

1. fejezet

Párosítások

Mese. Arthur király udvarában száz lovag és száz udvarhölgy állt a király szolgálatában, amikor Arthur házasságra kívánt lépni Ginevrával. Eme jeles alkalom okán elhatározta, hogy a lovagjait és udvarhölgyeit is megházasítja, de – bölcs király lévén – ezt úgy akarta megtenni, hogy a megkötendő házasságok kölcsönös vonzalmon alapuljanak. Megbízta hát tanácsadóját, a nagy Merlint, hogy derítse föl, ki kivel szimpatizál. Merlin kisvártatva vissza is tért a válasszal:

– Nagy király, az alábbi csodás jelenséget tapasztaltam: udvarodban minden lovagnak pontosan tíz udvarhölgy dobbantja meg a szívét, aki viszonzza is érzelmeit, amiképpen minden udvarhölgy is éppen tíz olyan lovaggal lépne szívesen frigyre, aki örömmel adná be a derekát.

– Ez valóban különös jelenség – bölintott Arthur –, de most akkor mi is a helyzet? Tudunk úgy esküvőt szervezni, hogy mindenki elégedett legyen, vagy sem?

Hogy tudjunk válaszolni a kérdésre, rendszerezzük az információinkat. Szemléltessük a helyzetet egy gráffal: az udvarhölgyek és a lovagok lesznek a gráf csúcsai, és pontosan akkor húzunk élt egy lovag és egy udvarhölgy közé, ha azok kölcsönösen szimpatizálnak egymással. Így tehát egy kétosztályú (más néven páros) gráfot kapunk: az egyik osztályban a lovagokat, a másikban az udvarhölgyeket reprezentáló csúcsok vannak, és csak az osztályok között mennek élek. Merlin kutatásaiból kiderül, hogy minden csúcsból pontosan tíz él indul ki. Vajon meg lehet szervezni a nagyszabású lagzit? A gráfban megfogalmazva az a feladatunk, hogy minden csúcsnak találjunk egy párt a vele szomszédos csúcsok közül úgy, hogy végeredményben mindenkinek pontosan egy párja legyen. Egy pár tehát egy él két végpontja, így a párok természetes módon éleknek felelnek meg. Tehát úgy kell éleket kiválasztanunk a gráfban, hogy minden lovagra és minden udvarhölgyre pontosan egy kiválasztott él illeszkedjen. \diamond

Szemléltetés. A párosítások vizsgálatát pl. az alábbi feladatokkal motiválhatjuk:

- Egy táncteremben lányok és fiúk vannak. Olyan táncpárokat szeretnénk alkotni, melyek tagjai (kölcsönösen) szívesen táncolnak egymással. Mi annak a feltétele, hogy tudjunk úgy párokat alkotni, hogy minden lány és minden fiú egyszerre táncolhasson?

- Egy asztalitenisz-klub edzésén olyan meccseket akarunk szervezni, hogy mindenki olyan ellenféllel játsszon, akivel eddig még legfeljebb tíz alkalommal mérkőzött meg. Mikor tudjuk elérni, hogy párhuzamosan mindenki játsszon megfelelő partnerrel?

A két feladatot szemléltethetjük gráfokkal: a gráf csúcsai mindkét esetben legyenek a résztvevők; az első esetben kössük össze azokat a fiúkat és lányokat, akik kölcsönösen szívesen táncolnának egymással, a másodikban pontosan akkor kössük össze két játékost, ha azok eddig legfeljebb tíz alkalommal játszottak egymás ellen. Vegyük észre, hogy az első esetben kétosztályú (fiúk-lányok) gráfot kaptunk, ugyanakkor a második esetben ezt semmi sem garantálja. A feladat a gráfok nyelvén azt jelenti, hogy olyan éleket keresünk, amelyeknek nincs közös csúcsuk, és minden csúcs valamelyiküknek végpontja.

1.1. DEFINÍCIÓ. A G gráf éleinek olyan (hurokélmentes) halmazát, amelyeknek nincs közös pontjuk, *független élhalmaznak* vagy *(részleges) párosításnak* nevezzük. Ha egy csúcs végpontja a párosítás valamelyik élének, akkor azt mondjuk, hogy a csúcsot a párosítás *fedti*. *Teljes párosítás* az olyan párosítás, amely G minden csúcsát fedti. \diamond

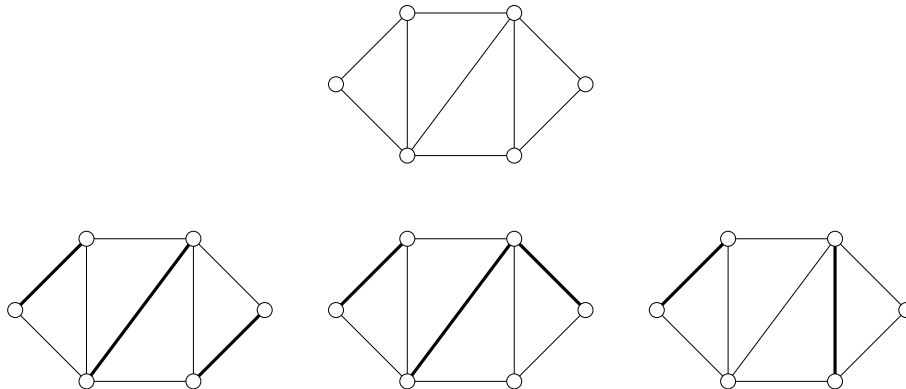
Máshogyan is megfogalmazhatjuk a párosítás definícióját.

1.2. DEFINÍCIÓ. A $G = (V, E)$ gráf éleinek egy P részhalmazát *független élhalmaznak* vagy *párosításnak* nevezzük, ha a $G' = (V, P)$ részgráfban minden csúcs foka legfeljebb egy. \diamond

A fenti 1.2. definíció alapján sem lehet hurokél egy párosításban, hiszen az kettőt ad a kérdéses csúcs fokszámához. Az üres halmaz mint élhalmaz mindig párosítás.

