Az előadás anyagának törzsrésze

1. Az egyváltozós differenciálszámítás alkalmazásai

1. Szélsőértékek.

- *Fogalmak.*

  Def. Egy $a \in \mathbf{R}$ pont *környezete* olyan J nyílt intervallum, melyre $a \in J$.

  Def. Egy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénynek *lokális minimuma* van a-ban, ha a-nak van olyan J környezete, melyre $f(a) \leq f(x)$ $\forall x \in J$.

  Hasonlóan: ... *lokális maximuma* van... ha $f(a) \geq f(x)$ $\forall x \in J$.

  Ilyenkor az a pont neve: lokális minimumhely/maximumhely.

  Def. Egy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénynek *globális minimuma* van a-ban egy H halmazra nézve, ha $f(a) \leq f(x)$ $\forall x \in H$.

  Hasonlóan: ... *globális maximuma* van... ha $f(a) \geq f(x)$ $\forall x \in H$.

  Szélsőérték = minimum vagy maximum (lok./glob. esetben is mondjuk).

- *A lokális szélsőérték szükséges feltétele a deriváltra nézve.*

  Tétel. Ha f differenciálható a-ban és ott lokális szélsőértéke van, akkor
  $$f'(a) = 0.$$

  Szemléletesen: lokális szélsőértéknél az érintő csak vízszintes lehet.

  Megj.: az $f'(a) = 0$ feltétel nem elégséges: pl. $f(x) := x^3$-nek 0-ban nincs szélsőértéke, bár $f'(0) = 0$. További feltételekkel kiegészítve már elégséges lesz.

2. Monotonitás.

- *Fogalmak* (ismétlés). Egy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény az I intervallumon

  szigorúan növő, ha $\forall a, b \in I$ esetén fennáll: $a < b \;\Rightarrow\; f(a) < f(b)$,
  szigorúan csökkenő, ha .... $f(a) > f(b)$.

- *A szigorú monotonitás elégséges feltétele a derivált alapján.*

  Tétel. Legyen f differenciálható egy I intervallumon.
  - Ha $f'(x) > 0$ $(\forall x \in I)$ $\Rightarrow$ f szigorúan növő I-ben.
  - Ha $f'(x) < 0$ $(\forall x \in I)$ $\Rightarrow$ f szigorúan csökkenő I-ben.

  Szemléletesen: pozitív meredekség növekedést jelent (emelkedő), negatív meredekség csökkenést jelent (lejtő).

- *Következmény: a lokális szélsőérték elégséges feltétele az 1. deriválttal*

  Állítás. Legyen $f'(a) = 0$. Ha f' előjelet vált a-ban (azaz előtte – és utána $+$, vagy előtte $+$ és utána – egy környezetében), akkor f-nek lokális szélsőértéke van a-ban.

3. <u>A lokális szélsőérték elégséges feltétele a második deriválttal.</u>

   Tétel. Legyen f kétszer differenciálható a-ban, és $f'(a) = 0$.

   - Ha $f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$-nek lokális minimuma van a-ban.
   - Ha $f''(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$-nek lokális maximuma van a-ban.

2. Integrálszámítás egy változóban/1.

I. Határozatlan integrál (primitív függvény).

Alapgondolat: eddig megtanultunk deriválni: $f \mapsto f'$.
Most visszafelé csináljuk: adott függvény minek a deriváltja?

1. Alapfogalmak és tulajdonságok. Itt mindvégig legyen I egy intervallum.

   Def. Legyen $f : I \to \mathbf{R}$. Azt mondjuk, hogy F *primitív függvénye* f-nek, ha $F' = f$. Azaz, ha $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

   Alaptétel *(a primitív függvény egyértelműsége additív konstans erejéig).* Legyen I intervallum, $f : I \to \mathbf{R}$ és F egy primitív függvénye f-nek. Ekkor f bármely primitív függvénye előáll $F + c$ alakban, ahol $c \in \mathbf{R}$ állandó.

   Jelölés: Ha $f : I \to \mathbf{R}$, akkor $\int f(x)\,dx$ az általános primitív függvény, f ún. *határozatlan integrálja.* Azaz, ha $F' = f$, akkor

   $$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad (c \in \mathbf{R}).$$

2. Kiszámítása.

   (i) Elemi függvényekre: a deriválttáblázat "visszafelé".

   (ii) Műveletek. $\int (f+g) = \int f + \int g; \qquad \int kf = k\int f,$ ha $k \in \mathbf{R}$.

   (iii) Két integrálátalakító módszer (néha egyszerűbb alakra hozzák a feladatot).

   - Parciális integrálás: $\int f'g = fg - \int fg'$.
   - Helyettesítéses integrálás: $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt \,\Big|_{g(t)=x}$

     ahol g szigorúan monoton, diff.-ható függvény.

II. Határozott integrál (Riemann-integrál).

Motiváló probléma: ki tudjuk számítani téglalap területét, és ebből még egyes átdarabolással kapható alakzatokét is (háromszög, sokszög). Mekkora viszont egyéb alakzatoké, pl. $x \in [1,2]$ esetén az $y = x^2$ parabola alatti terület?

Alapgondolat: téglalapok uniójával közelítjük az alakzatot, és egyre "finomabb" közelítést veszünk. (Rajz.) Ez vezet az integrál fogalmához. A tényleges kiszámításra majd sokkal egyszerűbb módszert tanulunk.

1. *A Riemann-integrál fogalma.*

   $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény esetén értelmezzük. Szükséges fogalmak:

   Def. Az $I = [a,b]$ intervallum *felosztásának* hívunk bármely olyan $\tau := \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ponthalmazt, melyre $n \in \mathbf{N}^+$ és $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. A halmaz elemeit *osztópontoknak* hívjuk. A kapott $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ részintervallumok hosszát jelölje $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ $(\forall k = 1, ..., n)$. (Rajz.)

