1. fejezet

Gráfparaméterek

Mese. Az előző fejezetek során megfigyelhettük, hogy ha egy gráftulajdonság nem igaz-hamis típusú (azaz vagy teljesül a vizsgált gráfra, vagy nem), akkor a legtöbb esetben valamilyen valós – igen gyakran nemnegatív egész – számmal jellemezhető. Ezeket a (számértékű) tulajdonságokat (amelyek értelemszerűen két izomorf gráfra megegyeznek), *gráfparamétereknek* nevezzük. (A legtöbb gráfparaméter értelmezett az üres, tehát csúcsot és élt nem tartalmazó K_0 gráfon is.) Beszélhetünk multigráf-paraméterről vagy egyszerű gráfparaméterről is, ha a paraméter csak a hurokélmentes gráfokon illetve az egyszerű gráfokon van definiálva. (Természetesen értelmezhetjük ezeket is az összes gráfon oly módon, hogy a hurok- illetve többszörös éleket figyelmen kívül hagyjuk.) ♢

Megjegyzés. A gráfparaméterekre gondolhatunk úgy is, mint a gráfok halmazán értelmezett valós értékű függvényekre. ♢

Jelölje $G_1, \ldots, G_c$ a G gráf komponenseit. A legtöbb gráfparaméter értelmezhető nem összefüggő gráfokra is, ekkor jellemzően az alábbi négy eset valamelyike áll fenn:

1.1. definíció. Az f gráfparaméter

- *additív* (összeg tulajdonságú), ha a gráfparaméter értéke az egyes komponensekre kapott értékek összege, azaz $f(G) = f(G_1) + \ldots + f(G_c)$;
- *multiplikatív* (szorzat tulajdonságú), ha a gráfparaméter értéke az egyes komponensekre kapott értékek szorzata, azaz $f(G) = f(G_1) \cdot \ldots \cdot f(G_c)$;
- *maximum tulajdonságú*, ha a gráfparaméter értéke az egyes komponensekre kapott értékek maximuma, azaz $f(G) = \max\{G_1, \ldots, G_c\}$;
- *minimum tulajdonságú*, ha a gráfparaméter értéke az egyes komponensekre kapott értékek minimuma, azaz $f(G) = \min\{G_1, \ldots, G_c\}$.

♢

Megjegyzés. Valójában, mivel az unió asszociatív művelet, a fenti műveleti tulajdonságokhoz elég feltenni, hogy az két tag esetén fennáll, azaz az f gráfparaméter rendre pontosan akkor lesz additív, multiplikatív, maximum illetve minimum tulajdonságú, ha $f(G_1 \cup G_2) = f(G_1) + f(G_2)$, $f(G_1 \cup G_2) = f(G_1) \cdot f(G_2)$, $f(G_1 \cup G_2) = \max\{f(G_1), f(G_2)\}$ illetve $f(G_1 \cup G_2) = \min\{f(G_1), f(G_2)\}$. ♢

1.2. definíció. A $G = (V, E)$ gráfban

- egy $A \subseteq V$ csúcshalmaz *független* vagy *stabil*, ha nincs olyan él, amelynek mindkét végpontja A-beli. (Azaz az A által feszített részgráfnak nincs éle.)
- egy $T \subseteq V$ csúcshalmaz *lefogó* vagy *lefedő*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja T-ben van. (Azaz a $V \backslash T$ által feszített részgráfnak nincs éle.)
- egy $P \subseteq E$ élhalmaz *független*, ha semelyik két P-beli élnek nincs közös végpontja. (Azaz a $G' = (V, P)$ gráfban minden csúcs foka legfeljebb egy.)
- egy $L \subseteq V$ élhalmaz *lefedő* vagy *lefogó*, ha minden csúcs valamely L-beli élnek végpontja. (Azaz a $G' = (V, L)$ gráfban minden csúcs foka legalább egy.)
- egy $D \subseteq V$ csúcshalmaz *domináló csúcshalmaz*, ha minden D-n kívüli csúcs valamely D-beli csúcsnak szomszédja. (Azaz $D \cup N(D) = V$.)