Figyelem! Párosításokról *nem* csak kétosztályú gráfok esetén beszélünk! Ugyan a kétosztályú gráfokat szokás páros gráfnak is nevezni, de ott a „páros” szó a „páros körülményű” jelzőből jön, nem csúcspárokra utal. \diamond

Példa.



Felül látható a G gráf, alatta ugyanaz három példányban, ahol a vastag élek a kiválasztott élek halmazát jelölik. Az első és a harmadik ábrán párosításokat látunk, az elsőn ráadásul teljeset; a középső példa nem párosítás, hiszen van benne kétszer fedett csúcs.

\diamond

Triviális feltétele teljes párosítás létezésének, hogy a gráfnak páros sok csúcsa legyen;

továbbá kétosztályú gráfok esetén az is szükséges, hogy mindkét osztályban ugyanannyi csúcs legyen.

1.1. Párosítások kétosztályú (páros) gráfokban

Figyelem! A fejezetben **nem** csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk! Persze kétosztályú gráfban hurokél definíció szerint nem lehet, de többszörös él igen. Ahol szükséges az egyszerűség, ott külön jelezni fogjuk. \diamond

Példa. *A táncpartin hat fiú és hat lány vesz részt. Géza Annával, Blankával, Cilivel, Dórával, Emesével és Flórával, Huba Blankával, Cilivel és Emesével, Imre Blankával és Emesével, Jenő és Kálmán Blankával és Cilivel, Laci pedig Annával, Cilivel, Dórával és Flórával táncolna kölcsönösen szívesen. Hány pár táncolhat egyszerre?*

Megoldás. Észrevehetjük, hogy négy fiú, Huba, Imre, Jenő és Kálmán, esetében összesen három lány jön szóba, Blanka, Cili és Emese. Így nyilvánvaló, hogy négyük közül legalább egynek nem jut partner; ezért összesen is legfeljebb öt párost tudunk alkotni. Ennyit azonban tudunk is, például az alábbi párosítás szerint: Géza-Anna, Huba-Blanka, Imre-Emese, Kálmán-Cili, Laci-Dóra. \diamond

Frobenius tétele szükséges és elégséges feltételt ad teljes párosítás létezésére *kétosztályú* gráfban, vagyis válaszol a korábbi tánctermei kérdésre. A tétel kimondásához szükségünk van egy jelölésre.

1.3. DEFINÍCIÓ. Ha X a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak egy halmaza, akkor $N_G(X)$ jelöli mindazon csúcsokat, amelyek X valamelyik (esetleg több) csúcsával össze vannak kötve. Formálisan: egy $X \subseteq V$ halmazra $N_G(X) = \{v \in V : \exists u \in X, \text{ melyre } uv \in E\}$. Röviden $N_G(X)$ -et X szomszédai halmazának nevezzük. Ha az X halmaz egyetlen v csúcsból áll, akkor $N_G(v)$ helyett az egyszerűség kedvéért $N(v)$ -t írunk. Ha a szöveggörnyezetből egyértelműen kiderül, melyik gráfban nézzük az X csúcshalmaz szomszédságát, akkor az $N_G(X)$ helyett $N(X)$ -et is írhatunk. Az N betű az angol neighbour vagy a német Nachbar (szomszéd) szóból jön. \diamond

Megjegyezzük, $N_G(X)$ -et definiálhatjuk a benne található csúcsok szomszédainak uniójaként is, azaz $N_G(X) = \cup_{v \in X} N_G(v)$.

MEGJEGYZÉS. Vegyük észre, hogy ha $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráf és pl $X \subseteq A$, akkor $N_G(X) \subseteq B$. \diamond

A fenti táncos példát kétosztályú gráfra lefordítva a fiúk $X = \{\text{Huba, Imre, Jenő, Kálmán}\}$ részhalmazának szomszédsága $N_G(X) = \{\text{Blanka, Cili, Emese}\}$. A probléma tehát abból fakad, hogy $|X| < |N_G(X)|$ az egyik csúcsoztály egy bizonyos részhalmazára. Egy ilyen szituáció nyilván kizárja egy teljes párosítás létezését a gráfban, még ha egyenlők is az osztályok csúcsszámai; Frobenius tétele viszont biztosítja, hogy más nem állhat a háttérben.

A következő definíció elnevezésének magyarázatát később fogjuk látni.

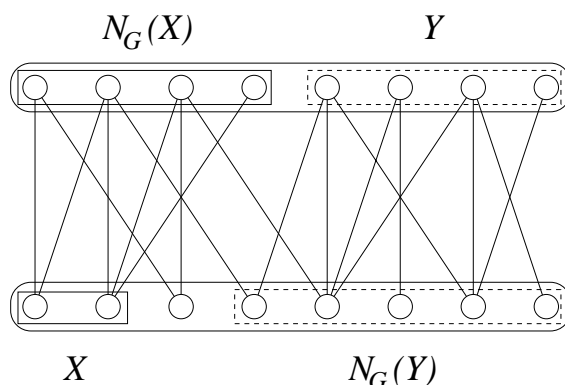
1.4. DEFINÍCIÓ. A $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráfban az A osztály teljesíti a Hall-feltételt, ha minden $X \subseteq A$ -ra $|N_G(X)| \geq |X|$. \diamond

MEGJEGYZÉS. Az üres halmazra $0 = |N(\emptyset)| \geq |\emptyset| = 0$ mindig teljesül, ezt nem szükséges külön ellenőrizni. \diamond

A Hall-feltételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha kiválasztjuk A -nak k darab csúcsát tetszőlegesen, akkor ehhez a k csúchoz legalább k darab olyan B -beli csúcs legyen, amely az A -beli kiválasztott csúcsok valamelyikével össze van kötve. Ennek **minden** k -ra teljesülnie kell (nyilván $k = 1, \dots, |A|$ közül). Feladatokban is gyakran ezt a szétbontást, az $|X|$ szerinti ellenőrzést használjuk.