   Az egyszerűség kedvéért általában egyenlő közű, ún. *ekvidisztans felosztásokat* fogunk tekinteni, azaz amikor $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$. Ezeket τ_n-nel jelöljük (rajz).
   (Az eredmények általánosíthatóak a nem ekvidisztans esetre is.)

   Def. (*Darboux-féle alsó és felső közelítő összeg.*) Ha τ adott felosztás, akkor

   $$s(f,\tau) := \sum_{k=1}^{n} \min_{I_k} f \cdot \Delta x_k \quad \text{és} \quad S(f,\tau) := \sum_{k=1}^{n} \max_{I_k} f \cdot \Delta x_k.$$

   (Rajz: a grafikon alá/fölé írt téglalapok uniójának területe.)

   Az integrál a közelítő összegek határértéke lesz, ha a felosztást „minden határon túl finomítjuk”:

   Tétel. Bármely $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvényhez létezik egyetlen olyan $I \in \mathbf{R}$ szám, hogy ha (τ_n) ekvidisztans felosztások sorozata és $n \to \infty$, akkor

   $$\lim s(f,\tau_n) = \lim S(f,\tau_n) = I.$$

   (Biz. nincs.) Szemléletesen: a közelítő összegek alulról és felülről is a görbe alatti területhez tartanak.

   Def. f *Riemann-integrálja* a tételbeli I szám.

   Jelölés: változó nélkül $\displaystyle\int_a^b f = I$, változóval $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = I$.

2. *Értelmezés általánosabb közelítő összegekkel*

   Az $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ részintervallumokon minimum és maximum helyett bármely függvényérték vehető, adott $u_k \in I_k$ pontokban. Ekkor $s(f,\tau)$ és $S(f,\tau)$ helyére lép a

   Def. *Riemann-féle közelítő összeg:* $\quad R(f,\tau) := \sum_{k=1}^{n} f(u_k) \cdot \Delta x_k.$

   Tétel. Ha (τ_n) ekvidisztans felosztások sorozata és $n \to \infty$, akkor

   $$\lim R(f,\tau_n) = \int_a^b f.$$

3. Integrálszámítás egy változóban/2.

I. A határozott integrál kiszámítása.

1. *Az integrálszámítás alaptétele, vagy Newton–Leibniz-szabály.*

Ez teremt kapcsolatot a kétféle (határozatlan és határozott) integrál közt.

Newton–Leibniz-tétel. Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos. Ha F egy primitív függvénye f-nek, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

Jelölés: $\big[F\big]_a^b := F(b) - F(a)$, ezzel: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \big[F\big]_a^b$.

2. *Műveletek, integrálátalakító módszerek*

- Összeg és számszoros: $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g; \qquad \int_a^b kf = k\int_a^b f.$
- *Parciális integrálás:* $\displaystyle\int_a^b f'g = \big[fg\big]_a^b - \int_a^b fg'$
- *Helyettesítéses integrálás.*

  ha g szigorúan monoton, diff.-ható függvény, $a = g(c)$ és $b = g(d)$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

II. A határozott integrál jelentése, alkalmazásai.

1. A Riemann-integrál szemléletes jelentése: görbe alatti terület

pozitív értékű folytonos függvény esetén.

2. "Végtelen összegzés". Fizikában egy összmennyiség a megfelelő sűrűség integrálja, pl. a tömeg a sűrűségé, az össztöltés a töltéssűrűségé.

3. Grafikon ívhossza ha f' folytonos, akkor $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$

III. Improprius integrál.

Alapprobléma: ha a görbe alatti tartomány nem korlátos, lehet-e véges a területe?

Def. Legyen $I = [a, b)$, ahol $b \in \mathbf{R}$ vagy $b = +\infty$. Legyen $f : I \to \mathbf{R}$ folytonos, és F egy primitív függvény. Azt mondjuk, hogy f *impropriusan integrálható* I-ben, ha $\exists \lim\limits_{x \to b} F(x)$, és ekkor $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{x \to b} \int_a^x f(x)\,dx = \lim_{x \to b} F(x) - F(a).$

Ha az a pont nincs I-ben, akkor hasonló a definíció:

$f : (a, b] \to \mathbf{R}$ esetén $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - \lim_{x \to a} F(x),$

$f : (a, b) \to \mathbf{R}$ esetén $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x).$

4. Többváltozós differenciálszámítás/1.

Többváltozós függvények általános alakja: $f : \mathbf{R}^n \supset\!\!\to \mathbf{R}^m$

Többdimenziós környezet és belső pont fogalma:

Def. Egy $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ pont *környezete* egy $\mathbf{a}$ középpontú, valamilyen $r > 0$ sugarú gömb. Az $\mathbf{a}$ pont egy $H \subset \mathbf{R}^n$ halmaznak *belső pontja* (jelölés: $\mathbf{a} \in intH$), ha H tartalmazza a egy környezetét. (Deriválthoz és szélsőértékhez kell.)

I. Parciális derivált

1. Parciális derivált az $f : \mathbf{R}^2 \supset\!\!\to \mathbf{R}$ esetben

- *A parciális derivált értelmezése.*

  Def. Egy $f : \mathbf{R}^2 \supset\!\!\to \mathbf{R}$ függvény *első változó szerinti parciális deriváltja* egy $(a, b) \in intD_f$ pontban:
  $$\partial_1 f(a,b) := \lim_{x\to a} \tfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a},$$
  ha ez a limesz létezik és véges.

  Azaz, az $x \mapsto f(x, b)$ függvényt deriváljuk az $x = a$ helyen.

  (Más gyakori jelölések: $\partial_1 f$ helyett $\partial_x f$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}$, azaz a változóval indexeljük.)

  Hasonlóan: a *második változó szerinti parciális derivált*
  $$\partial_2 f(a,b) := \lim_{y\to b} \tfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b},$$
  ha ez létezik és véges. Azaz, az $y \mapsto f(a, y)$ függvényt deriváljuk az $y = b$ helyen. (Más gyakori jelölések: $\partial_y f$ vagy $\frac{\partial f}{\partial y}$.)