♢

Megjegyzés. Ha a gráfban vannak hurokélek, akkor a fenti definíciók alapján egy v pont, amelyre hurokél illeszkedik, nem lehet benne független ponthalmazban, hiszen ekkor már a v csúcs által feszített részgráfnak is van éle. Hasonlóan, egy független élhalmaz nem tartalmazhat hurokélt, hiszen annak a pontnak a foka, amelyre a hurokél illeszkedik, legalább kettő lenne. Eszerint a független élhalmaz fogalma megegyezik a korábban már definiált (részleges) párosítás fogalmával. (A teljes párosítások éppen független és lefedő élhalmazok.) ♢

Megjegyzés. A független ponthalmazok és élhalmazok definíciója azért is így lesz természetes, mivel ezzel a terminológiával a gráf csúcsainak illetve éleinek egy jólszínezésénél egy független csúcs- illetve élhalmaz elemeit színezhetjük azonos színre. ♢

Megjegyzés. A G egyszerű gráfban egy X csúcshalmaz szomszédhalmazát kétféleképpen is definiálhatjuk. Az egyik lehetőség, hogy beleértjük az összes olyan csúcsot, amely X valamely csúcsával van összekötve, azaz $N_G(X) = \{v \in V : \exists u \in X, \text{ melyre } uv \in E\} = \cup_{v \in X} N_G(v)$, tehát $N_G(X)$-be beleértjük X azon elemeit is, amelyek valamely más X-belivel összekötöttek. A másik lehetőség, hogy $N_G(X)$-et úgy definiáljuk, mint azoknak az X-en kívüli csúcsoknak a halmazát, amelyek valamely X-belivel összekötöttek, azaz $N_G(X) = \{v \in V \backslash X : \exists u \in X, \text{ melyre } uv \in E\} = \cup_{v \in X} N_G(v) \backslash X$. Nyilvánvaló, hogy a két definíció pontosan akkor adja ugyanazt egy X csúcshalmazra, ha X független, ugyanakkor $N(X) \cup X$ már egyértelmű, így a domináló halmazok pontosan ugyanazok lesznek, akármelyik értelmezését választjuk $N_G(X)$-nek. ♢

Megjegyzés. Definíció szerint az üres csúcshalmaz illetve az üres élhalmaz mindig független, míg a teljes csúcshalmaz mindig lefogó és domináló, továbbá, ha a gráfban nincs izolált pont, akkor a teljes élhalmaz lefedő. Fontos ugyanakkor kiemelni, hogy ha a gráfnak van izolált csúcsa, akkor lefedő élhalmaz nem létezik, innentől fogva tehát, ha lefedő élhalmazról beszélünk, mindig fel fogjuk tenni, hogy a gráfban nem létezik izolált pont. $\diamondsuit$

Vegyük észre, hogy független ponthalmaz tetszőleges részhalmaza is független, míg egy lefogó ponthalmazt tartalmazó tetszőleges halmaz szintén lefogó. Ez indokolja, hogy független ponthalmazból nagyot, lefogó ponthalmazból pedig kicsit keresünk. Ezt tehetjük kétféle értelemben: kereshetünk tartalmazásra nézve érdekes szélső eseteket, vagy egyszerűen a méretüket tekintve. Egy független ponthalmaz (tartalmazásra nézve) maximális (bővíthetetlen), ha nem valódi részhalmaza egy (nála nagyobb) független ponthalmaznak; egy lefogó ponthalmaz pedig (tartalmazásra nézve) minimális (szűkíthetetlen), ha semelyik valódi részhalmaza nem lefogó. Nem biztos, hogy például egy tartalmazásra nézve maximális független ponthalmaznál nincs nagyobb méretű független ponthalmaz a gráfban; vizsgálhatjuk tehát azt is, hogy mekkora a lehető legnagyobb független ponthalmaz mérete. Analóg szempontok érvényesek a független, illetve a lefedő élhalmazoknál is.