1.5. LEMMA. Legyen $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráf, ahol $|A| = |B|$. Ekkor A teljesíti a Hall-feltételt $\iff B$ teljesíti a Hall-feltételt.

Bizonyítás. A szerepek felcserélhetősége miatt elegendő a (\implies) irányt megmutatnunk. Tegyük hát föl, hogy A teljesíti a Hall-feltételt. Vegyünk egy tetszőleges $X \subseteq B$ csúcshalmazt, és legyen $Y = A \setminus N_G(X)$. Ekkor $|A| = |Y| + |N_G(X)|$. A feltétel miatt $|N_G(Y)| \geq |Y|$, és mivel Y -nak nincs szomszédja X -ben, $|X| + |N_G(Y)| \leq |B|$. Mivel $|A| = |B|$, $|Y| + |N_G(X)| = |A| \geq |X| + |N_G(Y)|$ adódik, átrendezve $|N_G(X)| \geq |X| + (|N_G(Y)| - |Y|) \geq |X|$, éppen, amit akartunk.



\square

1.6. TÉTEL (FROBENIUS TÉTELE). A $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha $|A| = |B|$, és minden $X \subseteq A$ -ra $|N_G(X)| \geq |X|$.

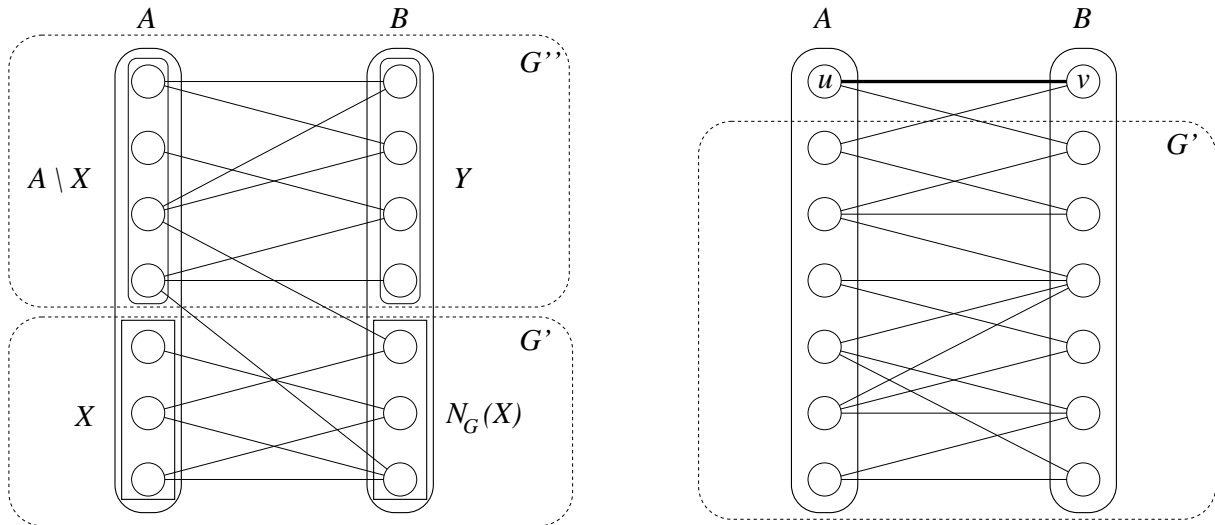
Bizonyítás. A bizonyítás erejéig nevezzünk egy $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráfot *jónak*, ha kielégíti a feltételeinket, azaz $|A| = |B|$, és A -ra teljesül a Hall-feltétel: minden $X \subseteq A$ -ra $|N_G(X)| \geq |X|$. Tehát azt kell belátnunk, hogy G -ben van teljes párosítás $\iff G$ jó.

Szükségesség ($G = (A, B; E)$ kétosztályú gráfban van teljes párosítás $\implies G$ jó): nyilvánvaló. Ha ugyanis van egy P teljes párosítás G -ben, akkor egy A -beli csúcsnak csak B -beli szomszédja lehet és fordítva, és a párosítás teljessége miatt P egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés A és B között, tehát $|A| = |B|$. Továbbá tetszőleges $X \subseteq A$ részhalmaz csúcsainak P szerinti párjai $N_G(X)$ -ben vannak, így $|N_G(X)| \geq |X|$.

Elégségesség ($G = (A, B; E)$ kétosztályú gráf jó $\Rightarrow G$ -ben van teljes párosítás): A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk az $n = |A| = |B|$ osztályméret szerint. Ha $n = 1$, az állítás triviális: mindkét osztályban egy csúcs van, és $X = A$ választással $|N_G(X)| \geq |X|$ biztosítja, hogy van él a két csúcs között. Most tehát tegyük fel, hogy $n = |A| = |B|$, és hogy minden n -nél kisebb osztályméretű jó kétosztályú gráfban van teljes párosítás. Két eset állhat fenn:

Első eset: van olyan nemüres $X \subsetneq A$ valódi részhalmaz, melyre $|N_G(X)| = |X|$. Jelöljük Y -nal a nemüres $B \setminus N_G(X)$ csúcshalmazt. Ekkor Y -nak nincs szomszédja X -ben, tehát $N_G(Y) \subseteq A \setminus X$. Sőt mivel G a B felől nézve is jó, $|N_G(Y)| \geq |Y| = |B| - |N_G(X)| = |A| - |X|$, tehát $N_G(Y) = A \setminus X$. Így az $X \cup N_G(X)$ halmaz által feszített G' részgráf, és az $Y \cup N_G(Y)$ által feszített G'' részgráf is egyaránt jó, tehát az indukciós feltevés szerint mindkettőben van teljes párosítás. Ezek uniója teljes párosítás G -ben.