  Def. Parciális deriváltfüggvény: ha az $f : H \to \mathbf{R}$ függvényre létezik $\partial_1 f(u, v)$ a $H \subset \mathbf{R}^2$ halmaz minden (u, v) pontjában, akkor az $(u, v) \mapsto \partial_1 f(u, v)$ függvény jelölése $\partial_1 f : H \to \mathbf{R}$. (Hasonló $\partial_2 f$-re.)

- *A parciális derivált kiszámítása.*

  A megfelelő változó szerint deriválunk, a másik változót konstansnak tekintjük.

2. Más dimenziók.

- Ha $f : \mathbf{R}^n \supset\!\!\to \mathbf{R}$: a fentihez hasonlóan megy, az i-edik változó (azaz x_i) szerinti $\partial_i f(x_1, ..., x_n)$ parciális deriválthoz az x_i változót mozgatjuk és e szerint deriválunk. (Más jelölések: $\partial_{x_i} f$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.)
- Ha $f : \mathbf{R}^n \supset\!\!\to \mathbf{R}^m$: itt $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ esetén $f(\mathbf{x}) = \Big(f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})\Big)$. Ekkor az f_1, ..., f_m ún. *koordinátafüggvények* számértékűek, így ezeket lehet parciálisan deriválni.

3. Második parciális derivált.

Legyen $f : \mathbf{R}^n \supset\!\!\to \mathbf{R}$. Ha valamelyik $\partial_i f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ parciális deriváltfüggvénynek magának is van j-edik parciális deriváltja

– egy $\mathbf{a}$ pontban, akkor ezt $\partial_j \partial_i f(\mathbf{a})$-val jelöljük (második parciális derivált)

– egy H halmazon, akkor $\partial_j \partial_i f : H \to \mathbf{R}$ (——————"——————függvény)

Ha $i = j$, akkor $\partial_i \partial_i f$ helyett $\partial_i^2 f$ a szokott jelölés. (Vigyázat, ez $\neq (\partial_i f)^2$!)

II. Derivált (Jacobi-mátrix, gradiens)

1. Értelmezése

Def. $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, ha $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, és $\forall i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$ esetén a $\partial_j f_i$ parciális deriváltfüggvények léteznek és folytonosak $\mathbf{R}^n$-en.

Def. Ha $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, akkor f *deriváltja* egy $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ pontban az

$$f'(\mathbf{a}) := \Big\{\partial_j f_i(\mathbf{a})\Big\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{a}) & \partial_2 f_1(\mathbf{a}) & \dots & \partial_n f_1(\mathbf{a}) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{a}) & \partial_2 f_2(\mathbf{a}) & \dots & \partial_n f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(\mathbf{a}) & \partial_2 f_m(\mathbf{a}) & \dots & \partial_n f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

$m \times n$-es mátrix. Neve: f *Jacobi-mátrixa* a-ban.

Speciálisan, ha f <u>számértékű</u> (azaz $m = 1$), akkor sormátrixot kapunk, amit vektornak tekintünk és gyakran $f'(\mathbf{a})$ helyett $\nabla f(\mathbf{a})$-val jelölünk:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \big(\ \partial_1 f(\mathbf{a}),\ \ \partial_2 f(\mathbf{a}),\ \ \dots\ \ \partial_n f(\mathbf{a})\ \big),$$

ennek neve f *gradiense* $\mathbf{a}$-ban.

2. Jelentése

- Közelítés szempontjából – érvényes az 1-dimenziós eset analógiája:

  ha $\mathbf{h} \approx 0$, akkor $\quad f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\mathbf{h}\ \ =: l(\mathbf{h})$.

- Geometriai jelentés az $f : \mathbf{R}^2 \supset\!\!\to \mathbf{R}$ esetben:

  – Parciális derivált: $\partial_1 f(a_1, a_2)$ értéke az (a_1, a_2) pontban a felülethez az x irány fölött húzott érintő meredeksége (rajz). (Másképp: az f függvény (a_1, a_2) pontbeli "pillanatnyi" változása, ha csak x-et mozgatjuk.)

  – Az l függvény grafikonja az $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ponthoz tartozó érintősík.

  – A $\nabla f(\mathbf{a}) = (\partial_1 f(\mathbf{a}),\ \partial_2 f(\mathbf{a}))$ gradiensvektor azt az irányt adja meg, amerre a legmeredekebb az emelkedés. Ez azt is jelenti, hogy merőleges a szintvonalakra.

  Hasonlóan, $-\nabla f(\mathbf{a})$ irányban legmeredekebb a lejtés, erre folyik le a víz egy lejtőn.

5. Többváltozós differenciálszámítás/2.

I. Második derivált

Legyen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

1. Előzetes fogalmak

   Ha $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenciálható, akkor az $f'(\mathbf{x}) = (\partial_1 f(\mathbf{x}),\ \partial_2 f(\mathbf{x}),\ ...,\ \partial_n f(\mathbf{x}))$ deriváltakat $\mathbf{R}^n$-beli vektoroknak tekintjük, így értelmes az $f' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ deriváltfügvény.

   Def. $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, ha $\forall i, j = 1, ..., n$ esetén a $\partial_j \partial_i f$ parciális deriváltfüggvények léteznek és folytonosak $\mathbf{R}^n$-en.

2. A második derivált értelmezése

   Def. Ha $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, akkor f *második deriváltja* egy $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ pontban az

$$f''(\mathbf{a}) := \Big\{\partial_j \partial_i f(\mathbf{a})\Big\}_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(\mathbf{a}) & \partial_2\partial_1 f(\mathbf{a}) & \dots & \partial_n\partial_1 f(\mathbf{a}) \\ \partial_1\partial_2 f(\mathbf{a}) & \partial_2^2 f(\mathbf{a}) & \dots & \partial_n\partial_2 f(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(\mathbf{a}) & \partial_2\partial_n f(\mathbf{a}) & \dots & \partial_n^2 f(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

   $n \times n$-es négyzetes mátrix. (Neve: f Hesse-mátrixa a-ban.)

