathrm{OPT}' \leq \mathrm{OPT},$$

most még megmutatjuk, hogy $nM \leq \varepsilon \mathrm{OPT}$, ezzel azt fogjuk látni, hogy

$$(1 - \varepsilon)\mathrm{OPT} \leq M \cdot \mathrm{OPT}' \leq \mathrm{OPT},$$

azaz az algoritmusból adódó $M \cdot \mathrm{OPT}'$ a valódi optimumnak legfeljebb ε hibájú becslése.

Megadjuk végül M értékét. Legyen $E = \sum_{i=1}^{n} e_i$, ezzel legyen

$$M = \frac{\varepsilon E}{n^2},$$

ekkor

$$nM = \varepsilon \frac{E}{n} \leq \varepsilon \max_{1 \leq i \leq n} e_i \leq \varepsilon \mathrm{OPT},$$

hiszen az átlag nem nagyobb a maximumnál valamint bármelyik konkrét egyetlen tárgyat önmagában el tudjuk vinni.

Már csak az algoritmus lépésszáma van hátra, ez

$$O\left(n \sum_{i=1}^{n} e_i'\right) \leq O\left(n \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{M}\right) \leq O\left(\frac{nE}{M}\right) \leq O\left(\frac{n^3}{\varepsilon}\right),$$

ami valóban polinomiális approximációs algoritmust jelent.