Második eset: nincs olyan nemüres $X \subsetneq A$ valódi részhalmaz, melyre $|N_G(X)| = |X|$, azaz a feltételünk szigorú egyenlőtlenséggel teljesül: minden nemüres $X \subsetneq A$ valódi részhalmazra $|N_G(X)| > |X|$. Vegyünk egy tetszőleges uv élt ($u \in A, v \in B$), és hagyjuk el a G gráfból, azaz tekintsük az $A' = A \setminus \{u\}$ és a $B' = B \setminus \{v\}$ csúcsok által feszített G' részgráfot. G' is jó: $|A'| = |B'|$, hiszen $|A| = |B|$ volt; továbbá minden nemüres $X \subsetneq A'$ -nak legalább $|X| + 1$ szomszédja volt G -ben, amiből legfeljebb v -t hagytuk ki, tehát G' -ben is marad legalább $|X|$. Az indukciós feltevés szerint G' -ben van teljes párosítás, amihez az uv élt hozzávéve G -nek egy teljes párosítását kapjuk.



Illusztráció az elégségesség bizonyításának első, illetve második esetéhez.

□

Szavakban tehát azt követeljük meg, hogy egyrészt a két osztály mérete egyforma legyen, másrészt akárhogy is választjuk ki A egy X részhalmazát (a táncteremben mondjuk néhány lányt), ennek a részhalmaznak legalább annyi szomszédja legyen (B -ben), mint ahány eleme volt a részhalmaznak. (A táncteremi problémánál ez szavakban azt jelenti, hogy bármelyik k lány legalább k fiúval táncoljon szívesen). Az világos, hogy mindkét feltétel szükséges, hiszen ha $|N_G(X)| < |X|$ volna, akkor nem lehetne X csúcsait fedő

párosítás, hiszen X -ből csak $N_G(X)$ -be mehetnek élek, az $|A| = |B|$ feltétel pedig nyilvánvaló, hisz minden párban egy fiú és egy lány táncol. A két feltétel *együtt* elégséges is, mint azt a bizonyításban láttuk (v.ö. LPV 10.3.).

Az elégségség bizonyításának gondolatmenete tömören a következő volt: 1) ha van a Hall-feltételt egyenlőséggel teljesítő részhalmazunk, az két kisebb, jó gráfra vágja szét a gráfunkat (itt használtuk, hogy a másik osztályra is teljesül a Hall-feltétel, 1.5. Lemma); 2) ha nincs ilyen részhalmaz, tetszőleges élt kidobva a maradék gráf ismét triviálisan jó lesz. A kisebb jó gráfokban pedig indukcióval találunk teljes párosítást.

1.7. KÖVETKEZMÉNY (KÖNIG TÉTELE).

(1) r -reguláris kétosztályú gráfban létezik teljes párosítás, ha $r \geq 1$.

(2) r -reguláris kétosztályú gráf élkromatikus száma r .

Bizonyítás. (1)-nél legyen a $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráf r -reguláris. Ekkor G -ben az élek száma $|E| = |A| \cdot r = |B| \cdot r$. Így valóban $|A| = |B|$. Ugyanezt az ötletet használjuk a $N_G(X)$ -re vonatkozó feltétel ellenőrzésekor. Tekintsük azt a G' kétosztályú gráfot, amelynek két osztálya X és $N_G(X)$, élei pedig G ezen két osztály között menő élei (ez tehát G -nek az $X \cup N_G(X)$ által feszített részgráfja.) Ebben a részgráfban X minden csúcsának foka r , $N_G(X)$ minden csúcsának foka legfeljebb r (hiszen $N_G(X)$ egy csúcsából mehet nem X -beli csúcsba is él.) Így a G' éleinek száma $|X| \cdot r$, ami legfeljebb $|N_G(X)| \cdot r$. Ebből valóban $|X| \leq |N_G(X)|$, vagyis a Frobenius tételbeli mindkét feltétel teljesül, azaz van teljes párosítás G -ben.

(2) rögtön következik (1)-ből: vegyünk G -ben egy teljes párosítást, színezzük a benne szereplő éleket pirosra, majd hagyjuk el őket G -ből. A maradék gráf $(r-1)$ -reguláris, így újra találunk egy teljes párosítást, amit egy másik színnel színezzük, majd elhagyunk. Az eljárást összesen r -szer alkalmazva minden élt megszíneztünk jól. \square

Hogyan változik a helyzet, ha nem ugyanannyi fiú van, mint lány, de megelégszünk azzal, hogy minden lány táncoljon? Ez a gráfok nyelvén azt jelenti, hogy nem feltétlen teljes párosítást keresünk, hanem olyant, amely A minden pontját fedi.

1.8. TÉTEL (HALL TÉTELE). $A G = (A, B; E)$ kétosztályú gráfban akkor és csak akkor létezik A -t fedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ -ra $|N_G(X)| \geq |X|$.

Tanulságos lehet lemásolni a Frobenius tétel bizonyítását erre az esetre is, mi viszont azt vázoljuk, hogy a Hall tétel hogyan vezethető vissza Frobenius tételére.

Bizonyítás. A Hall-feltétel szükségessége ugyanúgy látszik, mint a Frobenius tételnél, így elég az elégségséget belátni. $X = A$ -ra alkalmazva a Hall-feltételt, azt kapjuk, hogy $|A| \leq |N_G(A)| \leq |B|$ (hiszen $N_G(A) \subseteq B$). Vegyünk hozzá A -hoz $|B| - |A|$ darab **fiktív** csúcsot, és ezek mindegyikét kössük össze B minden pontjával. Így egy $G^* = (A^*, B; E^*)$ kétosztályú gráfot kapunk. Frobenius tételével megmutatjuk, hogy G^* -ban van teljes párosítás.