3. A második derivált szimmetriája

   Young-tétel. Ha $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, akkor $\partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f \quad (\forall i, j)$.

II. A többváltozós derivált alkalmazásai

1. Közelítés Taylor-polinommal

   (i) *Elsőfokú közelítés.*

   Láttuk az első deriváltnál f legjobb lineáris közelítését: ha $\mathbf{h} \approx 0$, akkor
$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\mathbf{h} \ =: T_1(\mathbf{a}+\mathbf{h}).$$

   (ii) *Másodfokú közelítés.*

   Def. Egy $n \times n$-es A mátrix kvadratikus alakja: $A\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} \quad (\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n)$.

   Ennek segítségével: ha $\mathbf{h} \approx 0$, akkor
$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \tfrac{1}{2} f''(\mathbf{a})\mathbf{h}\cdot\mathbf{h} \ =: T_2(\mathbf{a}+\mathbf{h}),$$

   ez $f(\mathbf{a}+\mathbf{h})$ legjobb másodfokú közelítése.

2. Szélsőértékszámítás

Jó tulajdonság: a megfelelő fogalmakkal majdnem minden analóg az 1D esettel! (Kivéve a monotonitást, ami itt értelmetlen.)

(i) *Fogalmak.*

Def. Egy $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvénynek *lokális minimuma* van a-ban, ha a-nak van olyan G környezete, melyre $f(a) \leq f(x)\ \forall x \in G$.

(ii) *Feltételek.*

Tétel. Ha egy $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ függvénynek lokális szélsőértéke van $\mathbf{a}$-ban, akkor $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ (a nullvektor), azaz $\partial_i f(\mathbf{a}) = 0\ \ (\forall i = 1, .., n)$.

Tétel. Legyen egy $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ függvényre $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

– Ha $f''(\mathbf{a})$ sajátértékei > 0 $\Rightarrow$ f-nek lokális minimuma van a-ban.

– Ha $f''(\mathbf{a})$ sajátértékei < 0 $\Rightarrow$ f-nek lokális maximuma van a-ban.

Megj. Többdimenziós jelenség: ha $f''(\mathbf{a})$-nak van + és - sajátértéke is, akkor nincs szélsőérték, hanem ún. nyeregpont: egy irányban minimum és egy másik irányban maximum van.

III. Primitív függvény több változóban (potenciál)

Adott függvény minek a deriváltja? (Nem mindig van ilyen függvény.)

- **Def.** Egy $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ függvénynek $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ primitív függvénye, ha $F' = f$. Ez most a koordinátákkal azt jelenti, hogy $\partial_i F = f_i\ \ (\forall i = 1, .., n)$.
- "Ferde szimmetria".

Tétel. Egy $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha

$$\partial_j f_i = \partial_i f_j \qquad (\forall i, j = 1, .., n).$$

F kiszámítása: az egyes változók szerinti integrálással (gyakorlat).

6. Többváltozós integrál/1

I. Többváltozós Riemann-integrál

1. *Riemann-integrál téglalapon.*

(i) *Értelmezése.*

Legyen $T := [a, b] \times [c, d]$ téglalap, $f : T \to \mathbf{R}$ folytonos függvény.

Hogyan értelmezzük a grafikon alatti térfogatot? Az 1D esethez hasonlóan építjük fel, most csak Riemann-féle közelítő összegekkel.

- *Felosztás:* a T téglalapot most kis téglalapokra osztjuk fel rácshálóval. Jelölje ezeket T_{kl} $(k = 1, ..., n, \quad l = 1, ..., m)$, ahol T két oldalát n ill. m részre bontottuk. Jelölje a T_{kl}-ek oldalhosszait Δx_k és Δy_l.

  Az egyszerűség kedvéért itt is általában ekvidisztans felosztásokat fogunk tekinteni $n = m$ mellett, amiket τ_n-nel jelölünk (rajz). (Az eredmények itt is általánosíthatóak a nem ekvidisztans esetre is.)

- *Közelítő összeg:* válasszunk $(u_k, v_l) \in T_{kl}$ pontokat $(\forall k, l)$, ekkor

  $$R(f, \tau) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} f(u_k, v_l) \cdot \Delta x_k \Delta y_m.$$

  Jelölés: ezentúl $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m}$ helyett csak $\sum_{k,l}$.

- *Az integrál* a közelítő összegek határértéke lesz, ha a felosztást „minden határon túl finomítjuk". Azaz, $\int_T f$ az a szám, melyre teljesül, hogy ha (τ_n) ekvidisztans felosztások sorozata és $n \to \infty$, akkor

  $$\lim R(f, \tau_n) = \int_T f.$$

Jelölése változókkal: $\displaystyle\int_T f(x, y)\, dx\, dy.$

Rajzon: kis oszlopok térfogatainak összegével közelítjük, és ezt finomítjuk.

Gyakori jelentése (mint 1D-ban): sűrűségfüggvény összegzése.

(ii) *Kiszámítása.*

Két egyváltozós integrállal lehet, formálisan egyszerűen $\displaystyle\int_T$ helyett $\displaystyle\int_c^d \int_a^b$ írandó:

2. *Riemann-integrál más tartományon.*

(i) *Téglán:* a fentiekkel teljesen analóg, kiszámítás három egyváltozós integrállal.

(ii) *Más tartományon*, pl. körlap, gömb, sokszög. Ha $H \subset \mathbf{R}^n$ $(n = 2$ vagy $3)$ ilyen tartomány, akkor belefoglaljuk egy $T \supset H$ téglalapba/téglatestbe és T-t osztjuk fel. A közelítő összegekben viszont csak azon T_{kl}-ek szerepelnek, amelyeknek van közös részük H-val.