1.3. definíció. Egy G gráfban $\alpha(G)$ jelöli a legnagyobb független csúcshalmaz, $\tau(G)$ a legkisebb lefogó csúcshalmaz, $\nu(G)$ a legnagyobb független élhalmaz, $\varrho(G)$ a legkisebb lefedő élhalmaz és $\gamma(G)$ a legkisebb domináló csúcshalmaz méretét. $\diamondsuit$

1.4. állítás. *Lefogó ponthalmaz komplementere független. Független ponthalmaz komplementere lefogó.*

Bizonyítás. Legyen $T \subseteq V(G)$ egy lefogó ponthalmaz. Ekkor definíció szerint minden élnek legalább az egyik végpontja T-ben van, tehát a $V \backslash T$ ponthalmaz által feszített részgráf nem tartalmaz élt, így $V \backslash T$ független. Megfordítva, ha A független csúcshalmaz, akkor tetszőleges e élre e valamelyik (legalább egyik) vége $V \backslash A$-ban van, így $V \backslash A$ lefogó. $\square$

1.5. következmény (Gallai-tétel). $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$.

Bizonyítás. Legyen T egy $\tau(G)$ pontot tartalmazó lefogó ponthalmaz G-ben. Ekkor $A = V \backslash T$ az előző állítás szerint független, így $\alpha(G) \geq |A| = |V \backslash T| = |V(G)| - |T| = |V(G)| - \tau(G)$, amit átrendezve $\alpha(G) + \tau(G) \geq |V(G)|$ adódik.

Megfordítva, ha A egy $\alpha(G)$ pontú független ponthalmaz, $T = V \backslash A$ lefogó, így $\tau(G) \leq |T| = |V \backslash A| = |V(G)| - |A| = |V(G)| - \alpha(G)$, így $\alpha(G) + \tau(G) \leq |V(G)|$ is teljesül. $\square$

A definíciók egyszerű következményei a gráfparaméterekre vonatkozó alábbi egyenlőtlenségek:

1.6. állítás. *Tetszőleges gráfban $\nu(G) \leq \tau(G)$, továbbá ha G-ben nincs izolált csúcs, akkor $\alpha(G) \leq \varrho(G)$ illetve ha G-ben nincs hurokél, akkor $\gamma(G) \leq \alpha(G)$.*

Bizonyítás.

- Vegyünk egy $\nu(G)$ méretű $P \subseteq E(G)$ független élhalmazt G-ben. Ha lefogó ponthalmazt keresünk, P-nek mind a $\nu(G)$ darab élét le kell fognunk egy-egy csúccsal, és ezek a csúcsok páronként különbözők, így $\nu(G) \leq \tau(G)$.
- Egy független csúcshalmaz minden csúcsának lefedéséhez kell legalább egy, az adott csúcsból induló él, és ezek az élek páronként különbözők a csúcshalmaz függetlensége miatt, így $\alpha(G) \leq \varrho(G)$.
- Legyen A egy maximális független csúcshalmaz egy hurokélt nem tartalmazó G gráfban. Ha valamely $v \in V \setminus A$ pontot A nem dominálná, $v \cup A$ nagyobb független csúcshalmaz lenne, így $\gamma(G) \leq \alpha(G)$.

□

Talán meglepő, hogy a fenti α és τ közti összefüggés élekre vonatkozó megfelelőjében is a csúcsok száma szerepel.