Világos, hogy $|A^*| = |B|$. Legyen $X \subseteq A^*$. Ha X tartalmaz fiktív pontot, akkor $N_{G^*}(X) = B$, így $|N_{G^*}(X)| = |B| = |A^*| \geq |X|$. Ha X nem tartalmaz fiktív pontot, azaz $X \subseteq A$, akkor $N_{G^*}(X) = N_G(X)$, így ebben az esetben is teljesül a Hall-feltétel. Tehát a

Hall-feltétel igaz G^* -ra és $|A^*| = |B|$, alkalmazható tehát a Frobenius tétel, így G^* -ban van teljes párosítás. Ezek közül a nem fiktív csúcsokból induló élek (melyek az eredeti G élei) egy A -t fedő párosítást adnak G -ben. \square

Mi a helyzet akkor, ha (a táncterminál problémánál) nem ragaszkodunk ahhoz, hogy minden lány táncoljon, hanem megelégszünk azzal, hogy legfeljebb d lány áruljon petrezselymet, azaz legfeljebb d olyan csúcs legyen A -ban, amelyet a párosítás nem fed? Erre ad választ a deficités Hall-tétel.

1.9. DEFINÍCIÓ. A $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráfban egy $X \subseteq A$ halmaz *deficitje* a $\text{def}_G(X) = |X| - |N_G(X)|$ mennyiség. \diamond

1.10. TÉTEL (DEFICITES HALL-TÉTEL). A $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráfban akkor és csak akkor létezik A -t legfeljebb d csúcs híján fedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ halmazra $\text{def}_G(X) \leq d$. (Átrendezve ez annyit tesz, hogy $|N_G(X)| \geq |X| - d$ minden $X \subseteq A$ -ra).

Bizonyítás. A feltétel szükségessége megint nyilvánvaló, hiszen ha valamely $X \subseteq A$ halmazra $|X| - |N_G(X)| > d$, akkor X csúcsai közül több mint d -nek nem lesz párja. Az elégségesség bizonyítása ismét fiktív pontok bevezetésével történhet. Vegyünk hozzá B -hez d darab fiktív csúcsot (ezek halmaza legyen D), és ezeket kössük össze A minden csúcsával. A $B^* = B \cup D$ jelölést használva így egy $G^* = (A, B^*; E^*)$ kétosztályú gráfot kapunk. Megmutatjuk, hogy G^* -ban az A osztályra teljesül a Hall-feltétel. Legyen $X \subseteq A$. Ekkor $N_{G^*}(X) = N_G(X) \cup D$, így $|N_{G^*}(X)| = |N_G(X)| + |D| \geq |X| - d + d$, a tételbeli feltétel miatt. Frobenius tétele alapján G^* -ban van A -t fedő párosítás. Ebből legfeljebb d darab él megy fiktív csúcsba, így a párosítás G -beli élei legfeljebb d csúcs híján fedik A -t. \square

A deficités Hall-tétel segítségével azt is megmondhatjuk, hogy mekkora egy kétosztályú gráfban a legnagyobb párosítás.

1.11. DEFINÍCIÓ. Egy G (nem feltétlenül kétosztályú) gráfban a független élek maximális számát, azaz a legnagyobb párosítás méretét $\nu(G)$ -vel jelöljük. \diamond

1.12. KÖVETKEZMÉNY. $\nu(G) = |A| - \max\{\text{def}_G(X) : X \subseteq A\}$ bármely $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráfban.

Bizonyítás. Legyen $d_0 = \max\{\text{def}_G(X) : X \subseteq A\}$ a maximális deficit értéke. Mivel minden $X \subseteq A$ halmaz deficite legfeljebb d_0 , a deficités Hall-tétel alapján létezik A -t d_0 híján fedő párosítás, azaz $\nu \geq |A| - d_0$. Másrészt a maximális deficitet valahol elérjük, azaz van olyan $X_0 \subseteq A$, amelyre $\text{def}_G(X_0) = d_0$, tehát minden párosítás legalább d_0 csúcsot fedetlenül hagy A -ból, azaz $\nu \leq |A| - d_0$. \square

MEGJEGYZÉS. Mivel az $X = \emptyset$ esetén $\text{def}_G(X) = |X| - |N_G(X)| = 0$, így $d_0 \geq 0$. \diamond

Ezen észrevétel után már könnyű belátni König tételét. (Ehhez a Gráfparaméterekről szóló részben érdemes elolvasni a ν és a τ gráfparaméterek definícióját.)

1.13. TÉTEL (KÖNIG). kétosztályú gráfban $\nu = \tau$, azaz a független élek maximális száma

egyenlő a lefogó pontok minimális számával.

Bizonyítás. Legyen a kétosztályú gráf $G = (A, B; E)$. A fenti következmény szerint $\nu = |A| - d_0$, ahol d_0 jelöli $\max\{|X| - |N_G(X)| : X \subseteq A\}$ -t, mint korábban. Tekintsünk egy $X_0 \subseteq A$ -t, amelyre $|X_0| - |N_G(X_0)| = d_0$. Ekkor $L = (A \setminus X_0) \cup N_G(X_0)$ lefogó ponthalmaz, hiszen az X_0 pontjaiból induló élek másik végpontját $N_G(X_0)$ tartalmazza, az $A \setminus X_0$ -ból induló éleket pedig $A \setminus X_0$ fogja le. Mivel $|L| = |A| - |X_0| + |N_G(X_0)| = |A| - d_0$, így találtunk ν pontú lefogó ponthalmazt.