Fontos példa (síkon):

$$\int_H 1\,dx\,dy = \ t, \qquad \text{ahol } t \text{ jelöli } H \text{ területét.}$$

II. Felületi integrál

1. *Sima felületek.*

Def. Legyen $T \subset \mathbf{R}^2$ téglalap, $h \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$, és $S \subset \mathbf{R}^3$ olyan halmaz, melyre h bijekció T és S között. Ekkor S-et *sima felületnek* hívjuk (minden pontjában van érintősík).

2. *A felszín értelmezése* sima felületre.

Tekintsük T egy τ felosztását kis T_{kl} téglalapokra, ezek képe S-en egy görbe vonalú rácsháló.

E háló elemeit helyettesítsük olyan P_{kl} paralelogrammákkal, melyek oldalai

- érintővektor irányúak,
- hosszuk = két görbe oldal ívhossza.

Jelölje P_{kl} területét ΔA_{kl}, ekkor a felszín közelítő összege: $R(S, \tau) := \sum\limits_{k,l} \Delta A_{kl}$.

Def. Az S sima felület *felszíne* az az A szám, melyre teljesül, hogy ha (τ_n) ekvidisztans felosztások sorozata és $n \to \infty$, akkor

$$\lim R(S, \tau_n) = A.$$

3. *Felületi integrál.*

Legyen $f : S \to \mathbf{R}$ folytonos függvény. Tekintsük a fenti eljárást, és válasszunk y_{kl} pontokat a T_{kl} téglalapok képéből. Legyen

$$R(f, S, \tau) := \sum_{k,l} f(y_{kl}) \cdot \Delta A_{kl}.$$

Def. $\displaystyle\int_S f\,dA$ az a szám, melyre teljesül, hogy ha (τ_n) ekvidisztans felosztások sorozata és $n \to \infty$, akkor

$$\lim R(f, S, \tau_n) = \int_S f\,dA.$$

Jelentése: sűrűségfüggvény összegzése, pl. felület össztömege/össztöltése.

Példa: konstans integrálja.

- Ha $f \equiv 1$, akkor
$$\int_S 1\,dA = \lim \sum_{k,l} \Delta A_{kl} = A,$$
ahol A jelöli az S felület felszínét.

- Hasonlóan, ha $c \in \mathbf{R}$ állandó, akkor $\displaystyle\int_S c\,dA = c \cdot A$. Például:

  legyen S egy 1 oldalú kocka és $c = 3$. Ekkor $A = 6$, így $\displaystyle\int_S 3\,dA = 3 \cdot 6 = 18.$

7. Többváltozós integrál/2; komplex számok

I. Vonalintegrál

1. <u>*A vonalintegrál értelmezése*</u>

   Legyen $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$, melyre φ' létezik és folytonos $[a,b]$-n, valamint legyen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ folytonos függvény. Jelölje Γ a φ képét.

   Szokásos feltevés: φ injektív, azaz a görbe nem metszi önmagát. Kivétel: megengedhetjük, hogy $\varphi(a) = \varphi(b)$, ekkor Γ-t *zárt görbének* hívjuk.

Def. *f vonalintegrálja* Γ mentén: $$\int_\Gamma f := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

A vonalintegrál fizikai jelentése: erő munkája egy tömegpont görbe mentén való mozgatása során.

2. <u>*A vonalintegrál kiszámítása Newton-Leibniz-szabállyal*</u>

   Tétel. Ha f-nek létezik $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ primitív függvénye, akkor
   $$\int_\Gamma f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

   Gyakran vizsgáljuk zárt görbén a vonalintegrált. A fenti tételből ekkor $\varphi(a) = \varphi(b)$ miatt nulla lesz az integrál:

   Áll. Ha f-nek létezik $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ primitív függvénye, akkor zárt görbén $\displaystyle\int_\Gamma f = 0.$

   Igazolható ennek megfordítása is: ha bármely zárt görbére $\int_\Gamma f = 0$, akkor f-nek van primitív függvénye.

   Megj.: Láttuk, hogy egy $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha
   $$\partial_j f_i = \partial_i f_j \qquad (\forall i, j = 1, .., n).$$
   Ez a feltétel tehát

   – garantálja a Newton-Leibniz-szabály érvényességét;

   – ekvivalens azzal, hogy bármely zárt görbére $\displaystyle\int_\Gamma f = 0.$

II. Komplex számok.

1. <u>*Értelmezésük.*</u>

   - Legyen $i := \sqrt{-1}$ egy új, ideális elem.
     Szemléltetés: a síkon $\mathbf{R}$ az x tengely, i a rá merőleges egységvektor.

- **Def.** A *komplex számok* halmaza $\mathbf{C} := \{a + ib : \ a, b \in \mathbf{R}\}$.
  (A fenti szemléltetéssel a sík vektorai, ún. komplex számsík.)

2. *Műveletek*: $+$ és $\cdot$ eredménye is komplex szám, úgy számolunk, mint valósakkal, és felhasználjuk, hogy $i^2 = -1$.

3. *Polárkoordináták*: mint korábban az $\mathbf{R}^2$ síkon.

   Ha $z = a + ib \neq 0$, akkor $\exists!\ r > 0$ és $\varphi \in [0, 2\pi) : \quad a = r\cos\varphi, \ \ b = r\sin\varphi$.

   Ezzel $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

4. *Komplex elemi fügvények*.

   Cél: ha $z \in \mathbf{C}$, értelmezni e^z, $\sin z$, $\cos z$ értékét. Szemléletesen nem lehet, de hatványsorral igen, és így a szokásos azonosságok is érvényesek lesznek.

   Def. Ha $z \in \mathbf{C}$, $\quad e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   Az elemi függvények kapcsolata:

   - **Áll.** $e^{iz} = \cos z + i\sin z \qquad (\forall z \in \mathbf{C})$.
   - Következmények.