1.7. DEFINÍCIÓ. Egy csúcsot nevezzünk *magányosnak*, ha az őt tartalmazó összefüggő komponensnek nincs más pontja. (Tehát egy magányos csúcs annyiban különbözik egy izolált csúcstól, hogy lehetnek rajta hurokélek.) ♢

1.8. TÉTEL (GALLAI). *$\nu(G) + \varrho(G) = |V(G)|$, ha G-ben nincs izolált csúcs.*

Bizonyítás. Ha G tartalmaz magányos (de nem izolált) csúcsot, jelölje ezeknek a halmazát M. A gráf független élhalmazai nem tartalmazzák M pontjait, ugyanakkor ezek lefogásához $|M|$ darab él kell, így feltehető, hogy a gráfban egyáltalán nincsenek magányos pontok.

Legyen P egy ν elemű független élhalmaz, ekkor P elemei összesen $2\nu(G)$ csúcsot fednek le (hiszen a P-beli élek végpontjai mind különbözők). Mivel a gráfban nincs izolált pont, a kimaradó $|V(G)| - 2\nu(G)$ darab csúcs lefedhető úgy, hogy mindegyikhez választunk egy belőle kiinduló élt. (Ezek az élek különbözők, mert ha egy él mindkét vége P által fedetlen lenne, akkor ezt hozzávéve P-hez egy nagyobb független élhalmazt kapnánk.) Így a gráf csúcsai lefedhetők legfeljebb $|P| + (|V(G)| - 2\nu(G)) = |V(G)| - \nu(G)$ darab éllel, azaz $\nu(G) + \varrho(G) \leq |V(G)|$.

Megfordítva, legyen most R egy $\varrho(G)$ elemű lefedő élhalmaz. Tegyük fel először, hogy G-ben nincs magányos csúcs. Ekkor R nem tartalmaz kört, hiszen ebből egy élt elhagyva a maradék még mindig lefedő lenne. (Az R által feszített $G(R)$ gráfban a komponensek ráadásul csillagok, mivel egy három vagy több élből álló út valamely belső élét elhagyva még mindig lefedő élhalmazt kapnánk.) Tehát $G(R)$ egy erdő, amely G minden pontját fedi. Ha ez az erdő $c(R)$ komponensből áll, akkor az éleinek száma $|V(R)| - c(R) = |V(G)| - c(R)$. Mivel a különböző komponensekhez tartozó élek függetlenek, így $\nu(G) \geq c(R)$, amiből $\varrho(G) = |V(G)| - c(R) \geq |V(G)| - \nu(G)$, azaz $\nu(G) + \varrho(G) \geq |V(G)|$ is fennáll. □

Bizonyítás. Másik bizonyítás: Legyen P egy $\nu(G)$ darab élt tartalmazó független halmaz. Ekkor minden további élnek legalább az egyik végpontja már P által fedett csúcs kell, hogy legyen, különben lenne P-nél nagyobb, tehát $\nu(G)$-nél több élt tartalmazó független élhalmaz. Továbbá, ha $e \in P$, akkor nem indulhat e mindkét végpontjából különböző P által fedetlen pontokba él, mivel ekkor e-t erre a két élre lecserélve megint nagyobb független élhalmazt kapnánk. A fenti észrevételek miatt van G-nek olyan R minimális lefedő élhalmaza, amely P minden élét tartalmazza. Egy ilyen élhalmaz a minimalitás miatt körmentes, és minden komponense egy csillag, így a P élei R-nek különböző komponenseihez tartoznak. Mivel R egy $|P|$ komponensű erdő, így $|M| = |V(G)| - |P|$, azaz $\nu(G) + \varrho(G) = |V(G)|$ adódik. □

1.9. KÖVETKEZMÉNY. *Egy maximális független élhalmazhoz mindig hozzávehetők úgy élek, hogy egy minimális lefedő élhalmazt kapjunk és fordítva, egy minimális lefedő élhalmazból elhagyhatók élek, hogy egy maximális független élhalmazt kapjunk. Következésképpen $\nu(G) \leq \varrho(G)$ is teljesül.*

Ezzel a terminológiával a páros gráfokra megismert Kőnig tétel azt mondja, hogy $\nu = \tau$ páros gráfokra (lásd a Párosítások fejezetet). Gallai tételeiből az is következik, hogy izolált csúcsot nem tartalmazó páros gráfokra $\alpha = \varrho$. Feladatokban Gallai tételét úgy használhatjuk, hogy az $\alpha, \tau, \nu, \varrho$ paraméterek közül elég (alkalmas) kettőt meghatározni, akkor már mindet ismerjük.