Mivel a gráfban van ν független él, ezért ennél kevesebb ponttal nem is lehet lefogni az éleket (ez ugyanaz, mint a Gráfparaméterek részben a $\tau \geq \nu$ bizonyítása). \square

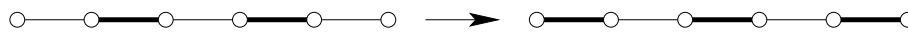
1.2. Javító és majdnem javító utak

A deficientes Hall-tétel alapján elméletileg meghatározhatjuk, hogy egy $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráfban mekkora a legnagyobb párosítás mérete. Ehhez azonban első ránézésre az összes $X \subseteq A$ részhalmaz deficitjét meg kéne határozni, ami már $|A| = 20$ csúcs esetén is $2^{20} \approx 1.000.000$ részhalmaz vizsgálatát jelentené. Ráadásul még ekkor sem volna konkrétan a kezünkben egy maximális párosítás. Ennél azonban ügyesebben is nekifoghatunk egy egyszerű, de hasznos észrevétel segítségével.

1.14. DEFINÍCIÓ. Legyen $G = (A, B; E)$ egy kétosztályú gráf, és $P \subseteq E$ egy (részleges) párosítás. Egy út *javító út* P -re nézve, ha P nem fedi a végpontjait, és az élei felváltva P -n kívüliek, illetve P -beliek. \diamond

1.15. LEMMA. Legyen $G = (A, B; E)$ egy kétosztályú gráf és $P \subseteq E$ egy párosítás. Ha van javító út P -re nézve, akkor van P -nél nagyobb párosítás.

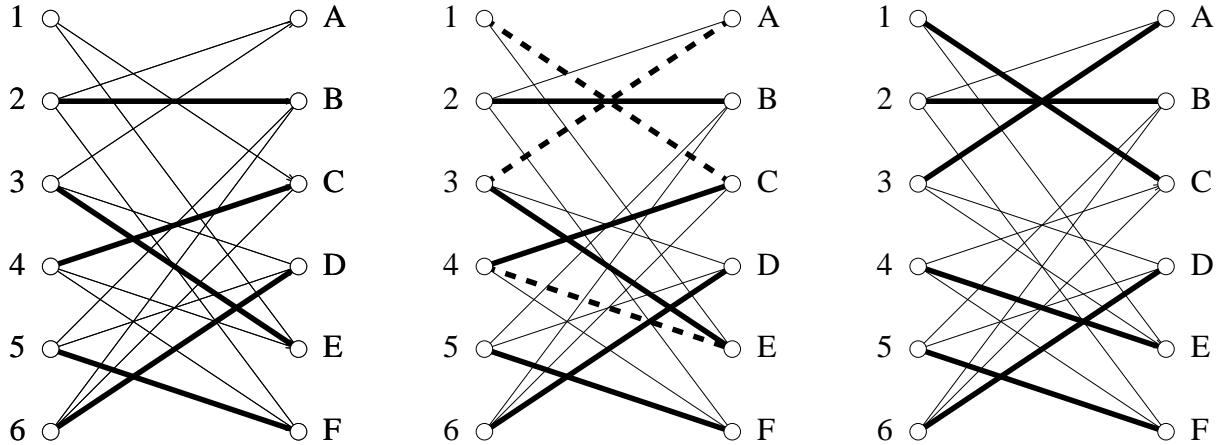
Bizonyítás. Módosítsuk P -t úgy, hogy a javító út P -beli elemeit kivesszük belőle, a P -n kívüli éleit pedig bevesszük P -be. Az így kapott P' élhalmaz független lesz, hiszen egyik csúcsonál sem lehet két él: a javító úton kívül nyilván nem, mert ott P és P' megegyezik; a javító út két végpontját P nem fedte le, így nem romolhattak el; a javító út belső pontjaira pedig mind P -nek, mind P' -nek egy-egy éle illeszkedik. Mivel a javító út P -n kívüli éllel indul és végződik, $|P'| = |P| + 1$.



Párosítás növelése javító úttal.

\square

Példa.



Egy párosítás kétosztályú gráfban, egy javító út (1-C-4-E-3-A) és a javítás eredménye.

◇

Hamarosan látunk módszert arra, hogy hogyan lehet javító utakat keresni, és ezáltal növelni a párosításunk méretét. De vajon így biztosan találunk egy lehető legnagyobb párosítást? Vagy kifulladásra a módszer hamarabb is? A következő tétel adja a megnyugtató választ.

1.16. TÉTEL. Legyen $G = (A, B; E)$ egy kétosztályú gráf és $P \subseteq E$ egy párosítás. Ha nincs javító út P -re nézve, akkor nincs P -nél nagyobb párosítás G -ben.

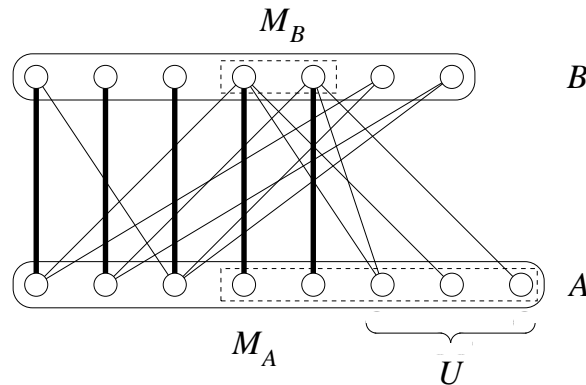
Bizonyítás. Legyen U az A azon csúcsainak halmaza, amit nem fed P . Ha $U = \emptyset$, akkor P fedi A -t, így persze nincs nála nagyobb párosítás; feltehető tehát, hogy $U \neq \emptyset$. A deficitese Hall-tételnél láttuk, hogy ha van olyan $X \subseteq A$ halmaz, melynek deficitje, $\text{def}_G(X) = |X| - |N_G(X)| = |U|$, akkor minden párosítás legalább $|U|$ csúcsot fedetlenül hagy A -ban, azaz P egy lehető legnagyobb párosítás. Célunk tehát egy megfelelő $X \subseteq A$ halmazt találni.