     1. köv.: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (\forall\varphi \in \mathbf{R})$.
     Azaz, az egységkörvonal pontjai $e^{i\varphi}$ alakban írhatók. Ha tehát $\varphi \in \mathbf{R}$, akkor $|e^{i\varphi}| = 1$ és $e^{i\varphi}$ az egységkörvonal φ szögű pontja.
     Néhány spec. eset: $e^{i\pi} = -1$, $e^{2i\pi} = e^0 = 1$.

     2. köv.: $e^{-iz} = \cos z - i\sin z, \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

5. *Polárkoordináták exponenciális alakja*. A fenti 1. köv. szerint:
   $$z = re^{i\varphi}.$$

   Következmények:

   - A komplex szorzás exponenciális alakja: ha $z = re^{i\varphi}$ és $w = \varrho e^{i\theta}$, akkor
     $$zw = r\varrho\, e^{i(\varphi+\theta)}.$$
   - Spec. eset: $z^2 = re^{i2\varphi}$, és ezt ismételve $z^n = re^{in\varphi}$ $(n \in \mathbf{N})$.

8. Elemi vektorszámítás

1. *Bevezetés.* Az újabb deriváltfogalmak formálisan a $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ operátorból származtathatók. Az "operátor" azt jelenti, hogy függvényhez függvényt rendel: $f \mapsto \nabla f$.

2. *Alapfogalmak.*

   (i) *Differenciáloperátorok.* Legyen $f := (f_1, f_2, ..., f_n) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ adott függvény, melyre $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$.

   - *f divergenciája:*

   $$\operatorname{div} f := \nabla \cdot f := \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + ... + \partial_n f_n.$$

     Ekkor $\operatorname{div} f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ számértékű függvény.

   - *f rotációja:*

     – ha $n = 3$: $$\operatorname{rot} f := \nabla \times f := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ -(\partial_1 f_3 - \partial_3 f_1) \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

     Ekkor $\operatorname{rot} f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vektorértékű függvény.

     – ha $n = 2$: $\operatorname{rot} f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$ (az előbbi 3. koordináta).
     Ekkor $\operatorname{rot} f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ számértékű függvény.

   (ii) *Fluxus értelmezése.*

   - Legyen S sima felület. S-et *zárt felületnek* hívjuk, ha a teret két (egy belső és egy külső) komponensre osztja. (Pl. gömbfelület.) Egy $x \in S$ pontbeli *külső normálvektor* az x-beli érintősíkra merőleges, kifelé mutató egységvektor, jele $\nu(x)$. Ez meghatároz egy $\nu : S \to \mathbf{R}^3$ függvényt.
   - Tekintsünk egy $f \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ vektormezőt. Az egész S felületen az áthaladó erővonalak S-re merőleges összmennyisége

   $$\Phi_f := \int_S f \cdot \nu,$$

     amit *fluxusnak* hívunk.

3. *A differenciáloperátorok kapcsolata integrálokkal.*

   (i) *Rotáció és vonalintegrál.* Legyen $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. A korábban látottakból következik: $\operatorname{rot} f = 0 \;\Leftrightarrow\;$ bármely zárt görbére $\displaystyle\int_\Gamma f = 0$.

   Általánosabban:

   Stokes-tétel: legyen $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ vektormező, Γ pozitív irányítású zárt görbe, D pedig Γ belseje. Ekkor

   $$\int_D \operatorname{rot} f = \int_\Gamma f.$$

(ii) *Divergencia és felületi integrál.*

Gauss-Osztrogradszkij-tétel: legyen $f \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ vektormező, S zárt sima felület, D pedig S belseje. Ekkor

$$\int_D \operatorname{div} f = \int_S f \cdot \nu.$$

Megjegyzés: $\operatorname{div} f = 0 \Leftrightarrow$ bármely zárt felületen $\displaystyle\int_S f \cdot \nu = 0.$

Fizikai jelentés. A fluxus 0 $\Leftrightarrow$ az S-en ki- és beáramló összmennyiség azonos (anyagmegmaradás).

9. Differenciálegyenletek/1.

1. *Fogalmak, bevezetés.*

   Differenciálegyenlet: ismeretlen függvény és bizonyos deriváltjai közti kapcsolatot leíró egyenlet.

   A differenciálegyenlet *közönséges* (KDE), ha az ismeretlen függvény egyváltozós;
   parciális (PDE), ha az ismeretlen függvény többváltozós.

   A differenciálegyenlet *rendje:* a legmagasabb szereplő derivált rendje.

   Szokásos feltevés, hogy $y : I \to \mathbf{R}$ (intervallumon értelmezett, valós értékű);

2. *Differenciálegyenletek eredete, felállítása.*

   Példák:

   - Baktériumok szaporodása (biológiai modell):
   $$y'(x) = Ky(x),$$
   ahol $K > 0$ a szaporodási ráta.
   - Sóoldat koncentrációjának változása:
   $$y'(t) = 0,6 - 0,2\,y(t),$$
   ami egy elsőrendű KDE.

3. *Az $y' = y$ KDE megoldása.*

   Ismert, hogy $y(x) = e^x$ ilyen függvény. Mi az összes megoldás?