1.10. ÁLLÍTÁS. *$\gamma(G) \leq \nu(G)$, ha G-ben nincsenek magányos pontok.*

Bizonyítás. Legyen P egy $\nu(G)$ élt tartalmazó független élhalmaz, ekkor a feltevés szerint egy P által fedetlen csúcsnak van P által fedett szomszédja, így $G(P)$ csúcsai domináló halmazt alkotnak. Ugyanakkor, ha valamely $uv \in P$ élre léteznének olyan $x \neq y$, $x, y \notin G(P)$ csúcsok, hogy u dominálja x-et és v dominálja y-t, akkor $P \cup \{xu, yv\} \backslash uv$ nagyobb független élhalmaz lenne, így egy minimális domináló ponthalmaz egy maximális független élhalmaz minden élének csak egyik végpontját tartalmazhatja. □

1.11. ÁLLÍTÁS. *ν és α, α és τ illetve τ és ϱ között nem állnak fenn a fentiekhez hasonló egyenlőtlenségek.*

Bizonyítás. Tekintsük ezeknek a paramétereknek az értékeit a n csúcsú K_n teljes gráfra és az n élű S_n csillagra: $\nu(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\alpha(K_n) = 1$, $\tau(K_n) = n - 1$, $\varrho(K_n) = \lceil \frac{v}{2} \rceil$ továbbá $\nu(S_n) = 1$, $\alpha(S_n) = n$, $\tau(S_n) = 1$, $\varrho(K_n) = n$, azaz $n \geq 4$ esetén

$$\nu(K_n) > \alpha(K_n) < \tau(K_n) > \varrho(K_n),$$

ugyanakkor

$$\nu(S_n) < \alpha(S_n) > \tau(S_n) < \varrho(S_n).$$

□

Összefoglalva az eddigieket:

- Tetszőleges gráfban egy ponthalmaz akkor és csak akkor lesz független, ha a komplementere lefogó, így $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$ minden gráfra (ez volt Gallai pontokra vonatkozó tétele).
- Ha G-ben nincs izolált pont, akkor G egy legnagyobb független élhalmaza mindig kiegészíthető egy legkisebb lefedő élhalmazzá, és a lefedő élhalmaz komponenseinek

száma a legnagyobb független élhalmaz méretének és a magányos csúcsok számának az összege. Ebből adódik Gallai élekre vonatkozó tétele: a fenti tulajdonságot teljesítő gráfban $\nu(G) + \varrho(G) = |V(G)|$.

- A gráfparaméterekre a megfelelő feltételek mellett fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek: $\gamma \leq \alpha \leq \varrho$, $\gamma \leq \nu \leq \varrho$ illetve $\nu \leq \tau$.
- Ha a G gráf páros, akkor $\nu = \tau$ (König tétele), és ha izolált pontot sem tartalmaz, akkor $\alpha = \rho$.

Gyakorlófeladatok:

Mutassuk meg, hogy ha az f gráfparaméter additív, akkor az üres gráfra az értéke $f(K_0) = 0$. Ha az f gráfparaméter multiplikatív és nem azonosan nulla, akkor az üres gráfra az értéke $f(K_0) = 1$.

Határozzuk meg a K_v, C_v, $K_{m,n}$, $\overline{C_v}$ és a Petersen gráfokban az $\alpha, \tau, \nu, \rho, \gamma$ paraméterek értékét.

Igazoljuk, hogy hurokélmentes $G(V, E)$ gráfban $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$, az élkromatikus számra pedig $\chi_e \geq \frac{|E(G)|}{\nu(G)}$.