Nevezzük *majdnem javító útnak* egy olyan utat, ami A -nak egy fedetlen pontjából (azaz U -ból) indul, és minden második éle P -ben van. Itt tehát nem követeljük meg, hogy fedetlen csúcsba érkezzen (ami a javító út definíciója volna). Jelöljük M_A -val és M_B -vel azon A , illetve B osztálybeli csúcsok halmazát, amelyek előállnak majdnem javító út pontjaként. Az egyetlen $u \in U$ csúcsból álló utakat is majdnem javító útnak tekintjük, így $U \subseteq M_A$.

Vegyük észre, hogy P fedi $M_A \setminus U$ -t (M_A definíciója szerint), és mivel G -ben nincs javító út, M_B -t is. Egy $v \in M_A \setminus U$ csúcsba vezet egy L majdnem javító út, melynek utolsó, uv éle P -beli, ahol persze $u \in M_B$. Tehát $M_A \setminus U$ pontjainak P -beli párjai M_B -ben vannak. Hasonlóan, egy $u \in M_B$ csúcs P -beli párja egy u -ban végződő majdnem javító út végére illesztve elérhető majdnem javító úton, tehát M_A -ban van, de nem U -ban, mert annak csúcsait nem fedi P . Tehát P párba állítja M_B és $M_A \setminus U$ csúcsait, következésképpen $|M_B| = |M_A \setminus U|$.

Másrészt megmutatjuk, hogy $N_G(M_A) = M_B$. Azt már láttuk, hogy M_B minden csúcsból indul él M_A -ba (a P -beli), így már csak az kell, hogy M_A -ból csak M_B -be megy él. Egy $v \in U$ csúcsból induló e él másik végpontja elérhető majdnem javító úton (e maga egy majdnem javító út), tehát M_B -ben van. Ha egy $v \in M_A \setminus U$ csúcsból induló e él egy M_B -n kívüli u csúcsba menne, akkor e nem lehetne P -beli, így egy v -ben végződő majdnem javító utat kiegészítve e -vel u -t is elérhetnénk, tehát mégiscsak $u \in M_B$ volna, ami lehetetlen.

Így $|N_G(M_A)| = |M_B| = |M_A| - |U|$, tehát M_A deficitje $|U|$, tehát minden párosítás legalább $|U|$ csúcsot fedetlenül hagy.



□

A fenti tétel alapján a javító utas módszer roppant előnyösnek bizonyul: amíg találunk javító utat az aktuális párosításra nézve, azt meg tudjuk növelni; amikor pedig nem, akkor a majdnem javító utakkal elért csúcsok halmaza rögtön bizonyítékot is szolgáltat arra nézve, hogy nincs is nagyobb párosítás. A (majdnem) javító utak keresése számítógépekkel nagy gráfokon is hatékonyan megvalósítható, ennek mikéntjét fogjuk látni a következő szakaszban.

1.2.1. Javító utak és majdnem javító utak keresése szélességi kereséssel.

Adott a $G = (A, B; E)$ kétosztályú gráf, ebben kell keresnünk egy legnagyobb párosítást. Ezt úgy tesszük, hogy keresünk egy P kiindulási párosítást, majd addig növeljük, amíg maximális nem lesz. Az alábbi eljárásnál kényelmi okokból megirányítjuk G éleit: a párosítás élei mindig A -ból B -be mutassanak, a többi B -ből A -ba. Amíg nincs párosításunk ($P = \emptyset$), minden él B -ből A -ba mutat. A párosítást B felől fogjuk keresni. (Természetesen fordítva is irányíthatjuk volna G éleit, és akkor A felől keresnénk párosítást.)

Gráf tárolása:

Soroljuk fel a csúcsokat, majd minden csúcs mellett listázzuk a szomszédait (az irányítást figyelembe véve).

Első lépés: *Mohó algoritmussal keressünk egy párosítást.*

Sorra vesszük B csúcsait, és megvizsgáljuk az éppen aktuális v csúcs szomszédait. Ha van közöttük olyan u csúcs, ami még nem szerepel a párosításban (azaz u -nak nincs szomszédja A -ban), belevesszük, magyarul a vu él irányítását megfordítjuk. Ezt úgy adminisztráljuk, hogy a v szomszédai közül kivesszük u -t, és az u szomszédai közé bevesszük v -t. Ha az utolsó csúcsot is megvizsgáltuk B -ben, egy új él bevitelével nem bővíthető (de nem feltétlenül a lehető legnagyobb) párosítást kaptunk.

Második lépés: *Javító utakat keresünk.*

Az irányítás miatt minden út felváltva lép P -n kívüli és P -beli éleken, hiszen A -ból B -be csak P -beli élek mennek. Így nekünk egy $b \in B$ fedetlen csúcsot egy $a \in A$ fedetlen csúccsal összekötő irányított utat kell keresnünk, az automatikusan javító út lesz.

Javító út keresésének lépései:

1. Listába vesszük B fedetlen csúcsait (ezt a listát *elérési listának* fogjuk hívni).
2. Legyen v az elérési lista első eleme. A lista végére írjuk v szomszédait, alájuk pedig v nevét (hogy tudjuk, melyik csúcs szomszédjaként értük el őket). Ezzel v -t átvizsgáltnak, a listába vett szomszédokat listázottnak minősítjük.
3. Legyen v az elérési lista következő eleme. Ugyanúgy írjuk a lista végére v szomszédait, de csak azokat, amelyek még nem listázottak, és írjuk alájuk v nevét; ugyanúgy átminősítjük v -t és a listába vett szomszédait.
4. Ismételjük az előző lépést, míg fedetlen A -beli csúcsba nem érünk, vagy az elérési lista összes csúcsát át nem vizsgáljuk.