   - *Levezetése.* Feltevés: $y(x) \neq 0$ egy I intervallumon. Ekkor
   $$y'(x) = y(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{integrálva:} \quad \ln|y(x)| = x + c,$$
   ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstans (elég az egyik oldalon)
   $$\Leftrightarrow \quad |y(x)| = e^{x+c} = e^c e^x, \text{ ahol } c \in \mathbf{R} \text{ tetsz.}$$
   Itt $c_1 := e^c$ megfeleltetéssel: $c \in \mathbf{R}$ tetsz. $\Leftrightarrow$ $c_1 > 0$ tetsz.
   $$\Leftrightarrow \quad |y(x)| = c_1 e^x, \text{ ahol } c_1 > 0 \text{ tetsz.}$$
   $$\Leftrightarrow \quad y(x) = c_2 e^x, \text{ ahol } c_2 = \pm c_1 \neq 0 \text{ tetsz.}$$
   Végül: itt $c_2 = 0$ is jó, hisz $y(x) \equiv 0$ is megoldás. A c_2 helyett c is írható, így az általános megoldás:
   $$y(x) = c\,e^x, \text{ ahol } c \in \mathbf{R} \text{ tetszőleges konstans.}$$
   - *Levezetés "dx" formalizmussal.* Fent a jobb oldalon $\int 1\,dx = x + c$ volt. Észrevétel: az y-ra vonatkozó integrál lényege az volt, hogy a külső függvényre $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$ (itt nem kellett a $+c$). Ugyenezek elvégezhetők "dx" formalizmussal is:
   $$\frac{dy}{dx} = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx \quad \Leftrightarrow \quad \text{integrálva:} \quad \ln|y| = x + c, \text{ ahol } c \in \mathbf{R}.$$
   Innen a fenti módon kapjuk, hogy $y = c\,e^x$, ahol $c \in \mathbf{R}$.

4. *Szétválasztható KDE:* $\qquad y' = h(y)g(x),$

ahol h, g adott folytonos függvények. A fenti formalizmus most is jó.

1. lépés. Ha h-nak c zérushelye, azaz $h(c) = 0$, akkor az $y \equiv c$ konstansfüggvény megoldás, mert $y' = 0$, és $h(y) \equiv 0$ miatt a jobb oldal is 0.

2. lépés. Feltesszük, hogy $h(y) \neq 0$ egy I intervallumon. Ekkor

$$\frac{dy}{dx} = h(y)g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + c, \text{ ahol}$$

$c \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstans.

Integrálás után egy $H(y) = G(x) + c$ egyenletet kapunk, amiből ki kell fejeznünk y-t x függvényeként.

Gyakori speciális eset: $y' = h(y)$. Ez a fenti típusú, ha $g(x) := 1$.

Példa: a baktériumok szaporodása: $y' = Ky$.

1. Konstans megoldás: $y \equiv 0$ (ha nincs bakt., de ez nem érdekes).
2. Érdemi eset: ha $y > 0$. Ekkor:

$$\frac{dy}{dx} = Ky \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = Kdx \quad \Leftrightarrow \quad \text{integrálva:} \quad \ln y = Kx + c, \text{ ahol}$$

$c \in \mathbf{R}$ tetsz.

(most nem kell $\ln|y|$, mert $y > 0$)

$\Leftrightarrow \quad y = e^c e^{Kx} = c_1 e^{Kx}$, ahol $c_1 > 0$ tetsz. A c_1 helyett c is írható, így:

$$\boxed{y(x) = c\, e^{Kx}, \qquad \text{ahol } c > 0 \text{ tetszőleges.}}$$

A K arányossági tényező tehát a megoldásban a kitevő szorzója lesz.

10. Differenciálegyenletek/2.

1. <u>*Másodrendű lineáris KDE.*</u>

   Ún. állandó együtthatós homogén egyenletekkel foglalkozunk:

   $$\text{(H)} \qquad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0,$$

   ahol $a, b, c \in \mathbf{R}$ állandók, $a \neq 0$. (A modellekben t időt jelent.)

   (a) <u>*Az általános megoldás*</u>

   - *A megoldások szerkezete.*

     Áll. Legyen y_1 és y_2 a (H) egyenlet két független megoldása, azaz nem egymás konstansszorosai. Ekkor (H) általános megoldása:

     $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{R} \text{ tetszőleges}).$$

   - *A megoldások előállítása.* Tekintsük az

     $$\text{(K)} \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

     ún. *karakterisztikus egyenletet* (másodfokú).

     (i) Ha (K)-nak két valós gyöke van, λ_1 és λ_2, akkor

     $$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{R} \text{ tetsz.})$$

     (ii) Ha (K)-nak egy valós gyöke van, λ, akkor

     $$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{R} \text{ tetsz.})$$

     (iii) Ha (K)-nak nincs valós gyöke, akkor két komplex gyök van: $\lambda_{1,2} := \alpha \pm i\beta$. Ekkor a valós értékű megoldások

     $$y(t) = c_1\, e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2\, e^{\alpha t} \sin \beta t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{R} \text{ tetsz.}).$$

   (b) <u>*Példák*</u> (a rezgések elméletéből)

   - <u>*Harmonikus rezgőmozgás.*</u>

     Több modellben (rugó, inga) a kitéréssel arányos ellenerő hat, így a mozgásegyenlet:

     $$\boxed{my''(t) = -Dy(t), \qquad \text{ahol } m, D > 0 \text{ adott állandók.}}$$

     Átrendezve: $\qquad my''(t) + Dy(t) = 0.$

     (i) *Az általános megoldás.*

     Karakterisztikus egyenlet: $\quad$ (K) $\quad m\lambda^2 + D = 0,$

     gyökei: $\quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{D}{m}} = \pm i\omega$, ahol $\omega := \sqrt{\frac{D}{m}}$ (ún. frekvencia),

     megoldás:

     $$\boxed{y(t) = c_1\, \cos \omega t + c_2\, \sin \omega t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{R} \text{ tetsz.})}$$

Megj.: maga az egyenlet is átírható a frekvenciával:

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0.$$

(ii) *A megoldás más alakjai.*

Írjuk fel a $(c_1, c_2) \in \mathbf{R}^2$ pontokat poláralakban:
$c_1 = A\cos\varphi_0,\ \ c_2 = A\sin\varphi_0,\quad$ ahol $A \geq 0$ és $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$.
Ekkor $y(t) = A\cos\varphi_0\,\cos\omega t + A\sin\varphi_0\,\sin\omega t = A\cos(\omega t - \varphi_0)$ (addíciós tételből), azaz:

$$y(t) = A\cos(\omega t - \varphi_0) \qquad (A \geq 0,\quad \varphi_0 \in [0, 2\pi) \text{ tetsz.})$$

Ez tehát egy periodikus rezgés; az A amplitúdó és φ_0 fáziseltolódás tetsz. lehet, de az ω frekvenciát az egyenlet meghatározza.