Ha fedetlen A -beli csúcsba értünk, abból visszafelé fel tudjuk építeni az oda vezető (javító) utat, hiszen minden csúcs alá írtuk, hogy honnan jöttünk. A javító út éleinek irányítását megfordítva (azaz felcserélve a P -beli és az azon kívüli éleit) tudjuk növelni P -t, és újra kereshetünk javító utat. Mivel a fedetlen csúcsok száma minden lépésben csökken, előbb-utóbb megáll az eljárás. Ha nem érünk fedetlen csúcsba, akkor nincs a gráfban javító út, tehát P maximális párosítás.

A gyakorlati megvalósításhoz több listát fogunk vezetni.

Csúcsok elérési listája: Az eljárás szerinti sorrendben írjuk bele az elért csúcsokat, illetve azok alá, hogy melyik csúcsból értük el.

Csúcsok állapotlistája: Három állapotot különböztetünk meg, amit most színekkel jelölünk:

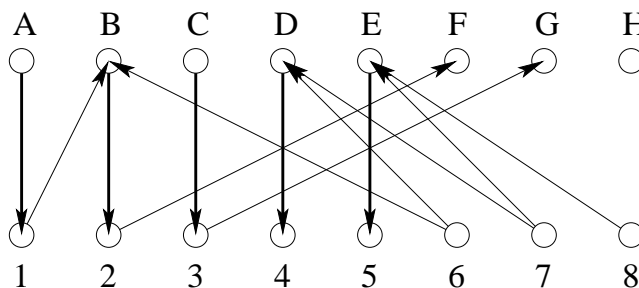
- fehér szín (f): listába még nem vett csúcsok;
- szürke szín (s): a listában már szereplő, de még nem átvizsgált csúcsok;
- fekete szín (F): a listában szereplő, már átvizsgált csúcsok.

Kezdetben minden csúcs fehér. A csúcsok állapotát is az eljárás lépéseinek megfelelően módosítjuk: amikor listába kerül, szürkére színezzük, amikor átvizsgáljuk, feketére.

Lássuk az eljárás megvalósítását az alábbi képen látható gráffal illusztrálva.

A gráf tárolása (csúcsok és szomszédai; helytakarékosági okokból a csúcsok alá írjuk azok szomszédait):

Csúcs:	1	2	3	4	5	6	7	8	A	B	C	D	E	F	G	H
Szomszédok listája:	B	F	G			D	D	E	1	2	3	4	5			
						B	E									



Javító és majdnem javító utak keresése.

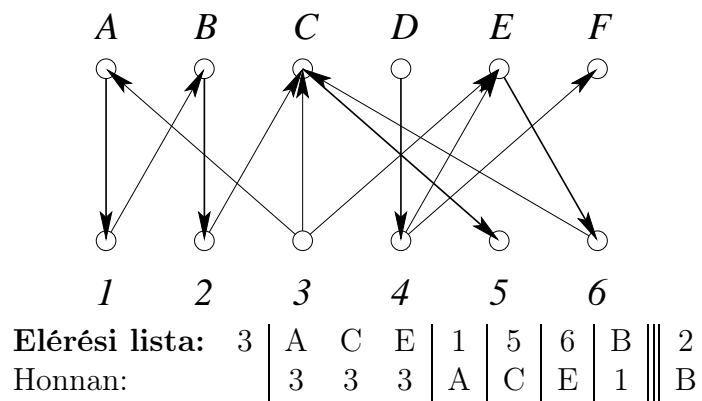
Elérési lista:	6	7	8		D	B		E		4		2		5		F
Honnan:					6	6		7		D		B		E		2

A lépéseket | jelek választják el egymástól. A 4. lépésben a 8 nevű csúcsot vizsgáljuk át, ahonnan azonban egy új csúcsot sem érünk el, ezért az elért csúcsok listája nem bővül. Hasonló a helyzet a 8. lépésben.

Állapotlista csúcsai:	1	2	3	4	5	6	7	8	A	B	C	D	E	F	G	H
1. lépés:	f	f	f	f	f	s	s	s	f	f	f	f	f	f	f	f
2. lépés:	f	f	f	f	f	F	s	s	f	s	f	s	f	f	f	f
3. lépés:	f	f	f	f	f	F	F	s	f	s	f	s	s	f	f	f
4. lépés:	f	f	f	f	f	F	F	F	f	s	f	s	s	f	f	f
5. lépés:	f	f	f	s	f	F	F	F	f	s	f	F	s	f	f	f
6. lépés:	f	s	f	s	f	F	F	F	f	F	f	F	s	f	f	f
7. lépés:	f	s	f	s	s	F	F	F	f	F	f	F	F	f	f	f
8. lépés:	f	s	f	F	s	F	F	F	f	F	f	F	F	f	f	f
9. lépés:	f	F	f	F	s	F	F	F	f	F	f	F	F	s	f	f

A 9. lépésben elért F csúcs fedetlen (ez könnyen kiolvasható a gráf tárolt adataiból: F-nek nincs szomszédja), onnan visszafejtve találunk javító utat: F, 2, B, 6.

Az alábbi gráfon nézzük meg, hol akad el a szélességi keresés. A vastag és lefelé irányított élek a már megtalált párosítás élei.



Az elérési listában szerepelnek a majdnem javító úton elérhető csúcsok a két osztályból: A, B, C, E, illetve 1, 2, 3, 5, 6. Utóbbi csúcshalmaz szomszédsága az előbbi, tehát deficitje 1, így megtaláltuk annak bizonyítékát, hogy nincs nagyobb párosítás a megadottnál.