További alak: mivel a sin- és cos-hullámok egymás időbeli eltoltjai,

$$y(t) = A\sin(\omega t - \theta_0) \qquad (A \geq 0,\quad \theta_0 \in [0, 2\pi) \text{ tetsz.})$$

Megj.: ezek az új alakok más egyenletekre is bejönnek, ha (K) gyökei komplexek, hisz ekkor
$y(t) = e^{\alpha t}(c_1\,\cos\beta t + c_2\,\sin\beta t) = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t - \varphi_0)$.

- *Csillapított rezgőmozgás.*

Súrlódás is hat, így a mozgásegyenlet:

$$my''(t) = -Dy(t) - sy'(t), \quad \text{ahol } m, D, s > 0 \text{ adott állandók.}$$

Átrendezzük és osztunk m-mel, legyen $\frac{s}{m} =: 2k$ és ω mint fent, ekkor

$$y''(t) + 2ky'(t) + \omega^2 y(t) = 0.$$

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0$,
gyökei: $\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$.

Esetek:

(i) Kis csillapítás: $k < \omega$.
Gyökök: $\lambda_{1,2} = -k \pm i\sqrt{\omega^2 - k^2} \in \mathbf{C} \quad (\alpha = -k$ és $\beta = \sqrt{\omega^2 - k^2})$.

Ekkor a korábbiak alapján

$$y(t) = Ae^{-kt}\cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}\ t - \varphi_0).$$

Ez is rezgés, de amplitúdója Ae^{-kt}, ami 0-hoz tart ("lecseng").

(ii) $k = \omega$ eset.
Gyök: $\lambda = -k$ egyszeres,

$$y(t) = c_1 e^{-kt} + c_2 t e^{-kt}.$$

(iii) Nagy csillapítás: $k > \omega$.
Gyökök: $\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$ valósak, így

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

A (ii)-(iii) esetekben nincs rezgés.

11. Differenciálegyenletek/3.

I. Fáziskép: másodrendű KDE megoldásainak ábrázolása

Ebben a fejezetben $x(t)$ jelöli a megoldást és $\dot{x}(t)$ a deriváltját (fizikai tradíció).

1. <u>*A fáziskép és fázissík fogalma.*</u>

   Cél: ábrázolni a KDE összes $x(t)$ megoldását; látható legyen $x(t)$ és $\dot{x}(t)$ kapcsolata.

   Fázissík: A sík, x-nek és $\dot{x}$-nak elnevezett tengelyekkel. Ezen a megoldások $x(t)$ értékeit és $\dot{x}(t)$ deriváltjait tüntetjük fel, azaz az $(x(t),\ \dot{x}(t))$ pontokat, ahol t változik: egy megoldáshoz így egy görbét rendelünk.

   Fáziskép: A fentiekben kapott görbék összessége (görbesereg), ha az összes megoldást szerepeltetjük.

2. <u>*A harmonikus rezgőmozgás fázisképe.*</u>

   (a) *Példa.* Ha $m = 1$ és $D = 1$, akkor az egyenlet:

   $$\ddot{x}(t) + x(t) = 0.$$

   Ekkor $\omega = 1$, így az általános megoldás:

   $$x(t) = A\cos(t - \varphi_0),$$

   ennek deriváltja:

   $$\dot{x}(t) = -A\sin(t - \varphi_0)$$

   (ahol $A \geq 0, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tetsz.)

   - *A fáziskép.* Adott megoldásnál hol vannak az $(x(t),\ \dot{x}(t))$ pontok?
     Észrevétel:

     $$x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 = A^2 \ = \text{állandó}.$$

     Így az egyes megoldásokhoz tartozó görbék *körvonalak.*

   (b) *Az általános eset, energiamegmaradás.*

   Az egyenlet:

   $$m\ddot{x}(t) + Dx(t) = 0.$$

   Ekkor az egyes megoldásokhoz tartozó görbék most ellipszisek:

   $$\tfrac{1}{2}\,Dx(t)^2 + \tfrac{1}{2}\,m\dot{x}(t)^2 = \text{állandó}.$$

   Itt a második tag a mozgási energia; az első tag rugóval mozgatott test esetén a rugóenergia, inga esetén (amikor $D = \frac{mg}{\ell}$) a helyzeti energia. Az összeg állandósága tehát az *energiamegmaradást* fejezi ki. A fázisképen látható görbék energiaszintek, a vizsgált test mozgása rögzített energiaszinten történik.

II. Két egyszerűbb parciális differenciálegyenlet (PDE).

PDE: többváltozós függvényt keresünk.

Gyakori eset: az egyik változó az idő (t), a többi a térbeli helyzet (térváltozó, pl. ha csak egy van: x; lehet több is, x, y stb.)

1. *A rezgő húr egyenlete (egy térváltozós hullámegyenlet).*

   Jelölje t az időt, x egy húr pontjait, és $u(x,t)$ a húr kitérését a rezgés során az x pontban és t időpillanatban. Ha nincs külső erő, levezethető, hogy az u függvény teljesíti az alábbi egyenletet:

   $$\text{(R)} \qquad \partial_t^2 u(x,t) = v^2 \cdot \partial_x^2 u(x,t),$$

   ahol $v > 0$ állandó. Ennek általános megoldása:

   $$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt).$$

2. *A hővezetés egyenlete.*

   Jelölje ismét t az időt, x egy rúd pontjait, de most $u(x,t)$ a hőmérsékletet az x pontban és t időpillanatban. Ha nincs külső hőforrás, levezethető, hogy alkalmas mértékegységgel

   $$\text{(HV)} \qquad \partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t).$$

   Nevezetes megoldások:

   $$u(x,t) = e^{-k^2 t} \cos kx \quad \text{és} \quad u(x,t) = e^{-k^2 t} \sin kx \quad (k \in \mathbf{R} \text{ állandó}).$$